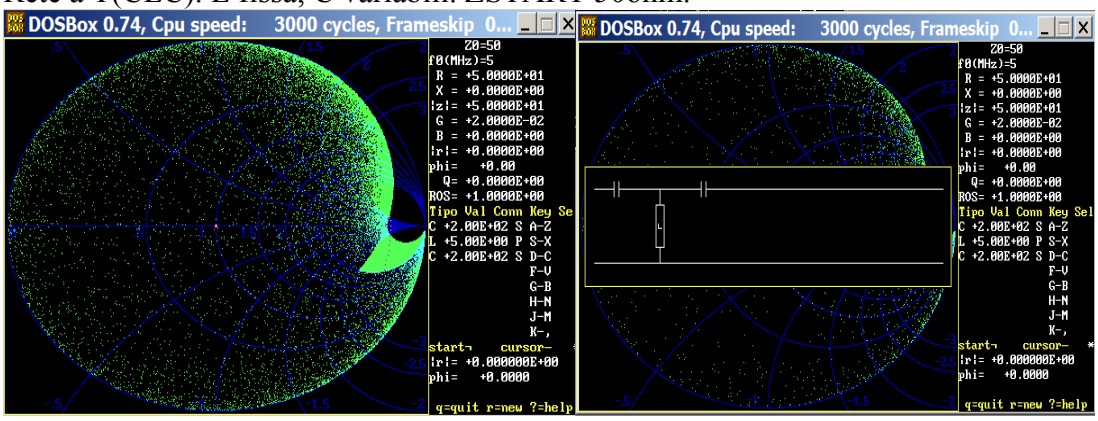
Reti per l’adattamento dell’impedenza: le differenti topologie.

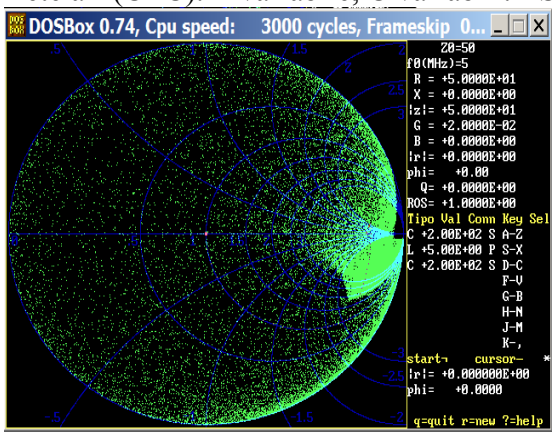
Giorgio Fontana. IN3IEX. Giugno 2011.

Frequenza 5 MHz. Capacità 200pF +- 95%. Induttanza 5uH fissa o +-95%. Luogo delle impedenze complesse raggiungibili (punti verdi) a partire da 50 ohm resistivi con la rete elettrica indicata. Trattandosi di simulazione Montecarlo, tutta l’area coperta da punti è raggiungibile.
L’impedenza del carico dovrà essere complessa coniugata di quella generata dalla rete.

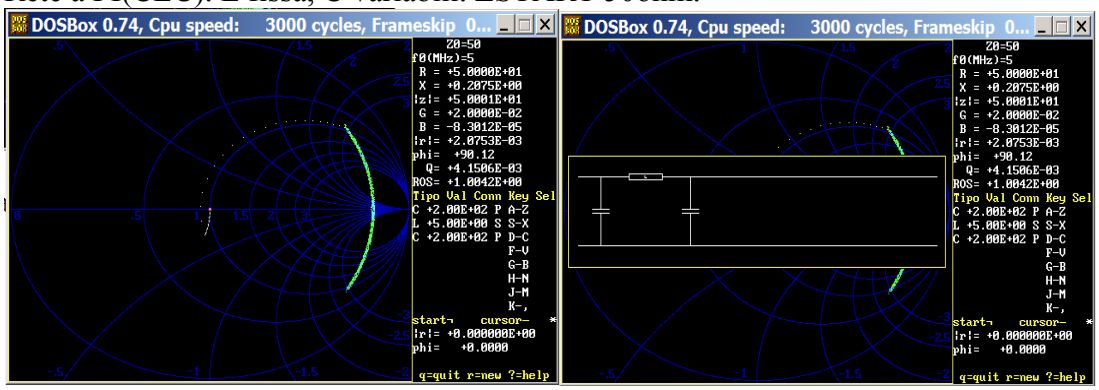
Rete a T(CLC). L fissa, C variabili. ZSTART 50ohm.



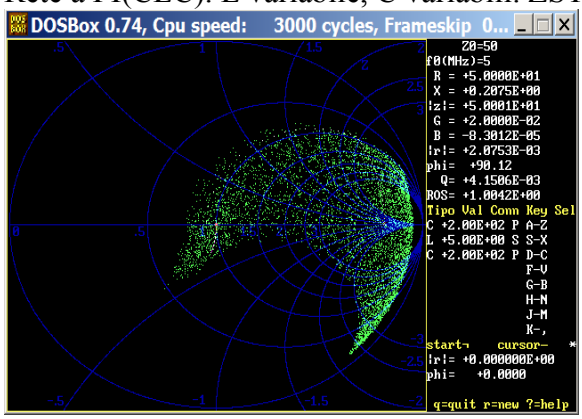
Rete a T(CLC). L variabile, C variabili. ZSTART 50ohm.



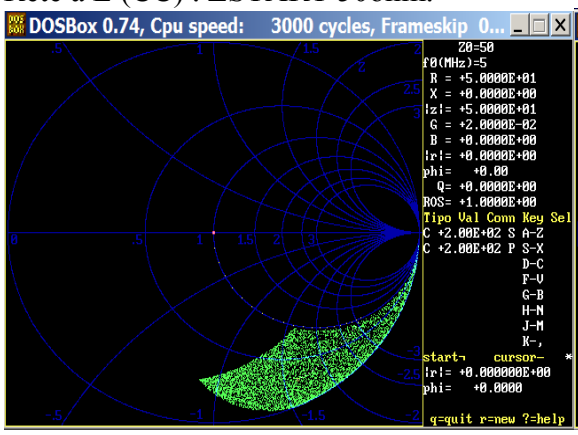
Rete a PI(CLC). L fissa, C variabili. ZSTART 50ohm.

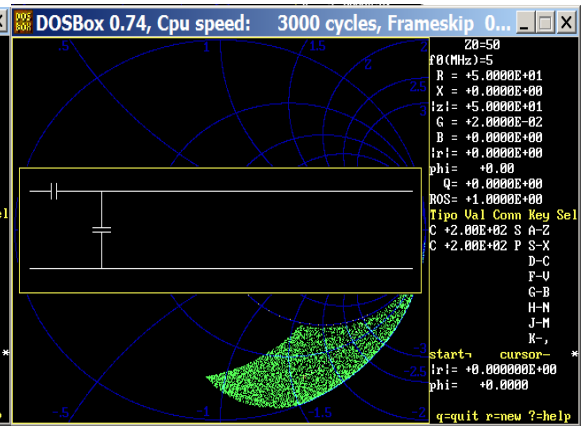


Rete a PI(CLC). L variabile, C variabili. ZSTART 50ohm.

