

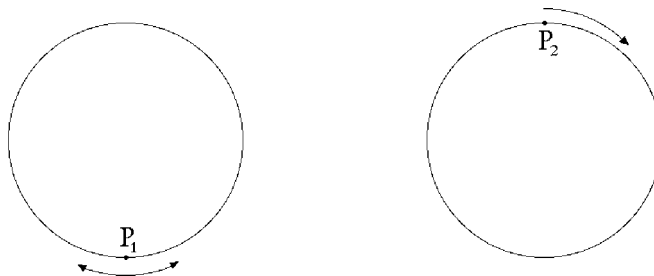
Stabilità e piccole oscillazioni

Dispense per i corsi di Meccanica Razionale 1 e 2

di Stefano Siboni

1. Nozione intuitiva di stabilità ed instabilità

Il comune senso fisico suggerisce l'idea intuitiva che gli equilibri di un sistema meccanico possano manifestare comportamenti molto diversi sotto l'effetto di piccole perturbazioni. Un chiaro esempio è offerto dal **pendolo semplice**, nel quale un punto materiale pesante P è vincolato a restare su una circonferenza fissa e liscia disposta in un piano verticale. Il teorema dei lavori virtuali consente di individuare due configurazioni di equilibrio corrispondenti, come ben noto, alle posizioni P_1 e P_2 rispettivamente di minima e massima quota di P lungo la circonferenza vincolare. È evidente che piccole perturbazioni del dato iniziale rispetto alla posizione di equilibrio P_1 danno luogo a moti oscillatori localizzati nell'intorno della stessa configurazione, con velocità che poco si discostano da zero: *una piccola perturbazione delle condizioni iniziali determina un moto prossimo allo stato di quiete nella posizione di equilibrio*. Questo genere di comportamento deve intendersi caratteristico dell'**equilibrio stabile** ed esprime l'idea intuitiva, corrente, di stabilità.



Per contro, modificando un poco posizione e velocità iniziali rispetto ai valori di equilibrio in P_2 , il moto del sistema risulta profondamente alterato ed anziché mantenersi prossimo alla configurazione di equilibrio il punto P tende rapidamente ad allontanarsi da questa: *una piccola perturbazione del dato iniziale modifica completamente il moto del sistema*, concetto questo che esprime l'idea intuitiva di **equilibrio instabile**. I concetti di stabilità ed instabilità dell'equilibrio possono essere formalizzati in molti modi diversi. Fra le molte definizioni possibili, la nozione più generale — ed interessante per le applicazioni — è quella dovuta a Liapunov.

2. Stabilità secondo Liapunov

Si consideri l'equazione differenziale ordinaria del primo ordine in forma normale ed autonoma

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ed Ω aperto di \mathbb{R}^n . Il secondo membro f dell'equazione si assume di regolarità sufficiente ad assicurare la validità del teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni massimali per il problema di Cauchy — ad esempio si può ritenere f di classe C^1 sull'aperto Ω . Posto $0 \in \Omega$ ed assunto $f(0) = 0$, è evidente che

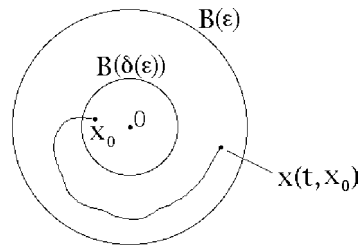
$$x(t) = 0 \quad , \quad t \in \mathbb{R},$$

è una soluzione costante dell'equazione (2.1). Allora

la soluzione $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$, di (2.1) si dice stabile secondo Liapunov se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tale che $\forall x_0 \in \Omega, |x_0| < \delta(\varepsilon)$, la corrispondente soluzione massimale $x(t, x_0)$ dell'equazione (2.1) con dato iniziale $x(0) = x_0$ soddisfa la condizione

$$|x(t, x_0)| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$

Il significato geometrico di tale definizione è evidente: considerata una qualsiasi sfera $B(\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$ di raggio ε e centro 0, è sempre possibile determinare una seconda sfera $B(\delta(\varepsilon))$, di raggio $\delta(\varepsilon)$ e centro 0, in modo che presa una qualsiasi condizione iniziale $x(0) = x_0 \in B(\delta(\varepsilon))$ l'orbita della corrispondente soluzione massimale $x(t, x_0)$ si mantiene entro la sfera $B(\varepsilon)$ indefinitamente nel futuro, ossia per ogni $t \geq 0$.



La definizione precedente si riferisce all'andamento della soluzione perturbata per $t \geq 0$ ed è altrimenti nota come **stabilità nel futuro**. In modo analogo, la stessa definizione applicata per $t \leq 0$ conduce alla nozione di **stabilità nel passato** della soluzione costante $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$. Di regola, in mancanza di diversa esplicita indicazione, la stabilità della soluzione $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$, si conviene debba essere intesa come stabilità nel futuro.

3. Instabilità secondo Liapunov

L'instabilità secondo Liapunov consiste nella semplice esclusione della stabilità.

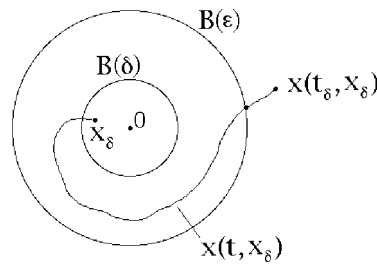
La soluzione $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$, di (2.1) si definisce instabile secondo Liapunov quando non è stabile.

Tale definizione coincide pertanto con la negazione logica della definizione formale di stabilità e può dunque rendersi nella forma riportata di seguito:

$\exists \varepsilon > 0$ tale che $\forall \delta > 0 \exists x_\delta \in \Omega, |x_\delta| < \delta$, per cui la corrispondente soluzione massimale $x(t, x_\delta)$ di (2.1), di dato iniziale $x(0) = x_\delta$, ammette un istante $t_\delta > 0$ in cui soddisfa

$$|x(t_\delta, x_\delta)| > \varepsilon.$$

La soluzione $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$, è dunque instabile se è possibile determinare una sfera $B(\varepsilon)$, di raggio ε e centro 0, tale che in ogni sfera centrata in 0 e di raggio arbitrario δ esiste almeno un punto x_δ che assunto come condizione iniziale $x(0) = x_\delta$ dà luogo ad una soluzione $x(t, x_\delta)$ la cui orbita esce dalla sfera $B(\varepsilon)$ ad un istante $t_\delta > 0$ opportuno.



Appare evidente il **carattere dicotomico** della definizione di stabilità e instabilità della soluzione costante $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$, in quanto tale soluzione può risultare esclusivamente o stabile o instabile secondo Liapunov e non sono date ulteriori possibilità — condizione del terzo escluso. Non esiste, in particolare, l’analogo dell’**equilibrio indifferente** che è talora introdotto nello studio della meccanica elementare — tipicamente gli equilibri “indifferenti” vanno interpretati come instabili nel senso di Liapunov. Vale inoltre la precisazione, già sottolineata a proposito della stabilità, che la definizione precedente deve essere intesa come instabilità **nel futuro**, da presumersi in mancanza di diversa indicazione. In modo analogo è possibile introdurre una nozione **instabilità nel passato**, formalmente analoga alla precedente ma relativa agli istanti $t \leq 0$ anzichè $t \geq 0$.

4. Attrattività

Un concetto molto importante nello studio qualitativo delle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie è quello di attrattività, formalizzato secondo la definizione seguente.

La soluzione $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$, dell’equazione (2.1) si dice attrattiva se:

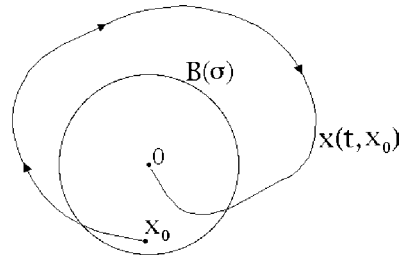
- (i) esiste una sfera $B(\sigma) \subset \Omega$, di centro 0 e raggio $\sigma > 0$ tale che $\forall x_0 \in B(\sigma)$ la soluzione massimale $x(t, x_0)$, di condizione iniziale $x(0) = x_0$, è definita almeno $\forall t \geq 0$;
- (ii) $\forall x_0 \in B(\sigma)$ la corrispondente soluzione tende alla soluzione costante imperturbata per $t \rightarrow +\infty$

$$\exists \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, x_0) = 0.$$

Si osservi che la condizione (i) costituisce la necessaria premessa affinché possa sussistere il requisito (ii), dal momento che l’esistenza del limite per $t \rightarrow +\infty$ della soluzione perturbata

$x(t, x_0)$ presuppone che detta soluzione sia definita perlomeno nell'intero intervallo $[0, +\infty)$ dell'asse dei tempi.

Il significato geometrico della definizione è molto semplice da interpretare: a patto di considerare perturbazioni sul dato iniziale di modulo non troppo grande — $|x_0| < \sigma$ — la soluzione perturbata di dato iniziale corrispondente risulta definita a tutti i tempi nel futuro e per $t \rightarrow +\infty$ tende a collapsare verso la soluzione costante imperturbata $x(t) = 0$. La soluzione imperturbata si comporta quindi, nel futuro, come se tendesse ad attrarre verso di sé le soluzioni vicine, e questo giustifica euristicamente la denominazione adottata.



5. Stabilità asintotica

Di particolare interesse applicativo sono le soluzioni costanti che manifestino, nello stesso tempo, proprietà di stabilità e di attrattività. Si ha così l'importante definizione sotto riportata.

La soluzione costante $x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, del sistema (2.1) si dice asintoticamente stabile quando è stabile ed attrattiva nel senso di Liapunov.

Non soltanto la soluzione perturbata di dato iniziale x_0 si mantiene indefinitamente prossima alla soluzione imperturbata $x(t) = 0$ nel futuro, ma nel limite di $t \rightarrow +\infty$ tende persino a $x = 0$.

6. Indipendenza delle proprietà di stabilità ed attrattività

Per quanto possa apparire sorprendente ad un primo esame, le nozioni di stabilità ed attrattività di una soluzione costante $x(t) = 0$ sono totalmente indipendenti fra di loro. È così possibile avere soluzioni stabili che non risultano attrattive, oppure soluzioni attrattive ma instabili.

Una tipico caso di soluzione stabile ma non attrattiva è quello delle soluzioni statiche stabili nei sistemi scleronomi posizionali conservativi, laddove la stabilità viene riconosciuta nei punti di massimo relativo proprio del potenziale — come si vedrà nel seguito — sfruttando la conservazione dell'energia meccanica e le “buche” di energia potenziale; per tali soluzioni, la continuità dell'integrale primo dell'energia meccanica e la conservazione di questa consentono di escludere l'attrattività e dunque la stabilità asintotica.

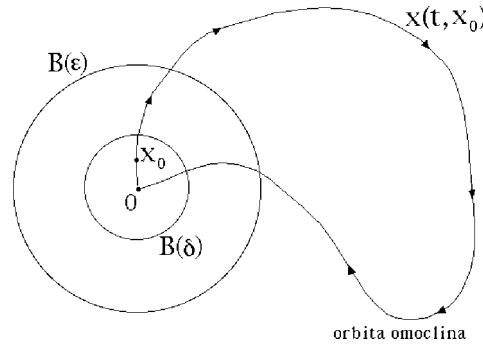
Per contro, non è difficile immaginare casi di soluzioni costanti attrattive ed instabili.

È quanto avviene, ad esempio, per la soluzione attrattiva $x(t) = 0$ allorché esista una **soluzione omoclina** $x(t, x_0)$, definita $\forall t \in \mathbb{R}$ e soddisfacente la condizione

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, x_0) = \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t, x_0) = 0.$$

Nella fattispecie si ha infatti che:

- (i) l'essere $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, x_0) = 0$ è compatibile con l'attrattività della soluzione imperturbata $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$;
- (ii) la condizione $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t, x_0) = 0$ assicura l'instabilità nel futuro della soluzione imperturbata, grazie al carattere autonomo del sistema (2.1). Appare infatti evidente che qualunque sfera di centro 0 e raggio δ abbastanza piccolo racchiude almeno un punto diverso da zero dell'orbita di $x(t, x_0)$. Nel futuro, la soluzione di dato iniziale $x(0) = x_0$ non può che percorrere l'orbita di $x(t, x_0)$ e dovrà quindi fuoriuscire da qualsiasi sfera prefissata di centro 0 e raggio ε sufficientemente piccolo, in modo da non contenere per intero l'orbita omoclina $\{x(t, x_0), t \in \mathbb{R}\}$.



Non banale appare allora la precedente definizione di stabilità asintotica, che descrive il simultaneo e non ovvio sussistere delle proprietà di stabilità e di attrattività, né può in generale escludersi che entrambe le proprietà possano venire meno — esistono soluzioni che risultano al tempo stesso instabili e non attrattive.

6.1 Esempio di punto fisso attrattivo ma instabile

Si tratta di un sistema autonomo di due equazioni differenziali scalari del primo ordine in forma normale nelle variabili dipendenti x e y . Il sistema è dato da

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

con

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2(y - x) + y^5}{(x^2 + y^2)[1 + (x^2 + y^2)^2]} & \text{se } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (6.1)$$

e

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2(y - 2x)}{(x^2 + y^2)[1 + (x^2 + y^2)^2]} & \text{se } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \quad (6.2)$$

Poiché il denominatore comune alle due espressioni si annulla unicamente nell'origine $(x, y) = (0, 0)$, il secondo membro dell'equazione differenziale risulta chiaramente di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, in quanto quoziente di polinomi con denominatore diverso da zero. I soli problemi di regolarità si hanno quindi nell'origine. Il campo vettoriale $\vec{F} = (f, g)$ è C^1 in tutto il piano \mathbb{R}^2 privato dell'origine $(x, y) = (0, 0)$ e in tale dominio aperto soddisfa perciò il teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni massimali per qualsiasi problema di Cauchy. Si osservi che le soluzioni massimali del sistema sull'aperto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ non possono contenere l'origine entro le proprie orbite, in quanto $(x, y) = (0, 0)$ non appartiene al dominio considerato. È d'altra parte evidente come, in forza delle definizioni (6.1) e (6.2), la funzione $(x(t), y(t)) = (0, 0), \forall t \in \mathbb{R}$, sia soluzione massimale del sistema considerato su \mathbb{R}^2 . Se ne conclude che, sebbene la funzione (f, g) non soddisfi in \mathbb{R}^2 le condizioni usuali per l'applicabilità del teorema di esistenza ed unicità, l'esistenza e l'unicità della soluzione massimale per ogni problema di Cauchy in \mathbb{R}^2 sono comunque assicurate. Le stesse definizioni (6.1) e (6.2) mostrano inoltre che le funzioni $f(x, y)$ e $g(x, y)$ non risultano mai simultaneamente nulle per $(x, y) \neq (0, 0)$, in modo che il sistema non ammette punti fissi in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e $(x, y) = (0, 0)$ costituisce l'*unico* punto fisso del sistema in \mathbb{R}^2 . Per completezza, conviene comunque verificare che il campo è continuo anche in $(0, 0)$. Passando alle coordinate polari piane (ρ, ϕ) definite da $x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi, \forall \rho > 0$ si ha infatti:

$$\begin{aligned} \frac{|f(x, y) - f(0, 0)|}{|(x, y)|} &= \frac{|f(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) - f(0, 0)|}{\rho} = \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{|\rho^2 \cos^2 \phi (\rho \sin \phi - \rho \cos \phi) + \rho^5 \sin^5 \phi|}{\rho^2(1 + \rho^4)} = \\ &= \frac{1}{1 + \rho^4} |\cos^2 \phi (\sin \phi - \cos \phi) + \rho^2 \sin^5 \phi| \leq \\ &\leq |\cos^2 \phi (\sin \phi - \cos \phi) + \rho^2 \sin^5 \phi| \leq 2 + \rho^2 \end{aligned}$$

ed analogamente

$$\begin{aligned} \frac{|g(x, y) - g(0, 0)|}{|(x, y)|} &= \frac{|g(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) - g(0, 0)|}{\rho} = \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{|\rho^2 \sin^2 \phi (\rho \sin \phi - 2\rho \cos \phi)|}{\rho^2(1 + \rho^4)} = \frac{1}{1 + \rho^4} |\sin^2 \phi (\sin \phi - 2 \cos \phi)| \leq \\ &\leq |\sin^2 \phi (\sin \phi - 2 \cos \phi)| \leq 3, \end{aligned}$$

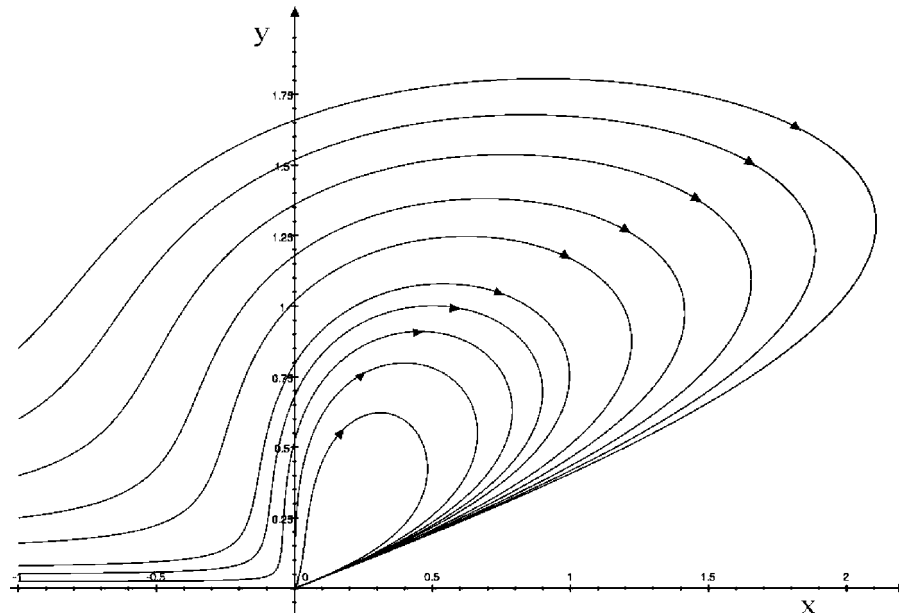
in modo che $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tale che $x^2 + y^2 < 1$ risulta

$$|\vec{F}(x, y) - \vec{F}(0, 0)| \leq 3|(x, y)|,$$

relazione ovviamente verificata in $(x, y) = (0, 0)$. Ciò basta a provare la disuguaglianza

$$|\vec{F}(x, y) - \vec{F}(0, 0)| \leq 3|(x, y)| \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 < 1 \quad (6.3)$$

e la conseguente continuità del campo in $(0, 0)$. Analizzando l'andamento delle funzioni f e g , e notando in particolare che $g(x, y)$ cambia di segno in corrispondenza della retta $y - 2x = 0$, si può tratteggiare il ritratto di fase in figura:



Viene rappresentata soltanto la porzione del ritratto di fase corrispondente al semipiano chiuso $y \geq 0$ in quanto le equazioni sono chiaramente invarianti sotto la trasformazione di simmetria

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow (-x, -y) \in \mathbb{R}^2$$

che permette di riconoscere nell'origine un *centro di simmetria* del sistema. Il ritratto di fase mostra come tutte le soluzioni tendono all'origine per $t \rightarrow +\infty$, garantendo così l'*attrattività* del punto fisso. *La stabilità è tuttavia esclusa* a causa della infinità di *orbite omocline* collocate nel primo quadrante del piano xy e tendenti all'origine per $t \rightarrow \pm\infty$.

7. Estensione a soluzioni costanti qualsiasi

Nell'equazione (2.1) si assuma $f(x^*) = 0$ per un $x^* \in \Omega$ opportuno. L'equazione ammette allora la soluzione costante

$$x(t) = x^*, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Detta soluzione può essere facilmente condotta al caso della soluzione costante $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$, per mezzo di una traslazione del sistema di coordinate, ovvero mediante il cambiamento di variabile $x \rightarrow y$ definito da

$$x = x^* + y, \quad y \in \Omega - x^* = \{x - x^* : x \in \Omega\}$$

che, essendo $\dot{x} = \dot{y}$ e $f(x^* + y) = g(y)$, consente di riscrivere l'equazione differenziale nella forma

$$\dot{y} = f(x^* + y) = g(y)$$

di cui $y(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ è la soluzione corrispondente a $x(t) = x^*$ nelle coordinate originarie. La proprietà di stabilità, instabilità, attrattività, stabilità asintotica di $x(t) = x^*$ si definiscono attraverso la soluzione $y(t) = 0$ corrispondente. Si hanno così le definizioni seguenti.

Stabilità

La soluzione $x(t) = x^*$ è stabile secondo Liapunov se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tale che $\forall x_0 \in \Omega, |x_0 - x^*| < \delta(\varepsilon)$, la soluzione massimale di dato iniziale $x(0) = x_0$ soddisfa

$$|x(t, x_0) - x^*| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$

Instabilità

La soluzione $x(t) = x^*$ si dice instabile se $\exists \varepsilon > 0$ fissato tale che $\forall \delta > 0$ è possibile determinare un x_δ contenuto nella sfera $B(x^*, \delta)$, di centro x^* e raggio δ , in modo che la soluzione massimale $x(t, x_\delta)$ del problema di Cauchy $x(0) = x_\delta$ esce dalla sfera $B(x^*, \varepsilon)$, di centro x^* e raggio ε , ad un istante appropriato $t_\delta > 0$:

$$\exists t_\delta > 0 : |x(t_\delta, x_\delta) - x^*| \geq \varepsilon.$$

Attrattività

La soluzione $x(t) = x^*$ è attrattiva per l'equazione (2.1) se:

(i) esiste una sfera $B(x^*, \sigma) \subset \Omega$, di centro x^* e raggio $\sigma > 0$, tale che $\forall x_0 \in B(x^*, \sigma)$ la soluzione massimale $x(t, x_0)$ del problema di Cauchy $x(0) = x_0$ risulta definita almeno $\forall t \geq 0$ — cioè a tutti i tempi futuri;

(ii) $\forall x_0 \in B(x^*, \sigma)$ la soluzione massimale corrispondente al dato iniziale x_0 tende per $t \rightarrow +\infty$ alla soluzione costante x^*

$$\exists \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, x_0) = x^*.$$

Stabilità asintotica

La soluzione $x(t) = x^*$ si dice asintoticamente stabile quando è al tempo stesso stabile ed attrattiva.

Si osservi che tutte le precedenti definizioni differiscono da quelle già illustrate soltanto per la scelta del centro delle sfere, collocato in x^* anzichè in $x = 0$. Nella caratterizzazione delle proprietà di stabilità delle soluzioni costanti ci si limiterà pertanto a considerare, senza alcuna perdita di generalità, il caso di $x^* = 0$ — al quale è sempre dato ricondursi a prezzo di una semplice traslazione delle variabili.

8. Estensione a soluzioni arbitrarie

Le definizioni di stabilità, instabilità ed attrattività possono essere estese facilmente a soluzioni $x(t)$ qualsivoglia, purché definite a tutti i tempi nel futuro

$$x(t), \quad t \geq 0.$$

A titolo di esempio, si illustra la definizione generale di stabilità di una soluzione $x(t)$ della (2.1). L'idea è quella di considerare il cambiamento di variabili

$$y = x - x(t)$$

in modo da trasformare l'equazione (2.1) nel sistema non autonomo equivalente

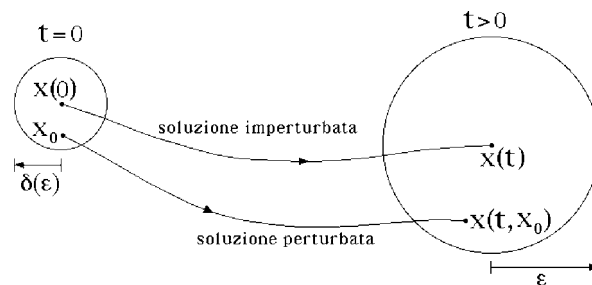
$$\dot{y} = f(y + x(t)) - \dot{x}(t) \stackrel{\text{def}}{=} g(t, y)$$

la cui soluzione costante $y(t) = 0, t \geq 0$, corrisponde alla $x(t)$ del sistema originale. La stabilità di $x(t)$ viene allora identificata, per definizione, con quella della soluzione costante $y(t) = 0$ nel nuovo sistema di coordinate. Tornando alle variabili x , la definizione assume perciò la forma seguente:

La soluzione $x(t), t \geq 0$, di (2.1) è detta stabile nel senso di Liapunov se $\forall \varepsilon > 0$ esiste un $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che per ogni condizione iniziale x_0 al tempo $t = 0$, con $|x_0 - x(0)| < \delta(\varepsilon)$, la corrispondente soluzione massimale $x(t, x_0)$ soddisfa

$$|x(t, x_0) - x(t)| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$

In altri termini, comunque si fissi un ε positivo è sempre possibile determinare un $\delta(\varepsilon) > 0$ — che risulterà necessariamente non superiore ad ε — tale che assumendo un dato iniziale x_0 all'istante $t = 0$ ad una distanza minore di $\delta(\varepsilon)$ da $x(0)$, la distanza fra le soluzioni imperturbata e perturbata si mantiene minore di ε ad ogni istante successivo.

