

Analisi 1 - 1 settembre 2009

Esercizio 1

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha n^5 + e^{-n^2} + (-1)^n}{n^5 - n^3 + 1}$$

al variare del parametro reale α .

Soluzione:

Per la condizione necessaria di convergenza delle serie, il termine generale deve tendere a zero. Poiché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha n^5 + e^{-n^2} + (-1)^n}{n^5 - n^3 + 1} = \alpha.$$

Quindi per $\alpha \neq 0$ la serie data non converge. Per $\alpha = 0$ la serie diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n^2} + (-1)^n}{n^5 - n^3 + 1}$$

che è una serie a termini di segno alterno, essendo $e^{-n^2} < 1$ per $n > 0$. Questo permette di applicare il criterio di Leibniz, che richiede lo studio della monotonia del termine generale, ma è possibile dire qualcosa di più considerando la serie dei moduli:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|e^{-n^2} + (-1)^n|}{n^5 - n^3 + 1}.$$

Questa serie è asintotica a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^5},$$

che converge in quanto serie armonica generalizzata con esponente maggiore di 1. In conclusione, per $\alpha = 0$ la serie converge assolutamente.

Esercizio 2

Calcolare il seguente limite di funzione al variare del parametro reale $\alpha \geq 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \sin x} - 1}{\ln(1 + x^\alpha)}.$$

Soluzione:

Ricordando i seguenti limiti notevoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

per $\alpha > 0$ possiamo scrivere

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \sin x} - 1}{x \sin x} \frac{x \sin(x)}{x^\alpha} \frac{x^\alpha}{\ln(1 + x^\alpha)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{\alpha-2}}.$$

Dunque, se $\alpha = 2$, allora il limite é 1; se $\alpha > 2$, il limite é $+\infty$ e se $0 < \alpha < 2$, il limite é 0. Per $\alpha = 0$, il limite diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \sin x} - 1}{\ln 2} = 0.$$

E' possibile risolvere l'esercizio anche usando lo sviluppo di Taylor.

Esercizio 3

Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_2^4 \frac{x^2 + 2}{x^3 - 2x^2 + x} dx.$$

Soluzione:

Scomponiamo il denominatore come prodotto di fattori irriducibili, ovvero $x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$. Usando il metodo di integrazioni per funzioni razionali, possiamo scrivere:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x} = \frac{x^2 + 2}{x^3 - 2x^2 + x}$$

e quindi deve valere la seguente uguaglianza

$$A(x^2 - x) + Bx + C(x^2 - 2x + 1) = x^2 + 2.$$

Si ha che $A + C = 1$, $B - A - 2C = 0$ e $C = 2$ e quindi $A = -1$, $B = 3$ e $C = 2$.

L'integrale indefinito corrispondente a quello dato risulta

$$\int \frac{x^2 + 2}{x^3 - 2x^2 + x} dx = \int \frac{-1}{x-1} + \int \frac{3}{(x-1)^2} + \int \frac{2}{x} dx = -\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + 2\ln|x|.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{x^2 + 2}{x^3 - 2x^2 + x} dx &= (-\ln 3 - 1 + 2\ln 4) - (-\ln 1 - 3 + 2\ln 2) \\ &= -\ln 3 + 2 + 2\ln 4 - 2\ln 2 = 2 - \ln 3 + 2\ln(2^2) - 2\ln(2) \\ &= 2 - \ln 3 + 4\ln 2 - 2\ln 2 = 2 - \ln 3 + 2\ln 2 \end{aligned}$$

Esercizio 4

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{3+x}}{3-x^2}.$$

NOTA: non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Soluzione:

Il campo di esistenza di $f(x)$ si ottiene imponendo che il radicando sia non negativo, e che non si annulli il denominatore

$$x \geq -3, \quad x \neq \pm\sqrt{3}.$$

Il segno di $f(x)$ è quello di $3 - x^2$, quindi

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}), \quad f(x) < 0 \quad \forall x \in (-3, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty).$$

Inoltre $f(-3) = 0$.

La funzione è continua in tutto l'insieme di definizione (continua a destra in -3).

Calcoliamo i limiti ai bordi dell'insieme di definizione.

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} = 0^-,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^-} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^+} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^-} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} = 0.$$

L'ultimo limite dimostra che l'asse delle x è asintoto orizzontale, e che non esistono asintoti obliqui.

La derivata è

$$f'(x) = \frac{3}{2} \frac{x^2 + 4x + 1}{\sqrt{3} + x(x^2 - 3)^2}.$$

Il numeratore si annulla in $-2 \pm \sqrt{3}$, ma $-2 - \sqrt{3}$ non appartiene al campo di esistenza di $f(x)$, quindi la derivata si annulla solamente in $-2 \pm \sqrt{3}$, ed il suo segno è il seguente

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (-3, -2 + \sqrt{3}), \quad f'(x) > 0 \quad \forall x \in (-2 + \sqrt{3}, +\infty).$$

è positiva per $x < -2 - \sqrt{3}$ e per $x > -2 + \sqrt{3}$, negativa per $-2 - \sqrt{3} < x < -2 + \sqrt{3}$. Il punto $-2 + \sqrt{3}$ è di minimo per $f(x)$, con minimo

$$f(-2 + \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{3}}}{-4 + 4\sqrt{3}}.$$

Il grafico della funzione è nella pagina successiva.

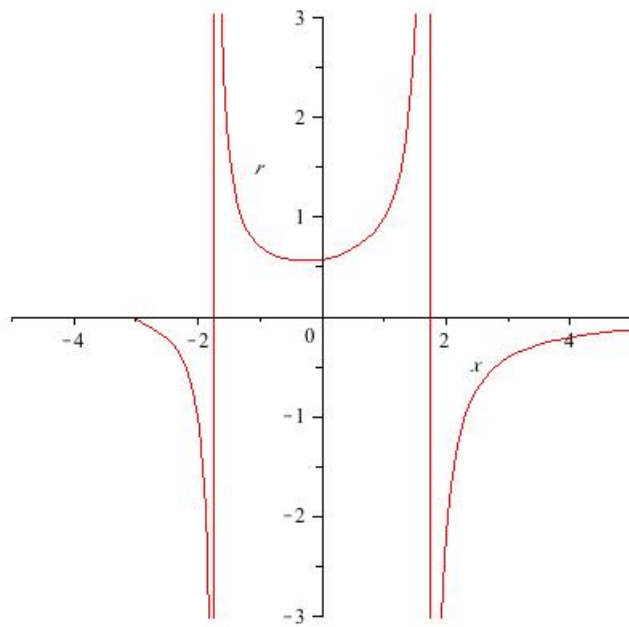


Figure 1: Il grafico di $\frac{\sqrt{3+x}}{3-x^2}$.