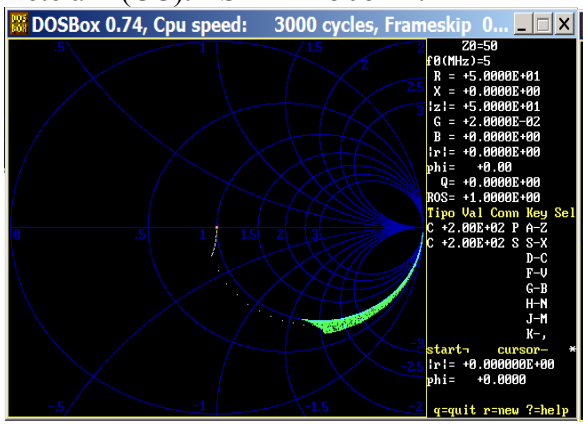


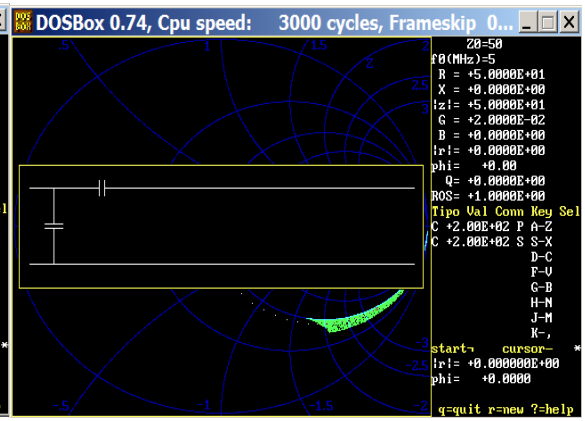
Rete a L (CC) . ZSTART 50ohm.



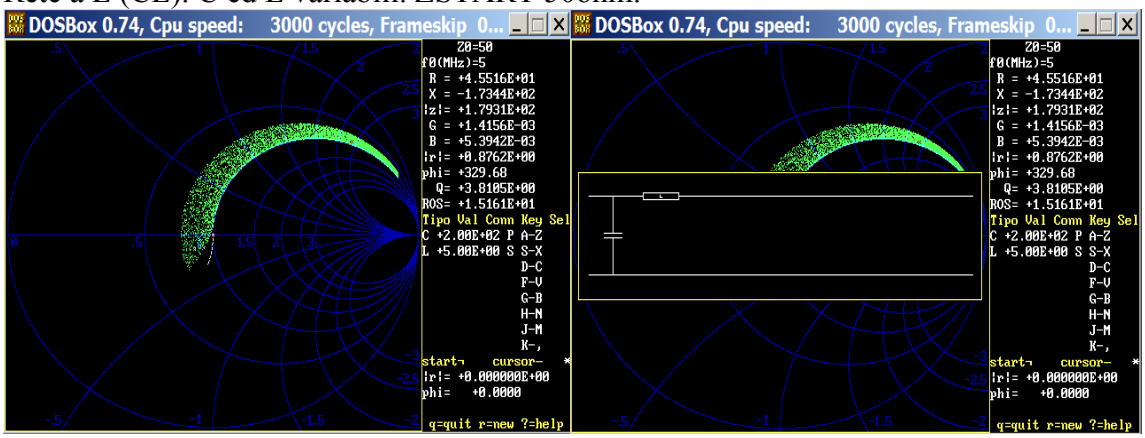


Rete a L (CC). ZSTART 50ohm.

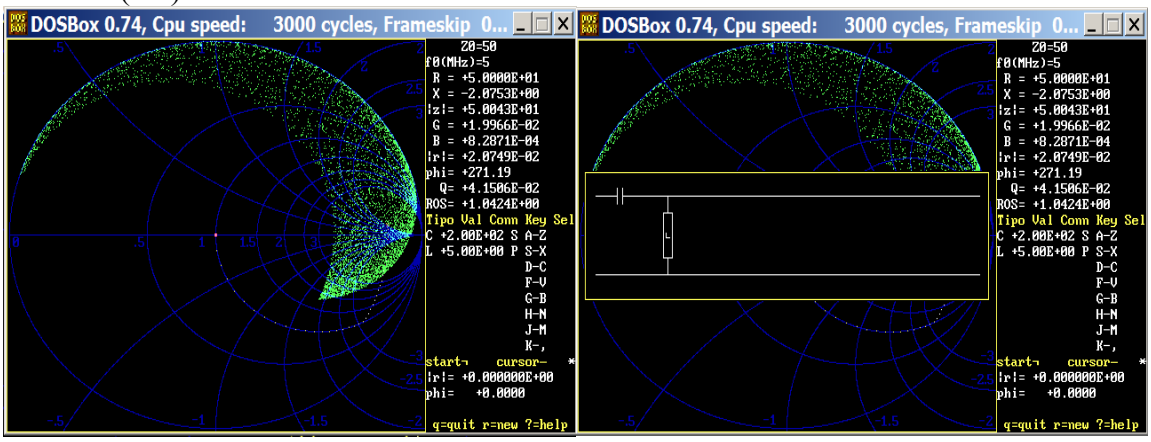




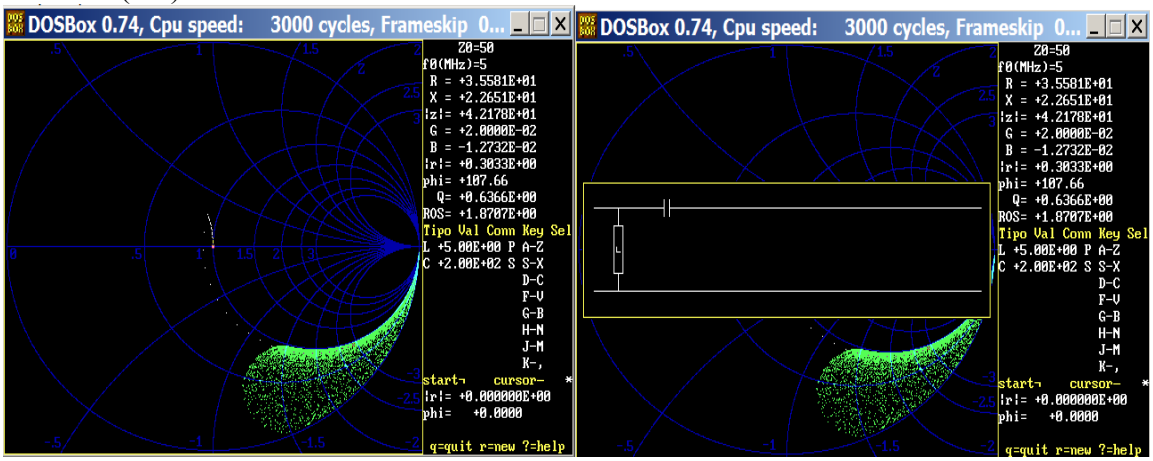
Rete a L (CL). C ed L variabili. ZSTART 50ohm.



