Esercizio 1. (6 punti) Determinare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x, y, z) = -3x + 2y$$

nell'insieme

$$E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \geq 2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

Soluzione.
E é la porzione di spazio limitata esternamente dalla sfera S centrata nell'origine e di raggio 2, ed internamente dal cilindro C con asse coincidente con l'asse z e di raggio $\sqrt{2}$.

Come primo passo, cerchiamo gli estremi liberi di f. Il gradiente di f:

$$\nabla f(x, y, z) = (-3, 2, 0)$$

non si annulla, per cui la f non ha estremi liberi.

Il bordo di E consiste di una porzione sferica ed una cilindrica. Posto $g_C(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2$ e $g_C(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$, per studiare gli estremi vincolati di f consideriamo separatamente la lagrangiana

$$L_C(x, y, z) = -3x + 2y - \lambda g_C(x, y, z)$$

per i punti del cilindro, e l'altra lagrangiana

$$L_S(x, y, z) = -3x + 2y - \lambda g_S(x, y, z)$$

per i punti della sfera. C ed S si incontrano nelle due circonferenze

$$x^2 + y^2 = 2, \qquad z = \pm\sqrt{2},$$

che potrebbero richiedere un'ulteriore analisi.

<u>Osservazione importante</u>*: E' un errore considerare una sola lagrangiana contenente sia il vincolo del cilindro che quello della sfera:*

$$L_{CS}(x, y, z) = -3x + 2y - \lambda g_C(x, y, z) - \lambda g_S(x, y, z),$$

perché questo significa considerare solo i punti dell'intersezione tra le due superficice, ovvero solo i punti delle due circonferenze $x^2 + y^2 = 2,\ z = \pm\sqrt{2}$.

<u>Il cilindro</u>. *Per i punti sul cilindro, osserviamo che $\nabla g_C(x, y, z) = (2x, 2y, 0) \neq (0, 0, 0)$ su C. Quindi possiamo risolvere il sistema*

$$\begin{cases} -3 - 2\lambda x = 0 \\ 2 - 2\lambda y = 0 \\ -x^2 - y^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del sisyema sono tutti i punti $A_z = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{13}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}, z\right)$, $B_z = \left(\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{13}}, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}, z\right)$, con $z - \sqrt{2} \leq z \leq \sqrt{2}$. La funzione f non dipende da z, per cui avremo

$$f(A_z) = \sqrt{26}, \qquad f(B_z) = -\sqrt{26}.$$

I punti delle due circonferenze $x^2 + y^2 = 2,\ z = \pm\sqrt{2}$ si ottengono da quanto appena scritto per $z = \pm\sqrt{2}$, quindi non é necessario esaminarli separatamente.

<u>La sfera</u>. *Per i punti sulla sfera, osserviamo che* $\nabla g_S(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) \neq (0, 0, 0)$ *su* S*. Quindi possiamo risolvere il sistema*

$$\begin{cases} -3 - 2\lambda x = 0 \\ 2 - 2\lambda y = 0 \\ 0 - 2\lambda z = 0 \\ -x^2 - y^2 - z^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del sisyema sono tutti i punti $P = \left(-\frac{6}{\sqrt{13}}, \frac{4}{\sqrt{13}}, 0\right)$, $Q = \left(\frac{6}{\sqrt{13}}, -\frac{4}{\sqrt{13}}, 0\right)$. *Abbiamo*

$$f(P) = 2\sqrt{13}, \qquad f(Q) = -2\sqrt{13}.$$

<u>Conclusione</u>. *Confrontando tra loro i valori di* f *nei punti* A_z, B_z, P, Q, *si conclude che* P *e* Q *sono rispettivamente il punto di massimo e di minimo di* f *su* E, *e* $f(P) = 2\sqrt{13}$, $f(Q) = -2\sqrt{13}$ *sono rispettivamente il massimo ed il minimo di* f *su* E.

Esercizio 2. (6 punti) Studiare, al variare dei parametri α e β in $\mathbf{R}$, le soluzioni del seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z e w:

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y - z = 1 \\ x + z = 3 \\ \alpha x + \beta y = \beta \\ \alpha z + \beta w = \beta. \end{cases}$$

Soluzione.
<u>Primo modo</u>. *Dal confronto tra la prima e la terza equazione, si ottiene immediatamente*

$$z = \beta - 1. \tag{1}$$

Inserendo il risultato nella seconda equazione, si ha

$$x = 4 - \beta. \tag{2}$$

Inserendo (2) *nella terza equazione e* (1) *nella quarta equazione, si deduce*

$$\beta y = \beta + \alpha\beta - 4\alpha$$

e

$$\beta w = \beta + \alpha - \alpha\beta.$$

A questo punto:

- *se* $\beta \neq 0$*, il sistema dato ammette* ***un'unica soluzione*** *data da*

$$\begin{cases} x = 4 - \beta \\ y = 1 + \alpha - 4\dfrac{\alpha}{\beta} \\ z = \beta - 1 \\ w = 1 + \dfrac{\alpha}{\beta} - \alpha. \end{cases}$$

Supponiamo ora che $\beta = 0$*. Dal sistema dato si deduce*

$$\begin{cases} \alpha x - z = 1 \\ x + z = 3 \\ \alpha x = 0 \\ \alpha z = 0. \end{cases} \tag{3}$$

In particolare (tenendo conto di (1) *e* (2) *per cui* $x = 4$ *e* $z = -1$*), dalle ultime due equazioni di* (3)*, si ha che se* $\alpha \neq 0$*, allora necessariamente* $x = 0$ *e* $z = 0$*, informazione che inserita nella seconda equazione produce un assurdo.*

Quindi:

- *se* $\beta = 0$ *e* $\alpha \neq 0$*, il sistema dato* ***non ammette soluzioni****.*

Sia ora $\beta = 0$ *e* $\alpha = 0$*. La prima equazione di* (3) *dice che* $z = -1$*; allora dalla seconda si ha* $x = 4$*;* y *e* w *possono assumere qualunque valore reale. Per cui:*

- *se* $\beta = 0$ *e* $\alpha = 0$*, il sistema dato* ***ha*** ∞^2 ***soluzioni*** *date da*

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = s \\ z = -1 \\ w = t \qquad s, t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

<u>Secondo modo</u>. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

la matrice dei coefficienti del sistema e

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \beta \end{pmatrix}$$

la matrice completa. Andiamo a studiare il rango di A. Calcoliamo il determinante di A sviluppando secondo l'ultima colonna. Si ha:

$$\det A = \beta\,(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & 0 \end{vmatrix} = \beta(\alpha\beta - \beta - \alpha\beta) = -\beta^2.$$

Quindi:

- *se $\beta \neq 0$, det $A \neq 0$, da cui rango di $A = 4 =$ rango di B e dal teorema di Rouché Capelli, il sistema dato ammette* ***un'unica soluzione*** *data da*

$$\begin{cases} x = 4 - \beta \\ y = 1 + \alpha - 4\dfrac{\alpha}{\beta} \\ z = \beta - 1 \\ w = 1 + \dfrac{\alpha}{\beta} - \alpha \end{cases}$$

(che si ottiene per mezzo di calcoli diretti come al punto precedente o dall'applicazione del Teorema di Cramer).

Sia ora $\beta = 0$. In tal caso determinante di $A = 0$. Andiamo a riscrivere A per $\beta = 0$. Si ha

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Vediamo immediatamente che il rango di A non può essere 3. Infatti ci sono due colonne di zeri e ogni possibile minore di ordine 3 estratto da A avrebbe determinante uguale a zero.

Vediamo allora se il rango di A può essere 2. Prendendo il minore

$$\begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ottenuto selezionando la prima e la seconda riga e la prima e terza colonna, si vede immediatamente che ha determinante diverso da zero se $\alpha \neq -1$. Se $\alpha = -1$ prendiamo invece il minore

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ottenuto selezionando la seconda e terza riga e la prima e terza colonna e si vede subito che ha determinante diverso da zero. Quindi ***per ogni*** *α, il rango di A = 2 (nel caso $\beta = 0$).*

A questo punto, andiamo a studiare il rango di B *(sempre nel caso* $\beta = 0$*). Si vede subito che*

$$\text{rango}\, B = \text{rango} \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

perché le altre due colonne sono tutte formate da zeri. Abbiamo allora quattro possibilità:

$$B_1 = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Si vede inoltre che

$$\text{det} B_1 = -4\alpha \qquad \text{det} B_2 = -2\alpha \qquad \text{det} B_3 = \alpha^2 \qquad \text{det} B_4 = 3\alpha^2.$$

Quindi:
- *se* $\alpha \neq 0$*, il rango di* B *è 3 ed essendo il rango di* A *uguale a 2, il sistema dato* ***non ammette soluzioni****.*

Se invece:
- $\alpha = 0$*, allora il rango di* B *non può essere 3; infatti è uguale a 2 (basta prendere il minore*

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ottenuto selezionando la prima e la seconda riga e la terza e quinta colonna. Quindi rango A *= rango* $B = 2$*;* ***il sistema dato ammette****, per il teorema di*