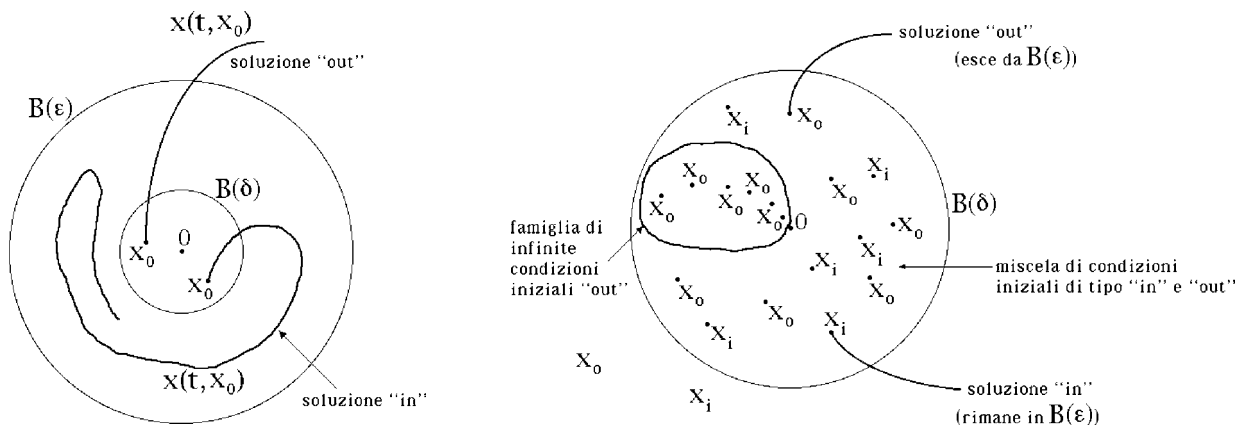


9. Osservazione sul significato fisico della instabilità secondo Liapunov

La definizione di instabilità secondo Liapunov risulta estremamente semplice, essendo identificata con l'assenza di stabilità. C'è tuttavia un prezzo da pagare: il comportamento sotto perturbazione di una soluzione instabile nel senso di Liapunov è assai meno ovvio di quanto non si possa supporre a prima vista, e non è immediato conciliare quanto previsto dalla definizione formale di instabilità con il comportamento che ci si aspetta secondo il concetto intuitivo, fisico, di instabilità — ovvero secondo il comune buon senso.

L'idea intuitiva di instabilità induce a ritenere che una piccola perturbazione del dato iniziale nell'intorno di una soluzione costante instabile debba necessariamente dare luogo ad una soluzione che rapidamente si allontana nel tempo dalla soluzione imperturbata, dalla quale viene a differire in modo importante ed in tempi molto brevi. È quanto ci si aspetta, ad esempio, nel caso dell'equilibrio meccanico, quando si perturba il dato iniziale di un equilibrio instabile: il sistema tenderà ad allontanarsi rapidamente dallo stato di quiete nella configurazione di equilibrio instabile, spostandosi dalla configurazione di equilibrio ed acquistando velocità. Tuttavia, **non è questo tipo di comportamento che la definizione di instabilità alla Liapunov prevede**, in generale. Dalla definizione si ha infatti che è definita una sfera $B(\varepsilon)$ tale che in qualsiasi sfera $B(\delta)$ sia sempre possibile individuare almeno una condizione iniziale $x_0 \neq 0$ la cui corrispondente soluzione massimale $x(t, x_0)$ abbandona la sfera $B(\varepsilon)$ ad un istante $t > 0$ opportuno — dipendente dalla soluzione perturbata prescelta. È facile convincersi che, ripetendo lo stesso argomento con un raggio δ minore della distanza fra x_0 e 0, è possibile individuare una seconda condizione iniziale, distinta dalla precedente, che dia luogo ad una soluzione massimale uscente da $B(\varepsilon)$ ad un istante futuro opportuno. Per induzione, si conclude infine che esiste almeno tutta una successione di punti, convergente a 0, le cui corrispondenti soluzioni massimali escono dalla sfera prefissata $B(\varepsilon)$ a patto di attendere per un intervallo di tempo sufficientemente lungo — ogni soluzione ha il proprio, naturalmente. **La definizione di instabilità assicura che in un intorno della soluzione instabile $x = 0$ esiste una infinità di dati iniziali corrispondenti a soluzioni che si allontanano dalla soluzione costante**, ma non esclude che nello stesso intorno possano esistere dati iniziali associati a soluzioni che non si allontanano affatto dalla soluzione statica. Se in maniera del tutto informale denominiamo **soluzioni “in”** quelle che si mantengono indefinitamente entro la sfera $B(\varepsilon)$ e **soluzioni “out”** quelle che, viceversa, fuoriescono dalla stessa sfera ad un istante positivo conveniente, l'instabilità garantisce che in un qualsiasi intorno di $x = 0$ esistono infinite condizioni iniziali corrispondenti a soluzioni “out”, ma nulla afferma circa le condizioni iniziali delle eventuali soluzioni “in”. Qualsiasi intorno di $x = 0$ potrebbe consistere, in effetti, di una complicata miscela di condizioni iniziali di tipo “out” e di tipo “in”, e non è neppure evidente quali fra queste condizioni iniziali siano più numerose: potrebbe allora darsi il caso che, introducendo una perturbazione del tutto casuale sul dato iniziale, la soluzione perturbata sia di tipo “in”, mantenendosi perciò prossima alla soluzione costante instabile per ogni istante futuro, comportamento bizzarro e contrario all'idea intuitiva di instabilità. Potrebbe persino ricorrere una circostanza ancora più bizzarra: che cioè in un conveniente intorno $B(\delta)$ di $x = 0$ le condizioni iniziali “in” siano più numerose di quelle “out” e che pertanto, per una scelta puramente casuale della perturbazione iniziale, sia più

probabile ottenere soluzioni perturbate che si mantengono vicine alla soluzione costante instabile che non soluzioni rapidamente divergenti da questa: la situazione avrebbe, in questo caso, del paradossale.

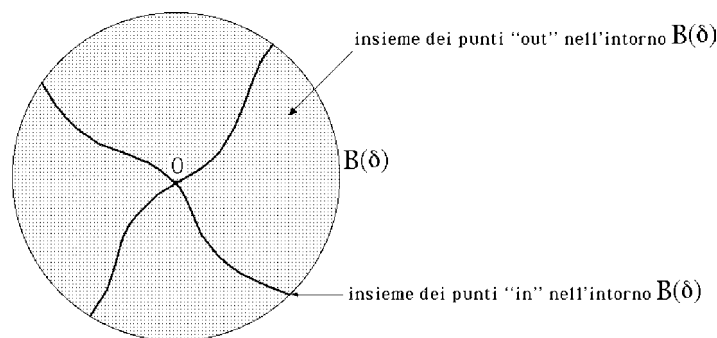


In definitiva, l’instabilità alla Liapunov non implica affatto che **tutte** le soluzioni perturbate debbano allontanarsi dalla soluzione costante instabile; in effetti, in ogni sfera di condizioni iniziali può addirittura esistere⁽¹⁾ un sottoinsieme le cui corrispondenti soluzioni massimali tendono asintoticamente alla soluzione costante instabile: non soltanto la soluzione perturbata non si allontana da quella costante, ma tende persino a questa nel limite per $t \rightarrow +\infty$! **Come può allora risultare utile, nella pratica, una definizione di instabilità così singolare?**

In realtà è possibile riconciliare la definizione formale di instabilità alla Liapunov con l’idea intuitiva, comune, di soluzione instabile, ma l’operazione non è affatto banale e richiederebbe una analisi molto approfondita del problema, che va bene al di là degli scopi di queste note.

Ci si limiterà a precisare che sotto condizioni molto generali — la cosiddetta “condizione di iperbolicità” della soluzione costante — è possibile dimostrare che in un intorno abbastanza piccolo $B(\delta)$ della soluzione imperturbata l’insieme delle condizioni iniziali “in”, se non vuoto, dà sì luogo a soluzioni che tendono asintoticamente alla soluzione $x = 0$, **ma costituisce un sottoinsieme di $B(\delta)$ di estensione trascurabile rispetto a quella di $B(\delta)$ stesso**: i punti del primo tipo rappresentano un insieme di “volume” nullo rispetto a quelli del secondo tipo, che quindi si realizzano con probabilità 1 per una scelta casuale della condizione iniziale in $B(\delta)$. In queste condizioni la probabilità di selezionare una soluzione di tipo “out” è molto prossima all’unità, mentre l’individuazione di una soluzione che asintoticamente tende a $x = 0$, pur non essendo esclusa a priori, costituisce un evento estremamente improbabile, tanto da potersi ritenere praticamente impossibile.

(1) come si vedrà nel seguito



In tal modo, la **perturbazione casuale di una soluzione instabile produce tipicamente soluzioni divergenti da quella imperturbata**, in accordo con l'idea corrente, fisica, di instabilità.

10. Pregi e difetti della definizione di stabilità secondo Liapunov

- (1) Un grosso vantaggio offerto dalla definizione di stabilità secondo Liapunov è la sua **generalità**: la definizione è applicabile alle soluzioni di un qualsivoglia sistema di equazioni differenziali ordinarie, quale che ne sia il significato fisico. Le equazioni differenziali possono descrivere un sistema meccanico, un sistema ecologico di popolazioni animali e/o vegetali interagenti, la cinetica di una reazione chimica, l'evoluzione di un sistema economico, e così via.
- (2) Nel caso dell'equilibrio meccanico, le definizioni sono applicabili ai soli equilibri ordinari, in quanto gli equilibri ordinari di un sistema scleronomo sono le soluzioni statiche delle equazioni di Lagrange del moto, mentre gli equilibri di confine non corrispondono a soluzioni costanti delle equazioni dinamiche. Per gli equilibri di confine non ha quindi alcun significato parlare di stabilità o instabilità secondo Liapunov.

11. Discussione di Weierstrass

In generale è molto difficile verificare la stabilità o instabilità di un equilibrio applicando direttamente le relative definizioni: esiste tuttavia un caso molto interessante in cui l'operazione riesce in modo relativamente agevole. Si tratta dei **sistemi unidimensionali posizionali conservativi** per i quali la stabilità dell'equilibrio può essere studiata facendo uso della cosiddetta **analisi di Weierstrass**, che in realtà fornisce una caratterizzazione qualitativa di **tutti** i moti del sistema. Il prototipo dei sistemi unidimensionali posizionali conservativi è costituito dal punto materiale vincolato a restare su una curva fissa liscia e soggetto a forze posizionali.

12. Punto vincolato a una curva fissa liscia e soggetto a forze posizionali

L'esempio più semplice, ma al tempo stesso dei più significativi, di sistema unidimensionale posizionale conservativo è offerto dal punto materiale vincolato a scorrere lungo una curva regolare fissa e liscia, nell'ipotesi che le sollecitazioni attive applicate abbiano natura puramente posizionale. Indicata con x una ascissa curvilinea della curva vincolare, l'equazione pura del moto assume infatti la forma

$$m\ddot{x} = f(x) = U'(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (12.1)$$

dove m indica la massa del punto materiale, la funzione $f(x)$ — di classe C^1 in \mathbb{R} — è la componente della forza attiva lungo la direzione tangente alla curva ed $U(x)$ denota il relativo potenziale. In questo caso la conservazione dell'energia meccanica si evince molto facilmente dalle equazioni del moto moltiplicando membro a membro per la velocità scalare istantanea \dot{x}

$$m\ddot{x}\dot{x} = U'(x)\dot{x}$$

ed evidenziando le derivate totali in t — derivate lungo le soluzioni delle equazioni del moto —

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 - U(x) \right) = 0$$

sicché l'energia meccanica conservata si scrive

$$H(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + W(x) \quad (x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2,$$

essendosi indicata con $W(x) = -U(x)$ l'energia potenziale del sistema.

13. Funzione di Weierstrass

Lungo qualsiasi moto del sistema l'energia meccanica $H(x, \dot{x})$ si conserva. Indicato con E il valore costante dell'energia per il moto in esame, si ha

$$\frac{m}{2} \dot{x}^2 + W(x) = E$$

e di qui si deduce

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m} [E - W(x)]$$

ovvero

$$\dot{x}^2 = \Phi(x) \quad (13.1)$$

relazione nella quale si è introdotta la **funzione di Weierstrass** $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{m} [E - W(x)]. \quad (13.2)$$

Si osservi che la funzione di Weierstrass, per quanto dipendente dal livello di energia E preassegnato, per evitare notazioni troppo pesanti viene di solito indicata con un semplice $\Phi(x)$, senza specificare il valore dell'energia. In termini della funzione di Weierstrass è anche possibile riesprimere l'equazione del moto (12.1), che si scrive infatti

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}U'(x) = -\frac{1}{m}W'(x) = \frac{1}{2}\Phi'(x). \quad (13.3)$$

Le relazioni (13.1) e (13.3) costituiscono la base dell'**analisi di Weierstrass** del sistema.

14. Sistemi unidimensionali posizionali conservativi

Il punto materiale vincolato a una curva fissa liscia e sottoposto a forze posizionali costituisce un caso particolare di sistema unidimensionale posizionale conservativo.

Si dice **sistema unidimensionale posizionale** qualsiasi sistema scleronomo a vincoli ideali ad un solo grado di libertà e soggetto esclusivamente a sollecitazioni posizionali. Indicato con q il relativo parametro lagrangiano, che per semplicità si assumerà definito su tutto \mathbb{R} , le equazioni del moto sono del tipo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q(q) \quad (14.1)$$

dove l'energia cinetica T è una forma quadratica definita positiva di \dot{q}

$$T = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2, \quad a(q) > 0 \quad \forall q \in \mathbb{R}$$

mentre la componente lagrangiana generalizzata Q delle sollecitazioni attive dipende unicamente dalla coordinata q e di questa è funzione C^1 in \mathbb{R} . Appare evidente dalla definizione che i sistemi unidimensionali posizionali sono automaticamente conservativi, il potenziale potendosi identificare con una qualsiasi primitiva della funzione $Q(q)$:

$$U(q) = \int Q(q) dq \quad \iff \quad U'(q) = Q(q) \quad \forall q \in \mathbb{R}.$$

L'affermazione risulta chiaramente falsa per sistemi con $n \geq 2$ gradi di libertà, laddove il carattere posizionale delle sollecitazioni non ne implica affatto la natura conservativa e l'eventuale esistenza del potenziale deve essere accertata usando per esempio la condizione di chiusura — o di irrotazionalità — del campo di sollecitazioni posizionali, qualora questo sia definito su un aperto convesso, stellato o semplicemente connesso. Un ovvio **integrale primo** di questi sistemi, che peraltro ne giustifica la denominazione, è quello dell'**energia meccanica**

$$H(q, \dot{q}) = T - U(q) = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 - U(q) = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 + W(q)$$

essendo, al solito, $W(q) = -U(q)$ l'energia potenziale del sistema. Se si indica con E il valore dell'energia meccanica lungo una soluzione assegnata, per questa si ha

$$\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 + W(q) = E$$

e quindi

$$\dot{q}^2 = \frac{2}{a(q)}[E - W(q)]. \quad (14.2)$$

L'equazione ottenuta è la generalizzazione della (13.1), sempreché si definisca la **funzione di Weierstrass** secondo la relazione

$$\Phi(q) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{a(q)}[E - W(q)], \quad (14.3)$$

che porge così

$$\dot{q}^2 = \Phi(q). \quad (14.4)$$

Anche le equazioni del moto (14.1) possono essere espresse in una forma equivalente facendo ricorso alla funzione di Weierstrass. Scritta esplicitamente, la (14.1) diventa

$$\frac{d}{dt}[a(q)\dot{q}] - \frac{1}{2}a'(q)\dot{q}^2 = -W'(q)$$

ovvero

$$a(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}a'(q)\dot{q}^2 = -W'(q)$$

e la sua forma normale è data da

$$\ddot{q} = -\frac{1}{2}\frac{a'(q)}{a(q)}\dot{q}^2 - \frac{1}{a(q)}W'(q).$$

Sostituendo la (14.2) lungo una soluzione assegnata di energia E , l'equazione si riduce a

$$\ddot{q} = -\frac{1}{2}\frac{a'(q)}{a(q)}\frac{2}{a(q)}[E - W(q)] - \frac{1}{a(q)}W'(q)$$

dalla quale segue

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= -\frac{a'(q)}{a(q)^2}[E - W(q)] + \frac{1}{a(q)}\frac{d}{dq}[E - W(q)] = \\ &= \frac{d}{dq}\left[\frac{1}{a(q)}\right][E - W(q)] + \frac{1}{a(q)}\frac{d}{dq}[E - W(q)] = \\ &= \frac{d}{dq}\left[\frac{E - W(q)}{a(q)}\right] = \frac{1}{2}\frac{d}{dq}\left[\frac{2}{a(q)}[E - W(q)]\right] \end{aligned}$$

e quindi la forma equivalente dell'equazione di Lagrange

$$\ddot{q} = \frac{1}{2}\Phi'(q) \quad (14.5)$$

che costituisce la generalizzazione della relazione (13.3), già stabilita per il punto materiale su curva fissa e liscia.

Si osservi che le relazioni fondamentali hanno esattamente la stessa forma di quelle ricavate per il punto materiale vincolato

$$\dot{x}^2 = \Phi(x) \quad \ddot{x} = \frac{1}{2}\Phi'(x)$$

e coincidono con quelle a condizione di sostituire l'ascissa curvilinea x con il generico parametro lagrangiano q e di reinterpretare la funzione di Weierstrass secondo la definizione generale (14.3). Per semplicità, nelle considerazioni che seguono si farà riferimento alla definizione (13.2) della funzione di Weierstrass, salvo precisare di volta in volta che le stesse considerazioni possono estendersi anche al caso generale (14.3).

15. Teorema di Weierstrass dei dati iniziali

Il teorema di esistenza ed unicità assicura che per ogni condizione iniziale $(x(0), \dot{x}(0)) = (x_0, \dot{x}_0) \in \mathbb{R}^2$ esiste unica la soluzione massimale del corrispondente problema di Cauchy per le equazioni del moto (12.1) o (13.3). Il teorema dei dati iniziali riclassifica le soluzioni non sulla base delle condizioni iniziali, ma facendo riferimento al valore iniziale x_0 della sola coordinata x ed al valore E dell'energia meccanica. Il teorema caratterizza, in termini della funzione di Weierstrass, le coppie (x_0, E) dei valori di posizione iniziale x_0 ed energia meccanica E per le quali si ha almeno un moto del sistema. L'enunciato del teorema è il seguente:

Per un assegnato valore E dell'energia meccanica e per una data posizione iniziale x_0 esiste almeno un moto del sistema se e soltanto se la funzione di Weierstrass calcolata in E per $x = x_0$ assume valore non negativo

$$\Phi(x_0) \geq 0.$$

Dimostrazione

La prova del teorema si ottiene ricordando la relazione (13.1), ovvero la (14.4),

$$\dot{x}^2 = \Phi(x)$$

dalla quale si deduce che:

- (i) se $\Phi(x_0) = 0$ il valore iniziale \dot{x}_0 della velocità \dot{x} non può che risultare uguale a zero. La condizione equivale perciò ad assegnare il dato iniziale

$$(x(0), \dot{x}(0)) = (x_0, 0)$$

cui corrisponde un' **unica soluzione** delle equazioni del moto;

(ii) per $\Phi(x_0) > 0$ la velocità iniziale \dot{x}_0 è fissata univocamente in valore assoluto ma non in segno:

$$|\dot{x}_0| = \sqrt{\Phi(x_0)}.$$

A tale scelta corrispondono dunque due distinte condizioni iniziali che differiscono per il segno della velocità iniziale

$$(x(0), \dot{x}(0)) = (x_0, \sqrt{\Phi(x_0)}) \quad (x(0), \dot{x}(0)) = (x_0, -\sqrt{\Phi(x_0)})$$

ognuna delle quali individua una diversa soluzione delle equazioni del moto. Si hanno così **due distinte soluzioni** delle equazioni di Lagrange;

(iii) qualora infine si abbia $\Phi(x_0) < 0$, non è possibile individuare alcun dato iniziale, in quanto la relazione

$$\dot{x}_0^2 = \Phi(x_0) < 0$$

non ammette soluzioni reali in \dot{x}_0 . In questo caso non è specificata **alcuna soluzione** delle equazioni del moto.

La condizione $\Phi(x_0) \geq 0$ corrisponde alle ipotesi (i) e (ii), che individuano almeno una soluzione delle equazioni di Lagrange, mentre per $\Phi(x_0) < 0$ ricorre il caso (iii), cui non è associata alcuna soluzione delle stesse equazioni. La dimostrazione è completa. \square

Dal punto di vista fisico il significato del teorema è evidente. La condizione $\Phi(x_0) \geq 0$ equivale infatti a richiedere che si abbia, anche nel caso generalizzato,

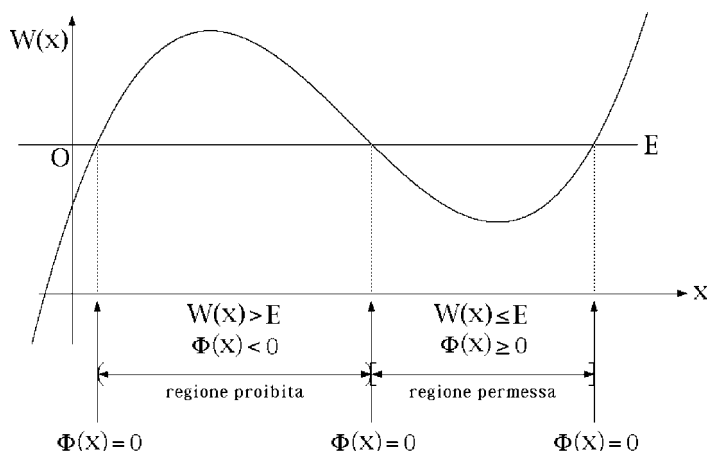
$$E - W(x_0) \geq 0$$

e poiché la differenza $E - W$ deve identificarsi con l'energia cinetica del sistema, ne segue che questa è non negativa e permette di specificare almeno un valore della velocità iniziale \dot{x}_0 . In caso contrario l'energia cinetica dovrebbe risultare di segno negativo, in evidente contraddizione con il carattere definito positivo dell'energia cinetica stessa.

Del risultato si può dare anche una rappresentazione geometrica molto semplice e suggestiva. Si consideri il grafico dell'energia potenziale W e si immagini di sovrapporre a questo una retta orizzontale $y = E$, rappresentativa del livello di energia meccanica prefissato. È evidente che gli **zeri della funzione di Weierstrass** corrispondono ai **punti di intersezione** fra il grafico di W e la retta rappresentativa dell'energia meccanica, mentre i **punti x per i quali $\Phi(x) > 0$** sono tutti e soli quelli dove **il grafico di W si colloca al di sotto della stessa retta**. Saranno questi i punti rappresentativi di almeno un moto del sistema per quel fissato valore E dell'energia ed andranno ad individuare una **regione permessa** di posizioni iniziali, nella quale peraltro i moti si manterranno confinati ad ogni istante successivo⁽¹⁾. Per contro, in tutti i punti x dove il grafico dell'energia potenziale sovrasta la retta rappresentativa del livello di energia vale evidentemente $\Phi(x) < 0$ e nessun moto

(1) sempre per via della conservazione dell'energia, ovviamente

del sistema è definito; sarà questa la **regione proibita**, tanto per la scelta della posizione iniziale quanto per tutti i moti di energia assegnata E , ai quali è inaccessibile⁽¹⁾. La figura che segue illustra questa rappresentazione geometrica del teorema dei dati iniziali:



Oltre alla semplice ubicazione delle orbite nella regione permessa, e alla inaccessibilità della regione proibita, l'andamento qualitativo delle soluzioni può essere caratterizzato completamente per mezzo dei cosiddetti criteri di Weierstrass.

16. Criteri di Weierstrass

I criteri di Weierstrass permettono di determinare le proprietà salienti dei moti di un sistema unidimensionale posizionale conservativo. È importante sottolineare come l'analisi di Weierstrass fornisca informazioni su soluzioni massimali **la cui esistenza ed unicità sono già note a priori**, in virtù del teorema di esistenza — applicabile in quanto $f(x) = -W'(x)$ è per ipotesi funzione di classe C^1 in \mathbb{R} .

Nello studio qualitativo delle soluzioni è conveniente distinguere 3 diversi casi, ciascuno dei quali individua — per il teorema di Weierstrass dei dati iniziali — una singola soluzione delle equazioni del moto:

- (1) (x_0, \dot{x}_0) tali che $\Phi(x_0) > 0$ e $\dot{x}_0 > 0$ — si noti che $\dot{x}_0 = \sqrt{\Phi(x_0)}$;
- (2) (x_0, \dot{x}_0) che soddisfano le condizioni $\Phi(x_0) > 0$ e $\dot{x}_0 < 0$ — essendo $\dot{x}_0 = -\sqrt{\Phi(x_0)}$;
- (3) $(x_0, 0)$, con $\Phi(x_0) = 0$ e dunque $\dot{x}_0 = \sqrt{\Phi(x_0)} = 0$.

Per ciascuno dei casi (1), (2) e (3) verranno considerati 3 rispettivi sottocasi, corrispondenti a caratteristiche qualitativamente diverse delle relative soluzioni. L'andamento generale di queste viene stabilito mediante l'equazione (13.1), che può porsi nella forma equivalente

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\Phi(x)}$$

(1) ancora una volta per effetto della conservazione dell'energia

ed essere impiegata per valutare le caratteristiche della soluzione a patto di risolvere l'ambiguità di segno a secondo membro.

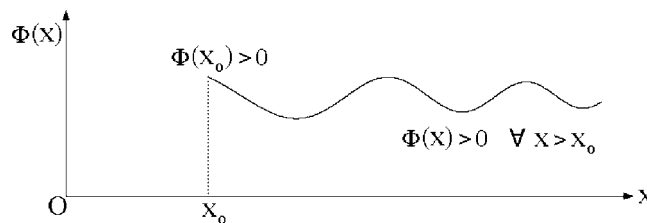
16.1 Caso (1): $\Phi(x_0) > 0, \dot{x}_0 > 0$ — velocità iniziale positiva

Si distinguono 3 sottocasi in relazione all'andamento della funzione di Weierstrass Φ per $x > x_0$.

• **Sottocaso (1.a)**

La funzione di Weierstrass non presenta alcuno zero a destra di x_0 :

$$\Phi(x) > 0 \quad \forall x > x_0 .$$



Il moto del sistema è inizialmente progressivo e caratterizzato quindi da un andamento crescente di $x(t)$, con $\dot{x}(t) > 0$. Non esistono tuttavia candidati al ruolo di punto di arresto per il moto del sistema, dal momento che un punto cosiffatto $x_1 = x(t_1)$ dovrebbe necessariamente collocarsi a destra di x_0 e costituire uno zero della funzione di Weierstrass

$$x_1 > x_0 \quad \Phi(x_1) = \Phi[x(t_1)] = \dot{x}(t_1)^2 = 0$$

la cui esistenza è stata espressamente esclusa a destra di x_0 . Il moto risulta perciò globalmente progressivo nel futuro e deve soddisfare l'equazione del primo ordine⁽¹⁾

$$\dot{x} = \sqrt{\Phi(x)}$$

che si risolve con il metodo di separazione delle variabili per mezzo dell'integrale di Weierstrass:

$$t = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx .$$

(1) Si osservi che a secondo membro l'equazione prevederebbe una ambiguità di segno, che la natura globalmente progressiva del moto nel futuro consente di risolvere fissando il segno positivo.