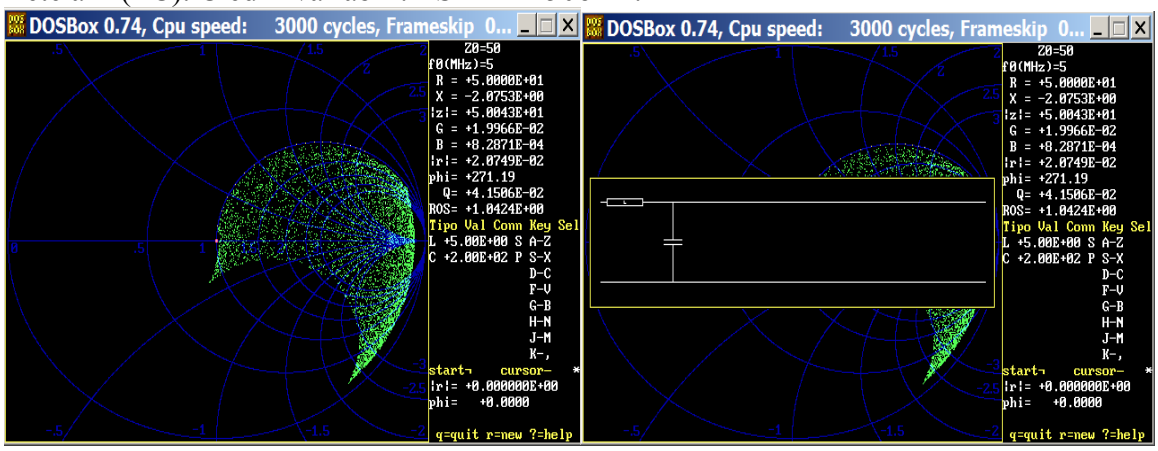
Rete a L (CL). C ed L variabili. ZSTART 50ohm.



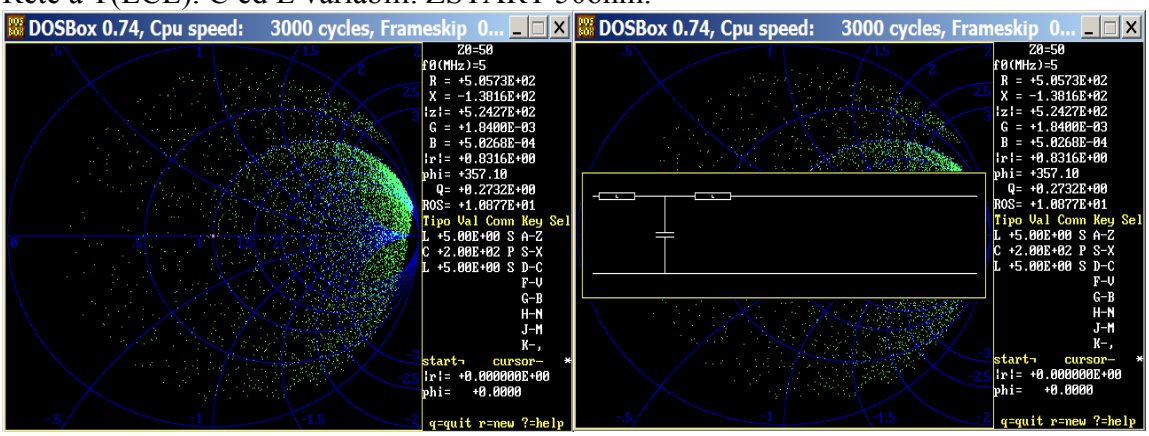
Rete a L (LC). C ed L variabili. ZSTART 50ohm.



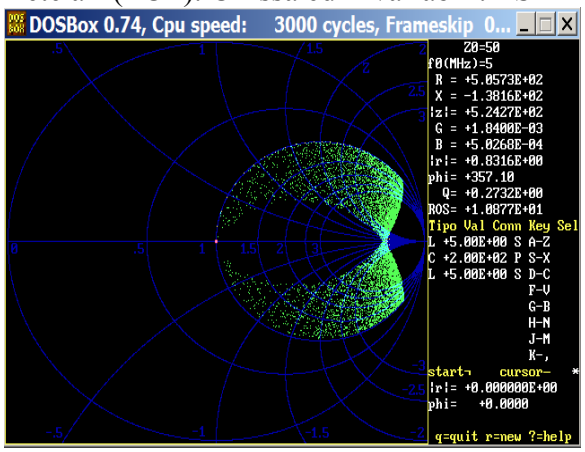
Rete a L (LC). C ed L variabili. ZSTART 50ohm.



Rete a T(LCL). C ed L variabili. ZSTART 50ohm.



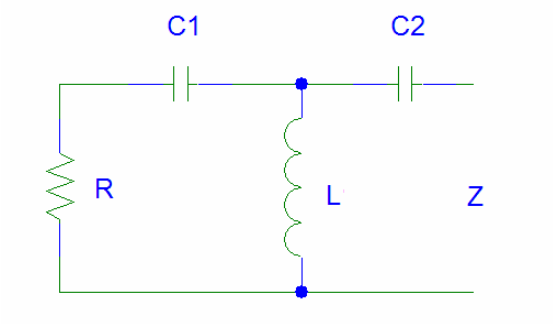
Rete a T(LCL). C fissa ed L variabili. ZSTART 50ohm.



Conclusione: la configurazione a T CLC è da preferirsi nella realizzazione di adattatori di impedenza universali e di accordatori di antenna.
Il calcolo e la rappresentazione grafica è stata effettuata con RFMATCH e DOSBOX.
http://laacg1.lanl.gov/laacg/c-on-line/sheets/rfmatch.html
http://www.dosbox.com/download.php?main=1

→continua

Il calcolo numerico e l'esperimento mostrano che le reti di adattamento più versatili sono le reti a T. Calcoliamo ora l'impedenza *Z* di una rete a T terminata su una resistenza *R*.



