

Complementi di Analisi Matematica

30 settembre 2011

Esercizio 1

Studiare gli estremi della funzione $F(x, y) = x^2 + xy + y^2$ nel quadrato $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 0, -2 \leq y \leq 0\}$.

Soluzione:

Il gradiente della funzione data è

$$\nabla F(x, y) = (2x + y, x + 2y).$$

Esso si annulla solo nel punto $(0, 0)$, in cui la matrice hessiana

$$H_F(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

è definita positiva. Se consideriamo $F(x, y)$ in un cerchio centrato in $(0, 0)$, questo è sufficiente a dimostrare che l'origine è un punto di minimo, quindi è di minimo locale anche per $F(x, y)$ nel quadrato. Inoltre $F(0, 0) = 0$.

Per studiare gli estremi sul bordo, possiamo studiare il comportamento della $F(x, y)$ separatamente sui quattro lati del quadrato.

1. Lato contenuto in $y = 0$.

Per $-2 \leq x \leq 0$, $F(x, 0) = x^2$ ha un minimo in $x = 0$ ed un massimo in $x = -2$; $F(-2, 0) = 4$.

2. Lato contenuto in $x = -2$.

Per $-2 \leq y \leq 0$, $F(-2, y) = 4 - 2y + y^2$ ha derivata $-2 + 2y$, negativa per $-2 \leq y \leq 0$. $F(-2, y)$ ha un minimo in $y = 0$ ed un massimo in $y = -2$; $F(-2, 0) = 4$, $F(-2, -2) = 12$.

3. Lato contenuto in $y = -2$.

Per $-2 \leq x \leq 0$, $F(x, -2) = x^2 - 2x + 4$ ha derivata $2x - 2$, negativa per $-2 \leq x \leq 0$. $F(x, -2)$ ha un minimo in $x = 0$ ed un massimo in $x = -2$; $F(0, -2) = 4$, $F(-2, -2) = 12$.

4. Lato contenuto in $x = 0$.

Per $-2 \leq y \leq 0$, $F(0, y) = y^2$ ha un minimo in $y = 0$ ed un massimo in $y = -2$; $F(0, -2) = 4$.

Concludendo, $F(x, y)$ ha un minimo nell'origine, dove vale 0, ed un massimo in $(-2, -2)$, dove vale 12.

Esercizio 2

Determinare tutti i valori del parametro reale α per i quali il campo vettoriale

$$V(x, y) = \left(e^{xy}(\alpha x + x^2 y + y^2), e^{xy}(1 + x^3 + xy) \right)$$

è conservativo. Per tali valori, calcolare l'integrale di linea di $V(x, y)$ lungo la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, con $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$.

Soluzione:

Il campo $V(x, y)$ è definito in tutto il piano, che è semplicemente connesso, quindi è sufficiente considerare la condizione delle derivate incrociate:

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = e^{xy}(\alpha x^2 + x^3 y + xy^2 + x^2 + 2y) = e^{xy}(2y + x^3 y + xy^2 + 3x^2) = \frac{\partial V_2}{\partial x}$$

Dividendo per e^{xy} ed eliminando i termini uguali, otteniamo la relazione

$$(a - 2)x^2 = 0,$$

che è verificata in tutto il piano se e solo se $a = 2$. Applicando il consueto procedimento di integrazione-derivazione-integrazione, otteniamo il potenziale:

$$\Phi(x, y) = (x^2 + y)e^{xy}.$$

L'integrale richiesto è la differenza dei valori di $\Phi(x, y)$ agli estremi del cammino d'integrazione: $\Phi(0, -1) - \Phi(0, 1) = -1 - 1 = -2$.

Esercizio 3

Trovare tre valori dei parametri reali a, b, c per i quali i tre piani

$$ax + y + z = 1, \quad x + by + z = -3, \quad x + y + cz = 0,$$

non hanno punti in comune, ovvero, non esiste un punto P appartenente a tutti e tre i piani.

Soluzione:

Questo esercizio ha infinite soluzioni. Una delle più semplici è quella che si ottiene prendendo $a = b = c = 1$, in modo da avere tre piani paralleli e distinti, perchè $1 \neq -3 \neq 0 \neq 1$:

$$ax + y + z = 1, \quad x + by + z = -3, \quad x + y + cz = 0.$$

Un'altra si ottiene scegliendo $a = b = 1$, in modo che i primi due piani siano paralleli, e scegliendo qualsiasi altro valore per c , che non può aggiungere punti in comune a due piani senza punti comuni. Stesso discorso per $c = b = 1$, oppure per $a = c = 1$.

Esercizio 4

1. Ci viene proposto di giocare con un dado con la seguente regola, che determina vincite e perdite in relazione ai punti che appaiono sulle facce del dado (V sta per vincita, eventualmente negativa):

$$V(1) = 10 \quad V(2) = -3 \quad V(3) = 5 \quad V(4) = 2 \quad V(5) = 1 \quad V(6) = -12.$$

Supponendo di poter giocare senza limiti di tempo, conviene accettare la proposta?

2. Successivamente veniamo informati che il dado è truccato, e che la probabilità che escano i punteggi indicati sulle facce del dado sono le seguenti:

$$P(1) = 0,15 \quad P(2) = 0,05 \quad P(3) = 0,10 \quad P(4) = 0,20 \quad P(5) = 0,28 \quad P(6) = 0,22.$$

In questo caso conviene giocare?

3. E' possibile modificare vincite e perdite, sia nel punto 1. che nel punto 2., in modo che nel lungo termine non si vinca né si perda? Come?

Soluzione:

1. Ogni punteggio del dado ha la stessa probabilità, $\frac{1}{6}$, di uscire, quindi la vincita media è

$$V_m = \frac{10 - 3 + 5 + 2 + 1 - 12}{6} = \frac{3}{6} > 0.$$

In questo caso giocare è conveniente.

2. In questo caso la vincita media è

$$V_m = 10 \cdot 0,15 - 3 \cdot 0,05 + 5 \cdot 0,10 + 2 \cdot 0,20 + 1 \cdot 0,28 - 12 \cdot 0,22 = -0,11 < 0.$$

In questo caso giocare non è conveniente.

3. Questa domanda ammette infinite risposte. È sufficiente alterare una delle vincite in modo da avere media nulla. Quindi, per esempio:

3.1. $V(1) = 10 - 3 = 7.$

3.2. $V(2) = 5 + \frac{11}{10} = \frac{61}{10}.$