Pertanto:

la soluzione $x(t)$ è indefinitamente progressiva nel futuro e tende a $x = +\infty$ in un intervallo di tempo dato dall'integrale

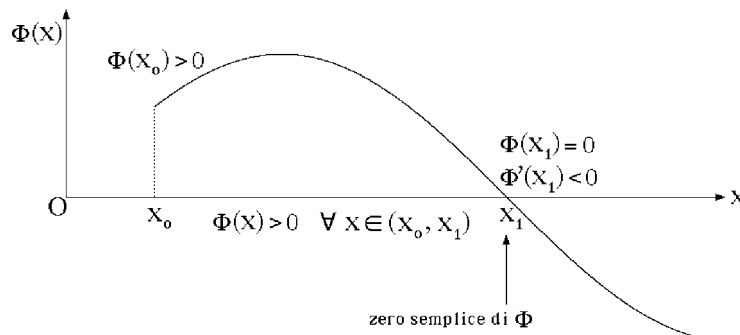
$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx$$

e dunque finito o infinito secondo che questo sia convergente o meno.

Dal punto di vista fisico ci si aspetta che una soluzione realistica possa tendere all'infinito soltanto per $t \rightarrow +\infty$; nondimeno, se si affronta il problema in modo puramente formale può succedere che il campo di forze $-W'(x)$ cresca per $x \rightarrow +\infty$ con rapidità sufficiente ad assicurare la divergenza del moto a $x = +\infty$ in tempi finiti.

• **Sottocaso (1.b)**

La funzione di Weierstrass presenta uno zero semplice a destra di x_0 , esiste cioè un punto $x_1 > x_0$ tale che $\Phi(x) > 0 \forall x \in (x_0, x_1)$, $\Phi(x_1) = 0$ e $\Phi'(x_1) \neq 0$ ⁽¹⁾.



Per la continuità della velocità, inizialmente positiva, in una prima fase il moto è progressivo. Questa progressività, tuttavia, non può mantenersi indefinitamente a causa dello zero semplice x_1 , in cui la velocità si annulla. A ciò si aggiunge la circostanza che la soluzione non può accedere ad alcun intorno destro di x_1 , dove la funzione di Weierstrass deve assumere segno negativo a causa delle ipotesi fatte. D'altra parte, l'intervallo di tempo che occorre al sistema per coprire la fase di moto progressivo fra $x = x_0$ e $x = x_1$ è espresso dall'integrale generalizzato

$$t_1 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx \tag{16.1}$$

che converge per via della seguente approssimazione di Taylor, valida nell'intorno del punto

⁽¹⁾ come è facile verificare, non può che aversi $\Phi'(x_1) < 0$.

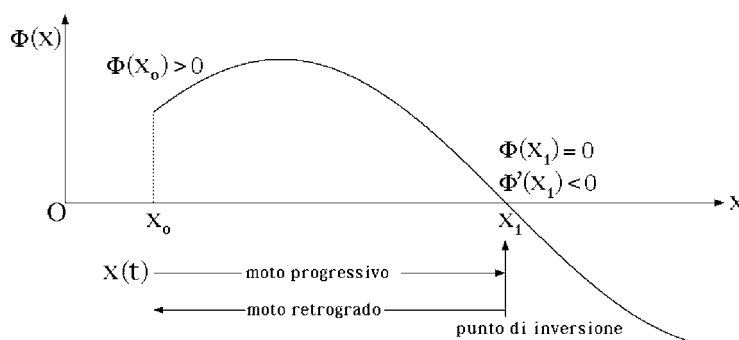
singolare x_1 ,

$$\frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} = \frac{1}{\sqrt{\Phi(x_1) + \Phi'(x_1)(x - x_1) + o(|x - x_1|)}} \sim \frac{1}{\sqrt{-\Phi'(x_1)}} \frac{1}{\sqrt{x_1 - x}} \quad (x \rightarrow x_1)$$

— si ricordi che la funzione è integrabile perchè equivalente a $1/(x_1 - x)^\alpha$, con $\alpha < 1$, nell'intorno del punto singolare. In definitiva, le proprietà precedenti suggeriscono che:

in un intervallo di tempo finito la soluzione raggiunge la posizione x_1 , annullando la corrispondente velocità. Da positiva che era, la velocità diventa quindi negativa ed alla fase iniziale di moto progressivo segue una successiva fase retrograda.

In altri termini **il moto si inverte** da progressivo a retrogrado nella posizione x_1 , che per questo motivo viene detta **punto di inversione** del moto. L'istante t_1 in corrispondenza del quale la soluzione assume il valore x_1 viene detto, analogamente, **istante di inversione** del moto.



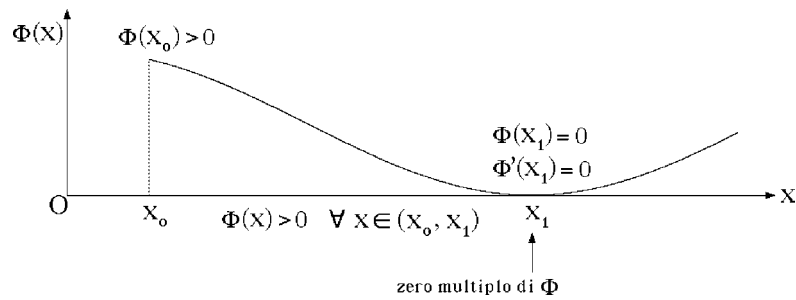
Si osservi che la discussione precedente va intesa soltanto come una giustificazione del criterio di Weierstrass e non come una dimostrazione rigorosa. Manca infatti la prova di alcuni dettagli importanti, come il fatto che l'intervallo di definizione della soluzione **comprenda effettivamente** l'istante t_1 calcolato dall'integrale di Weierstrass (16.1), l'effettiva prolungabilità della soluzione **oltre** t_1 , e il carattere monotono decrescente della velocità $\dot{x}(t)$ nell'intorno di t_1 . Tali proprietà possono essere dimostrate facendo uso del teorema di prolungabilità e della continuità delle soluzioni.

• **Sottocaso (1.c)**

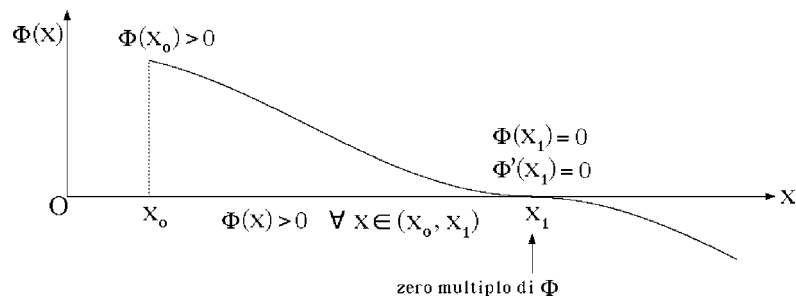
La funzione di Weierstrass presenta uno zero multiplo a destra di x_0 , esiste cioè un punto $x_1 > x_0$ tale che $\Phi(x) > 0 \forall x \in (x_0, x_1)$, $\Phi(x_1) = 0$ e $\Phi'(x_1) = 0$ ⁽¹⁾.

(1) Lo zero si dice multiplo se in esso si annullano la funzione e la derivata prima di questa

Il grafico di Φ ha quindi l'andamento illustrato nella figura seguente



con la funzione di Weierstrass positiva in un intorno destro di x_1 , oppure, qualora la derivata seconda $\Phi''(x_1)$ risulti nulla, può presentarsi nella forma



con Φ negativa in un intorno destro dello zero multiplo. Da notare che se $\Phi''(x_1) \neq 0$ deve aversi necessariamente $\Phi''(x_1) > 0$.

Come nei casi precedenti si ha ancora che la fase iniziale del moto è certamente progressiva, per via della continuità di $\dot{x}(t)$ e della condizione iniziale $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 > 0$. Il solo punto in cui la velocità può annullarsi è $x = x_1$ e quindi il moto deve mantenersi progressivo fino a che $x(t) \rightarrow x_1^-$. La soluzione $x(t)$ è definita tramite il solito integrale di Weierstrass

$$t = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx \quad \forall x \in [x_0, x_1). \tag{16.2}$$

In linea di principio l'intervallo di tempo necessario affinché il sistema raggiunga la configurazione $x = x_1$ è dato dall'integrale generalizzato:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx$$

dove l'integrando presenta una singolarità nell'estremo superiore x_1 . Si tratta in realtà di

un integrale divergente, in quanto l'approssimazione di Taylor

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} &= \frac{1}{\sqrt{\Phi(x_1) + \Phi'(x_1)(x - x_1) + \frac{1}{2}\Phi''(x_1)(x - x_1)^2 + o[(x - x_1)^2]}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\Phi''(x_1)(x - x_1)^2 + o[(x - x_1)^2]}} \quad (x \rightarrow x_1-) \end{aligned}$$

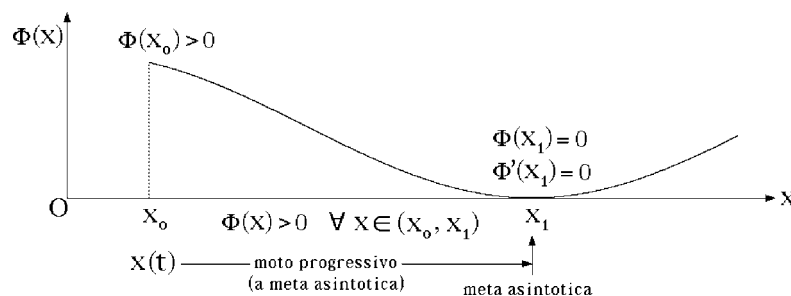
dimostra che la funzione integranda nell'intorno sinistro del punto singolare x_1 è un infinito del tipo⁽¹⁾

$$\frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} \sim \sqrt{\frac{2}{\Phi''(x_1)}} \frac{1}{x_1 - x} \quad (x \rightarrow x_1-)$$

o di ordine superiore — qualora $\Phi''(x_1) = 0$. Ne segue che il moto si mantiene progressivo nel futuro $\forall t \geq 0$ e che soltanto nel limite $t \rightarrow +\infty$ la soluzione tende a x_1 . Pertanto:

il sistema si muove di moto indefinitamente progressivo $\forall t \geq 0$, mantenendosi nell'intervallo $[x_0, x_1)$, si avvicina a piacere alla posizione x_1 a patto di attendere un intervallo di tempo sufficientemente lungo e tende alla posizione x_1 per $t \rightarrow +\infty$.

Il sistema tende alla configurazione $x = x_1$, ma senza mai raggiungerla a tempi finiti. Per questo motivo la configurazione x_1 viene detta **meta asintotica**, e il moto del sistema è noto come **moto a meta asintotica**.



Si sottolinea che in questo caso la dimostrazione precedente suona del tutto rigorosa, dal momento che la soluzione individuata dall'integrale di Weierstrass (16.2) è definita $\forall t \geq 0$ e quindi costituisce la restrizione nel futuro di una soluzione massimale.

• 16.2 Caso (2): $\Phi(x_0) > 0, \dot{x}_0 < 0$ — velocità iniziale negativa

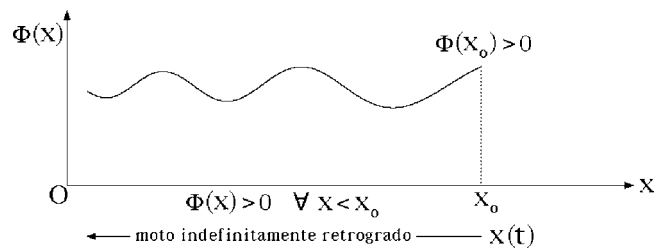
L'analisi di Weierstrass è analoga a quella già sviluppata per il caso (1), con la stessa articolazione in 3 sottocasi. L'unica differenza consiste nel fatto che, dato il segno negativo della velocità iniziale, gli eventuali zeri della funzione di Weierstrass vanno ricercati a

⁽¹⁾ equivalente dunque a $1/(x_1 - x)^\alpha$, con $\alpha \geq 1$

sinistra della configurazione iniziale $x = x_0$, anzichè a destra. Ci si limita perciò a schematizzare i 3 sottocasi mediante i grafici appropriati.

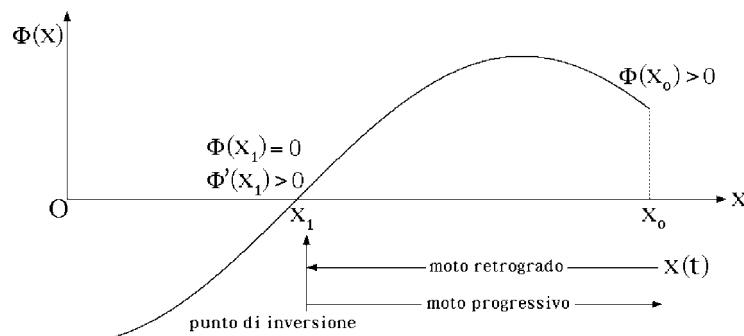
• **Sottocaso (2.a)**

Se non vi sono zeri di Φ a sinistra di x_0 il moto si mantiene indefinitamente retrogrado:



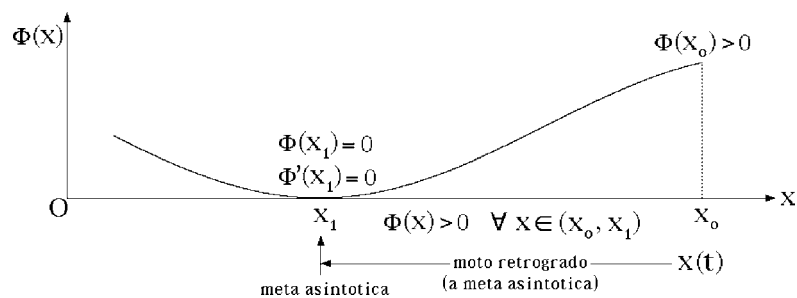
• **Sottocaso (2.b)**

Se a sinistra di x_0 si colloca un primo zero semplice x_1 della funzione di Weierstrass, questo costituisce un punto di inversione del moto: dopo una fase iniziale di moto retrogrado, in cui il sistema passa dalla configurazione x_0 alla configurazione x_1 in un intervallo di tempo finito, il segno della velocità si inverte ed il moto diventa progressivo:



• **Sottocaso (2.c)**

Qualora esista uno zero doppio x_1 di Φ alla sinistra di x_0 , il moto risulta indefinitamente retrogrado nel futuro, con meta asintotica x_1 .



16.3 Caso (3): $\Phi(x_0) = 0$ — velocità iniziale nulla

Nella fattispecie il teorema di Weierstrass dei dati iniziali impone che la velocità iniziale sia $\dot{x}_0 = 0$. Ancora una volta si devono distinguere 3 sottocasi.

• **Sottocaso (3.a)**

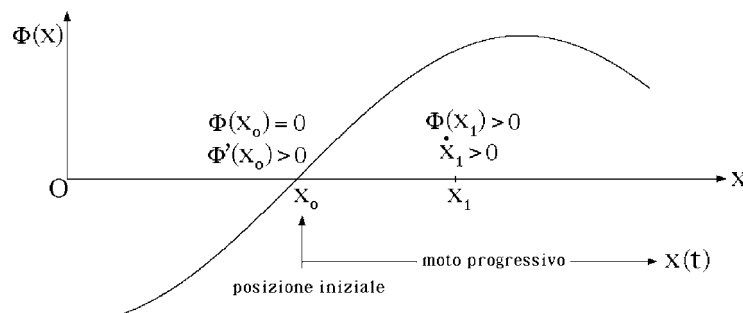
La posizione iniziale x_0 è uno zero semplice della funzione di Weierstrass, con derivata prima positiva

$$\Phi'(x_0) > 0.$$

Dall'equazione del moto (13.3) segue che all'istante iniziale l'accelerazione \ddot{x} è strettamente positiva

$$\ddot{x}(0) = \frac{1}{2}\Phi'[x(0)] = \frac{1}{2}\Phi'(x_0) > 0$$

e che dunque, per la continuità della soluzione $x(t)$, la stessa proprietà deve essere soddisfatta in un intorno di $t = 0$; nello stesso intorno la velocità $\dot{x}(t)$ costituisce perciò una funzione monotona crescente che, annullandosi in $t = 0$, assume segno positivo nel corrispondente intorno destro. Se ne conclude che subito dopo l'istante iniziale il moto diventa progressivo e accede a punti situati a destra di x_0 in cui la funzione di Weierstrass è strettamente positiva, con velocità istantanea \dot{x} pure positiva. Ricorre così il precedente caso (1) e l'analisi qualitativa della soluzione può essere svolta nei modi già visti.



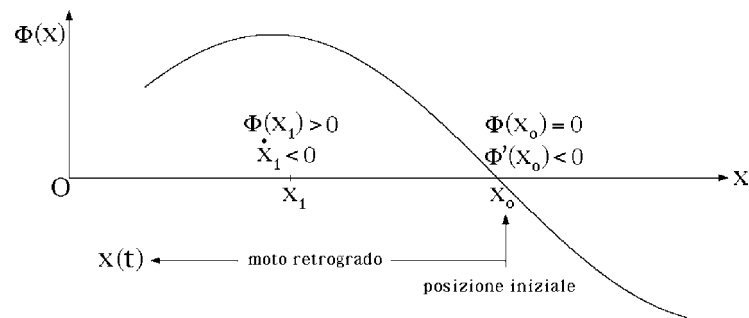
• **Sottocaso (3.b)**

La configurazione iniziale x_0 costituisce uno zero semplice della funzione di Weierstrass, con derivata prima negativa

$$\Phi'(x_0) < 0.$$

L'analisi è analoga a quella del precedente sottocaso (3.a), salvo per il fatto che l'accelerazione iniziale risulta negativa. In un intorno conveniente di $t = 0$ la velocità istantanea $\dot{x}(t)$ è una funzione monotona decrescente che, essendo nulla all'istante iniziale, nel corrispondente intorno destro di $t = 0$ assume segno negativo. Per $t > 0$ abbastanza piccolo il moto del sistema diventa perciò retrogrado ed accede ad un qualche punto $x_1 < x_0$ dove la funzione di Weierstrass assume segno positivo e con velocità $\dot{x}_1 < 0$. Ricorrono pertanto

le condizioni del caso (2) già esaminato, che è così applicabile all'analisi qualitativa del moto a tempi successivi.



• **Sottocaso (3.c)**

La *posizione iniziale* x_0 è uno zero multiplo della funzione di Weierstrass, per cui

$$\Phi'(x_0) = 0.$$

In queste circostanze è facile convincersi che il moto del sistema si riduce allo stato di quiete nella configurazione iniziale x_0 . La funzione costante $x(t) = x_0, t \in \mathbb{R}$, è infatti — l'unica! — soluzione massimale in \mathbb{R} del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{2}\Phi'(x) \\ x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

come si deduce immediatamente sostituendola nell'equazione del moto

$$0 = \dot{x}(t) = \frac{1}{2}\Phi'[x(t)] = \frac{1}{2}\Phi'[x_0] = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e notando che le condizioni iniziali sono banalmente verificate.



17. Analisi qualitativa delle soluzioni

I criteri di Weierstrass consentono, se applicati convenientemente, di analizzare l'andamento qualitativo di tutte le soluzioni di un qualsiasi sistema unidimensionale posizionale conservativo e, in particolare, di verificare direttamente le proprietà di stabilità o instabilità degli eventuali equilibri. Questo risultato si consegue facendo uso delle osservazioni sotto riportate.

- (i) Si è visto che punti cruciali per la discussione qualitativa delle soluzioni sono gli zeri della funzione di Weierstrass, che geometricamente possono interpretarsi come le ascisse dei punti di intersezione fra il grafico dell'energia potenziale W e la retta orizzontale rappresentativa del livello E di energia meccanica prefissato. Vale la pena di sottolineare come tale interpretazione rimanga immutata sia che per la funzione di Weierstrass si assuma l'espressione particolare (13.2), sia che la funzione venga identificata con la forma generale (14.3) — il fattore $a(q)$ è per definizione positivo $\forall q \in \mathbb{R}$ e quindi non concorre a determinare gli zeri di $\Phi(q)$.
- (ii) Al fine di stabilire le proprietà generali delle soluzioni non basta individuare gli zeri della funzione di Weierstrass, ma occorre anche determinarne la natura, precisando se si tratti di zeri semplici o multipli. Questa classificazione viene ottenuta calcolando la derivata prima dell'energia potenziale, che risulta diversa da zero in corrispondenza degli zeri semplici e nulla negli zeri multipli. Nel caso (13.2) il risultato segue immediatamente dall'espressione della derivata di Φ :

$$\Phi'(x) = -\frac{2}{m}W'(x) \quad (17.1)$$

che a meno di un fattore costante negativo coincide con la derivata dell'energia potenziale. Per una funzione di Weierstrass del tipo generale (14.3) la derivata ha una forma leggermente più complessa:

$$\Phi'(q) = -\frac{2a'(q)}{a(q)^2}[E - W(q)] - \frac{2}{a(q)}W'(q)$$

ma se calcolata in un suo zero $q = q^*$ si riduce all'espressione

$$\Phi'(q^*) = -\frac{2}{a(q^*)}W'(q^*) \quad (17.2)$$

che si annulla se e soltanto se $W'(q^*) = 0$.

- (iii) Gli zeri semplici di Φ dipendono dal livello di energia E preassegnato, ma non gli zeri multipli. Dalle relazioni (17.1) e (17.2) è infatti evidente che la derivata prima della funzione di Weierstrass, in uno zero di questa, si annulla solo ed esclusivamente nei punti critici dell'energia potenziale W

$$\Phi'(q) = 0 \quad \iff \quad W'(q) = 0$$

che dunque costituiscono i soli possibili candidati al ruolo di zeri multipli di Φ . Si intende che i punti critici di W sono effettivamente zeri multipli della funzione di Weierstrass soltanto per gli appropriati valori di E — quelli assunti da W negli stessi punti critici.

(iv) L'andamento complessivo delle soluzioni massimali si ricava combinando fra loro i criteri di Weierstrass. Si supponga, per fissare le idee, di assegnare la posizione iniziale x_0 in modo che la funzione di Weierstrass sia strettamente positiva, con velocità iniziale $\dot{x}_0 > 0$. Si indichi con $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ il più grande intervallo contenente x_0 tale che $\Phi(x) > 0 \forall x \in \Omega$. L'eventuale estremo inferiore di Ω verrà denominato x_S , mentre x_D è l'eventuale estremo superiore; dalla continuità di Φ segue immediatamente che $\Phi(x_S) = \Phi(x_D) = 0$. Si possono allora distinguere i 9 casi specificati nella tabella seguente:

	Nessuno zero a destra	Zero semplice a destra	Zero doppio a destra
Nessuno zero a sinistra	caso NN 	caso NS 	caso ND
Zero semplice a sinistra	caso SN 	caso SS 	caso SD
Zero doppio a sinistra	caso DN 	caso DS 	caso DD

A titolo di esempio si può osservare che nel **caso SS** la soluzione $x(t)$ è confinata entro l'intervallo compatto $[x_S, x_D]$, i cui estremi sono entrambi zeri semplici della funzione di Weierstrass e dunque punti di inversione del moto. Il moto del sistema consiste

perciò in un indefinito alternarsi di fasi progressive, da x_S a x_D , di durata

$$\int_{x_S}^{x_D} \frac{1}{\dot{x}} dx = \int_{x_S}^{x_D} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx$$

e di fasi retrograde, da x_D a x_S , di uguale durata

$$\int_{x_D}^{x_S} \frac{1}{\dot{x}} dx = \int_{x_D}^{x_S} -\frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx = \int_{x_S}^{x_D} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx.$$

La soluzione massimale $x(t)$ è dunque definita $\forall t \in \mathbb{R}$ ed ha carattere oscillatorio e **periodico**:

$$x(t + T) = x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Il relativo **periodo** — o, più precisamente, **minimo periodo positivo** — T è definito come il più piccolo intervallo di tempo che occorre al sistema per passare due volte consecutivamente per la configurazione x_S , ovvero per la configurazione x_D , e si calcola per mezzo dell'integrale di Weierstrass:

$$T = \int_{x_S}^{x_D} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx + \int_{x_D}^{x_S} -\frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx = 2 \int_{x_S}^{x_D} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx.$$

Come è immediato verificare, T rappresenta anche il più piccolo intervallo di tempo che occorre al sistema per ripassare per una stessa configurazione x , comunque prefissata lungo il moto, con la stessa velocità \dot{x} .

Analogamente, nel **caso NS** la funzione di Weierstrass risulta positiva $\forall x \leq x_D$, essendo x_D uno zero semplice della stessa funzione. Da x_0 il sistema si muove quindi di moto progressivo fino a raggiungere, in un intervallo di tempo finito, il punto di inversione x_D , dopodiché prosegue con moto indefinitamente retrogrado tendendo a $x = -\infty$ in un intervallo di tempo finito o infinito, secondo il convergere o meno dell'integrale di Weierstrass:

$$\int_{x_D}^{-\infty} -\frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx = \int_{-\infty}^{x_D} \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} dx.$$

La discussione di Weierstrass si esegue in modo analogo nei casi residui.

- (v) Per avere un quadro complessivo delle soluzioni è sufficiente discutere, usando i criteri di Weierstrass, alcune soluzioni notevoli delle equazioni del moto. In particolare, conviene considerare tutte le soluzioni relative a:

- valori dell'energia meccanica E corrispondenti ai valori assunti dall'energia potenziale W in corrispondenza di tutti i suoi punti critici — i soli candidati al ruolo di zeri multipli e quindi di punti di equilibrio o di mete asintotiche;
- valori di energia meccanica E , scelti a piacere, intermedi ai precedenti;
- un valore di energia meccanica E superiore al massimo dei precedenti;
- se del caso, un valore di E inferiore al minimo dei precedenti — si intende che questa scelta è priva di interesse qualora l'energia potenziale W ammetta un minimo assoluto.

