

## Complementi di Analisi - 5 novembre 2010

### Esercizio 1.

Studiare massimi e minimi della funzione

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 4x + 4y + 6xy$$

sull'insieme  $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \leq 0\}$ .

#### **Soluzione:**

Osserviamo che

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 4x + 4y + 6xy = x(x + 4) + 2y(y + 2) + 6xy.$$

Considerando solo i punti di  $Q^*$ , abbiamo  $6xy > 0$  e

$$x(x + 4) > 0 \quad \text{per} \quad x < -4,$$

$$2y(y + 2) > 0 \quad \text{per} \quad y < -2.$$

Quindi  $f(x, y) > 0$  per  $x < -4$  e  $y < -2$ . Poiché  $f(0, 0) = 0$ , la funzione ha un minimo in  $[-4, 0] \times [-2, 0]$ .

Iniziamo studiando gli estremi liberi, ovvero gli estremi nell'insieme dei punti interni al dominio  $Q$ :  $Q^* = \text{int}(Q) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y < 0\}$ . Abbiamo

$$\nabla f(x, y) = (2x + 6y + 4, 6x + 4y + 4).$$

Il gradiente si annulla solo nel punto  $(-\frac{2}{7}, -\frac{4}{7})$ . La matrice hessiana è:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

ed ha determinante negativo, quindi gli autovalori hanno segno opposto. Questo comporta che il punto  $(-\frac{2}{7}, -\frac{4}{7})$  è una sella.

Studiamo la funzione sul semiasse  $x \leq 0, y = 0$ :  $f(x, 0) = x^2 + 4x$ . Questa funzione della sola  $x$  ha un minimo in  $x = -2$  dove la funzione vale  $-4$ :  $f(-2, 0) = -4$ .

Studiamo la funzione sul semiasse  $x = 0, y \leq 0$ :  $f(0, y) = 2y^2 + 4y$ . Questa funzione della sola  $y$  ha un minimo in  $y = -1$  dove la funzione vale  $-2$ :  $f(0, -1) = -2$ .

Concludendo, il punto di minimo assoluto della  $f(x, y)$  è  $(-2, 0)$ , ed il minimo è  $-4$ .

### Esercizio 2.

Calcolare l'integrale del campo vettoriale

$$F(x, y) = \left( \ln(x + y) + \frac{x}{x + y}, \frac{x}{x + y} \right)$$

lungo la curva  $\gamma(t) = (t^2, t^4)$ , con  $t \in [1, 2]$ .

#### **Soluzione:**

Verifichiamo la condizione delle derivate incrociate:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \ln(x+y) + \frac{x}{x+y} \right] = \frac{y}{(x+y)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{x}{x+y} \right].$$

Le funzioni di cui sopra esistono sull'insieme  $x+y > 0$ , un semipiano, quindi una regione semplicemente connessa. Quindi possiamo cercare il potenziale mediante il metodo di integrazione-derivazione. Iniziamo calcolando l'integrale

$$\int \frac{x}{x+y} dy = x \ln(x+y) + \alpha(x) = V(x, y).$$

La derivata di  $V(x, y)$  rispetto ad  $x$  è:

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x, y) = \ln(x+y) + \frac{x}{x+y} + \alpha'(x) = \ln(x+y) + \frac{x}{x+y},$$

quindi  $\alpha'(x) = 0$ , ovvero  $\alpha(x) = \kappa \in \mathbb{R}$ , che possiamo scegliere uguale a 0. Il nostro potenziale è

$$V(x, y) = x \ln(x+y).$$

La curva  $\gamma(t) = (t^2, t^4)$ , per  $t \in [1, 2]$  è contenuta nel semipiano  $x+y > 0$ , quindi l'integrale di  $F(x, y)$  esteso a gamma può essere calcolato come segue:

$$\int_{\gamma} F \cdot dr = V(\gamma(2)) - V(\gamma(1)) = V(4, 16) - V(1, 1) = 4 \ln(20) - \ln(2) = \ln(80.000).$$