

Esercizio 1 (G. Ziglio). (6 punti)

Calcolare il volume della porzione di spazio E interna alla sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ed esterna al cono di equazione $z^2 = x^2 + y^2$

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, \max\{-\sqrt{x^2 + y^2}, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}\} \leq z \leq \min\{\sqrt{x^2 + y^2}, \sqrt{1 - x^2 - y^2}\} \right\},$$

Soluzione.

Il dominio E consiste nella parte di spazio contenuta nella sfera ma esterna al cono rappresentata in Figura 1. Infatti

$$\max\{-\sqrt{x^2 + y^2}; -\sqrt{1 - x^2 - y^2}\} = \begin{cases} -\sqrt{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}, \\ -\sqrt{1 - x^2 - y^2} & \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1. \end{cases} \quad (1)$$

$$\min\{\sqrt{x^2 + y^2}; \sqrt{1 - x^2 - y^2}\} = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}, \\ \sqrt{1 - x^2 - y^2} & \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1. \end{cases} \quad (2)$$

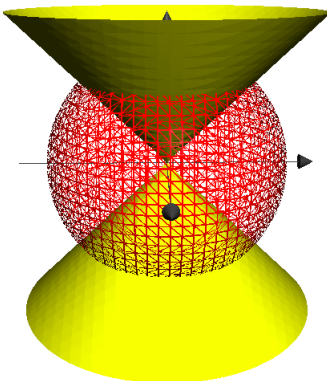


Figura 1: Dominio E

Tenendo conto della simmetria di tale insieme, è possibile utilizzare diversi approcci per calcolarne il volume.

Svolgimento 1.

Utilizzando il sistema di coordinate sferiche $\phi: \mathbf{R}^3 \rightarrow [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, $(x, y, z) \rightarrow (\rho, \theta, \varphi)$

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \quad |J\phi| = \rho^2 \sin \varphi$$

l'insieme E , nel nuovo sistema di coordinate, assume la forma di un parallelepipedo,

$$E = \left\{ (\rho, \theta, \varphi) \mid \rho \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right] \right\}.$$

Dunque

$$V(E) = \int_E 1 dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \rho^2 \sin \varphi d\varphi d\theta d\rho = 2\pi \cdot \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 \cdot [-\cos \varphi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$$

Svolgimento 2.

Il volume dell'insieme E può essere calcolato come differenza fra il volume della sfera e il volume della porzione di spazio racchiusa all'interno del cono e delimitata dalla sfera (vedi Figura 2).

Indicando con E_1 la parte di tale insieme per le $z \geq 0$,

$$V(E_1) = \int_{D_1} \int_{\sqrt{x^2 + y^2}}^{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} 1 dz dx dy = \int_{D_1} [\sqrt{1 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}] dx dy.$$

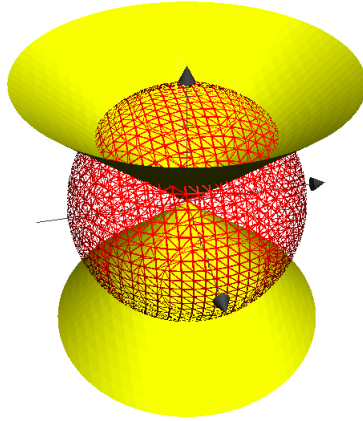


Figura 2: Dominio E_1

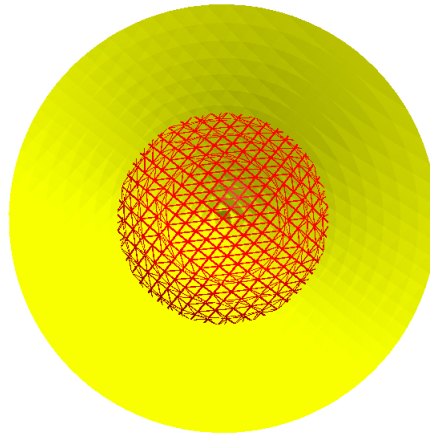


Figura 3: Il dominio D_1 è l'interno della circonferenza centrata nell'origine e di raggio $\sqrt{2}/2$.

L'insieme D_1 è individuato dalla proiezione sul piano xy dell'intersezione fra cono e sfera: $x^2 + y^2 = 1 - x^2 - y^2$ (vedi Figura 3).

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1/2\}$$

Utilizzando il sistema di coordinate polari $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty) \times [0, 2\pi]$, $(x, y) \rightarrow (\rho, \theta)$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad |J\phi| = \rho$$

l'insieme D_1 , nel nuovo sistema di coordinate, assume la forma di un rettangolo,

$$D_1 = \{(\rho, \theta) \mid \rho \in [0, \sqrt{2}/2], \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Dunque

$$V(E_1) = \int_{E_1} 1 dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}/2} [\sqrt{1 - \rho^2} - \rho] \rho \, d\rho d\theta = 2\pi \cdot \left[\frac{-(1 - \rho^2)^{3/2}}{3} - \frac{\rho^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2}/2} = -\frac{\sqrt{2}\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$$

In conclusione

$$V(E) = V(\text{sfera}) - 2V(E_1) = \frac{4\pi}{3} - 2 \left(-\frac{\sqrt{2}\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$$

Svolgimento 3.