18. Piano delle fasi e ritratto di fase

Un modo molto espressivo e sintetico per presentare i risultati dell'analisi di Weierstrass di un sistema unidimensionale posizionale consiste nel tracciare il cosiddetto **ritratto di fase** del sistema nel **piano delle fasi**.

18.1 Piano delle fasi

Per *piano delle fasi* si intende il piano cartesiano delle coppie (x, \dot{x}) ; è rappresentato da una coppia di assi cartesiani ortogonali, riportando in ascissa la coordinata lagrangiana $x \in \mathbb{R}$ ed in ordinata la velocità generalizzata $\dot{x} \in \mathbb{R}$ del sistema.

Il piano delle fasi è un caso particolare di **spazio delle fasi**, che per un sistema olonomo a n gradi di libertà, descritto dai parametri lagrangiani $q_1, \dots, q_n \in A \subseteq \mathbb{R}^n$, può definirsi come l'insieme delle coppie (q, \dot{q}) :

$$\{(q, \dot{q}) \in A \times \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

18.2 Ritratto di fase

Il *ritratto di fase* di un sistema unidimensionale è la rappresentazione nel piano delle fasi delle orbite delle soluzioni più significative, con l'indicazione del loro senso di percorrenza a tempi crescenti.

Nel caso di un sistema unidimensionale posizionale l'andamento delle orbite delle soluzioni può essere determinato, almeno qualitativamente, per mezzo dell'analisi di Weierstrass. È quindi importante stabilire le caratteristiche generali delle orbite per tutte tipologie numeriche di soluzioni — stati di quiete, soluzioni periodiche, soluzioni a meta asintotica, soluzioni indefinitamente progressive o retrograde.

Come caratteristica generale, l'orbita nel piano delle fasi di qualsiasi soluzione di energia E si colloca certamente nella corrispondente curva di livello — isoipsa — dell'energia meccanica

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 + W(x) = E$$

ossia nella curva di equazione

$$\dot{x}^2 = \Phi(x).$$

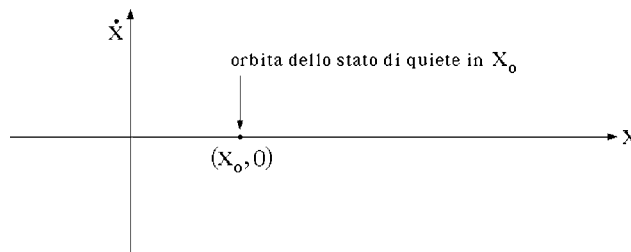
È evidente dalla definizione che tutte le isoipse dell'energia sono curve nel piano delle fasi simmetriche rispetto all'asse delle x , per via dell'ovvia proprietà:

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 + W(x) = E \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{m}{2}(-\dot{x})^2 + W(x) = E.$$

18.3 Orbite degli stati di quiete

Le orbite nel piano delle fasi degli stati di quiete sono punti isolati lungo l'asse delle x :

$$(x(t), \dot{x}(t)) = (x_0, 0) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$



18.4 Orbite nell'intorno dei punti di inversione

In prossimità di uno zero semplice x^* di Φ l'equazione dell'orbita può riesprimersi sostituendo a Φ la sua approssimazione di Taylor al primo ordine nell'intorno di $x = x^*$:

$$\dot{x}^2 = \Phi(x) = \Phi(x^*) + \Phi'(x^*)(x - x^*) + o(x - x^*) \quad (x \rightarrow x^*)$$

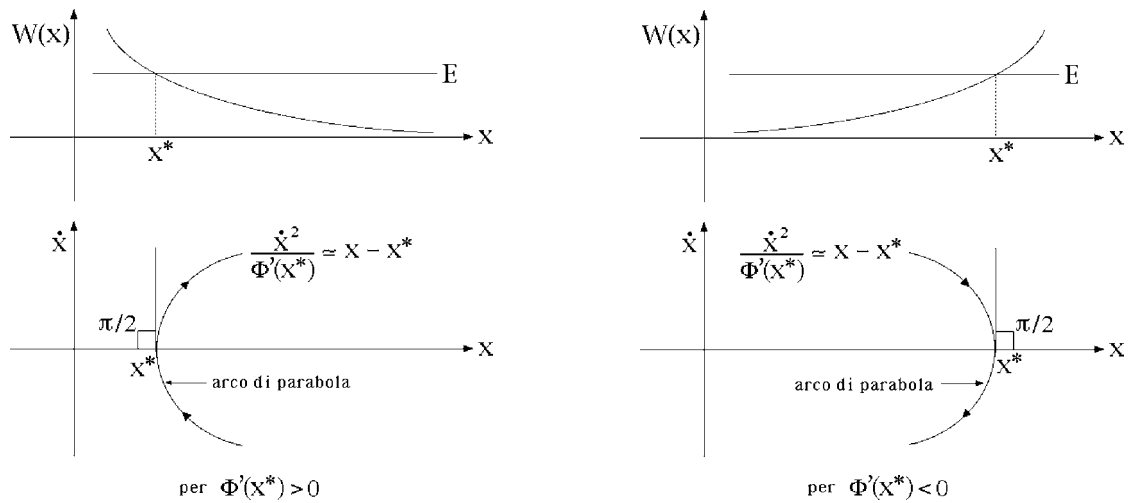
nella quale $\Phi(x^*) = 0$ e $\Phi'(x^*) \neq 0$. A meno di termini $o(x - x^*)$ vale pertanto

$$\dot{x}^2 = \Phi'(x^*)(x - x^*)$$

e quindi, per $|\dot{x}|$ abbastanza piccolo,

$$x = x^* + \frac{1}{\Phi'(x^*)}\dot{x}^2.$$

L'equazione ottenuta rappresenta un arco di parabola di vertice $(x, \dot{x}) = (x^*, 0)$ e asse $\dot{x} = 0$, con la concavità rivolta verso destra o verso sinistra secondo che sia $\Phi'(x^*) > 0$ oppure $\Phi'(x^*) < 0$.



Si osservi, in particolare, che in corrispondenza dei punti di inversione del moto le orbite intersecano l'asse delle ascisse $\dot{x} = 0$ secondo **angoli retti**. L'analisi è valida anche per funzioni di Weierstrass del tipo generale (14.3).

18.5 Orbite nell'intorno dei punti di meta asintotica

Se x^* è uno **zero doppio** della funzione di Weierstrass Φ , vale

$$\Phi(x^*) = \Phi'(x^*) = 0, \quad \Phi''(x^*) > 0.$$

Un'approssimazione di Taylor al secondo ordine della Φ nell'intorno di $x = x^*$ fornisce allora per l'equazione dell'orbita l'espressione

$$\dot{x}^2 = \Phi(x) = \Phi(x^*) + \Phi'(x^*)(x - x^*) + \frac{1}{2}\Phi''(x^*)(x - x^*)^2 + o(x - x^*)^2$$

che omissi i termini $o(x - x^*)^2$ in prossimità di $(x, \dot{x}) = (x^*, 0)$ si semplifica in

$$\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\Phi''(x^*)(x - x^*)^2 = 0$$

ed equivale a

$$\left[\dot{x} - \sqrt{\frac{\Phi''(x^*)}{2}}(x - x^*) \right] \left[\dot{x} + \sqrt{\frac{\Phi''(x^*)}{2}}(x - x^*) \right] = 0$$

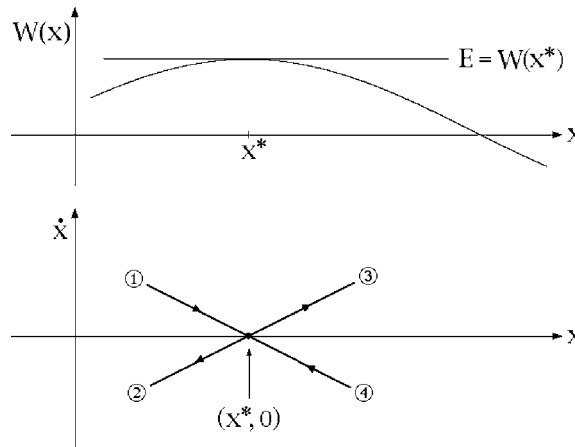
che è rappresentativa di una **conica degenera** costituita da due rette di equazioni rispettive

$$\dot{x} - \sqrt{\frac{\Phi''(x^*)}{2}}(x - x^*) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{x} + \sqrt{\frac{\Phi''(x^*)}{2}}(x - x^*) = 0.$$

Le rette hanno coefficienti angolari opposti

$$\sqrt{\frac{\Phi''(x^*)}{2}} \quad \text{e} \quad -\sqrt{\frac{\Phi''(x^*)}{2}}$$

e si intersecano nel punto $(x, \dot{x}) = (x^*, 0)$, orbita della soluzione statica $x(t) = x^* \quad \forall t \in \mathbb{R}$. La figura che segue mostra l'aspetto generale delle orbite in prossimità della meta asintotica:



È importante sottolineare che i 4 tratti approssimativamente rettilinei **non appartengono** all'orbita di una stessa soluzione e **non comprendono** il relativo punto di intersezione $(x, \dot{x}) = (x^*, 0)$. Detto punto costituisce infatti un'orbita a sè, associata alla soluzione statica $x(t) = x^*$, mentre i segmenti residui, numerati da 1 a 4 nella figura, corrispondono in generale a tratti di orbite distinte — benché, come si vedrà nel seguito, possa capitare che i tratti 1 e 3, ovvero 2 e 4, possano riferirsi ad una stessa **orbita omoclina**.

Qualora x^* sia uno **zero di Φ di molteplicità superiore a 2**, la struttura dell'orbita della soluzione a meta asintotica nelle vicinanze di $(x, \dot{x}) = (x^*, 0)$ può risultare significativamente diversa da quella sopra descritta. Se definito, il solito polinomio di Taylor fornisce per $\Phi^{(3)}(x^*) \neq 0$ l'equazione approssimata dell'orbita

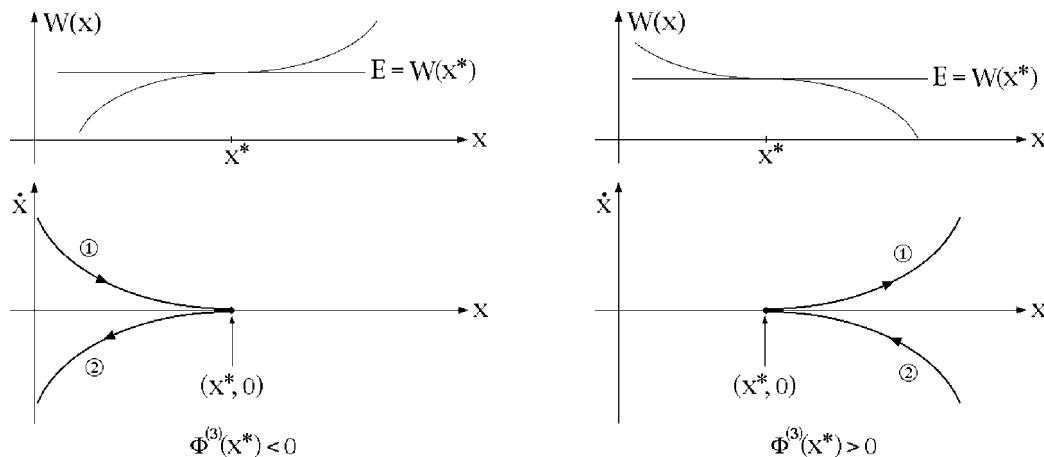
$$\dot{x}^2 = \frac{1}{6}\Phi^{(3)}(x^*)(x - x^*)^3$$

mentre se $\Phi^{(3)}(x^*) = 0$ e $\Phi^{(4)}(x^*) > 0$ si ha

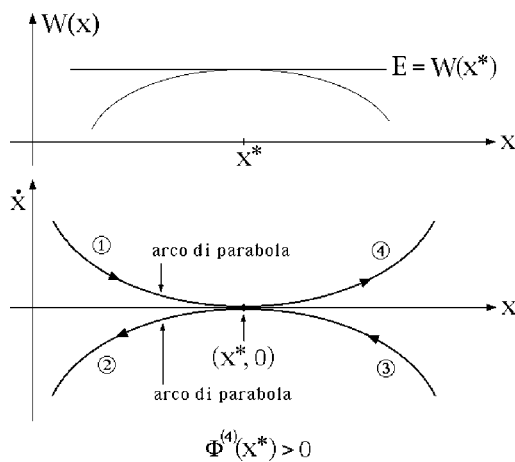
$$\dot{x}^2 = \frac{1}{24}\Phi^{(4)}(x^*)(x - x^*)^4.$$

Nel primo caso si hanno due tratti di orbita con meta asintotica in $x = x^*$, nel futuro per l'una e nel passato per l'altra, ubicati entrambi a destra o entrambi a sinistra di $x = x^*$ secondo che sia $\Phi^{(3)}(x^*) > 0$ oppure $\Phi^{(3)}(x^*) < 0$; i due tratti di orbita hanno punto

limite in $(x, \dot{x}) = (x^*, 0)$, con tangente che tende all'orizzontale. L'aspetto delle due orbite nell'intorno di $(x, \dot{x}) = (x^*, 0)$ è illustrato schematicamente nelle figure seguenti:



Nel secondo caso si ottengono 4 diversi tratti di orbita, approssimativamente rappresentabili come archi di due parabole con vertice comune $(x, \dot{x}) = (x^*, 0)$, stesso asse verticale e concavità opposta. Al solito, il punto $(x, \dot{x}) = (x^*, 0)$ non appartiene a nessuna delle quattro orbite e deve associarsi alla soluzione costante $x(t) = x^* \forall t \in \mathbb{R}$. L'andamento qualitativo delle orbite nell'intorno di $(x, \dot{x}) = (x^*, 0)$ è evidenziato nella figura riportata di seguito:



I casi in cui ad essere diverse da zero siano derivate di ordine superiore di Φ in x^* si trattano in modo analogo e conducono a risultati qualitativamente equivalenti. La stessa analisi rimane valida anche per funzioni di Weierstrass della forma generale (14.3).

18.6 Orbite dei moti periodici

Dalla definizione di soluzione periodica:

$$x(t + T) = x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \implies \quad \dot{x}(t + T) = \dot{x}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

segue immediatamente che le orbite dei moti periodici sono curve chiuse del piano delle fasi, percorse in senso orario. Basta osservare che nel semipiano $\dot{x} > 0$ la soluzione $x(t)$ è monotona crescente, risultando invece monotona decrescente nel semipiano $\dot{x} < 0$.

Nell'intorno di un minimo relativo proprio dell'energia potenziale W i moti del sistema sono tipicamente periodici e la forma delle orbite chiuse può essere caratterizzata per mezzo di una appropriata approssimazione di Taylor. Si supponga, per fissare le idee, che $x = x^*$ sia un minimo relativo proprio di W , con $W'(x^*) = 0$. Una soluzione nell'intorno di $(x, \dot{x}) = (x^*, 0)$ sarà caratterizzata da un valore di energia meccanica

$$E = W(x^*) + \delta E$$

con $\delta E > 0$ e $\delta E \sim 0$. L'equazione dell'orbita si scriverà pertanto

$$\frac{m}{2} \dot{x}^2 + W(x) = W(x^*) + \delta E$$

e introducendo una approssimazione di Taylor di W al secondo ordine nell'intorno di $x = x^*$, assumerà la forma

$$\frac{m}{2} \dot{x}^2 + W(x^*) + W'(x^*)(x - x^*) + \frac{1}{2} W''(x^*)(x - x^*)^2 + o(x - x^*)^2 = W(x^*) + \delta E$$

semplificabile in

$$\frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} W''(x^*)(x - x^*)^2 + o(x - x^*)^2 = \delta E.$$

Se si suppone che la derivata seconda di W sia diversa da zero — e quindi necessariamente di segno positivo, causa la condizione di minimo —, a meno di termini $o(x - x^*)^2$ l'equazione dell'orbita diventa:

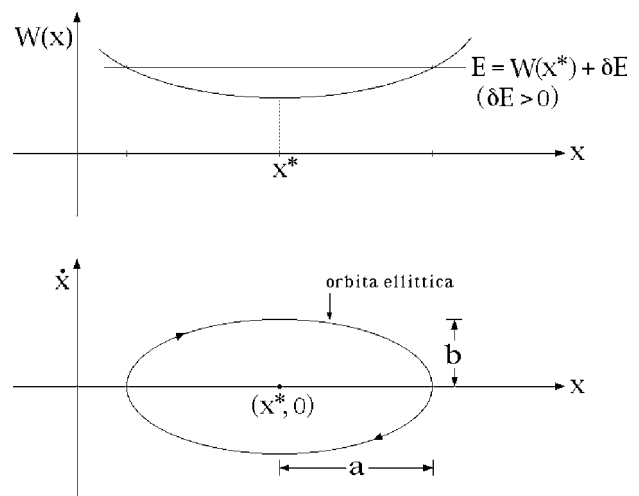
$$\frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} W''(x^*)(x - x^*)^2 = \delta E$$

ossia

$$\frac{(x - x^*)^2}{\frac{2 \delta E}{W''(x^*)}} + \frac{\dot{x}^2}{\frac{2 \delta E}{m}} = 1$$

e rappresenta una ellisse di centro $(x, \dot{x}) = (x^*, 0)$ e semiassi:

$$a = \sqrt{\frac{2 \delta E}{W''(x^*)}} \quad b = \sqrt{\frac{2 \delta E}{m}}.$$



Per contro, qualora sia $W''(x^*) = 0$, la derivata dell'energia potenziale in x^* **non nulla** di ordine più basso sarà di ordine pari e maggiore del secondo: l'orbita della soluzione non risulterà approssimabile come un'ellisse nell'intorno di $(x, \dot{x}) = (x^*, 0)$. Ad esempio, se $W^{(3)}(x^*) = 0$ e $W^{(4)}(x^*) > 0$, si avrà

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{24}W^{(4)}(x^*)(x - x^*)^4 + o(x - x^*)^4 = \delta E$$

e quindi, a meno di termini $o(x - x^*)^4$ per $x \rightarrow x^*$,

$$\frac{m}{2\delta E}\dot{x}^2 + \frac{W^{(4)}(x^*)}{24\delta E}(x - x^*)^4 = 1$$

che non è l'equazione di un'ellisse, pur rappresentando una curva chiusa di andamento simile.

Si osservi che argomenti dello stesso tipo possono essere applicati anche al caso generale

$$\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 + W(q) = E$$

nell'intorno di un minimo relativo proprio $q = q^*$ dell'energia potenziale $W(q)$. Se si assume $W''(q^*) > 0$, un'approssimazione di Taylor al secondo ordine in $(q, \dot{q}) = (q^*, 0)$ porge per $E = W(q^*) + \delta E$ l'espressione

$$\frac{1}{2}a(q^*)\dot{q}^2 + \frac{1}{2}W''(q^*)(q - q^*)^2 = \delta E$$

che è comunque rappresentativa di un'orbita ellittica nel piano delle fasi $(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^2$. Se viceversa $W''(q^*) = 0$ — e per esempio $W^{(3)}(q^*) = 0$, $W^{(4)}(q^*) > 0$ — l'orbita chiusa ha una equazione più complessa, pur condividendo la stessa struttura complessiva di un'orbita ellittica:

$$\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 + \frac{1}{24}W^{(4)}(q^*)(q - q^*)^4 = \delta E.$$

Si intende che in questa espressione, dove ne ricorrano i requisiti di regolarità, la funzione $a(q)$ può essere a sua volta sostituita da una sua approssimazione di Taylor al secondo ordine nell'intorno di $q = q^*$.

18.7 Orbite dei moti a meta asintotica. Separatrici

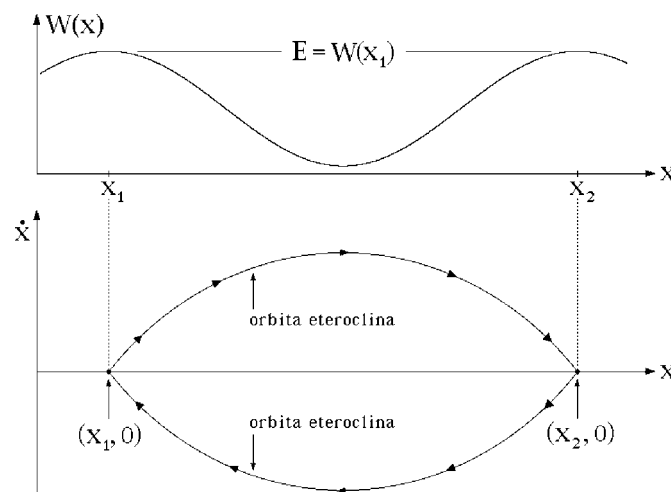
Fra le orbite dei moti a meta asintotica hanno una importanza particolare quelle **omocline** ed **eterocline**. Si dicono **eterocline** le orbite delle soluzioni che hanno mete asintotiche distinte nel futuro e nel passato

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_1 \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x_2, \quad x_1 \neq x_2.$$

La conservazione dell'energia e la continuità di questa impongono che nelle mete asintotiche l'energia potenziale assuma lo stesso valore

$$W(x_1) = W(x_2).$$

L'andamento tipico delle orbite eterocline è illustrato nella figura seguente:

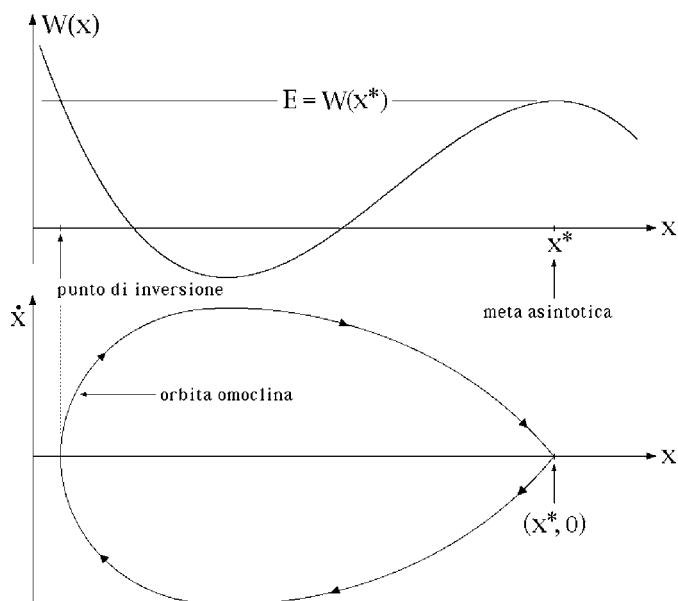


Si ricorda che le orbite eterocline **non comprendono** le mete asintotiche $(x, \dot{x}) = (x_1, 0)$ e $(x, \dot{x}) = (x_2, 0)$, le quali costituiscono orbite a sè stanti relative alle soluzioni statiche $x(t) = x_1 \forall t \in \mathbb{R}$ ed $x(t) = x_2 \forall t \in \mathbb{R}$, rispettivamente.