L'impedenza della serie *R* e *C1* è:

$$R+\frac{1}{j\omega C1}$$

Usando la regola del parallelo *(Z1//Z2 = Z1Z2/(Z1+Z2)* si mette in parallelo l'impedenza di cui sopra a quella di *L*:

$$\frac{j\omega L\left(R+\frac{1}{j\omega C1}\right)}{R+\frac{1}{j\omega C1}+j\omega L}$$

Infine calcoliamo *Z* ponendo in serie l'impedenza di *C2*:

$$Z=\frac{j\omega L\left(R+\frac{1}{j\omega C1}\right)}{R+\frac{1}{j\omega C1}+j\omega L}+\frac{1}{j\omega C2}$$ ora siccome *j*j=-1*:

$$Z=\frac{j\omega LR+\frac{L}{C1}}{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C1}\right)}+\frac{1}{j\omega C2}$$

Il segno meno nel denominatore ci ricorda una condizione di risonanza ($\omega r^2=1/LC1$) che annulla il termine tra parentesi:

$$Zr=\frac{j\omega rLR+\frac{L}{C1}}{R}+\frac{1}{j\omega rC2}=j\omega rL+\frac{L}{RC1}+\frac{1}{j\omega rC2}=\frac{L}{RC1}+j\left(\omega rL-\frac{1}{\omega rC2}\right)=\frac{L}{RC1}+j\left(\frac{1}{\sqrt{LC1}}L-\frac{\sqrt{LC1}}{C2}\right)$$

$$Zr=\frac{L}{RC1}+j\left(\sqrt{\frac{L}{C1}}-\sqrt{\frac{LC1}{C2^2}}\right)=\frac{1}{R}\frac{L}{C1}+j\left(1-\frac{C1}{C2}\right)\sqrt{\frac{L}{C1}}$$

Il segno meno attrae di nuovo l'attenzione, e se *C1=C2=C* si ottiene:

$Zr_{C1=C2} = \frac{1}{R} \cdot \frac{L}{C}$; $\omega_r^2 = 1/(LC)$

Perciò la rete a T alla risonanza e con $C1=C2$ converte impedenze reali in impedenze reali e data ω_r il sistema di due equazioni di cui sopra si potrà risolvere per esempio con due incognite L e C ed i parametri R, Zr e ω_r.

Più in generale il termine $\left(1-\frac{C1}{C2}\right)\sqrt{\frac{L}{C1}}$ è nullo per $C1=C2$, positivo se $C2>C1$ e negativo se $C2<C1$. Questo fatto permette di controllare la parte immaginaria dell'impedenza.

Sono interessanti i casi limite con $C2 \rightarrow \infty$ (corto circuito), per cui la parte immaginaria dell'impedenza tende a coincidere con quella di L, mentre per $C2 << C1$, la parte immaginaria dell'impedenza tende ad essere quella di $C2$.

Se poi si impone $Z_{rC1=C2}=R$, si ottiene $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$, che e' l'unica l'impedenza reale trasformata in se stessa dalla rete, alla frequenza $\omega_r^2 = 1/(LC)$.

L'espressione di $Zr_{C1=C2}$ è una diretta conseguenza della scelta effettuata per ω_r.

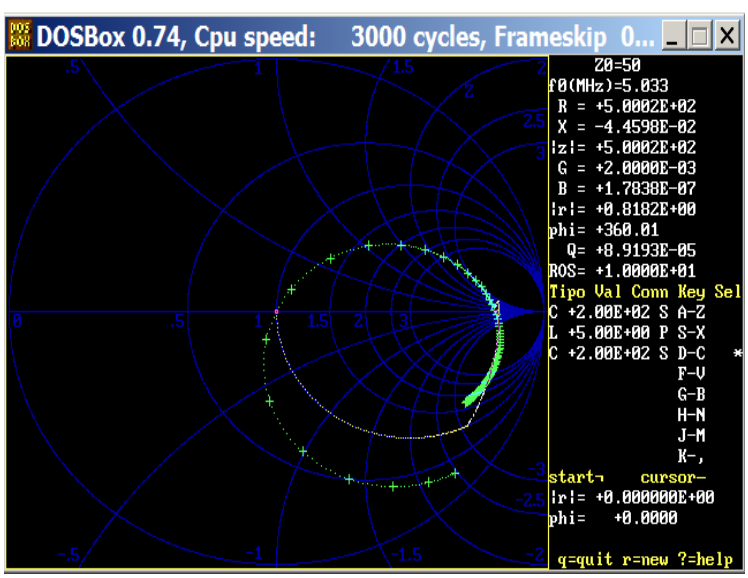
Infatti è sempre possibile risolvere l'espressione:

$$Z = \frac{j\omega LR + \frac{L}{C1}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C1}\right)} + \frac{1}{j\omega C2}$$

, imponendo $Z=R$, qualunque sia R, e $C1=C2=C$ per poi ricavare ω_r. In tal caso si trova con facili passaggi:

$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{2LC - R^2C^2}}$ (NB: dipende da R) come si troverà anche più avanti con una diversa procedura. Le due formule trovate fino ad ora diventano uguali per $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Le due frequenze di risonanza fino ad ora trovate per la rete a T appaiono anche mediante analisi con la carta di Smith:



Infatti, utilizzando i valori: L=5 uH e C1=C2=200 pF, si trova che la rete a T trasforma l'impedenza puramente resistiva 50 ohm nell'impedenza puramente resistiva 50 ohm alla frequenza di 3.65 MHz. La stessa identica rete trasforma anche l'impedenza puramente resistiva 50 ohm nell'impedenza puramente resistiva 500 ohm alla frequenza $\omega_r^2=1/(LC)$ → 5.0325 MHz. Alla stessa frequenza la rete trasforma l'impedenza puramente resistiva 500 ohm nell'impedenza puramente resistiva 50 ohm.
Il diagramma mostrato nella figura precedente rappresenta lo sweep in frequenza da 3 MHz a 10 MHz, con marker step di 0.1 MHz. L'estremo più basso del grafo è associato alla frequenza di 3 MHz.
Inoltre si osserva che alla frequenza $\omega_r^2=1/(LC)$ →5.0325 MHz, la stessa identica rete trasforma l'impedenza puramente resistiva 158 ohm in 158 ohm puramente resistivi. Ma anche trasforma l'impedenza puramente resistiva 25 ohm in 25 ohm puramente resistivi alla frequenza di 3.57 MHz (usare la formula più generale per la frequenza di risonanza).
Infine si può notare che con R, L, C1, C2 finiti e non nulli, il limite per ω tendente a infinito è Z=R, perciò percorrendo il grafo della figura precedente in senso orario, lo stesso grafo ripasserà per il centro della carta di Smith all'aumentare della frequenza.
Tutto questo dimostra le straordinarie capacità di trasformazione (e non…) di impedenza offerte da una specifica rete a T simmetrica e a parametri volutamente fissi.

Cerchiamo ora di generalizzare il risultato precedente con l'obiettivo di trovare formule esatte e regole di progettazione.
Risolviamo quindi la:

$$Z=\frac{j\omega LR+\frac{L}{C1}}{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C1}\right)}+\frac{1}{j\omega C2}$$ imponendo solamente $Z=Rout$ (resistiva) per poi ricavare ω_r.

$$Ro=\frac{j\omega LR+\frac{L}{C1}}{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C1}\right)}+\frac{1}{j\omega C2}=\frac{-\omega^2 LRC2+j\omega L\frac{C2}{C1}+R+j\omega L-\frac{j}{\omega C1}}{j\omega RC2-\omega LC2^2+\frac{C2}{C1}}$$

$$-\omega^2 LRC2+j\omega L\left(1+\frac{C2}{C1}\right)+R-\frac{j}{\omega C1}-j\omega RRoC2+\omega^2 RoLC2-Ro\frac{C2}{C1}=0$$

questa equazione si separa in due equazioni, una per la parte immaginaria ed una per la parte reale. L'equazione della parte immaginaria è:

$\omega L\left(1+\frac{C2}{C1}\right)-\frac{1}{\omega C1}-\omega RRoC2=0$, moltiplicando per $\frac{1}{\omega}\neq 0$: $\frac{1}{\omega^2}=\left(1+\frac{C2}{C1}\right)LC1-RRoC1C2$

si ottiene perciò la frequenza di risonanza derivata dalla parte immaginaria:

$$\omega ri = \sqrt{\frac{1}{(C1+C2)L - RRoC1C2}}$$

Per quanto riguarda la parte reale:

$$\omega^2 (Ro-R)LC2 + R - Ro\frac{C2}{C1} = 0$$, che fornisce: $$\omega rr = \sqrt{\frac{\frac{Ro}{LC1} - \frac{R}{LC2}}{Ro-R}}$$

Si osserva che questa relazione soffre di singolarità per *R=Ro* e diventa indeterminata se vale anche *C1=C2*, ciò nonostante la soluzione esiste, come si è visto in precedenza. La soluzione ω_{rr} indeterminata deve semplicemente essere ignorata, si utilizzi in questo caso solo la soluzione ω_{ri}. NB: anche per *R=Ro* e *C1≠C2,* il limite per ω tendente a infinito dell'espressione iniziale dell'impedenza esiste ed è R.
Poi, evidentemente, le due frequenze di risonanza devono coincidere:

$$\frac{1}{(C1+C2)L - RRoC1C2} = \frac{\frac{Ro}{LC1} - \frac{R}{LC2}}{Ro-R}$$, che non è di facile interpretazione ma che DEVE essere soddisfatta se si vuole che la rete trasformi *R* in una impedenza puramente resistiva.

E' possibile imporre la regola di trasformazione *Ro=kR* e *C1=kC2* e risolvere:

$$\frac{1}{(kC2+C2)L - k^2R^2C2^2} = \frac{\frac{kR}{kLC2} - \frac{R}{LC2}}{kR-R}$$, che diventa $$\frac{1}{(1+k)LC2 - k^2R^2C2^2} = \frac{\frac{R}{LC2}(k-1)}{R(k-1)}$$

infine si ha: $(1+k)LC2 - k^2R^2C2^2 = LC2$, che si risolve per *k*:

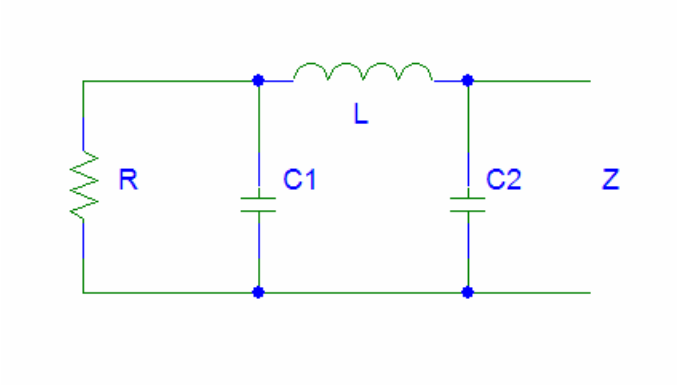
$k = \frac{1}{R^2}\frac{L}{C2}$. Sostituendo ancora si ottiene: $Ro = \frac{1}{R}\frac{L}{C2}$ e $C1 = \frac{L}{R^2}$, alla frequenza $\omega rr = \omega ri$.

Richiamando quindi $\omega ri = \sqrt{\frac{1}{(C1+C2)L - RRoC1C2}}$, tenendo conto che nelle simulazioni iniziali *(C1+C2)L* è intorno a $2\cdot10^{-15}$ e *RRoC1C2* è intorno a 10^{-16}, $\omega r \approx \sqrt{\frac{1}{(C1+C2)L}}$, che è comunque solo indicativa, viste il margine assi ridotto.

Incidentalmente, *k* ha la stessa espressione di Q^2 della rete RLC composta dagli elementi presenti nell'espressione di *k*.

→continua

Consideriamo ora la rete a Pigreco.



Con la regola del parallelo, l'impedenza di *R//C1* è:

$$\frac{\frac{R}{j\omega C1}}{R+\frac{1}{j\omega C1}}=\frac{R}{1+j\omega RC1}$$

Sommando poi l'impedenza di *L* si ottiene:

$$\frac{R\left(1-\omega^2 LC1\right)+j\omega L}{1+j\omega RC1}$$

Calcoliamo infine *Z* con la regola del parallelo applicata anche a *C2*:

$$Z=\frac{\frac{R\left(1-\omega^2 LC1\right)+j\omega L}{1+j\omega RC1}\cdot\frac{1}{j\omega C2}}{\frac{R\left(1-\omega^2 LC1\right)+j\omega L}{1+j\omega RC1}+\frac{1}{j\omega C2}}$$

Dopo qualche passaggio si ottiene:

$$Z=\frac{R\left(1-\omega^2 LC1\right)+j\omega L}{1+j\omega R\left(C1+C2-\omega^2 LC1C2\right)-\omega^2 LC2}$$

Desiderando evitare di avere polinomi di terzo grado, abbiamo due possibilità di cancellazione tra termini.

Caso1:

Si può riconoscere una condizione di risonanza, che annulla in questo caso la parte immaginaria del denominatore, definita da:

$\omega r^2 = \dfrac{1}{L\dfrac{C1C2}{C1+C2}}$ con $\dfrac{C1C2}{C1+C2}$ la capacità equivalente serie di *C1* e *C2* detta *Cs*. Ciò è confermato dall'ispezione visiva della rete a Pigreco che, rimossa *R* è un circuito risonante *LC*, di cui *C* è la serie di *C1* e *C2*.

Alla risonanza l'impedenza è quindi:

$$Zr = \frac{R\left(1-\omega r^2 LC1\right)+j\omega rL}{1-\omega r^2 LC2}$$

e sostituendo il valore di ωr:

$$Zr = \frac{R\left(-\dfrac{C1}{C2}\right)+j\sqrt{\dfrac{L(C1+C2)}{C1C2}}}{-\dfrac{C2}{C1}} = \frac{R\left(-\dfrac{C1}{C2}\right)+j\sqrt{\dfrac{L}{Cs}}}{-\dfrac{C2}{C1}} = R\left(\frac{C1}{C2}\right)^2 - j\frac{C1}{C2}\sqrt{\frac{L}{Cs}}$$

La parte reale di *Zr* dipende da *C1* e *C2* ma non dipende da *L*. La parte immaginaria di *Zr* dipende anche da *L* ma ha sempre segno negativo. Per come la risonanza è stata definita nel caso 1, la rete a Pigreco può generare solamente impedenze con parte immaginaria a carattere capacitivo. Infine si nota che il rapporto *C1/C2* è analogo al rapporto spire di un trasformatore.