Rouché Capelli, $\infty^{4-2} = \infty^2$ ***soluzioni****, date da*

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = s \\ z = -1 \\ w = t \qquad s, t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Esercizio 3. (6 punti) Calcolare il volume della regione tridimensionale Ω limitata superiormente dal paraboloide $z = 12 - 5x^2 - 2y^2$ e compresa tra i paraboloidi $z = x^2 + y^2$ e $z = 7x^2 + 4y^2$:

$$\Omega = \{x^2 + y^2 < z < 7x^2 + 4y^2, \qquad z < 12 - 5x^2 - 2y^2\}.$$

Soluzione.
Per il calcolo del volume della regione Ω possiamo procedere per sottrazioni di volumi considerando dapprima quello compreso tra i paraboloidi $z = 12 - 5x^2 - 2y^2$ e $z = x^2 + y^2$, che chiameremo V_1, e quindi sottraendo ad esso quello compreso tra i paraboloidi $z = 12 - 5x^2 - 2y^2$ e $z = 7x^2 + 4y^2$, che indicheremo con V_2, quindi:

$$Volume(\Omega) = V(\Omega) = V_1 - V_2$$

In particolare:

$$V_1 = \int_{D_1} dxdy \int_{x^2+y^2}^{12-5x^2-2y^2} 1dz = \int_{D_1} (12 - 6x^2 - 3y^2)dxdy$$

essendo D_1 il sottoinsieme del piano XY che risulta delimitato dall' ellisse intersezione dei due paraboloidi $z = 12 - 5x^2 - 2y^2$ e $z = x^2 + y^2$, ovvero dall' equazione $12 - 5x^2 - 2y^2 = x^2 + y^2 \to \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$. Passando in coordinate ellittiche:

$$\Psi : \begin{cases} x = \sqrt{2}\rho\cos\theta \\ y = 2\rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \mid J\psi \mid = 2\sqrt{2}\rho$$

otteniamo:

$$D_1 \equiv \{x = \sqrt{2}\rho\cos\theta, y = 2\rho\sin\theta : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

quindi:

$$V_1 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} [12 - 6(2\rho^2\cos^2\theta) - 3(4\rho^2\sin^2\theta)] 2\sqrt{2}\rho d\rho d\theta = 24\sqrt{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\rho - \rho^3) d\rho d\theta = 12\sqrt{2}\pi$$

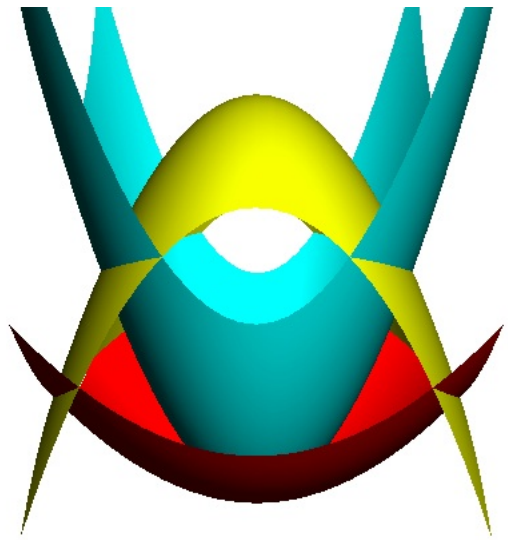

Figura 1: Il volume Ω è individuato dalla porzione di spazio delimitata dai tre paraboloidi.

Analogamente procediamo per il calcolo di V_2*:*

$$V_2 = \int_{D_2} dxdy \int_{7x^2+4y^2}^{12-5x^2-2y^2} 1dz = \int_{D_2} (12 - 12x^2 - 6y^2)dxdy$$

dove D_2 *è il sottoinsieme del piano* XY *che risulta delimitato dall' ellisse intersezione dei due paraboloidi* $z = 12 - 5x^2 - 2y^2$ *e* $z = 7x^2 + 4y^2$*, ovvero dall' equazione* $12 - 5x^2 - 2y^2 = 7x^2 + 4y^2 \rightarrow x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$*. Passando in coordinate ellittiche:*

$$\Psi : \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \sqrt{2}\rho\sin\theta \end{cases} \quad \Rightarrow \mid J\psi \mid = \sqrt{2}\rho$$

otteniamo:

$$D_2 \equiv \{x = \rho\cos\theta, y = \sqrt{2}\rho\sin\theta : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

quindi:

$$V_2 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} [12 - 6(\rho^2\cos^2\theta) - 6(2\rho^2\sin^2\theta)]\sqrt{2}\rho d\rho d\theta = 12\sqrt{2}\int_0^1 \int_0^{2\pi} (\rho - \rho^3)d\rho d\theta = 6\sqrt{2}\pi$$

infine:

$$V(\Omega) = V_1 - V_2 = 12\sqrt{2}\pi - 6\sqrt{2}\pi = 6\sqrt{2}\pi.$$