Calcolo 3 - 6 settembre 2010

Esercizio 1

Data l'equazione differenziale

$$(\alpha^2 - 1)x''' + x'' + \alpha x' + (\alpha^4 + 1)x = 0,$$

trovare tutti i valori di α per i quali l'equazione è del secondo ordine. Per tali valori, scrivere il sistema differenziale ad essa equivalente. Trovare tutti i punti di equilibrio e studiarne la stabilità, distinguendo tra stabilità e stabilità asintotica.

Soluzione:
L'equazione è del secondo ordine per $\alpha = \pm 1$. In questi casi essa diventa:

$$x'' \pm x' + 2x = 0.$$

Usando il simbolo $\mp$ possiamo scrivere sinteticamente i due sistemi equivalenti alle due equazioni differenziali:

$$x' = y, \qquad y' = -2x \mp y.$$

L'unico punto di equilibrio è l'origine, che è asintoticamente stabile per il sistema:

$$x' = y, \qquad y' = -2x - y,$$

ed è è asintoticamente stabile nel passato per il sistema:

$$x' = y, \qquad y' = -2x + y.$$

Esercizio 2

Si consideri la successione di funzioni: $f_n(x) = \ln \frac{5(x+n)^4+3}{(x+n)^4+1}$
a) Determinare l'insieme E di convergenza puntuale e la funzione limite $f(x)$.
b) Studiare la convergenza uniforme di f_n in E o in opportuni sottoinsiemi di E.

Soluzione:
a)$E = \mathbb{R}$ $f(x) = \ln 5$.
b) f_n non converge uniformemente ad f in E, ma converge uniformemente in ogni intervallo $[a, +\infty)$ con $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3

a) Posto:

$$L = D^4 - D^3 + 8D - 8, \quad b(x) = 90e^x + 70e^{-x}$$

determinare tutte le soluzioni di $Ly = 0$.
b) Determinare con il metodo degli annichilatori l'integrale generale di $Ly = b$ specificando l'annichilatore di b.
c) Determinare, qualora esistano, tutte le soluzioni, sia di $Ly = 0$ sia di $Ly = b$, limitate in $(0, +\infty)$.

Analogamente determinare tutte le soluzioni periodiche in $(0, +\infty)$.

Soluzione:
a) $y(x) = c_0 e^x + c_1 e^{-2x} + c_2 e^x \cos(\sqrt{3}x) + c_3 e^x \sin(\sqrt{3}x)$, $c_i \in \mathbb{R}$.
b) $A = (D-1)(D+1)$. $y(x) = c_0 e^x + c_1 e^{-2x} + c_2 e^x \cos(\sqrt{3}x) + c_3 e^x \sin(\sqrt{3}x) + 10xe^x - 5e^{-x}$, $c_i \in \mathbb{R}$.
c) Le soluzioni di $Ly = 0$ *in* $(0, +\infty)$ *sono limitate se e solo se* $c_0 = c_2 = c_3 = 0$*. Non esistono soluzioni limitate di* $Ly = b$ *in* $(0, +\infty)$*. Non esistono soluzioni periodiche di* $Ly = 0$ *a parte la soluzione identicamente nulla. Non esistono soluzioni periodiche di* $Ly = b$ *in* $(0, +\infty)$*.*

Esercizio 4

1. Scrivere la somma della serie di potenze
$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+2)x^n}{n(n-1)}.$$

2. Calcolare la derivata quinta di $f(x)$ nell'origine.

Soluzione:
1.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+2)x^n}{n(n-1)} = 2x + (2-3x)\ln|1-x|.$$

2.
$$f^{(5)}(0) = 42.$$