Caso 2:

$$Z = \frac{R\left(1-\omega^2 LC1\right)+j\omega L}{1+j\omega R\left(C1+C2-\omega^2 LC1C2\right)-\omega^2 LC2}$$

Si può riconoscere una differente condizione di risonanza, che annulla in questo caso la parte reale del denominatore, definita da: $\omega r^2 = \dfrac{1}{LC2}$, si ottiene quindi:

$$Zr = \frac{R\left(1-\omega r^2 LC1\right)+j\omega rL}{j\omega rR\left(C1+C2-\omega r^2 LC1C2\right)}$$

E sostituendo infine $\omega r^2 = \dfrac{1}{LC2}$ si ottiene:

$$Zr = \frac{1}{R}\frac{L}{C2} + j\left(\frac{C1}{C2}-1\right)\sqrt{\frac{L}{C2}}$$

Perciò anche la rete a Pigreco permette di generare impedenze con parte immaginaria a carattere induttivo o capacitivo (ovvero positiva o negativa) se la risonanza è definita come nel caso 2.

Richiamando la trasformazione di impedenza prodotta dalla rete a Pigreco:

$$Z = \frac{R\left(1-\omega^2 LC1\right)+j\omega L}{1+j\omega R\left(C1+C2-\omega^2 LC1C2\right)-\omega^2 LC2}$$

Cerchiamo una soluzione con *Z=R* e *C1=C2=C*:

$$R = \frac{R - \omega^2 RLC + j\omega L}{1 + j\omega 2RC - j\omega^3 RL\,C^2 - \omega^2 LC}$$

$$R + j\omega 2\,R^2 C - j\omega^3 R^2 L\,C^2 - \omega^2 RLC = R - \omega^2 RLC + j\omega L$$

Dopo aver semplificato, l'equazione è divisibile per ω, ciò significa che a frequenza zero (DC) l'equazione è soddisfatta, fatto che è evidente anche dal punto di vista circuitale, sostituendo *L* con un corto circuito e *C* con un circuito aperto.

Si ottiene infine una sola equazione:

$2\,R^2 C - \omega^2 R^2 L\,C^2 = L$, che si risolve per:

$\omega r^2 = \frac{2\,R^2 C - L}{R^2 L\,C^2} = \frac{2}{LC} - \frac{1}{R^2 C^2}$, $\omega_r = \sqrt{\frac{2}{LC} - \frac{1}{R^2 C^2}}$, che ritroveremo anche più avanti.

Cerchiamo ora una soluzione per *Z* imponendo che sia *Z=kR*, resistiva e *C1=kC2*:

$$kR = \frac{R\left(1 - \omega^2 LkC2\right) + j\omega L}{1 + j\omega R\left(\left(1+k\right)C2 - \omega^2 kL\,C2^2\right) - \omega^2 LC2}$$

$$kR + j\omega k\,R^2\left(1+k\right)C2 - j\,\omega^3 k^2 R^2 L\,C2^2 - \omega^2 kRLC2 = R - \omega^2 RLkC2 + j\omega L$$

L'equazione della parte reale è soddisfatta solamente con *k=1*, che ci riporta nel caso precedente. La regola appena utilizzata non appare abbastanza flessibile, proviamone una più generale. Cerchiamo una soluzione per *Z* imponendo *Z=kR*, resistiva e *C1=hC2, C2=C,* che applicata alla formula trovata in precedenza:

$$Z = \frac{R\left(1 - \omega^2 LC1\right) + j\omega L}{1 + j\omega R\left(C1 + C2 - \omega^2 LC1C2\right) - \omega^2 LC2}$$ diventa:

$$kR = \frac{R\left(1 - \omega^2 LhC\right) + j\omega L}{1 + j\omega R\left(\left(1+h\right)C - \omega^2 hL\,C^2\right) - \omega^2 LC}$$

$$kR + j\omega k\,R^2\left(1+h\right)C - j\,\omega^3 hk\,R^2 L\,C^2 - \omega^2 kRLC = R - \omega^2 RLhC + j\omega L$$

Risolvendo la parte reale: $\omega^2 = \frac{1}{LC}\frac{k-1}{k-h}$

Risolvendo la parte immaginaria: $\omega^2 = \frac{1+h}{h}\frac{1}{LC} - \frac{1}{hk\,R^2 C^2}$

Le due frequenze devono coincidere: $\frac{1+h}{h}\frac{1}{LC}-\frac{1}{hk\,R^2C^2}=\frac{1}{LC}\frac{k-1}{k-h}$

Normalmente *h* è noto e si vuole ricavare *k*:

Chiamando $q=\frac{L}{R^2C}$; incidentalmente si ha $\sqrt{q}=Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

Si perviene alla seguente equazione:

$$k^2-khq-k\,h^2-h^2q=0$$

Risolvendo per *k*:

$$k_{1,2}=\frac{hq+h^2\pm\sqrt{h^2q^2+h^4+2\,h^3q+4\,h^2q}}{2}$$

Volendo ora introdurre qualche approssimazione,

sia $q<<h$, cioè sia $Q^2<<h$ e $h>1$ e radice positiva, si ha:

$$k_1\approx\frac{hq+h^2+h^2}{2}\approx h^2=\left(\frac{C1}{C2}\right)^2$$ alla frequenza $$\omega r\approx\sqrt{\frac{1}{LC}\frac{h^2-1}{h^2-h}}=\sqrt{\frac{1}{LC2}\frac{\left(\frac{C1}{C2}\right)^2-1}{\left(\frac{C1}{C2}\right)^2-\frac{C1}{C2}}}$$

Il simbolo ≈ nell'espressione della frequenza dipende dal fatto che abbiamo sostituito il valore approssimato di *k* nell'espressione della frequenza. Il valore di frequenza ottenuto è comparabile ad una delle soluzioni viste in precedenza, dopo alcuni passaggi si ha:

$$\omega r\approx\sqrt{\frac{1}{LC}\frac{h^2-1}{h^2-h}}=\sqrt{\frac{1}{LC2}\frac{\left(\frac{C1}{C2}\right)^2-1}{\left(\frac{C1}{C2}\right)^2-\frac{C1}{C2}}}=\sqrt{\frac{1}{L}\frac{C1+C2}{C1C2}}=\sqrt{\frac{1}{LCs}};Cs=\frac{C1C2}{C1+C2}$$; Cs è la capacità equivalente di *C1* e *C2* connessi in serie.

→continua

Confrontiamo ora le reti a T e a Pigreco (caso 2):

$$ZrT = \frac{1}{R}\frac{L}{C1} + j\left(1 - \frac{C1}{C2}\right)\sqrt{\frac{L}{C1}}$$

$$ZrP2 = \frac{1}{R}\frac{L}{C2} + j\left(\frac{C1}{C2} - 1\right)\sqrt{\frac{L}{C2}}$$

Le cui "potenzialità" sembrano assai simili.

