Analisi 1 - 16 gennaio 2012

Esercizio 1

Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = (x-1)e^{\frac{x}{x-1}}$$

Soluzione:

Il campo di esistenza è $E = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$. *La funzione ha derivate di ogni ordine in* E. *In particolare:*

$$f'(x) = \frac{x-2}{x-1}e^{\frac{x}{x-1}},$$

$$f''(x) = \frac{1}{(x-1)^3}e^{\frac{x}{x-1}}.$$

La derivata prima si annulla in 2, *e:*

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty), \qquad f'(x) < 0 \iff x \in (1, 2),$$

quindi $f(x)$ *ha un minimo in* $x = 2$, *con* $f(2) = e^2$. *Inoltre* $f(x)$ *è concava in* $(-\infty, 1)$, *convessa in* $(1, +\infty)$. *Ai bordi di* E *abbiamo:*

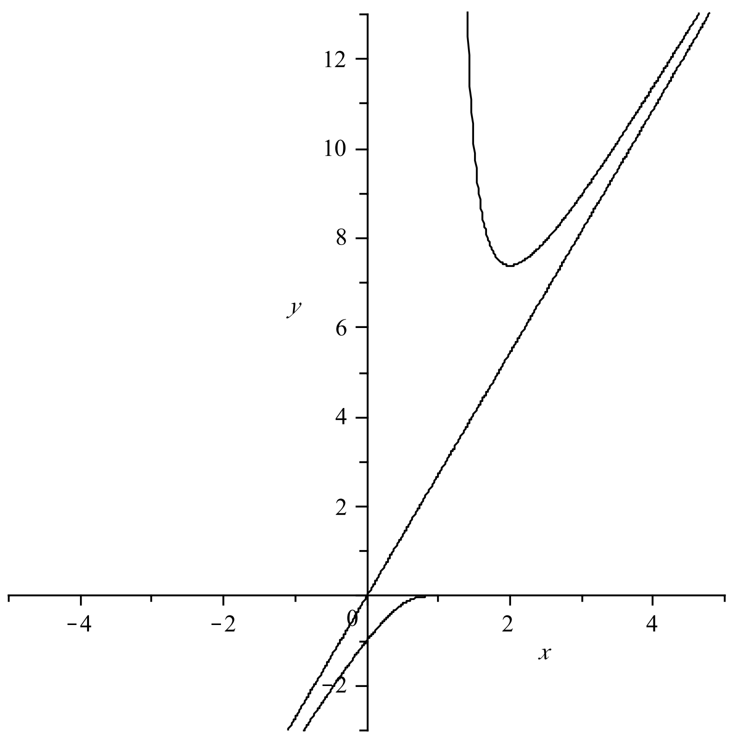
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0^-, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty.$$

Per gli asintoti obliqui abbiamo:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = e, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ex = 0,$$

quindi la retta $y = ex$ *è asintoto obliquo sia a* $-\infty$ *che a* $+\infty$. *Il grafico di* $f(x)$ *è questo:*



Esercizio 2

Determinare tutti i valori di λ, se esistono, per i quali:

$$\int_0^\pi \Big(x\cos x + (x-\lambda)\sin(x)\Big)\,dx = 0.$$

Soluzione:
Sappiamo che

$$\int \Big(x\cos x + (x-\lambda)\sin(x)\Big)\,dx = (ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x + k, \qquad k \in \mathbb{R},$$

per opportuni valori di $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, da determinarsi. Deriviamo la funzione $(ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x + k$, imponendo l'uguaglianza con $x\cos x + (x-\lambda)\sin(x)$:

$$\Big[(ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x + k\Big]' = x\cos x + (x-\lambda)\sin(x),$$

$$(a+cx+d)\cos x + (-ax-b+c)\sin x = x\cos x + (x-\lambda)\sin(x).$$

Per avere l'uguaglianza i coefficienti devono verificare le seguenti relazioni:

$$c = 1, \quad a+d = 0, \quad -a = 1, \quad -b+c = -\lambda.$$

Risolvendo il sistema di equazioni, otteniamo

$$a = -1, \quad b = 1+\lambda, \quad c = 1, \quad d = 1.$$

Possiamo concludere che

$$\int \Big(x\cos x + (x-\lambda)\sin(x)\Big)\,dx = (-x+1+\lambda)\cos x + (x+1)\sin x + k, \qquad k \in \mathbb{R},$$

quindi

$$\int_o^\pi \Big(x\cos x + (x-\lambda)\sin(x)\Big)\,dx = \Big[(-x+1+\lambda)\cos x + (x+1)\sin x + k\Big]_0^\pi = -2-2\lambda+\pi.$$

L'integrale si annulla se e solo se

$$\lambda = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Esercizio 3

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\Big(\ln(x^2+1) - 2\ln x\Big)$$

Soluzione:

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\Big(\ln(x^2+1) - 2\ln x\Big) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\left(\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)\right) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 4\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\frac{1}{x^3}x^{\frac{3}{2}} = 4\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{1+x^2}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^3} = 4\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} = 0.$$