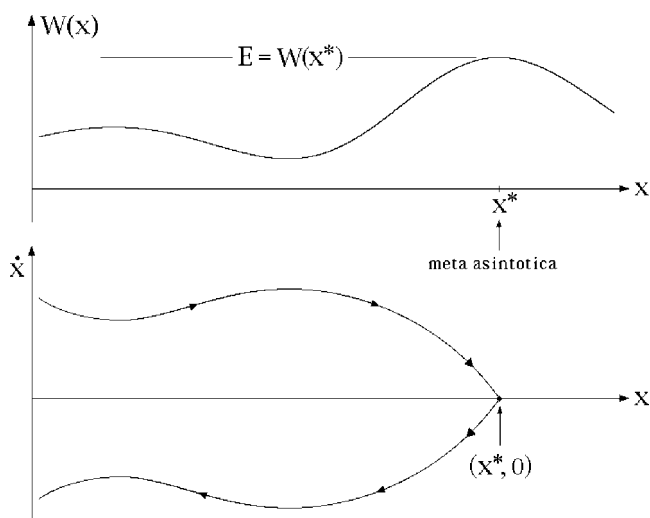
Viceversa, si parla di **orbite omocline** in riferimento a soluzioni che presentano la stessa meta asintotica tanto nel futuro quanto nel passato:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^* \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x^*.$$

La figura mostra il caratteristico aspetto di un'orbita omoclina:

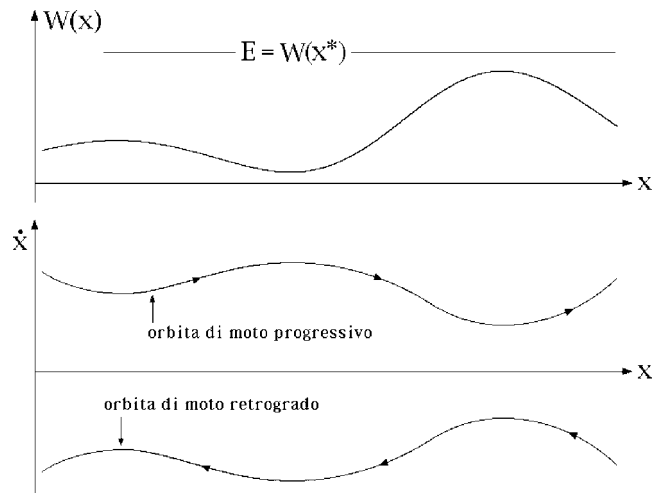


Le orbite delle soluzioni a meta asintotica sono dette genericamente **curve separatrici** o, semplicemente, **separatrici** del sistema. Ciò perchè esse di regola separano regioni del piano delle fasi caratterizzate da moti qualitativamente diversi — periodici, progressivi o retrogradi. Non tutte le separatrici sono omocline o eterocline in senso stretto, come l'esempio seguente dimostra:



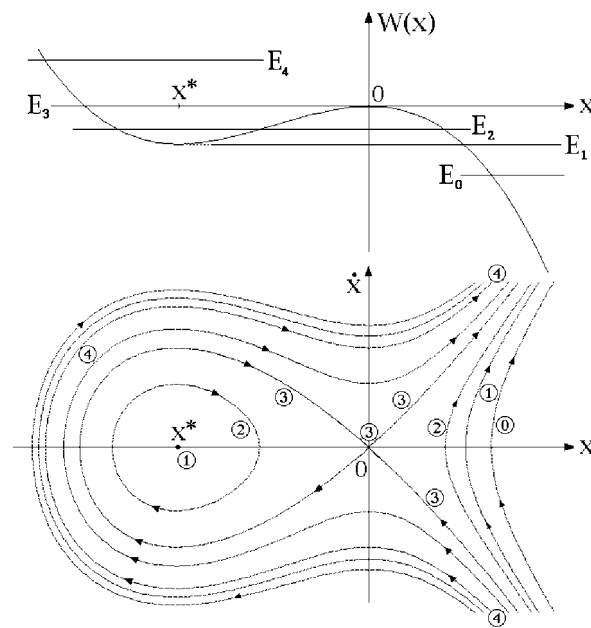
18.8 Orbite dei moti indefinitamente progressivi o retrogradi

Nei moti indefinitamente progressivi la velocità generalizzata \dot{x} si mantiene sempre di segno positivo. Le orbite corrispondenti sono quindi aperte e completamente ubicate nel semipiano $\dot{x} > 0$. Analogamente, lungo i moti indefinitamente retrogradi la velocità \dot{x} è sempre negativa e le orbite corrispondenti, aperte, si collocano per intero nel semipiano $\dot{x} < 0$. Orbite tipiche dell'una e dell'altra specie sono illustrate nella figura seguente:



18.9 Esempio di ritratto di fase

Le considerazioni precedenti possono essere applicate al grafico dell'energia potenziale per tracciare il ritratto di fase di un sistema unidimensionale posizionale. Il tipico risultato è illustrato nella figura seguente:



L'analisi prende l'avvio dall'individuazione dei punti critici dell'energia potenziale, nella fattispecie identificati con $x = x^*$ e $x = 0$, e dal calcolo dei relativi valori $E_1 = W(x^*)$ ed $E_3 = W(0)$. Constatato che W non è inferiormente limitata, si considera un qualsiasi livello di energia $E_0 < E_1$. Completano il quadro un livello di energia E_2 compreso fra i livelli critici E_1 ed E_3 , nonché un livello $E_4 > E_3$. In questo modo tutte le tipologie notevoli di orbite vengono individuate, con particolare riguardo alle separatrici, che si collocano sull'isoipsa $H(x, \dot{x}) = E_3$ dell'energia, ed alle orbite periodiche, che ricorrono per $E_1 < H(x, \dot{x}) < E_3$ e $x < 0$.

19. Discussione di Weierstrass ed analisi di stabilità dell'equilibrio

Nei sistemi unidimensionali posizionali l'analisi di Weierstrass può essere impiegata per verificare direttamente la stabilità o l'instabilità delle soluzioni statiche.

A titolo di esempio, è facile verificare la stabilità della soluzione statica $(x(t), \dot{x}(t)) = (x^*, 0), \forall t \in \mathbb{R}$ qualora l'energia potenziale del sistema abbia il grafico illustrato in figura. Basta considerare una regione di orbite chiuse nell'intorno di $(x, \dot{x}) = (x^*, 0)$, caratterizzata da valori di energia compresi fra $W(x^*)$ e $W(x^*) + \delta E$, con $\delta E > 0$ abbastanza piccolo:

$$W(x^*) < H(x, \dot{x}) < W(x^*) + \delta E$$

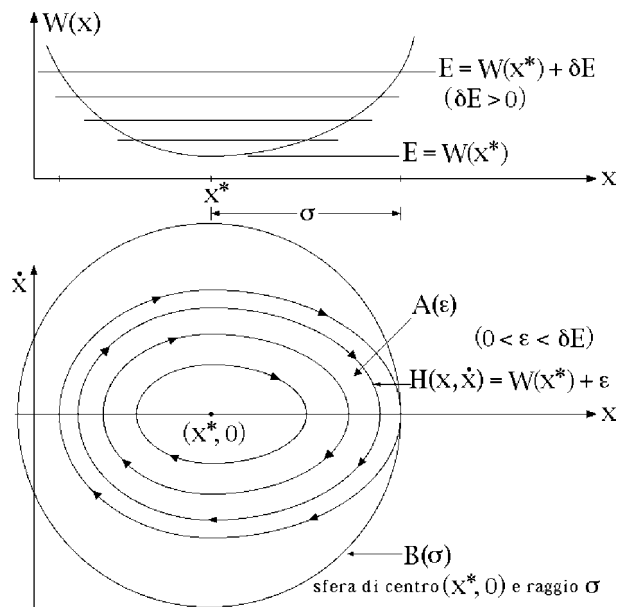
in modo che tali orbite siano tutte contenute in una sfera $B(\sigma)$ centrata su $(x^*, 0)$ e di raggio σ appropriato. Dalla continuità della funzione $H(x, \dot{x})$ è evidente che $\forall \varepsilon \in (0, \delta E)$ l'insieme $A(\varepsilon)$ definito da

$$B(\sigma) \cap \{(x, \dot{x}) : H(x, \dot{x}) < W(x^*) + \varepsilon\}$$

costituisce un intorno aperto di $(x^*, 0)$ in \mathbb{R}^2 . Appare altresì evidente che $\forall \delta \leq \varepsilon, \delta > 0$, tutti i dati iniziali presi all'istante $t = 0$ entro l'aperto $A(\delta)$ danno luogo a soluzioni le cui orbite si mantengono entro l'aperto $A(\varepsilon)$ ad ogni istante successivo — e precedente —; l'insieme $A(\delta)$ è quello che si dice un **insieme invariante** per le equazioni del moto: se la condizione iniziale (x_0, \dot{x}_0) appartiene a $A(\delta)$ la corrispondente soluzione si mantiene in $A(\delta)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

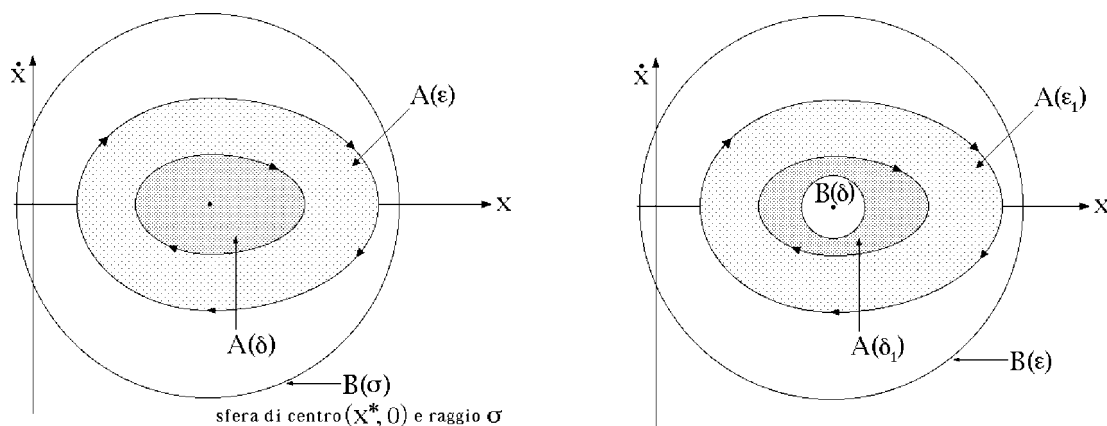
D'altra parte, $\forall \varepsilon > 0$ abbastanza piccolo — $\varepsilon < \sigma$ — esiste certamente un $\varepsilon_1 > 0$ tale che l'aperto $A(\varepsilon_1)$ è incluso nella sfera aperta $B(\varepsilon)$ di centro $(x^*, 0)$ e raggio ε :

$$A(\varepsilon_1) \subseteq B(\varepsilon)$$



e, preso un qualsiasi $\delta_1 < \varepsilon_1$, può determinarsi un $\delta > 0$ tale che la sfera $B(\delta)$ centrata in $(x^*, 0)$ con raggio δ sia contenuta in $A(\delta_1)$:

$$B(\delta) \subseteq A(\delta_1).$$

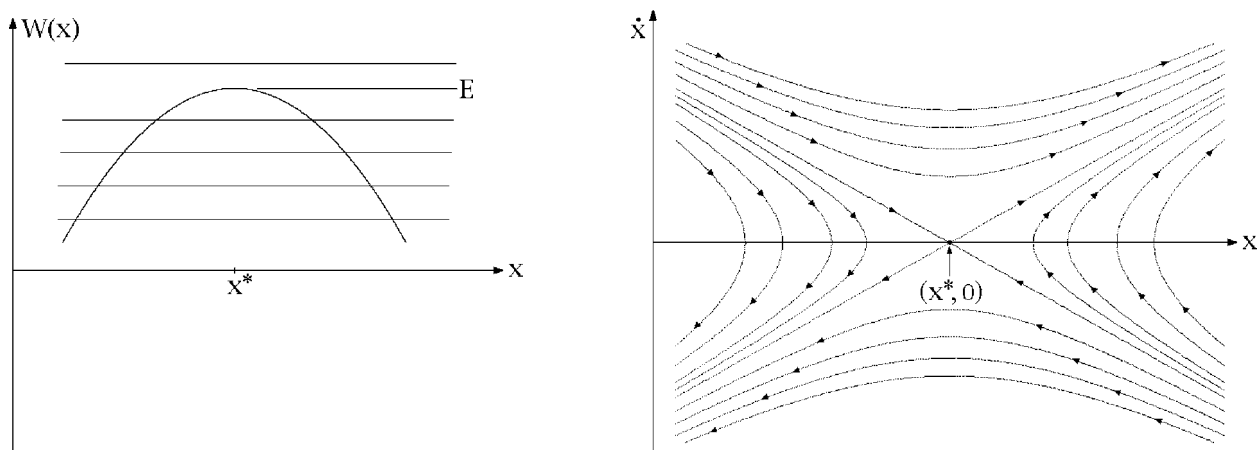


Di conseguenza, poichè $A(\delta_1)$ è invariante e incluso in $A(\varepsilon_1)$, $\forall (x_0, \dot{x}_0) \in B(\delta)$ la corrispondente soluzione delle equazioni del moto, di dati iniziali

$$x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

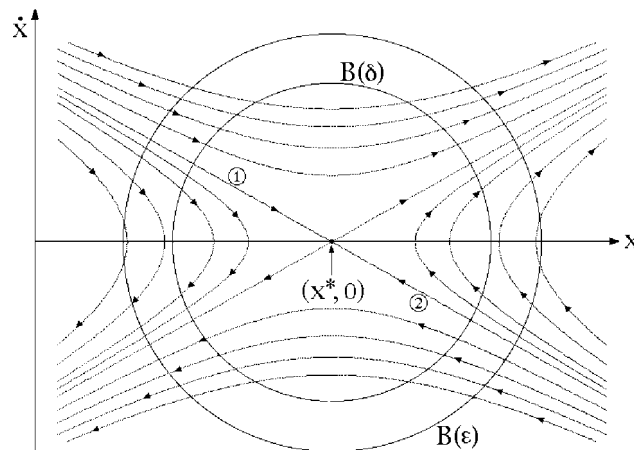
rimane ubicata in $B(\varepsilon) \forall t \geq 0$ — in effetti $\forall t \in \mathbb{R}$. L'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, abbastanza piccolo, consente di concludere che la soluzione statica è **stabile** nel senso di Liapunov — tanto nel futuro quanto nel passato.

Alla verifica dell'instabilità si provvede in modo del tutto analogo. Nel caso dell'equilibrio x^* , massimo relativo proprio dell'energia potenziale W , l'instabilità è evidente dall'aspetto del ritratto di fase nell'intorno di $(x, \dot{x}) = (x^*, 0)$, come illustra la figura seguente:



Basta fissare una qualsiasi sfera $B(\varepsilon)$ di raggio $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo, centrata in $(x, \dot{x}) = (x^*, 0)$, in modo che entro tale sfera non siano contenuti altri punti critici del

potenziale oltre a $(x^*, 0)$ stesso. Si ha allora che in ogni sfera $B(\delta)$, di centro $(x^*, 0)$ e raggio $\delta > 0$, esiste almeno una condizione iniziale la cui corrispondente soluzione esce dalla sfera $B(\varepsilon)$ prefissata, a patto di aspettare un intervallo di tempo sufficientemente lungo. **Ciò è sufficiente ad assicurare l'instabilità della soluzione statica** $(x(t), \dot{x}(t)) = (x^*, 0) \forall t \in \mathbb{R}$. **Ma non solo!** In effetti, **tutte** le condizioni iniziali ricomprese entro la sfera $B(\delta)$ danno luogo a soluzioni che escono da $B(\delta)$ a tempi adeguatamente lunghi, con esclusione dei soli tratti asintoticamente stabili nel futuro delle separatrici, contrassegnati con 1 e 2.



Da questo segue che **per una perturbazione arbitraria del dato iniziale è pressochè certo che la soluzione perturbata si allontani dalla soluzione statica**, uscendo dalla sfera $B(\varepsilon)$ in un intervallo di tempo appropriato. Si ha così una verifica diretta, sia pure in un caso particolare, di quanto affermato alla sezione 9: che cioè perturbando a caso una soluzione statica instabile, la soluzione perturbata diverge da quella con probabilità 1. Si osservi, come già sottolineato nella sezione 9, che è comunque definito un insieme di dati iniziali le cui relative soluzioni non soltanto non si allontanano dalla soluzione statica, ma addirittura tendono a $(x^*, 0)$ per $t \rightarrow +\infty$: i tratti asintoticamente stabili delle separatrici compresi entro $B(\delta)$ e indicati con 1 e 2 in figura. Ma la probabilità di imbattersi in tali condizioni iniziali, per una perturbazione casuale della soluzione statica, è sostanzialmente nulla.

20. Esempio notevole di analisi di Weierstrass. Il pendolo semplice

Si consideri un punto materiale pesante P , di massa m , vincolato a scorrere senza attrito su una circonferenza di centro fisso O e raggio R , disposta in un piano verticale fisso Oxy . Un simile sistema è noto come **pendolo semplice**. Se si assume Oy come asse verticale orientato verso l'alto e si introduce l'angolo θ compreso fra il raggio $P - O$ e la verticale condotta da O verso il basso come parametro lagrangiano, la parametrizzazione del sistema si scrive

$$P - O = R \sin \theta \hat{e}_1 - R \cos \theta \hat{e}_2, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Dal postulato delle reazioni vincolari:

$$m\ddot{P} = -mg \hat{e}_2 + \vec{\Phi}$$

le equazioni pure del moto si ottengono proiettando lungo il versore tangente

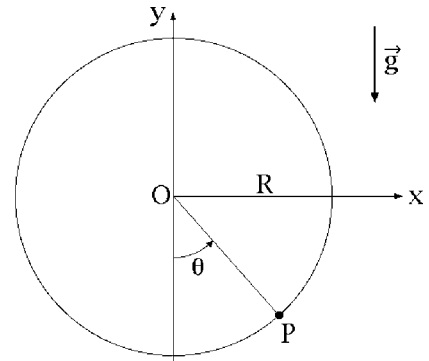
$$\hat{\tau} = \frac{dP}{d\theta} \left| \frac{dP}{d\theta} \right|^{-1} = \frac{R \cos \theta \hat{e}_1 + R \sin \theta \hat{e}_2}{|R \cos \theta \hat{e}_1 + R \sin \theta \hat{e}_2|} = \cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2$$

e risultano pertanto:

$$mR\ddot{\theta} = -mg \hat{e}_2 \cdot (\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2) + \vec{\Phi} \cdot \hat{\tau}$$

ovvero

$$mR\ddot{\theta} + mg \sin \theta = 0.$$



L'integrale primo dell'energia meccanica viene individuato moltiplicando membro a membro l'equazione del moto per la velocità angolare scalare $\dot{\theta}$:

$$mR\ddot{\theta} \dot{\theta} = -mg \sin \theta \dot{\theta}$$

da cui si deduce:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mR^2 \dot{\theta}^2}{2} - mgR \cos \theta \right) = 0$$

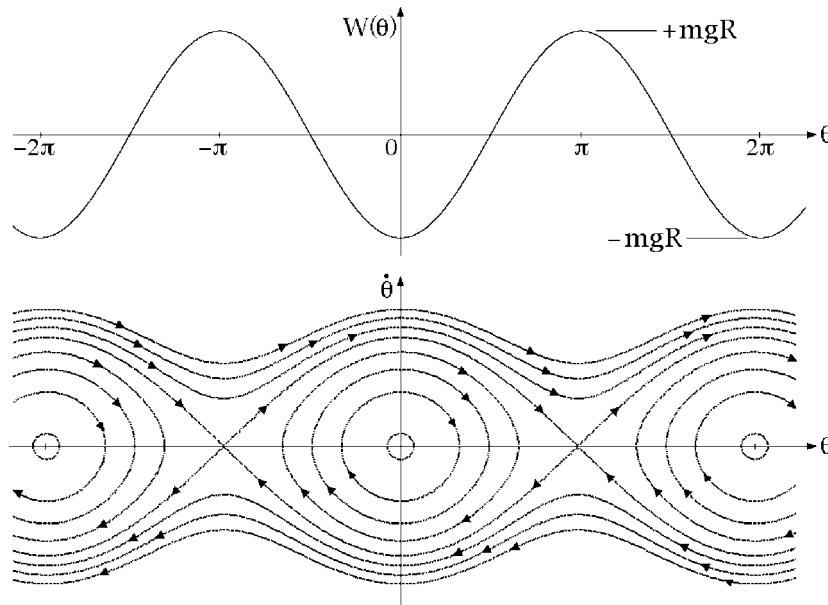
e quindi la conservazione dell'energia

$$H(\theta, \dot{\theta}) = \frac{mR^2}{2} \dot{\theta}^2 - mgR \cos \theta$$

dove $T = mR^2 \dot{\theta}^2 / 2$ è l'energia cinetica del punto materiale, mentre

$$W(\theta) = -mgR \cos \theta$$

rappresenta l'energia potenziale del sistema. Il pendolo semplice è un tipico esempio di sistema unidimensionale posizionale, al quale si può dunque applicare l'analisi di Weierstrass. L'energia potenziale è limitata tanto superiormente quanto inferiormente. I punti di minimo relativo — e assoluto — forte si hanno per $\theta = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. I massimi relativi propri ricorrono per $\theta = (2n + 1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Il valore di W in corrispondenza dei minimi relativi è $-mgR$, mentre in tutti i massimi relativi il comune valore dell'energia potenziale risulta mgR . Non sono presenti punti di flesso orizzontale. Il grafico dell'energia potenziale ha l'andamento sinusoidale illustrato nella figura seguente:



I livelli di energia utili per l'analisi di Weierstrass sono specificati dal grafico dell'energia potenziale. Si procede alla loro discussione dettagliata.

- $E = -mgR$ è il valore del minimo assoluto dell'energia potenziale. Questo livello di energia individua gli stati di quiete nelle configurazioni di equilibrio $\theta = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, che sono zeri doppi della funzione di Weierstrass e rappresentano i soli punti $\theta \in \mathbb{R}$ in cui la stessa funzione risulti non negativa.
- $-mgR < E < mgR$. Per livelli di energia compresi fra il valore $-mgR$ del minimo assoluto e il valore mgR del massimo assoluto dell'energia potenziale si ottengono moti periodici, la cui ampiezza cresce al crescere di E . Questo assicura anche la **stabilità delle soluzioni statiche** $(\theta(t), \dot{\theta}(t)) = (2\pi n, 0)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, considerate al punto precedente. L'elongazione massima θ_{\max} del moto oscillatorio è determinata dall'equazione

$$E = -mgR \cos \theta_{\max}$$

mentre il corrispondente periodo T si calcola mediante l'integrale di Weierstrass

$$T = 4 \int_0^{\theta_{\max}} \frac{1}{\dot{\theta}} d\theta = \sqrt{8mR^2} \int_0^{\theta_{\max}} \frac{1}{\sqrt{E + mgR \cos \theta}} d\theta = \sqrt{\frac{8R}{g}} \int_0^{\theta_{\max}} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_{\max}}} d\theta$$

che l'identità trigonometrica $\cos \theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$ permette di riscrivere nella forma

$$T = 2\sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{\theta_{\max}} \frac{1}{\sqrt{\sin^2(\theta_{\max}/2) - \sin^2(\theta/2)}} d\theta$$

e il cambiamento di variabile $\theta \in [0, \theta_{\max}] \rightarrow \varphi \in [0, \pi/2]$ definito da

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right) \sin \varphi$$

riduce all'espressione:

$$T = 4\sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right) \sin^2 \varphi}} d\varphi. \quad (20.1)$$

Dalla relazione (20.1) è immediato verificare che il periodo di oscillazione del pendolo dipende dall'elongazione massima θ_{\max} , crescendo al crescere di questa — ovvero dell'energia E . Nel limite delle piccole oscillazioni vale $\theta_{\max} \simeq 0$ e l'espressione per il periodo diventa praticamente indipendente dall'ampiezza di oscillazione:

$$T \simeq 4\sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{\pi/2} 1 d\varphi = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

costituendo la cosiddetta **legge di Galileo** o dell'**isocronia delle piccole oscillazioni del pendolo**. Viceversa, il periodo di oscillazione diverge a $+\infty$ per $E \rightarrow mgR-$, ovvero per $\theta_{\max} \rightarrow \pi-$.

- $E = mgR$ rappresenta il valore massimo dell'energia potenziale. Per valori iniziali $\theta = (2\pi + 1)n$, $n \in \mathbb{Z}$, della coordinata lagrangiana la velocità angolare iniziale $\dot{\theta}$ si annulla ed il relativo moto è lo stato di quiete nella configurazione di equilibrio $\theta = (2\pi + 1)n$, $n \in \mathbb{Z}$. Se l'angolo iniziale θ non corrisponde ad alcuna delle configurazioni di equilibrio $\theta = (2\pi + 1)n$, $n \in \mathbb{Z}$ — ovvero la velocità angolare iniziale $\dot{\theta}$ è diversa da zero — si ottengono moti a meta asintotica.

- $E > mgR$. Per livelli di energia superiori al massimo mgR i moti sono indefinitamente progressivi o retrogradi, secondo che il segno della velocità angolare iniziale θ sia positivo o negativo. Assieme ai moti asintotici descritti al punto precedente, questi moti progressivi e retrogradi permettono di concludere che le soluzioni statiche in $\theta = (2\pi + 1)n$, $n \in \mathbb{Z}$, sono **instabili** nel senso di Liapunov.

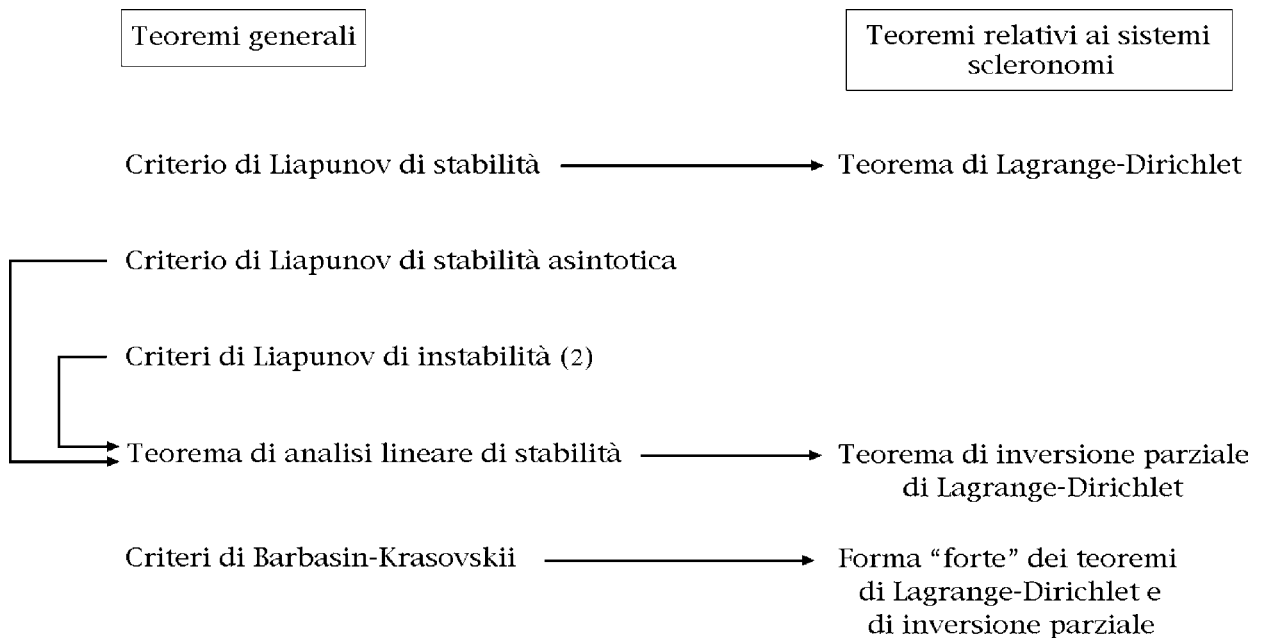
Le soluzioni periodiche per $E \in (-mgR, mgR)$ corrispondono ai moti propriamente oscillatori del pendolo. Le soluzioni asintotiche sono invece associate a moti progressivi o retrogradi, invero di difficile realizzazione, in cui il punto materiale si avvicina indefinitamente alla sommità $\theta = \pi$ della circonferenza vincolare senza mai raggiungerla se non nel limite $t \rightarrow +\infty$. Infine, i moti retrogradi o progressivi per $E > mgR$ vedono il punto P ruotare indefinitamente lungo la circonferenza vincolare, in senso orario od antiorario rispettivamente.