Scambiando poi *C2* con *C1* nella rete a Pigreco:

$$ZrT = \frac{1}{R}\frac{L}{C1} + j\left(1 - \frac{C1}{C2}\right)\sqrt{\frac{L}{C1}}$$

$$ZrP2 = \frac{1}{R}\frac{L}{C1} + j\left(\frac{C2}{C1} - 1\right)\sqrt{\frac{L}{C1}}$$

Le reti sono quindi equivalenti per quanto riguarda la trasformazione della parte reale dell'impedenza.
Calcoliamo ora i termini tra parentesi con *C1=100* e *C2=1, 100* e *200*.

$$(C2=1)T = \left(1 - \frac{100}{1}\right); (C2=100)T = \left(1 - \frac{100}{100}\right); (C2=200)T = \left(1 - \frac{100}{200}\right)$$
$$(C2=1)P2 = \left(\frac{1}{100} - 1\right); (C2=100)P2 = \left(\frac{100}{100} - 1\right); (C2=200)P2 = \left(\frac{200}{100} - 1\right)$$

$$(C2=1)T = -99; (C2=100)T = 0; (C2=200)T = 0.5$$
$$(C2=1)P2 = -0.99; (C2=100)P2 = 0; (C2=200)P2 = 1$$

La rete a T permette la più grande "variazione" della parte immaginaria dell'impedenza alla risonanza. Ciò è legato al fatto che *C2* è al denominatore, e che i condensatori variabili "reali" hanno costo e ingombri proporzionali alla loro capacità massima, mentre quella minima può diventare anche molto piccola (ma non nulla!), questo fatto è stato considerato nelle simulazioni che aprono questo articolo.
Si può inoltre dire che nella rete a Pigreco (caso 2) *C2* controlla linearmente la parte immaginaria dell'impedenza, mentre nella rete a T il controllo è "iperbolico".
Confrontando poi le espressioni delle frequenze di risonanza:

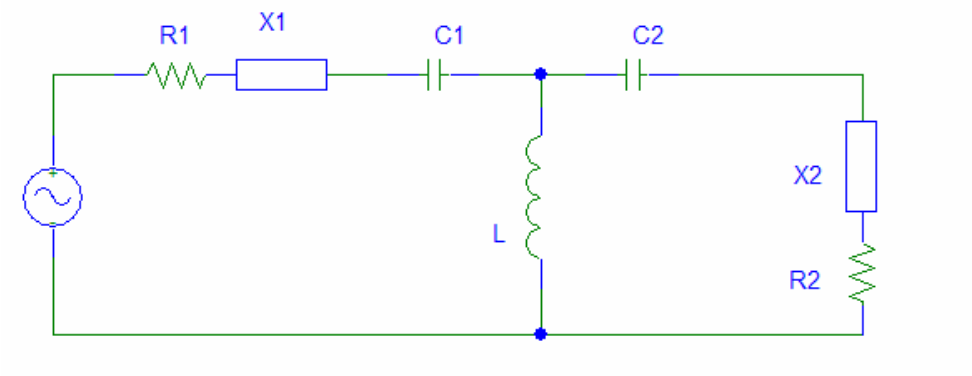
$$\omega rT \approx \sqrt{\frac{1}{(C1+C2)L}}; \qquad \omega rPi \approx \sqrt{\frac{1}{LCs}}; Cs = \frac{C1C2}{C1+C2}$$

Si nota che la rete a T risuona con le due capacità in parallelo, mentre quella a Pigreco con le due capacità in serie. La rete a Pigreco richiede quindi capacità maggiori a parità di L.

→ continua

Un metodo più generale per le reti a T.

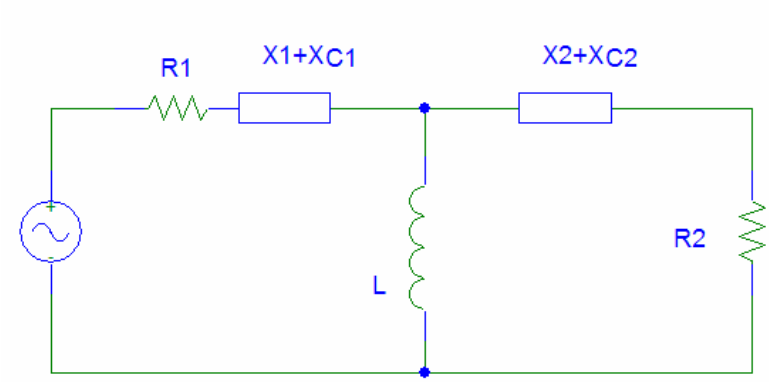
Consideriamo lo schema completo che include il generatore V1 e la sua impedenza interna *Z1=R1+jX1*.



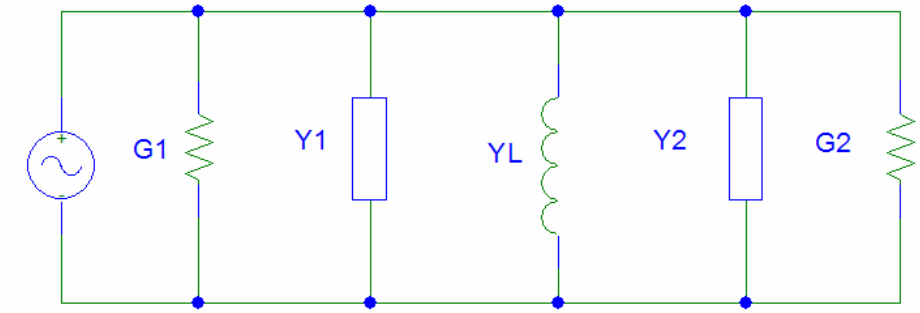
Per calcolare il circuito equivalente parallelo di *Z=R+jX* si può definire l'ammettenza *Y=1/Z*:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} + j\frac{-X}{R^2 + X^2}$$

Prima di convertire tutta la struttura della rete in circuito equivalente parallelo, sommiamo la reattanza del generatore con quella di *C1* e la reattanza del carico con quella di *C2*.



Infine si converte tutta la rete in forma di parallelo di ammettenze:



$$G1=\frac{R1}{R1^2+\left(X1+X_{C1}\right)^2}\ ;\quad G2=\frac{R2}{R2^2+\left(X2+X_{C2}\right)^2}$$

$$Y1=-\frac{X1+X_{C1}}{R1^2+\left(X1+X_{C1}\right)^2}\ ;\quad Y2=-\frac{X2+X_{C2}}{R2^2+\left(X2+X_{C2}\right)^2}$$

$$YL=-\frac{1}{\omega L}$$

Definendo la condizione di risonanza con la condizione in cui la parte immaginaria dell'ammettenza è nulla (che è una condizione differente da quelle precedentemente ricavate !) si ha:

Y1+Y2+YL=0 ; ovvero:

$$\frac{\frac{1}{\omega C1}-X1}{R1^2+\left(\frac{1}{\omega C1}-X1\right)^2}+\frac{\frac{1}{\omega C2}-X2}{R2^2+\left(\frac{1}{\omega C2}-X2\right)^2}-\frac{1}{\omega L}=0$$

Il matching complesso coniugato alla risonanza fornisce:

G1=G2; cioè:

$$\frac{R1}{R1^2+\left(\frac{1}{\omega C1}-X1\right)^2}=\frac{R2}{R2^2+\left(\frac{1}{\omega C2}-X2\right)^2}$$

Nel caso particolare di *C1=C2=C*, *R1=R2=R* e *X1=X2=0*, si ha *G1=G2* e ω_r diviene:

$$\omega_r=\sqrt{\frac{1}{2LC-R^2C^2}}$$

Ciò comporta $2L>R^2C$, e come si vede più sotto, per mantenere invariata la frequenza di risonanza, *C* può essere ridotto a piacere aumentando *L*.