Il volume dell'insieme E può essere calcolato direttamente utilizzando le caratterizzazioni (1) e (2),

$$V(E) = \int_{D_1} \int_{-\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}} 1 \, dz dx dy + \int_{D_2} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 1 \, dz dx dy$$

dove

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1/2\} \quad D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1/2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Utilizzando un sistema di coordinate polari,

$$D_1 = \{(\rho, \theta) \mid \rho \in [0, \sqrt{2}/2], \theta \in [0, 2\pi]\} \quad D_2 = \{(\rho, \theta) \mid \rho \in [\sqrt{2}/2, 1], \theta \in [0, 2\pi]\}$$

In conclusione

$$V(E) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}/2} 2\rho^2 \, d\rho d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}/2}^1 2\rho\sqrt{1-\rho^2} \, d\rho d\theta = \frac{4\pi}{3} [\rho^3]_0^{\sqrt{2}/2} + \frac{4\pi}{3} [-(1-\rho^2)^{3/2}]_{\sqrt{2}/2}^1 = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}.$$

Esercizio 2 (M. Eleuteri). (6 punti)

i) Studiare, al variare di $a > 0$, la natura degli eventuali punti stazionari in \mathbb{R}^2 della funzione

$$f(x, y) = x^3 - y^3 + axy.$$

ii) Posto $a = 1$ nella funzione precedente, determinare, se esistono, massimo e minimo assoluti di $f(x, y)$ sul triangolo chiuso di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, -1)$ e i punti in cui essi sono raggiunti.

Soluzione.

(i) Per il teorema di Fermat, gli eventuali punti stazionari si trovano tra quelli che annullano il gradiente di f . Si ha dunque

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + ay, -3y^2 + ax) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + ay = 0 \\ -3y^2 + ax = 0. \end{cases}$$

Si vede immediatamente che $(x, y) = (0, 0)$ è soluzione del precedente sistema. Siccome per ipotesi $a > 0$, in particolare $a \neq 0$ e quindi posso ricavare ad esempio y dalla seconda equazione e sostituirla nella prima, ottenendo

$$y = -\frac{3x^2}{a}$$

da cui

$$x[27x^3 - a^3] = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^3 = \frac{a^3}{27}.$$

A questo punto $x = 0$ porta a $y = 0$, soluzione già considerata, mentre $x^3 = \frac{a^3}{27}$ porta a $x = a/3$. Sostituendo questo valore nell'espressione di y ricavata in precedenza, si ottiene $y = -a/3$. Quindi i punti che annullano il gradiente di f sono

$$(x, y) = (0, 0) \quad (x, y) = \left(\frac{a}{3}, -\frac{a}{3}\right).$$

NOTA BENE Bisogna ricavare x e y in funzione di a , e non il viceversa! a è un parametro reale positivo (un numero!) che è dato dal problema, anche se non si conosce il suo esatto valore. Questo però non lo fa certo diventare un'incognita del problema! Inoltre la radice cubica di un numero negativo è un numero negativo ed è un numero reale. Quindi l'equazione $x^3 = \frac{a^3}{27}$ dà almeno una soluzione reale e non è vero che ci sono due soluzioni reali (una positiva e una negativa) né tanto meno serve tirare in ballo le soluzioni complesse!

Per studiare la natura di tali punti stazionari andiamo a considerare la matrice Hessiana in quei punti. La funzione f è di classe \mathcal{C}^2 , quindi per il teorema di Schwarz, le derivate miste coincidono. Si ha

$$f_{xx} = 6x \quad f_{xy} = f_{yx} = a \quad f_{yy} = -6y.$$

Dunque

$$Hf(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} = -a^2 < 0$$

Quindi l'origine è un punto di sella (NON È UN CASO DUBBIO COME MOLTI HANNO SCRITTO!!!)

D'altra parte

$$Hf\left(\frac{a}{3}, -\frac{a}{3}\right) = \begin{vmatrix} 2a & a \\ a & -2a \end{vmatrix} = 4a^2 - a^2 = 3a^2 > 0$$

Quindi il punto $\left(\frac{a}{3}, -\frac{a}{3}\right)$ è di minimo, visto che $2a > 0$ (per ipotesi $a > 0!!$)

(ii) Sia ora $a = 1$. L'espressione di f diventa $f(x, y) = x^3 - y^3 + xy$. La FUNZIONE data è CONTINUA, il triangolo (che d'ora in avanti chiameremo T) è un INSIEME CHIUSO E LIMITATO, quindi il massimo e il minimo assoluti di f su T esistono per il TEOREMA DI WEIERSTRASS.