21. Quadro sinottico dei principali teoremi di stabilità

I teoremi per l'analisi della stabilità secondo Liapunov si possono distinguere in due categorie principali:

- (i) teoremi generali, applicabili allo studio delle soluzioni costanti di un qualsiasi sistema di equazioni differenziali del primo ordine in forma normale;
- (ii) teoremi specifici relativi ai sistemi scleronomi, utilizzabili per l'analisi di stabilità dell'equilibrio ordinario nei sistemi scleronomi a vincoli ideali — ovvero delle soluzioni statiche delle relative equazioni lagrangiane del moto.

Il quadro riassuntivo seguente illustra i principali risultati delle due tipologie, evidenziando con una freccia le relative interrelazioni — la freccia fra due teoremi indica che il primo viene usato per dimostrare il secondo.



Giova osservare in particolare che:

- (i) i criteri di Liapunov, di stabilità, stabilità asintotica e instabilità, raramente sono applicati in modo diretto all'analisi di stabilità. Il loro ruolo principale consiste nella dimostrazione di altri teoremi. Più precisamente, il criterio di stabilità permette di dimostrare il teorema di Lagrange-Dirichlet, mentre i criteri di stabilità asintotica e di instabilità forniscono una possibile prova del teorema di analisi lineare di stabilità. Il motivo che rende difficoltoso l'uso diretto dei criteri di Liapunov è che questi chiamano in causa delle speciali *funzioni di Liapunov*, la cui costruzione in generale non è ovvia. Per ogni specifico problema sarebbe necessario individuare una funzione di Liapunov

appropriata, un compito di solito non banale;

- (ii) il teorema di maggiore importanza pratica è quello di *analisi lineare di stabilità*, a causa della sua generalità e della relativa facilità d'uso. La sua applicazione si riduce infatti a risolvere un *problema spettrale* — calcolo degli autovalori di una matrice reale costante — il che, almeno numericamente, è sempre possibile;
- (iii) il teorema di analisi lineare di stabilità consente di provare il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet. Per meglio dire, l'inversione parziale di Lagrange-Dirichlet è *precisamente la forma assunta del teorema di analisi lineare* qualora questo venga applicato alle equazioni di Lagrange di un *sistema scleronomo a vincoli ideali posizionale e conservativo*;
- (iv) i criteri di Barbasin-Krasovskii (uno di stabilità asintotica e uno di instabilità) sono una variante dei criteri di Liapunov, in cui le ipotesi vengono un poco modificate. Anche di questi teoremi, in genere, l'uso diretto è alquanto problematico. Il loro principale impiego è nella dimostrazione della forma forte dei teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale, per gli *equilibri isolati* dei sistemi scleronomi soggetti a sollecitazioni posizionali conservative e *completamente dissipative*.

In queste note verranno enunciati e dimostrati i criteri di Liapunov di stabilità e di stabilità asintotica, giusto per illustrare l'idea generale del cosiddetto *metodo diretto di Liapunov* per l'analisi della stabilità.

Si enuncerà, senza dimostrazione, il teorema di analisi lineare, sottolineando le analogie con lo studio della stabilità nei *sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti*.

Si proverà quindi il teorema di Lagrange-Dirichlet facendo uso del criterio di Liapunov di stabilità, mentre l'inversione parziale verrà ricondotta ad una applicazione del teorema di analisi lineare.

Si presenterà infine, senza dimostrazione, la forma forte dei teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale, che sono di facile impiego e consentono di ottenere agevolmente risultati di stabilità difficilmente ricavabili con altri metodi — con il teorema di analisi lineare, ad esempio.

22. Il metodo di Liapunov per l'analisi di stabilità

Il cosiddetto **metodo diretto di Liapunov** per l'analisi di stabilità si basa sull'introduzione di particolari funzioni — dette **funzioni di Liapunov** — dotate di speciali proprietà di monotonia lungo le soluzioni dell'equazione differenziale. Raramente il metodo viene usato per accertare la stabilità o l'instabilità di una soluzione: di regola lo si impiega per dimostrare teoremi generali, i quali sono poi utilizzati come tecniche standard per l'analisi di stabilità. Storicamente il metodo diretto di Liapunov si propone come alternativa al **metodo di analisi lineare di stabilità**, sempre introdotto da Liapunov, che si discuterà nel seguito. Il metodo diretto si articola in una serie di teoremi notevoli:

- teorema di Liapunov di stabilità;
- teorema di Liapunov di stabilità asintotica;

- primo criterio di instabilità di Liapunov;
- secondo criterio di instabilità di Liapunov.

In queste note ci si limiterà ad illustrare il criterio di Liapunov di stabilità e quello di stabilità asintotica, e per il solo caso autonomo. L'equazione differenziale si assumerà quindi della forma

$$\dot{x} = f(x) \quad (22.1)$$

con $x \in D$, aperto non vuoto di \mathbb{R}^n , ed $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1 nel proprio dominio di definizione, in modo che il teorema di esistenza ed unicità sia applicabile. Si richiederà inoltre, senza perdita di generalità, che $0 \in D$ e $f(0) = 0$ in modo che la funzione costante $x(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$, sia soluzione dell'equazione differenziale. I teoremi di Liapunov verranno enunciati in riferimento a tale soluzione costante.

23. Teorema di Liapunov di stabilità (caso autonomo)

Il teorema di Liapunov di stabilità fornisce una condizione sufficiente per la stabilità della soluzione $x(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Si tratta dunque di un **criterio di stabilità** per detta soluzione. L'enunciato è il seguente.

Teorema di Liapunov di stabilità

Sulla sfera chiusa $B[\gamma] \subset D^{(1)}$, di centro 0 e raggio $\gamma > 0$, sia definita una funzione $V : B[\gamma] \longrightarrow \mathbb{R}$ soddisfacente le condizioni seguenti:

- (i) *V risulta di classe C^1 in $B[\gamma]$;*
- (ii) *V è definita positiva in $B[\gamma]$;*
- (iii) *\dot{V} , derivata di V lungo le soluzioni dell'equazione differenziale (22.1), è semidefinita negativa in $B[\gamma]$.*

Allora la soluzione costante $x(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$ è stabile nel senso di Liapunov.

Si ricorda che per derivata di una funzione V lungo le soluzioni dell'equazione differenziale autonoma (22.1) si intende la funzione di x :

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(x) \cdot f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) f_i(x)$$

essendo $f_i, i = 1, \dots, n$, le componenti della f .

Una funzione $V : B[\gamma] \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice **definita positiva in $B[\gamma]$** se si annulla nel centro 0 della sfera $B[\gamma]$ e risulta strettamente positiva in ogni altro punto di questa:

$$V(0) = 0 \quad \text{e} \quad V(x) > 0 \quad \forall x \in B[\gamma] \setminus \{0\}.$$

⁽¹⁾ l'esistenza di una sfera centrata in 0 ed inclusa in D è assicurata dall'essere D aperto e $0 \in D$.

La definizione di funzione **definita negativa** è del tutto analoga, salvo sostituire il segno della funzione da positivo a negativo:

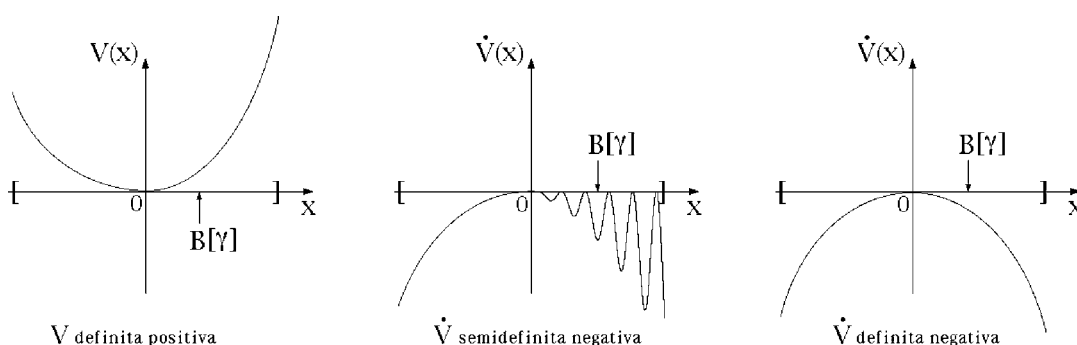
$$V(0) = 0 \quad \text{e} \quad V(x) < 0 \quad \forall x \in B[\gamma] \setminus \{0\}.$$

La funzione $\dot{V} : B[\gamma] \rightarrow \mathbb{R}$ si definisce **semidefinita negativa in** $B[\gamma]$ se è nulla nel centro 0 della sfera $B[\gamma]$ e risulta negativa o nulla in ogni altro punto della stessa sfera:

$$\dot{V}(0) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in B[\gamma] \setminus \{0\}.$$

Definizione simile è quella di funzione **semidefinita positiva**.

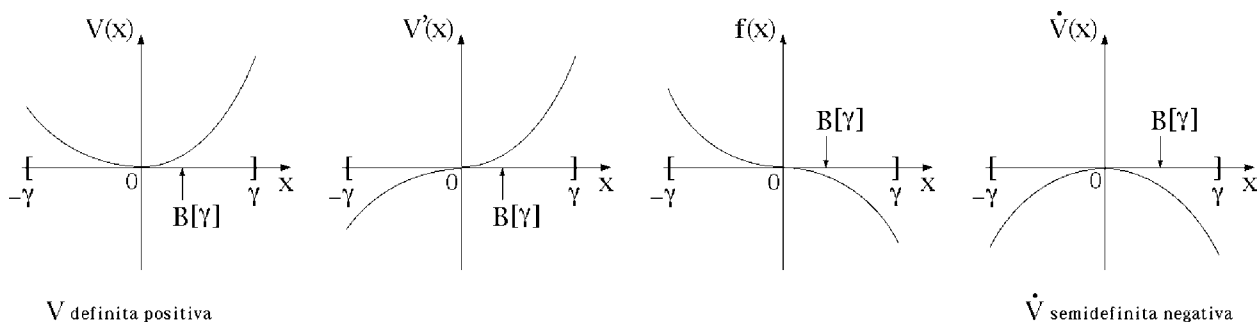
Da notare che mentre per le funzioni definite positive o negative il centro 0 della sfera $B[\gamma]$ è l'unico zero, nel caso di funzioni semidefinite non è escluso che possano essere presenti altri punti di $B[\gamma]$, oltre a $x = 0$, in cui la funzione stessa si annulli. I grafici-tipo delle funzioni definite/semidefinite positive/negative sono mostrati nella figura seguente:



A scanso di equivoci, è importante sottolineare che le proprietà di positività/negatività delle funzioni V e \dot{V} sono totalmente indipendenti fra loro. Si ricorda infatti che la derivata di V lungo le soluzioni dell'equazione differenziale è definita in termini del secondo membro f di questa. Neppure nel caso unidimensionale — $n = 1$ — essa può essere confusa con la derivata prima di V :

$$\dot{V}(x) = V'(x)f(x) \neq V'(x).$$

Così, ad esempio, una funzione V di una variabile reale che sia monotona decrescente in $[-\gamma, 0]$, nulla in $x = 0$ e monotona crescente $[0, \gamma]$, risulta certamente definita positiva in $B[\gamma] = [-\gamma, \gamma]$ e la sua derivata \dot{V} lungo le soluzioni dell'equazione $\dot{x} = f(x)$ è semidefinita negativa in $B[\gamma]$ qualora si abbia $f(x) > 0$ in $[-\gamma, 0)$ e $f(x) < 0$ in $(0, \gamma]$ — vedi figura.



Si può ora procedere alla dimostrazione del teorema di Liapunov.

Dimostrazione del teorema di stabilità

Si tratta di provare che $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tale che $\forall x_0 \in D, |x_0| < \delta(\varepsilon)$ la soluzione $x(t, x_0)$ del problema di Cauchy con dato iniziale $x(0) = x_0$ soddisfa

$$|x(t, x_0)| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$

È evidente che basta provare l'asserto per ogni $\varepsilon > 0$ **abbastanza piccolo**. Si considera allora un qualsiasi $\varepsilon < \gamma$ e si costruisce un $\delta(\varepsilon) > 0$ appropriato che soddisfa la precedente definizione. I passi successivi di questa costruzione sono elencati di seguito.

- (i) Sulla superficie sferica $\partial B[\varepsilon]$ di centro 0 e raggio ε la funzione V è continua su un compatto di \mathbb{R}^n — un insieme limitato e chiuso — e per il teorema di Weierstrass ammette un **minimo assoluto**. Esiste perciò un punto x^* della superficie sferica tale che

$$\inf_{|x|=\varepsilon} V(x) = V(x^*) = \beta(\varepsilon) > 0 \quad (23.1)$$

dove il valore $\beta(\varepsilon)$ del minimo risulta certamente positivo in quanto per ipotesi V è definita positiva in $B[\gamma]$, mentre per costruzione $x^* \in \partial B[\varepsilon] \subset B[\varepsilon] \subset B[\gamma]$ e $x^* \neq 0$.

- (ii) La funzione di Liapunov V è nulla in $x = 0$ in quanto definita positiva, e continua nello stesso punto perchè C^1 in $B[\gamma]$. Qualunque sia $\beta(\varepsilon) > 0$ esiste allora un $\delta(\varepsilon) > 0$, $\delta(\varepsilon) < \gamma$, tale che

$$|V(x) - V(0)| < \beta(\varepsilon)/2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad |x| < \delta(\varepsilon)$$

ossia, ricordando che $V(0) = 0$ e $V(x) \geq 0 \forall x \in B[\gamma]$,

$$V(x) < \beta(\varepsilon)/2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad |x| < \delta(\varepsilon)$$

o ancora

$$\sup_{|x| < \delta(\varepsilon)} V(x) \leq \beta(\varepsilon)/2. \quad (23.2)$$

Per completezza va rilevato che nel secondo membro della disequaglianza (23.2) in luogo del termine $\beta(\varepsilon)/2$ si potrebbe considerare una qualsiasi quantità positiva e sistematicamente minore di $\beta(\varepsilon)$: la dimostrazione che segue non cambierebbe.

- (iii) Il numero positivo $\delta(\varepsilon)$ introdotto al punto (ii) soddisfa la definizione di stabilità per la sfera $B(\varepsilon)$:

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad |x_0| < \delta(\varepsilon), \quad \Rightarrow \quad |x(t, x_0)| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$

La prova si ottiene con un argomento per assurdo. Si supponga che l'affermazione sia falsa. Dovrà allora esistere un dato iniziale $x_0 \in \mathbb{R}^n, |x_0| < \delta(\varepsilon)$, la cui corrispondente soluzione della (22.1) non si mantiene entro la sfera di raggio $\varepsilon > 0 \forall t \geq 0$. Per la

continuità della soluzione, è perciò definito un istante $t^* > 0$ in corrispondenza del quale la soluzione $x(t, x_0)$ raggiunge la superficie sferica di raggio ε una prima volta:

$$|x(t^*, x_0)| = \varepsilon \quad |x(t, x_0)| < \varepsilon \quad \forall t \in [0, t^*].$$

per cui

$$x(t, x_0) \in B[\varepsilon] \subset B[\gamma] \quad \forall t \in [0, t^*]$$

e quindi, data la semidefinitezza negativa di \dot{V} ,

$$\dot{V}[x(t, x_0)] \leq 0 \quad \forall t \in [0, t^*]. \quad (23.3)$$

Non rimane che integrare membro a membro la (23.3) in $t \in [0, t^*]$ per ottenere la disequazione

$$\int_0^{t^*} \dot{V}[x(t, x_0)] dt \leq \int_0^{t^*} 0 dt = 0$$

il cui primo membro, ricordando la definizione di \dot{V} , si riscrive nella forma

$$\begin{aligned} \int_0^{t^*} \dot{V}[x(t, x_0)] dt &= \int_0^{t^*} \frac{\partial V}{\partial x}[x(t, x_0)] \cdot f[x(t, x_0)] dt = \int_0^{t^*} \frac{\partial V}{\partial x}[x(t, x_0)] \cdot \frac{d}{dt}[x(t, x_0)] dt = \\ &= \int_0^{t^*} \frac{d}{dt} V[x(t, x_0)] dt = V[x(t^*, x_0)] - V[x(0, x_0)] = V[x(t^*, x_0)] - V(x_0). \end{aligned}$$

In definitiva, si ha

$$V[x(t^*, x_0)] < V(x_0) \leq \beta(\varepsilon)/2$$

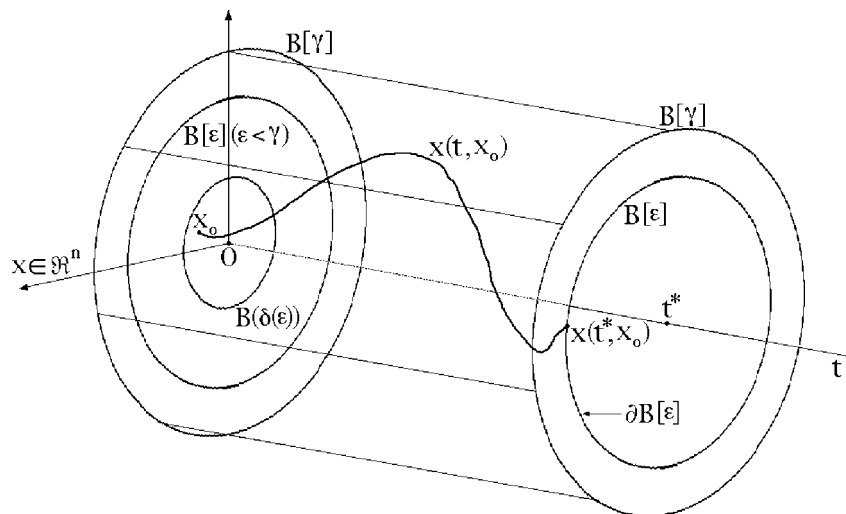
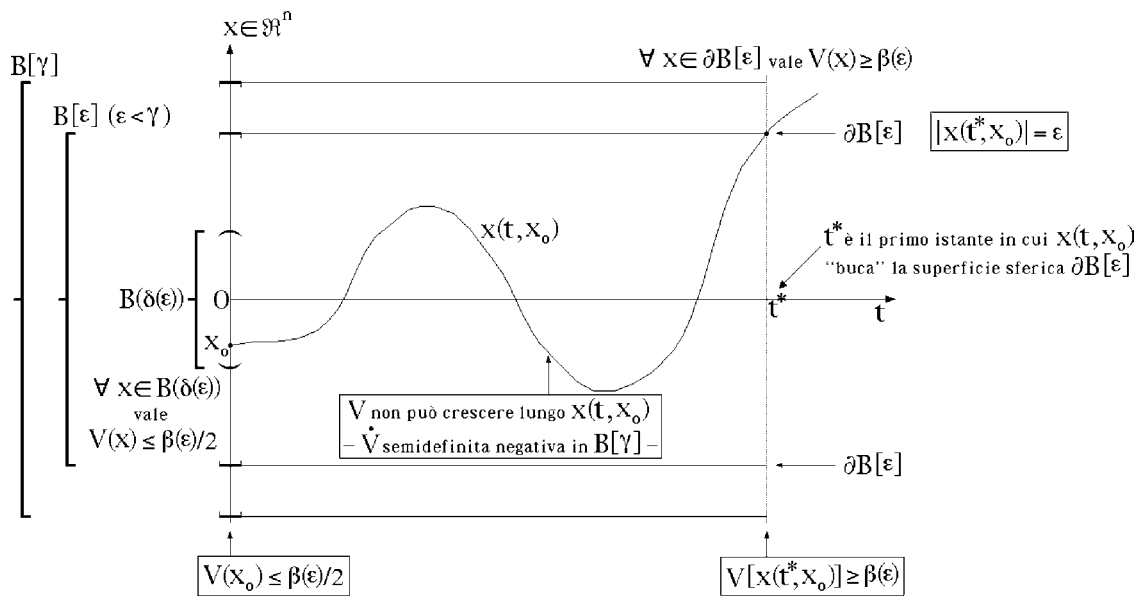
e poichè per costruzione è $|x(t^*, x_0)| = \varepsilon$, la (23.1) implica l'ulteriore diseuguaglianza

$$\beta(\varepsilon) \leq V[x(t^*, x_0)]$$

e la conclusione contraddittoria:

$$\beta(\varepsilon) \leq V[x(t^*, x_0)] < V(x_0) \leq \beta(\varepsilon)/2. \quad \square$$

La figura seguente riassume l'argomento fondamentale della dimostrazione.



24. Teorema di Liapunov di stabilità asintotica (caso autonomo)

Questo teorema di Liapunov fornisce una condizione sufficiente per la stabilità asintotica della soluzione costante $x(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$. Per un sistema di equazioni differenziali autonome l'enunciato del teorema è il seguente.

Teorema di Liapunov di stabilità asintotica

Sulla sfera $B[\gamma] \subseteq D$, di centro 0 e raggio $\gamma > 0$, sia definita una funzione $V : B[\gamma] \longrightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa le condizioni seguenti:

- (i) V è di classe C^1 in $B[\gamma]$;
- (ii) V risulta **definita positiva** in $B[\gamma]$;
- (iii) la derivata \dot{V} di V lungo le soluzioni dell'equazione differenziale (22.1), è **definita negativa** in $B[\gamma]$.

Allora la soluzione costante $x(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$ è *asintoticamente stabile*.

Da sottolineare che le ipotesi sono le stesse del criterio di stabilità, salvo il fatto che la condizione di \dot{V} semidefinita negativa è sostituita dalla condizione più forte di \dot{V} definita negativa. Il teorema afferma che alla stabilità semplice della soluzione statica l'assumere \dot{V} definita negativa anziché semidefinita negativa aggiunge anche l'attrattività.

Dimostrazione del teorema di stabilità asintotica

La dimostrazione del teorema si basa su un argomento per assurdo. Come nel caso precedente, conviene procedere per punti.

- (i) Se \dot{V} è definita negativa in $B[\gamma]$ essa risulta anche semidefinita negativa nella stessa sfera. È dunque lecito applicare il teorema di Liapunov di stabilità e affermare preliminarmente che la soluzione $x(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$ è stabile. Per provare la stabilità asintotica basta quindi dimostrare l'attrattività nel futuro della soluzione, vale a dire l'esistenza di una sfera $B(\sigma)$, di centro 0 e raggio $\sigma > 0$, tale che $\forall x_0 \in B(\sigma)$ la soluzione $x(t, x_0)$ del problema di Cauchy di dato iniziale $x(0) = x_0$ è definita $\forall t \geq 0$ e soddisfa la proprietà

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, x_0) = 0.$$

- (ii) Constatato che la soluzione $x(t) = 0$ è stabile, per ogni $\varepsilon > 0$ si introduce il relativo $\delta(\varepsilon) > 0$ conformemente alla definizione di stabilità:

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad |x_0| < \delta(\varepsilon), \quad \Rightarrow \quad |x(t, x_0)| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$

- (iii) Si verifica che la sfera $B(\sigma)$ della definizione di attrattività può ottenersi ponendo $\sigma = \delta(\gamma)$. Dalla definizione di stabilità segue infatti che per ogni condizione iniziale $x(0) = x_0$, scelta nella sfera di centro 0 e raggio $\delta(\gamma)$, la soluzione massimale $x(t, x_0)$

del relativo problema di Cauchy si mantiene entro $B(\gamma)$ ad ogni istante successivo⁽¹⁾

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad |x_0| < \delta(\gamma), \quad \Rightarrow \quad |x(t, x_0)| < \gamma \quad \forall t \geq 0.$$

Lungo l'intera soluzione $x(t, x_0), t \geq 0$, è quindi possibile sfruttare le proprietà assunte per la funzione di Liapunov V e la relativa derivata \dot{V} .

- (iv) Per completare la verifica dell'attrattività è sufficiente dimostrare che per ogni dato iniziale x_0 assunto nella sfera di raggio $\delta(\gamma)$ si ha che $\forall \nu > 0$ la corrispondente soluzione $x(t, x_0)$ entra nella sfera di raggio $\delta(\nu)$ ad un istante opportuno:

$$\forall \nu > 0 \quad \exists t_\nu > 0 \quad \text{t.c.} \quad |x(t_\nu, x_0)| < \delta(\nu). \quad (24.1)$$

Al verificarsi di tale condizione, infatti, la definizione di stabilità assicura che ad ogni istante successivo la soluzione $x(t, x_0)$ non possa più abbandonare la sfera di raggio ν e centro 0:

$$|x(t, x_0)| < \nu \quad \forall t > t_\nu$$

cosicché

$$\forall \nu > 0 \quad \exists t_\nu > 0 \quad \text{t.c.} \quad |x(t, x_0)| < \nu \quad \forall t > t_\nu$$

e quindi⁽²⁾, come richiesto,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, x_0) = 0.$$

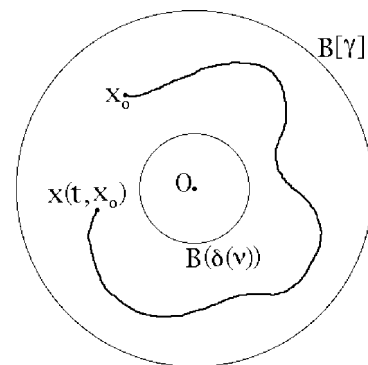
- (v) La condizione (24.1) viene provata per assurdo, con un argomento analogo a quello già sviluppato per il teorema di stabilità. Si supponga che la condizione sia falsa. Esisteranno allora un x_0 in $B(\delta(\gamma))$ ed un $\nu > 0$ in modo che la soluzione $x(t, x_0)$ rimane confinata all'esterno della sfera di centro 0 e raggio $\delta(\nu)$ a tutti i tempi positivi:

$$\exists x_0 \in B(\delta(\gamma)), \quad \exists \nu > 0 \quad \text{t.c.} \quad |x(t, x_0)| \geq \delta(\nu) \quad \forall t \geq 0$$

e siccome si ha comunque $|x(t, x_0)| < \gamma$ $\forall t \geq 0$, si conclude che

$$\delta(\nu) \leq |x(t, x_0)| \leq \gamma \quad \forall t \geq 0.$$

La soluzione si mantiene perciò ubicata nell'insieme $B[\gamma] \setminus B(\delta(\nu))$, la corona sferica di centro 0 compresa fra la superficie sferica di raggio γ e quella di



(1) Poiché $B(\gamma) \subset B[\gamma] \subset D$, il teorema di prolungabilità assicura che la soluzione massimale $x(t, x_0)$ sia definita su un intervallo di tempo superiormente non limitato e quindi almeno $\forall t \geq 0$, come richiesto dalla definizione di attrattività.