Nel caso particolare di X1=X2=0 e $\omega=\omega_r$ si ottiene:

$$\frac{R1}{R1^2+\left(\frac{1}{\omega C1}\right)^2}=\frac{R2}{R2^2+\left(\frac{1}{\omega C2}\right)^2}$$

entrambi i termini hanno limite con $C\rightarrow\infty$ pari a *G=1/R1=1/R2* (cioè la resistenza non subisce trasformazioni, come pare ovvio), mentre è interessante il caso $C\rightarrow 0$ che da $G\rightarrow 0$. Per cui riducendo C nel termine che ha la conduttanza più alta è sempre possibile

ridurre la conduttanza fino a farla diventare pari a quella più bassa. Per mantenere la risonanza, si riduce per esempio *C1* e si aumenta *C2*, questo fatto modifica la conduttanza dell'altro termine nel verso più vantaggioso. Se necessario, a causa della diseguaglianza appena citata, è anche possibile mantenere il circuito in risonanza variando *L*. Questi fenomeni sono all'origine della superiorità della rete a T per quanto riguarda il range di impedenza adattabile.

Applicando questo stesso metodo alla rete a Pigreco ed assumendo sorgente a carico resistivi si ottiene la seguente condizione di matching complesso coniugato:

$$\frac{R1}{1+\omega^2 R1^2 C1^2} = \frac{R2}{1+\omega^2 R2^2 C2^2}$$ uguaglianza delle parti reali.

$$\frac{\omega R1^2 C1}{1+\omega^2 R1^2 C1^2} + \frac{\omega R2^2 C2}{1+\omega^2 R2^2 C2^2} - \omega L = 0$$ parte immaginaria nulla

Nel caso particolare di $C1=C2=C$ e $R1=R2=R$, il matching della parte immaginaria fornisce:

$$\omega_r = \sqrt{\frac{2}{LC} - \frac{1}{R^2 C^2}}$$

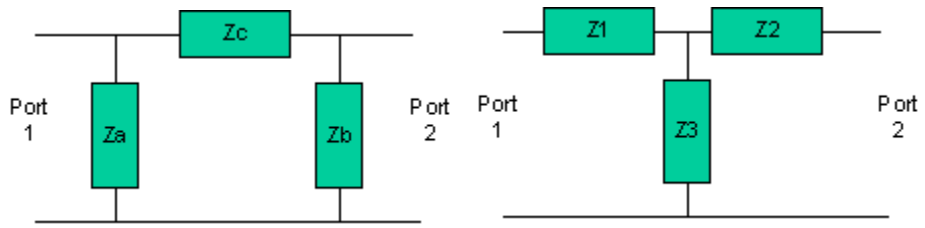
Ciò comporta $L/2<R^2C$, per mantenere la rete alla risonanza, *C* dovrebbe essere aumentata quanto basta riducendo nel contempo *L*.

Al fine del matching delle parti reali, il termine più grande dell'uguaglianza delle parti reali potrà certamente essere ridotto in modo da soddisfare l'uguaglianza "aumentando" la sua *C*, sfortunatamente non sempre è possibile incrementare *C* a piacere, in quanto ogni condensatore variabile fisico ha un valore limite *Cmax*. Si noti che "non è" in generale possibile incrementare a piacimento il termine più piccolo (riducendo la capacità) per soddisfare l'uguaglianza a causa della presenza del "1" al denominatore.

→continua

Trasformazione da Pigreco a T e vice versa

Ogni rete a Pigreco può essere trasformata in una rete a T e viceversa. Questa trasformazione è chiamata trasformazione stella-triangolo.



Rete a Pigreco Rete a T

Le impedenze della rete a Pigreco (Za, Zb, and Zc) possono essere ottenute da quelle della rete a T equivalente:

$Za = ((Z1 \cdot Z2)+(Z1 \cdot Z3)+(Z2 \cdot Z3)) / Z2$
$Zb = ((Z1 \cdot Z2)+(Z1 \cdot Z3)+(Z2 \cdot Z3)) / Z1$
$Zc = ((Z1 \cdot Z2)+(Z1 \cdot Z3)+(Z2 \cdot Z3)) / Z3$

Allo stesso modo le impedenze della rete a T (Z1, Z2, Z3) possono essere ricavate da quelle della rete equivalente a Pigreco:

$Z1 = (Za \cdot Zc) / (Za+Zb+Zc)$
$Z2 = (Zb \cdot Zc) / (Za+Zb+Zc)$
$Z3 = (Za \cdot Zb) / (Za+Zb+Zc)$

Si noti che la trasformazione di una rete composta da elementi puramente reattivi (L e C), porterà ad una rete di elementi puramente reattivi (L e C).

Sintesi delle reti a T e Pigreco per ottenere una trasformazione tra impedenze del generatore e del carico reali.

R1 è la resistenza connessa alla porta 1 ed R2 è la resistenza (adattata dalla rete) connessa alla porta 2. φ è lo sfasamento (parametro libero) introdotto dalla rete, che può essere una qualunque fase diversa da zero o pigreco. Se R1=R2 φ può anche essere zero.

$Z1 = -j \ (R1 \cdot \cos(\varphi) - \sqrt{(R1 \cdot R2)}) / \sin(\varphi)$
$Z2 = -j \ (R2 \cdot \cos(\varphi) - \sqrt{(R1 \cdot R2)}) / \sin(\varphi)$
$Z3 = -j \ \sqrt{(R1 \cdot R2)} / \sin(\varphi)$

$Za = j \ R1 \cdot R2 \cdot \sin(\varphi) / (R2 \cdot \cos(\varphi) - \sqrt{(R1 \cdot R2)})$
$Zb = j \ R1 \cdot R2 \cdot \sin(\varphi) / (R1 \cdot \cos(\varphi) - \sqrt{(R1 \cdot R2)})$
$Zc = j \ \sqrt{(R1 \cdot R2)} \cdot \sin(\varphi)$

E' consuetudine, utilizzando queste formule, porre φ pari a 45 gradi.

Per esempio: R1=50, R2= 100

Z1 = -j (50·0.707-√(50·100)) /0.707 = +j 50 ohms
Z2 = -j (100·0.707-√ (50·100)) /0.707 = 0 ohms
Z3 = -j √ (50·100) /.707 = -j 100 ohms

(questo esempio crea una rete a L, poichè Z2=0).

Ulteriori approfondimenti e tecniche di analisi si possono trovare utilizzando le parole chiave:

a) Design of `Pi` Impedance Matching Networks

b) Determination of the Impedance Matching Domain of Impedance Matching Networks

c) Q-based design method for T network impedance matching