NOTA BENE: costituisce GRAVE ERRORE enunciare in modo errato o non enunciare affatto il TEOREMA DI WEIERSTRASS in quanto esso risulta lo strumento che GARANTISCE l'esistenza del massimo e del minimo assoluti, che altrimenti potrebbero anche non esistere. È sbagliato dimenticare un'ipotesi, è ASSURDO (in questo contesto) dire f chiusa o T continuo!

I punti stazionari interni si ricavano dallo studio del punto precedente ponendo $a = 1$. Quindi l'origine appartiene al bordo del triangolo (e in ogni caso era un punto di sella), mentre il punto $A = (1/3, -1/3)$ appartiene alla parte interna del triangolo quindi VA CONSIDERATO NELL'ANALISI FINALE!

Non ci sono punti singolari per f che è di classe C^∞ .

Analizziamo il bordo di T . Ci sono due possibili modi di procedere.

Primo modo: Parametriamo il bordo nel seguente modo:

$$\partial T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$$

dove

$$T_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ e } -1 \leq y \leq 0\}$$

$$T_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \text{ e } 0 \leq x \leq 1\}$$

$$T_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x - 1 \text{ e } 0 \leq x \leq 1\}$$

NOTA BENE: Costituisce grave NON SENSO scrivere $0 \leq y \leq -1!!!$

Allora

$$f|_{T_1} = -y^3$$

che è sempre decrescente nell'intervallo considerato. Quindi eventuali punti candidati ad essere massimo o minimo assoluti sono gli estremi dell'intervallo $(0, 0)$ e $(0, -1)$. D'altra parte

$$f|_{T_2} = x^3$$

che è sempre una funzione crescente nell'intervallo considerato, quindi eventuali punti candidati ad essere massimo o minimo assoluti sono gli estremi dell'intervallo $(0, 0)$ e $(1, 0)$. Infine

$$f|_{T_3} = x^3 - (x - 1)^3 + x(x - 1) = 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$$

che si annulla per $x = 1/2$ quindi eventuali punti candidati ad essere massimo o minimo assoluti sono $(0, -1)$, $(1, 0)$ e $(1/2, -1/2)$.

Un confronto finale mostra che

$$f(0, 0) = 0 = f(1/2, -1/2) \quad f(1, 0) = f(0, -1) = 1 \quad f(1/3, -1/3) = -1/27.$$

Dunque $\max_T f = 1$ e i punti di massimo assoluto sono $(1, 0)$ e $(0, -1)$; $\min_T f = -1/27$ e il punto di minimo assoluto è $(1/3, -1/3)$.

Secondo modo: alternativamente si può procedere utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, con qualche cautela. Infatti il bordo del triangolo è costituito dall'unione (NOTA BENE: NON INTERSEZIONE!!!) di tre segmenti per cui NON è un vincolo di classe C^1 . Per poter applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange devo considerare SEPARATAMENTE e UNO ALLA VOLTA come tre vincoli i tre pezzi del bordo e successivamente restringermi agli intervalli considerati. I tre vincoli sono dati da: $x = 0$, $y = 0$ e $y = x - 1$ quindi poniamo

$$g_1(x, y) = x \quad g_2(x, y) = y \quad g_3(x, y) = y - x + 1.$$

Non ci sono punti singolari per i tre vincoli.

NOTA BENE: Costituisce grave errore scrivere $g_3(x, y) = x - 1!!$ Infatti il vincolo è dato da $y = x - 1$ da cui $y - x + 1 = 0!!!$

Primo vincolo: sia $\mathcal{L}_1(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g_1(x, y) = x^3 - y^3 + xy + \lambda x$.

NOTA BENE: Il vincolo è espresso dall'equazione $x = 0$, per cui $\mathcal{L}_1(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g_1(x, y) = x^3 - y^3 + xy + \lambda x \neq x^3 - y^3 + xy + \lambda 0$ che è palesemente sbagliato.

Dunque dobbiamo andare a risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} 3x^2 + y + \lambda = 0 \\ -3y^2 + x = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Dalla terza equazione sostituendo nella seconda, e conseguentemente nella prima ricaviamo solamente $(x, y) = (0, 0)$ che è un punto che va escluso (verrà studiato a parte perché il bordo del triangolo non è di classe \mathcal{C}^1).

Secondo vincolo: sia $\mathcal{L}_2(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g_2(x, y) = x^3 - y^3 + xy + \lambda y$.