(2) Si osservi che la proposizione precedente non è altro che la definizione di limite a zero, per $t \rightarrow +\infty$, della funzione $x(t, x_0)$.

raggio $\delta(\nu)$. Si tratta di un insieme limitato e chiuso sul quale la funzione \dot{V} , essendo per ipotesi V di classe C^1 in $B[\gamma]$, è continua e quindi ha massimo per il teorema di Weierstrass. Considerato poi che \dot{V} è anche definita negativa in $B[\gamma]$, e che l'origine 0 non appartiene al dominio $B[\gamma] \setminus B(\delta(\nu))$, si conclude che⁽¹⁾:

$$\dot{V}(x) \leq \max_{\delta(\nu) \leq |x| \leq \gamma} \dot{V}(x) = -h(\nu) \quad \forall x \in B[\gamma] \setminus B(\delta(\nu))$$

per una opportuna costante $h(\nu) > 0$. Di conseguenza:

$$\dot{V}[x(t, x_0)] \leq -h(\nu) \quad \forall t \geq 0$$

ossia, ricordando la definizione di \dot{V} ,

$$\frac{d}{dt}V[x(t, x_0)] \leq -h(\nu) \quad \forall t \geq 0$$

e per la continuità del primo membro basta infine integrare su un generico intervallo di tempo $[0, t]$ per ottenere

$$V[x(t, x_0)] - V(x_0) = \int_0^t \frac{d}{dt}V[x(t, x_0)] dt \leq - \int_0^t h(\nu) dt = -h(\nu)t \quad \forall t \geq 0.$$

Ne deriva che

$$V[x(t, x_0)] \leq V(x_0) - h(\nu)t \quad \forall t \geq 0$$

e che pertanto il limite per $t \rightarrow +\infty$ della V calcolata lungo la soluzione è $-\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V[x(t, x_0)] \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} V(x_0) - h(\nu)t = -\infty$$

una conclusione che però è in contrasto con l'essere comunque $x(t, x_0) \in B[\gamma] \forall t \geq 0$, e dunque

$$V[x(t, x_0)] \geq 0 \quad \forall t \geq 0$$

per la positività di V in $B[\gamma]$.

La dimostrazione è così completa. \square

⁽¹⁾ Si ricorda che il valore minimo è assunto dalla funzione in un punto appropriato del suo dominio, dove nella fattispecie questa ha certamente segno negativo.

25. Esempi illustrativi dei criteri di Liapunov

Alcuni semplici esempi bastano a dimostrare come l'individuazione della funzione di Liapunov appropriata per studiare la stabilità di una soluzione costante possa risultare un compito decisamente non banale.

25.1 Esempio di sistema conservativo

Si considera l'equazione differenziale

$$m\ddot{x} = -k(x + x^3) \quad (x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2$$

che descrive il moto di un punto materiale di massa m vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse Ox di una terna di riferimento e soggetto ad una forza posizionale la cui componente lungo Ox vale $-k(x + x^3)$. L'equazione, non lineare, descrive un sistema posizionale conservativo di energia

$$H(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + k\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right) \quad (x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2$$

e può porsi nella equivalente forma normale del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\frac{k}{m}(x + x^3) \end{cases} \quad (x, v) \in \mathbb{R}^2 \quad (25.1)$$

alla quale è dato applicare i teoremi di Liapunov. È immediato verificare, uguagliando a zero i secondi membri della (25.1), che l'unica soluzione costante del sistema consiste nella

$$(x, v) = (0, 0) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Per studiarne la stabilità si adotta come funzione di Liapunov l'energia meccanica, una scelta suggerita dal fatto che l'energia meccanica è una grandezza costante lungo tutte le soluzioni dell'equazione (25.1):

$$H(x, v) = \frac{mv^2}{2} + k\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right) \quad (x, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Si tratta di una buona funzione di Liapunov, su qualsiasi disco centrato in $(0, 0)$ e di raggio $\gamma > 0$ arbitrario. Infatti:

- (i) in quanto polinomio, $H(x, v)$ è una funzione di classe C^1 su tutto il piano \mathbb{R}^2 — in effetti ivi risulta di classe C^∞ ;
- (ii) $H(x, v)$ è definita positiva in $B[\gamma]$ per qualsiasi $\gamma > 0$, perchè $H(0, 0) = 0$ e

$$H(x, v) = \frac{mv^2}{2} + k\frac{x^2}{2} + k\frac{x^4}{4} \geq 0 \quad \forall (x, v) \in \mathbb{R}^2,$$

annullandosi unicamente quando tutti i tre addendi a secondo membro sono simultaneamente nulli, dunque *soltanto per* $(x, v) = (0, 0)$;

(iii) $\dot{H}(x, v)$ è semidefinita negativa nello stesso disco $B[\gamma]$, dal momento che⁽¹⁾

$$\dot{H}(x, v) = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial v} \dot{v} = k(x + x^3)v + mv \left[-\frac{k}{m}(x + x^3) \right] = 0 \quad \forall (x, v) \in \mathbb{R}^2$$

per cui $\dot{H}(0, 0) = 0$ e $\dot{H}(x, v) \leq 0 \quad \forall (x, v) \in B[\gamma]$.

Si può pertanto applicare il teorema di Liapunov di stabilità e concludere che la soluzione costante $(x, v) = (0, 0)$ è stabile — ovvero, nel linguaggio della meccanica, che la corrispondente configurazione di equilibrio $x = 0$ è stabile.

Va sottolineato che la funzione \dot{H} è semidefinita *ma non definita negativa* in $B[\gamma]$, per cui il criterio di stabilità asintotica non risulta applicabile. In effetti, è facile convincersi che *l'attrattività di* $(x, v) = (0, 0)$ *può essere esclusa a priori*. Se infatti l'energia meccanica vale zero per $(x, v) = (0, 0)$, in qualsiasi altro punto $(x, v) = (x_0, v_0)$ distinto dall'origine il suo valore è strettamente positivo; se la soluzione corrispondente al dato iniziale $(x, v) = (x_0, v_0)$ tendesse a $(x, v) = (0, 0)$ per $t \rightarrow +\infty$, lungo il moto l'energia meccanica dovrebbe decrescere dal valore iniziale $H(x_0, v_0) > 0$ a zero, in contrasto con il teorema di conservazione dell'energia stessa.

25.2 Esempio di sistema non conservativo

Nell'esempio precedente si introduca una ulteriore sollecitazione

$$-\beta \dot{x}$$

con β costante reale positiva. Si tratta di una sollecitazione dissipativa, di potenza

$$\pi = -\beta \dot{x}^2.$$

Con questa modifica le equazioni del moto diventano

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\frac{k}{m}(x + x^3) - \frac{\beta}{m}v \end{cases} \quad (x, v) \in \mathbb{R}^2 \quad (25.2)$$

ed ancora ammettono $(x, v) = (0, 0)$ come unica soluzione costante. Per studiarne la stabilità si ricorre ancora all'energia meccanica come funzione di Liapunov. Come prima, la funzione è ovviamente definita positiva in $B[\gamma]$, $\forall \gamma > 0$ fissato. Quello che cambia è l'espressione di $\dot{H}(x, v)$:

$$\dot{H}(x, v) = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial v} \dot{v} = -k(x + x^3)v + mv \left[-\frac{k}{m}(x + x^3) - \frac{\beta}{m}v \right] = -\beta v^2 \quad \forall (x, v) \in \mathbb{R}^2$$

⁽¹⁾ Il risultato è ovvio a priori per il teorema di caratterizzazione degli integrali primi: H è integrale primo se e solo se $\dot{H}=0$ identicamente.

come è peraltro evidente dal teorema dell'energia cinetica — $\dot{H} = \pi$. La derivata di Lie si annulla nel centro del disco $B[\gamma]$ e soddisfa inoltre

$$\dot{H}(x, v) \leq 0 \quad \forall (x, v) \in \mathbb{R}^2$$

dunque è semidefinita negativa. Dal teorema di Liapunov segue di nuovo la stabilità della soluzione statica.

Si sottolinea che \dot{H} è solo *semidefinita non definita negativa*, poichè in qualsiasi disco $B[\gamma]$ l'intero diametro

$$\{(x, v) \in B[\gamma] : v = 0\},$$

privato del centro, consta di zeri di \dot{H} : *il centro non è il solo zero della funzione*. Il criterio di Liapunov di stabilità asintotica non risulta applicabile.

Nondimeno, la sollecitazione $-\beta v$ *dissipa l'energia meccanica*: pertanto, non sembra irragionevole aspettarsi che $(x, v) = (0, 0)$ sia in realtà *asintoticamente stabile*. Lo si può dimostrare *con una diversa scelta della funzione di Liapunov*.

25.3 Esempio di sistema non conservativo — con funzione di Liapunov alternativa

La stabilità della soluzione $(x, v) = (0, 0)$ per il sistema non conservativo (25.2) può essere analizzata introducendo una diversa funzione di Liapunov. All'energia meccanica si può sommare un polinomio omogeneo di secondo grado nelle variabili dipendenti (x, v) :

$$V(x, v) = H(x, v) + ax^2 + bxv + cv^2$$

in cui a, b, c sono coefficienti reali da fissare convenientemente, in modo che la funzione di Liapunov abbia le proprietà richieste. La derivata di V lungo le soluzioni di (25.2) vale

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, v) &= \dot{H}(x, v) + (2ax + bv)\dot{x} + (bx + 2cv)\dot{v} = \\ &= -\beta v^2 + (2ax + bv)v + (bx + 2cv) \left[-\frac{k}{m}(x + x^3) - \frac{\beta}{m}v \right] \end{aligned}$$

e raggruppando i monomi omogenei si riduce a

$$\dot{V}(x, v) = \left(b - \beta - 2c\frac{\beta}{m} \right) v^2 + \left(2a - \frac{\beta}{m}b \right) xv - b\frac{k}{m}(x^2 + x^4) - 2c\frac{k}{m}v(x + x^3). \quad (25.3)$$

Lo scopo è quello di rendere \dot{V} definita negativa in un intorno di $(x, v) = (0, 0)$ scegliendo opportunamente i coefficienti a, b, c . Dopo avere verificato l'ovvia condizione $\dot{V}(0, 0) = 0$, si osserva che i termini

$$\left(2a - \frac{\beta}{m}b \right) xv \quad \text{e} \quad -2c\frac{k}{m}v(x + x^3)$$

in (25.3) non hanno segno definito in alcun intorno dell'origine $(0, 0)$ e devono perciò essere annullati identicamente. Ciò impone le condizioni

$$a = \frac{\beta}{2m}b \quad \text{e} \quad c = 0 \quad (25.4)$$

per cui \dot{V} assume la forma più semplice

$$\dot{V}(x, v) = (b - \beta)v^2 - b\frac{k}{m}(x^2 + x^4)$$

che si mantiene strettamente negativa in ogni punto $(x, v) \neq (0, 0)$ a condizione di assumere

$$0 < b < \beta. \quad (25.5)$$

Si conclude che la funzione di Liapunov

$$V(x, v) = \frac{mv^2}{2} + k\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right) + \frac{\beta}{2m}bx^2 + bxv$$

per qualsiasi $b \in (0, \beta)$ ha derivata di Lie \dot{V} definita negativa in ogni intorno $B[\gamma]$ dell'origine, con $\gamma > 0$ arbitrario.

Rimane da verificare che $V(x, v)$ è definita positiva nello stesso intorno $B[\gamma]$. Premesso che $V(0, 0) = 0$, come è evidente, la funzione viene riespressa raccogliendo i termini simili

$$V(x, v) = \frac{1}{2} \left[mv^2 + 2bxv + \left(k + \frac{\beta}{m}b \right) x^2 \right] + \frac{k}{4}x^4 \quad (25.6)$$

e si osserva che la forma quadratica entro parentesi quadre risulta definita positiva per b abbastanza piccolo. Basta infatti introdurre la matrice A di rappresentazione della forma quadratica

$$mv^2 + 2bxv + \left(k + \frac{\beta}{m}b \right) x^2 = (x \ v) \begin{pmatrix} k + \frac{\beta}{m}b & b \\ b & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = (x \ v)A \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \quad (25.7)$$

e notare che

$$\text{tr}(A) = m + k + \frac{\beta}{m}b \quad \det(A) = mk + \beta b - b^2$$

per concludere che detta matrice ha tutti gli autovalori strettamente positivi per b sufficientemente vicino a zero:⁽¹⁾ in tali condizioni la matrice A e la forma quadratica (25.7) sono definite positive. Di conseguenza la funzione di Liapunov (25.6) è la somma non negativa di due polinomi *non negativi*, l'uno quadratico e l'altro quartico,

$$V(x, v) = \frac{1}{2} \left[mv^2 + 2bxv + \left(k + \frac{\beta}{m}b \right) x^2 \right] + \frac{k}{4}x^4$$

che si annulla soltanto quando i due polinomi sono separatamente nulli:

$$mv^2 + 2bxv + \left(k + \frac{\beta}{m}b \right) x^2 = 0 \quad \frac{k}{4}x^4 = 0,$$

condizioni dalle quali si deduce che necessariamente deve aversi $(x, v) = (0, 0)$. La funzione V è definita positiva in $B[\gamma]$, per qualsiasi $\gamma > 0$. Ricorrono pertanto le condizioni di applicabilità del criterio di Liapunov di stabilità asintotica e si conclude che la soluzione statica $(x, v) = (0, 0)$ è asintoticamente stabile.

⁽¹⁾ determinante e traccia sono infatti positivi per $b=0$ e lo stesso deve avvenire se b è prossimo a zero

26. Sistemi lineari nel piano

I teoremi di Liapunov di stabilità e stabilità asintotica raramente vengono utilizzati in modo diretto, ma servono essenzialmente per provare altri teoremi, cui si fa correntemente ricorso come criteri di stabilità. Fra i teoremi di uso più diretto un ruolo di grande rilievo svolge il **teorema di analisi lineare di stabilità**, che trova notevolissime applicazioni pratiche. Di questo teorema non si vedrà la dimostrazione, che in effetti è piuttosto impegnativa: ci si limiterà a sottolineare che la prova si basa su un metodo sistematico per la costruzione delle appropriate funzioni di Liapunov, utili per assicurare la stabilità asintotica o l'instabilità della soluzione statica. Intuitivamente, tuttavia, lo studio della stabilità di una soluzione statica viene ricondotto all'analisi di stabilità della soluzione nulla di un sistema di equazioni linearizzato nell'intorno della soluzione statica stessa. È perciò molto importante capire come si possa discutere la stabilità della soluzione $x(t) = 0$ in un sistema di **equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti**. Un caso molto interessante è quello dei **sistemi di 2 equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti in due variabili** x_1, x_2 , le cui orbite possono essere facilmente visualizzate nel piano \mathbb{R}^2 ed ivi classificate, consentendo di provare direttamente la stabilità o instabilità della soluzione nulla $(x_1(t), x_2(t)) = (0, 0) \forall t \in \mathbb{R}$. L'analisi fornisce anche una classificazione del punto fisso $(x_1, x_2) = (0, 0)$ molto utile per la caratterizzazione del ritratto di fase del sistema.

26.1 Sistemi lineari a coefficienti costanti del piano

Si consideri il sistema di 2 equazioni differenziali del primo ordine, lineari omogenee a coefficienti costanti, nelle variabili x_1, x_2 :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (26.1)$$

dove A è una qualsiasi matrice 2×2 reale e **non singolare** — $\det A \neq 0$. In tale ipotesi, l'unica soluzione statica del sistema è quella nulla:

$$0 = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La classificazione del punto fisso $(x_1, x_2) = (0, 0)$ viene eseguita in base agli autovalori della matrice di rappresentazione A del sistema, che per l'ipotesi assunta risultano certamente diversi da zero.

26.2 Classificazione del punto fisso in $(x_1, x_2) = (0, 0)$

Si distinguono i casi in cui gli autovalori λ_1, λ_2 della matrice A sono:

- (i) reali e distinti,
- (ii) reali e coincidenti,
- (iii) complessi coniugati,

e si provvedere ad analizzarli uno per uno.

• **Caso (i): autovalori reali distinti**

La natura del punto fisso cambia secondo il segno dei due autovalori reali. Si hanno 3 ulteriori sottocasi, la cui analisi è notevolmente semplificata dal fatto che in presenza di autovalori distinti la matrice A è sempre diagonalizzabile, in modo che introducendo l'appropriato cambiamento lineare di variabili $(x_1, x_2) \rightarrow (\xi_1, \xi_2)$ il sistema (26.1) si riduce al set equivalente di equazioni disaccoppiate

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \dot{\xi}_1 = \lambda_1 \xi_1 \\ \dot{\xi}_2 = \lambda_2 \xi_2 \end{cases}$$

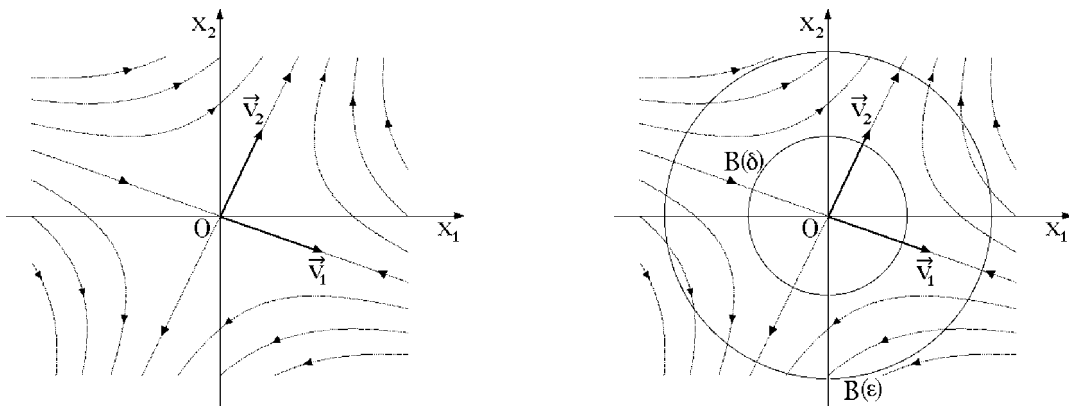
la cui soluzione generale è del tipo

$$\xi_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} \quad \xi_2 = c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

essendo c_1 e c_2 costanti reali arbitrarie. Si ricordi che le variabili ξ_1 e ξ_2 sono identificabili con le componenti del vettore (x_1, x_2) lungo autovettori assegnati $\vec{v}_1 \in \mathbb{R}^2$ e $\vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ della matrice A , relativi rispettivamente all'autovalore λ_1 e all'autovalore λ_2 .

◦ *Autovalori di segno opposto* — $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$

In questo caso la componente ξ_1 del vettore soluzione (x_1, x_2) , lungo \vec{v}_1 , tende esponenzialmente a zero al crescere di t , mentre la componente ξ_2 , secondo \vec{v}_2 , esplose all'infinito, sempre con legge esponenziale. L'andamento complessivo delle orbite è quello illustrato nella figura seguente:



dalla quale si deduce peraltro che il punto fisso $(x_1, x_2) = (0, 0)$ è **instabile** nel senso di Liapunov. Per sincerarsene, basta considerare un qualsiasi disco $B(\epsilon)$ con centro nell'origine e di raggio fissato $\epsilon > 0$ ed osservare che per ogni condizione iniziale presa entro un qualsiasi disco $B(\delta)$ di centro 0 e raggio $\delta < \epsilon$, e con componente non nulla secondo \vec{v}_2 :

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad x_1^2 + x_2^2 < \delta^2, \quad (x_1, x_2) = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2, \quad c_2 \neq 0\},$$

la soluzione $(x_1(t), x_2(t))$ del relativo problema di Cauchy soddisfa

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} |x_2(t)| = +\infty$$

e quindi esce certamente dalla sfera prefissata $B(\varepsilon)$ a patto di attendere un intervallo di tempo sufficientemente lungo — dipendente dalla condizione iniziale prescelta. Da notare che in qualsiasi sfera $B(\delta)$ esistono due segmenti di dati iniziali che tendono asintoticamente al punto fisso per $t \rightarrow +\infty$. Il punto fisso si dice **punto di sella**, o semplicemente, **sella**. I punti di sella solo dunque sempre instabili.

◦ *Autovalori entrambi positivi* — $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$

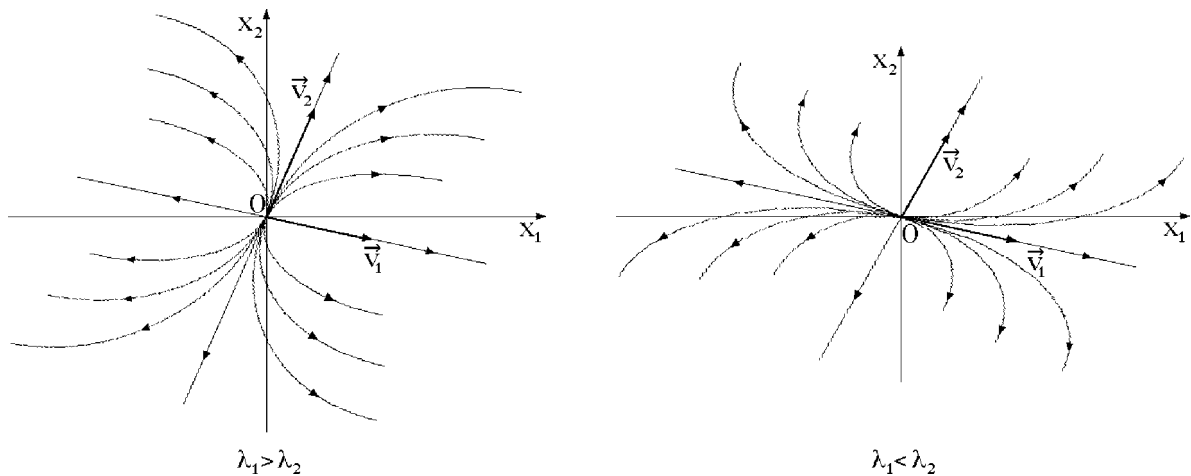
Come nel caso precedente, se il dato iniziale viene scritto come combinazione lineare degli autovettori \vec{v}_1 e \vec{v}_2

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$$

per opportune costanti $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ univocamente determinate, la soluzione del corrispondente problema di Cauchy diventa

$$c_1\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{26.2}$$

per cui entrambe le componenti, tanto lungo \vec{v}_1 quanto secondo \vec{v}_2 , vanno all'infinito per $t \rightarrow +\infty$, mentre tendono al punto fisso 0 nel limite $t \rightarrow -\infty$. È facile verificare che per $\lambda_1 > \lambda_2$ le orbite o stanno sull'asse $\{\alpha\vec{v}_1, \alpha \in \mathbb{R}\}$ oppure sono tangenti in 0 all'asse $\{\alpha\vec{v}_2, \alpha \in \mathbb{R}\}$, mentre nel caso si abbia $\lambda_1 < \lambda_2$ le orbite o sono ubicate sull'asse $\{\alpha\vec{v}_2, \alpha \in \mathbb{R}\}$ o risultano tangenti nell'origine alla retta $\{\alpha\vec{v}_1, \alpha \in \mathbb{R}\}$.



Lo stesso argomento usato per il punto di sella consente di verificare l'instabilità del punto fisso; nella fattispecie, **tutte** le condizioni iniziali prese in una qualsiasi sfera $B(\delta)$ danno luogo a soluzioni esponenzialmente divergenti da 0. Il punto fisso è noto come **nodo instabile**.

◦ *Autovalori entrambi negativi* — $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$

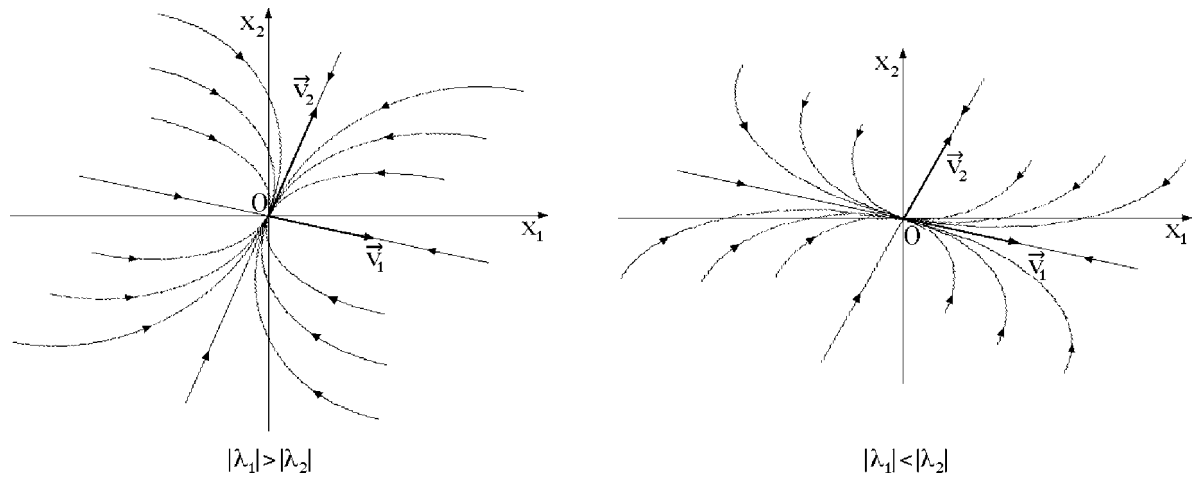
La soluzione $(x_1(t), x_2(t))$ associata al dato iniziale $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 \neq 0$ è ancora data dalla formula (26.2), ma ora il segno negativo di entrambi gli autovalori implica che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = 0$$

mentre

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |x_1(t)| = +\infty \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} |x_2(t)| = +\infty .$$

La soluzione costante in 0 è dunque attrattiva. Lo stesso argomento già utilizzato in precedenza permette di verificare la stabilità del punto fisso, che perciò risulta **asintoticamente stabile**.