Da cui si va a risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} 3x^2 + y = 0 \\ -3y^2 + x + \lambda = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Dalla terza equazione sostituendo nella seconda, e conseguentemente nella prima ricaviamo solamente $(x, y) = (0, 0)$ che è un punto che va escluso (verrà studiato a parte perché il bordo del triangolo non è di classe \mathcal{C}^1).

Terzo vincolo: sia $\mathcal{L}_3(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g_3(x, y) = x^3 - y^3 + xy + \lambda(y - x + 1)$.

Da cui si va a risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} 3x^2 + y - \lambda = 0 \\ -3y^2 + x + \lambda = 0 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

Uguagliando il valore di λ dalle prime due equazioni si ottiene

$$3x^2 + y = 3y^2 - x.$$

A questo punto sostituendo la terza equazione in questa appena ottenuta si ha $x = 1/2$ da cui $y = -1/2$ che posso accettare.

Studiando a parte i punti singolari per il bordo (i vertici del triangolo) si arriva alla stessa conclusione di prima, ossia

$$f(0, 0) = 0 = f(1/2, -1/2) \quad f(1, 0) = f(0, -1) = 1 \quad f(1/3, -1/3) = -1/27.$$

Dunque $\max_T f = 1$ e i punti di massimo assoluto sono $(1, 0)$ e $(0, -1)$; $\min_T f = -1/27$ e il punto di minimo assoluto è $(1/3, -1/3)$.

Esercizio 3 (M. Sabatini). (6 punti)

Sono dati i piani π e σ , di equazioni

$$\pi) \quad x + y - 1 = 0, \quad \sigma) \quad x + z + 1 = 0.$$

1) Scrivere le equazioni parametriche $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ della retta $r = \pi \cap \sigma$.

- 2) Per ogni valore del parametro t , trovare l'equazione cartesiana del piano η_t passante per $(x(t), y(t), z(t))$ e ortogonale a π e σ .
- 3) Determinare tutti i piani η_t passanti per il punto $(1,1,1)$.
- 4) Per tutti i piani η_t trovati al punto 3), scrivere le equazioni cartesiane della retta passante per $(1,1,1)$, contenuta in η_t e parallela al piano contenente gli assi x e y .

Soluzione.

1) Visto che la variabile x è presente in entrambe le equazioni, possiamo sceglierla come parametro ed scrivere y e z in funzione di $x = t$:

$$x = t, \quad y = 1 - t, \quad z = -1 - t.$$

Non è l'unica possibile parametrizzazione, perché ogni cambio di parametro del tipo $\tau = \pm t + k$, con k numero reale arbitrario, produce un'altra parametrizzazione. Per esempio, per $\tau = -1 - t$:

$$x = -1 - \tau, \quad y = 2 + \tau, \quad z = \tau.$$

2) Un vettore ortogonale a π si ottiene prendendo i coefficienti delle variabili nella sua equazione cartesiana, $(1, 1, 0)$, così come per σ , $(1, 0, 1)$. Il prodotto vettore di $(1, 1, 0)$ e $(1, 0, 1)$ produce il vettore dei coefficienti di un piano ortogonale a π e σ :

$$(1, 1, 0) \wedge (1, 0, 1) = (1, -1, -1),$$

quindi l'equazione di η_t sarà del tipo

$$1(x - x(t)) - 1(y - y(t)) - 1(z - z(t)) = 0.$$

Sostituendo ad $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ le espressioni ottenute sopra, abbiamo

$$\eta_t) \quad x - y - z = 3t.$$

Altre parametrizzazioni producono altre espressioni del termine noto, come

$$\eta_\tau) \quad x - y - z = -3\tau - 3.$$

3) Il piano $x - y - z = 3t$ passa per $(1, 1, 1)$ se e solo se $1 - 1 - 1 = 3t$, ovvero se e solo se $t = -\frac{1}{3}$. Quindi esiste un solo piano η_t passante per il punto $(1,1,1)$:

$$\eta_t) \quad x - y - z = 3 \left(-\frac{1}{3} \right) = -1.$$

Il piano non dipende dalla parametrizzazione scelta al punto 1).

4) I piani paralleli al piano contenente gli assi x e y hanno equazione $z = c$, con c numero reale arbitrario. Nessuno di essi è parallelo al piano $x - y - z = -1$, quindi, per ogni c , l'intersezione $z = c$ con $x - y - z = -1$ è una retta. Scegliendo $c = 1$, ovvero il piano $z = 1$, la retta intersezione di $x - y - z = -1$ e $z = 1$ passa per $(1, 1, 1)$ (che appartiene ad entrambi i piani) ed è parallela a $z = 0$, perché contenuta in $z = 1$. Quindi le sue equazioni cartesiane sono quelle dei due piani di cui è intersezione:

$$x - y - z = -1, \quad z = 1.$$

Anche in questo caso esistono infinite coppie di piani che caratterizzano la stessa retta.