In questo caso il punto fisso prende il nome di **nodo stabile**.

• **Caso (ii): autovalori reali coincidenti**

Se gli autovalori della matrice A sono reali e coincidenti, e si indica con λ il loro comune valore, si devono distinguere il caso di $\lambda > 0$ e quello di $\lambda < 0$.

◦ *Autovalore doppio positivo*

L'andamento delle soluzioni è significativamente diverso, per quanto non al punto da modificare le proprietà di stabilità del punto fisso, secondo che la matrice A sia diagonalizzabile o meno.

Nel primo caso esiste una coppia di autovettori \vec{v}_1, \vec{v}_2 di A linearmente indipendenti. La soluzione relativa ad una generica condizione iniziale $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 \neq 0$ si scrive perciò

$$(x_1, x_2) = c_1 e^{\lambda t} \vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda t} \vec{v}_2 = e^{\lambda t} (c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2)$$

e le orbite corrispondenti sono delle semirette passanti per l'origine.

Qualora la matrice A non risulti diagonalizzabile, non è definita alcuna base di autovettori, ma è comunque possibile scegliere due vettori linearmente indipendenti \vec{v}_1, \vec{v}_2 tali che⁽¹⁾:

$$\vec{v}_2 = (A - \lambda)\vec{v}_1 \quad (A - \lambda)\vec{v}_2 = 0 .$$

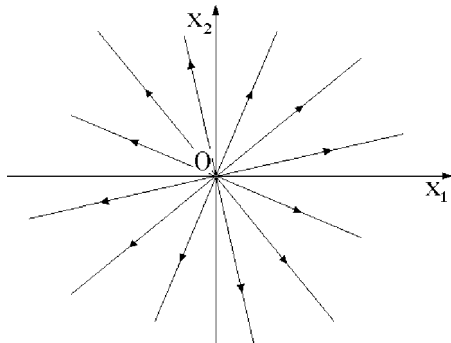
Si dimostra allora che la condizione iniziale $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$ dà luogo alla soluzione

$$e^{\lambda t} c_1 \vec{v}_1 + e^{\lambda t} (c_1 t + c_2) \vec{v}_2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

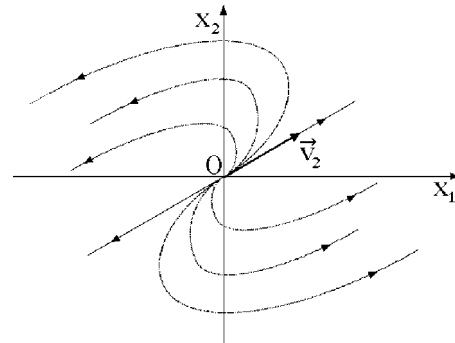
⁽¹⁾ Il risultato segue dal teorema di Jordan.

la cui orbita è tangente in 0 al vettore \vec{v}_2 .

In ambo i casi, tutte le soluzioni con dato iniziale non nullo tendono all'infinito per $t \rightarrow +\infty$ e convergono a 0 nel limite $t \rightarrow -\infty$. Il punto fisso è dunque **instabile**. Viene detto **nodo degenere instabile**.



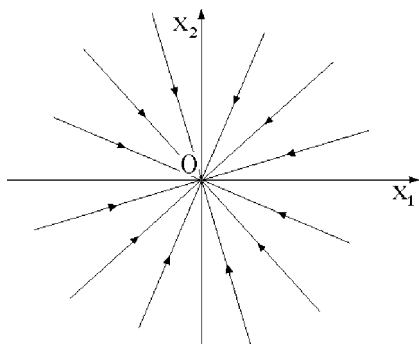
A diagonalizzabile



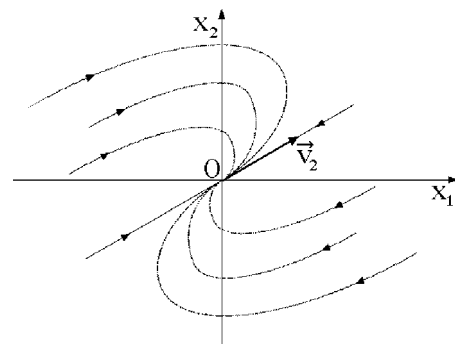
A non diagonalizzabile

◦ *Autovalore doppio negativo*

La trattazione è analoga a quella del caso precedente, salvo per il fatto che tutte le soluzioni esplodono all'infinito per $t \rightarrow -\infty$ e tendono a 0 nel limite $t \rightarrow +\infty$. Il punto fisso risulta perciò attrattivo e la sua stabilità può essere verificata direttamente, come già visto. Il punto fisso, **asintoticamente stabile**, viene chiamato **nodo degenere stabile**. L'andamento tipico delle orbite dipende dall'essere A diagonalizzabile o meno ed è illustrato nelle figure seguenti.



A diagonalizzabile



A non diagonalizzabile

• **Caso (iii): autovalori complessi coniugati**

Se gli autovalori della matrice A sono complessi coniugati, si può scrivere

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ rispettivamente parte reale ed immaginaria di λ_1 . La natura del punto fisso 0 dipende unicamente dal segno della parte reale α . Si distinguono 3 casi interessanti, secondo che sia $\alpha > 0$, $\alpha < 0$, oppure $\alpha = 0$.

◦ *Parte reale* $\alpha > 0$

In questo caso è possibile determinare vettori linearmente indipendenti $\vec{v}_1 \in \mathbb{R}^2$ e $\vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ tali che il vettore complesso $\vec{v}_1 + i\vec{v}_2 \in \mathbb{C}^2$ sia autovettore di A relativo all'autovalore $\alpha + i\beta$:

$$A(\vec{v}_1 + i\vec{v}_2) = (\alpha + i\beta)(\vec{v}_1 + i\vec{v}_2)$$

ed il suo complesso coniugato $\vec{v}_1 - i\vec{v}_2 \in \mathbb{C}^2$ autovettore della stessa matrice associato all'autovalore complesso coniugato:

$$A(\vec{v}_1 - i\vec{v}_2) = (\alpha - i\beta)(\vec{v}_1 - i\vec{v}_2).$$

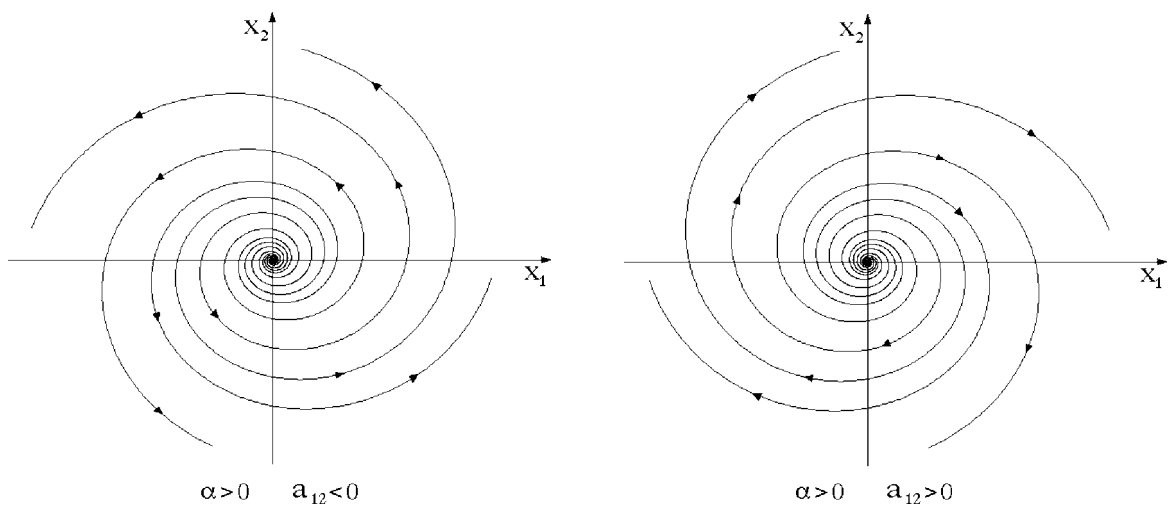
La generica condizione iniziale si scrive allora nella forma

$$c(\vec{v}_1 + i\vec{v}_2) + c^*(\vec{v}_1 - i\vec{v}_2) = c(\vec{v}_1 + i\vec{v}_2) + c.c.$$

per una appropriata scelta della costante $c = c_1 + ic_2 \in \mathbb{C}$, e la soluzione corrispondente è esprimibile come

$$(x_1, x_2) = c e^{(\alpha+i\beta)t}(\vec{v}_1 + i\vec{v}_2) + c.c. \tag{26.3}$$

È facile verificare che le orbite delle soluzioni spiraleggiano verso il punto fisso nel limite per $t \rightarrow -\infty$ ed esplodono all'infinito per $t \rightarrow +\infty$, volgendosi attorno all'origine in senso orario od antiorario secondo che sia $a_{12} > 0$ oppure $a_{12} < 0$, come illustrato in figura.

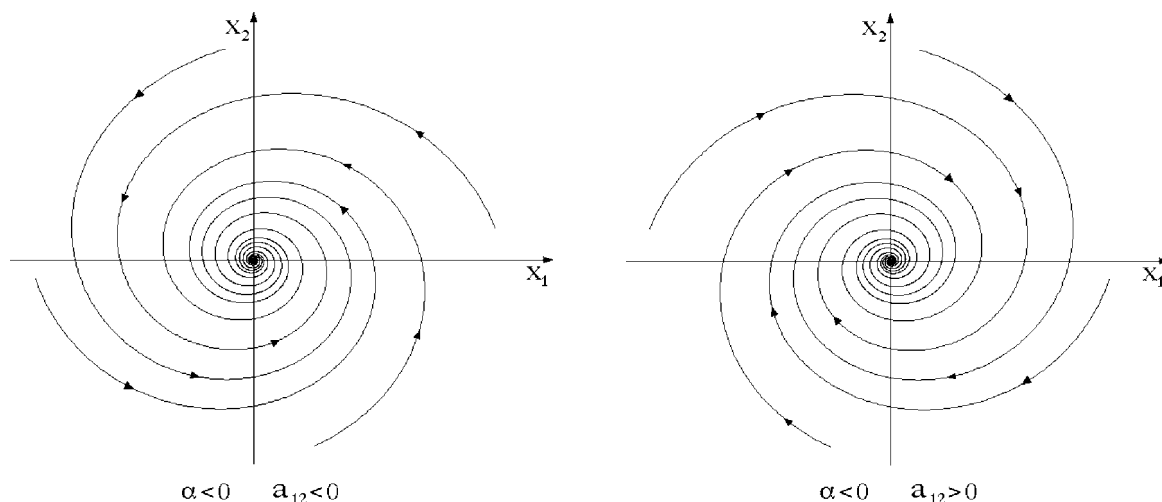


Il punto fisso è **instabile** e si dice un **fuoco instabile**.

◦ *Parte reale* $\alpha < 0$

L'espressione generale delle soluzioni è sempre data dalla (26.3) ma essendo $\alpha < 0$ queste tendono a 0 per $t \rightarrow +\infty$ seguendo delle orbite a spirale, mentre per $t \rightarrow -\infty$ divergono all'infinito. Le orbite si avvolgono attorno all'origine in senso orario o antiorario in relazione al segno del coefficiente a_{12} , positivo in un caso e negativo nell'altro. Il punto fisso ha chiaramente carattere attrattivo e la sua stabilità può essere verificata in modo diretto

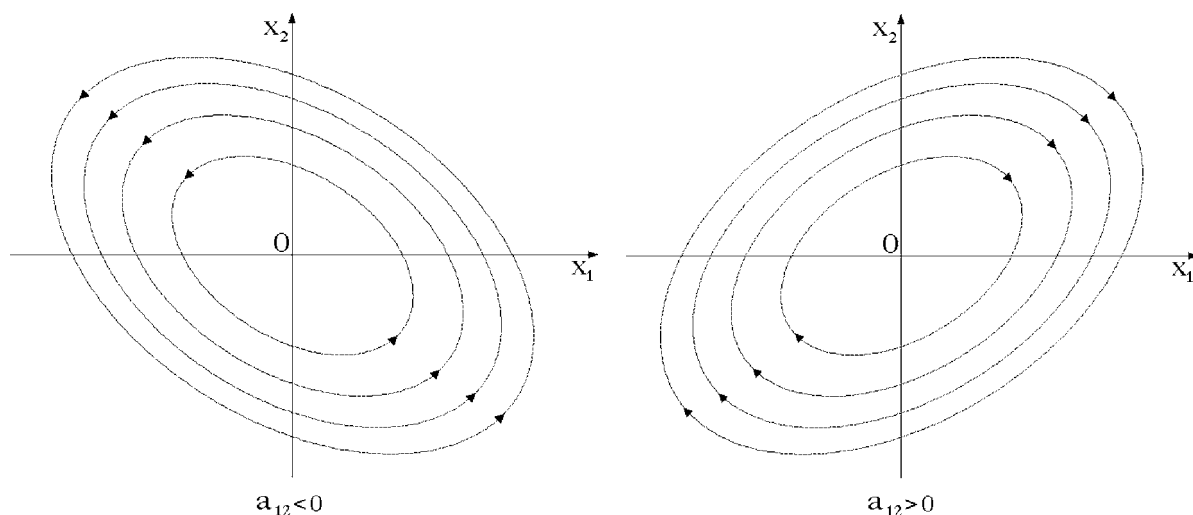
osservando l'andamento qualitativo delle orbite nel ritratto di fase, come illustrato in figura; si tratta dunque di un punto fisso **asintoticamente stabile**.



Si parla, in questo caso, di un **fuoco stabile** del sistema.

o *Parte reale* $\alpha = 0$

Nella fattispecie gli autovalori sono immaginari puri e si può verificare che le orbite di tutte le soluzioni sono delle ellissi di eguale eccentricità e centro 0, con gli assi di simmetria coincidenti — le orbite ellittiche si possono ottenere l'una dall'altra per semplice omotetia.



Data l'invarianza di tutte le orbite — tutti i moti sono periodici, si conclude che il punto fisso è stabile. L'attrattività è invece esclusa, in quanto le soluzioni diverse dal punto fisso non hanno limite né per $t \rightarrow +\infty$ né per $t \rightarrow -\infty$. Si verificano dunque condizioni di **stabilità semplice** e non asintotica. Si noti che questo è l'unico caso, per A non singolare, in cui la stabilità ricorre disgiunta dall'attrattività. Il punto fisso si dice **centro**,

ed è sempre stabile.

• **Schema riassuntivo**

I risultati della precedente analisi, nel caso che la matrice di rappresentazione A del sistema lineare sia non singolare, possono essere riassunti nel semplice schema sottoriportato, dove sono indicati con λ_1 e λ_2 gli autovalori — necessariamente non nulli — della matrice A .

Autovalori		Denominazione	Denom.ne alternativa	Natura del punto fisso
reali distinti $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	nodo instabile	source	instabile
	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	nodo stabile	sink	asintoticamente stabile
	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$	sella	saddle	instabile
reali uguali $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$\lambda > 0$	nodo degenerare instabile	degenerate source	instabile
	$\lambda < 0$	nodo degenerare stabile	degenerate sink	asintoticamente stabile
complessi $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ $\lambda_2 = \alpha - i\beta$	$\alpha > 0$	fuoco instabile	spiral source	instabile
	$\alpha < 0$	fuoco stabile	spiral sink	asintoticamente stabile
	$\alpha = 0$	centro	centre	stabile non asintot.te

• **Osservazione. Matrice singolare.**

Qualora la matrice A sia singolare possono distinguersi fondamentalmente 3 casi, sempre in base alla struttura degli autovalori:

- *un autovalore nullo semplice,*
- *autovalore nullo doppio, con A diagonalizzabile,*
- *autovalore nullo doppio, con A non diagonalizzabile,*

che vengono esaminati uno per uno.

◦ *Un autovalore nullo semplice*

In questo caso gli autovalori sono uno nullo e uno reale diverso da zero:

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Trattandosi di autovalori distinti, la matrice A è diagonalizzabile rispetto ad una base di autovettori \vec{v}_1 e \vec{v}_2 linearmente indipendenti:

$$A\vec{v}_1 = 0 \quad A\vec{v}_2 = \lambda\vec{v}_2$$

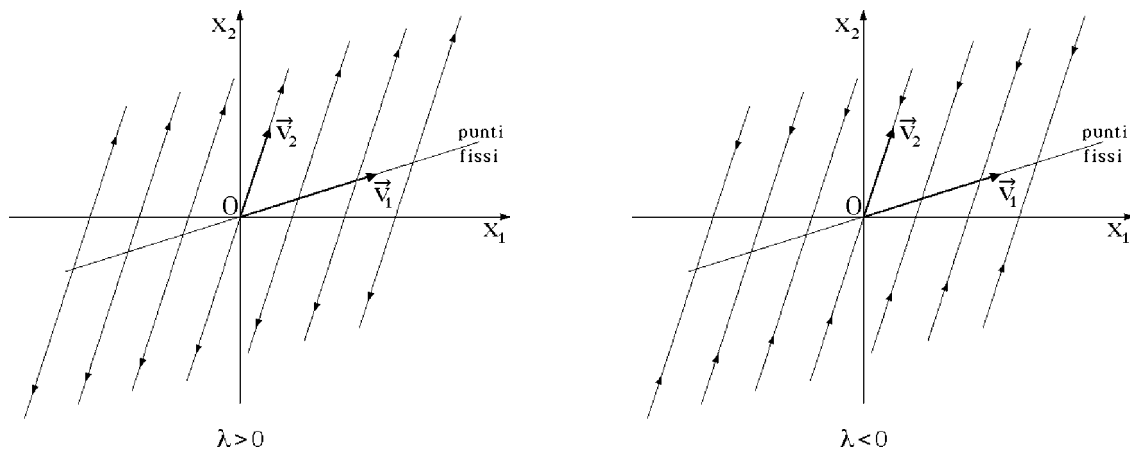
in modo che la generica condizione iniziale può sempre esprimersi nella forma $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$ per mezzo di opportune costanti reali c_1 e c_2 univocamente determinate e la corrispondente soluzione si scrive:

$$(x_1(t), x_2(t)) = c_1\vec{v}_1 + c_2e^{\lambda t}\vec{v}_2 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

L'intera retta passante per l'origine e di direzione \vec{v}_1 :

$$\{\alpha\vec{v}_1, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

è costituita da punti fissi. Tutte le altre soluzioni hanno orbite costituite da semirette di direzione \vec{v}_2 uscenti dalla retta dei punti fissi, come descritto nella figura seguente:



La soluzione costante in 0 è **instabile** per $\lambda > 0$, **stabile** per $\lambda < 0$. In ogni caso l'attrattività è comunque esclusa per il fatto che 0 rappresenta un punto di accumulazione della retta dei punti fissi: qualsiasi disco $B(\delta)$ di centro 0 e raggio $\delta > 0$ arbitrario contiene una infinità di punti fissi, le cui corrispondenti soluzioni non convergono a 0 nel limite per $t \rightarrow +\infty$.

◦ *Autovalore nullo doppio, con A diagonalizzabile*

Nella fattispecie la matrice A è simile ad una matrice diagonale di elementi diagonali entrambi nulli ed è quindi nulla essa stessa. L'intero piano \mathbb{R}^2 consiste di punti fissi. In particolare, l'origine 0 costituisce un punto fisso **stabile**, ovviamente non attrattivo.

◦ *Autovalore nullo doppio, con A non diagonalizzabile*

In questa ipotesi si dimostra⁽¹⁾ che esiste un vettore non nullo \vec{v}_1 tale che:

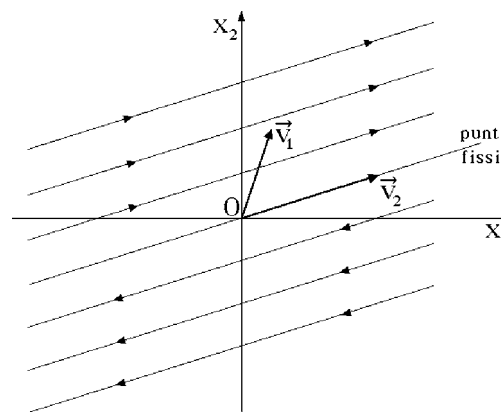
$$\vec{v}_2 = A\vec{v}_1 \neq 0 \quad A^2\vec{v}_1 = 0.$$

Le condizioni precedente implicano che si abbia $A\vec{v}_2 = 0$ e che i vettori \vec{v}_1 e \vec{v}_2 risultino linearmente indipendenti. Per una generica condizione iniziale espressa nella forma $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$, con c_1, c_2 costanti assegnate, la relativa soluzione massimale è data da:

$$e^{tA}(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2) = c_1(\vec{v}_1 + tA\vec{v}_1) + c_2\vec{v}_2 = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + t c_1\vec{v}_2 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Da questa espressione si deduce che:

- la retta di direzione \vec{v}_2 e passante per l'origine è costituita interamente da punti fissi;
- le condizioni iniziali localizzate al di fuori della retta precedente generano soluzioni le cui orbite sono rette parallele a \vec{v}_2 , percorse con legge uniforme, ad un tasso proporzionale alla costante c_1 . La figura che segue mostra l'aspetto complessivo del ritratto di fase:



Il punto fisso nell'origine è chiaramente **instabile**.

27. Sistemi lineari di \mathbb{R}^n

Le proprietà di stabilità della soluzione costante nulla esaminate nel caso bidimensionale possono essere studiate anche nel caso generale n -dimensionale, e i risultati si estendono di conseguenza. Il teorema è basato sull'analisi delle soluzioni del sistema lineare, che è possibile scrivere esplicitamente applicando il teorema di Jordan.

⁽¹⁾ È una conseguenza del teorema di Jordan.

Teorema di stabilità del punto fisso $x = 0$ per un sistema lineare omogeneo a coefficienti costanti.

Si consideri il sistema lineare omogeneo a coefficienti costanti $\dot{x} = Ax$ e si indichino con $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gli autovalori, in generale complessi, della matrice di rappresentazione A . Si ha allora la seguente analisi di stabilità della soluzione costante $x(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

(i) Se esiste un autovalore λ_i con parte reale positiva

$$\Re(\lambda_i) > 0$$

allora la soluzione $x = 0$ è instabile.

(ii) Se tutti gli autovalori hanno parte reale negativa

$$\Re(\lambda_i) < 0 \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

il punto fisso $x = 0$ è asintoticamente stabile.

(iii) Nell'ipotesi residua, che cioè tutti gli autovalori abbiano parte reale non positiva

$$\Re(\lambda_i) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

ed almeno uno sia nullo o immaginario puro

$$\exists \lambda_j \quad \text{t.c.} \quad \Re(\lambda_j) = 0,$$

si devono distinguere due sottocasi.

(a) Se per ogni autovalore λ_i nullo o immaginario puro — $\Re(\lambda_i) = 0$ — l'autospazio relativo a λ_i ha dimensione uguale alla molteplicità algebrica dell'autovalore λ_i :

$$\dim\{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda_i \mathbb{I})\vec{v} = 0\} = \text{molteplicità algebrica di } \lambda_i$$

allora il punto fisso $x = 0$ è stabile ma non attrattivo.

(b) Qualora, viceversa, esista almeno un autovalore λ_i nullo o immaginario puro il cui autospazio associato ha dimensione minore della molteplicità algebrica di λ_i :

$$\dim\{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda_i \mathbb{I})\vec{v} = 0\} < \text{molteplicità algebrica di } \lambda_i$$

il punto fisso $x = 0$ è instabile.

Cenno della dimostrazione

L'idea generale della dimostrazione può essere articolata per punti.

- Per ogni autovalore λ_i la cui molteplicità algebrica a_i coincide con la dimensione dell'autospazio associato:⁽¹⁾

$$\dim\{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda_i \mathbb{I})\vec{v} = 0\} = \text{molteplicità algebrica di } \lambda_i$$

⁽¹⁾ la cosiddetta molteplicità geometrica dell'autovalore

esiste una base dell'autospazio costituita da a_i autovettori.

- In caso contrario, è

$$\dim\{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda_i \mathbb{I})\vec{v} = 0\} < \text{molteplicità algebrica di } \lambda_i$$

ed esiste un sistema di a_i autovettori generalizzati linearmente indipendenti \vec{w} , definiti dalla condizione

$$(A - \lambda_i \mathbb{I})^{a_i} \vec{w} = 0, \quad \vec{w} \neq 0.$$

- Una base $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ di \mathbb{R}^n è ottenuta da una collezione di autovettori, eventualmente generalizzati, associati ai vari autovalori.
- Ogni condizione iniziale $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ può scriversi nella forma

$$\vec{x}_0 = \sum_{i=1}^n c_i \vec{v}_i$$

con c_1, \dots, c_n costanti reali o complesse opportune.

- La soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ è data da

$$\vec{x}(t) = e^{tA} \vec{x}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j \vec{x}_0$$

ed è quindi determinata dalle soluzioni fondamentali, linearmente indipendenti:

$$e^{tA} \vec{v}_i \quad i = 1, \dots, n.$$

- Se \vec{v}_i è un autovettore di A , di autovalore λ_i , la soluzione fondamentale si riscrive come

$$e^{tA} \vec{v}_i = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j \vec{v}_i = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \lambda_i^j \vec{v}_i = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \lambda_i^j \right) \vec{v}_i = e^{t\lambda_i} \vec{v}_i.$$

La soluzione fondamentale è esponenziale in t , con coefficiente λ_i .

- Se \vec{v}_i è un autovettore generalizzato e non ordinario di A , con autovalore associato λ_i , si ha invece:

$$\begin{aligned} e^{tA} \vec{v}_i &= e^{t(A - \lambda_i \mathbb{I}) + \lambda_i t} \vec{v}_i = e^{\lambda_i t} e^{t(A - \lambda_i \mathbb{I})} \vec{v}_i = \\ &= e^{\lambda_i t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda_i \mathbb{I})^j \vec{v}_i = e^{\lambda_i t} \sum_{j=0}^{a_i-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda_i \mathbb{I})^j \vec{v}_i \end{aligned}$$

in quanto è certamente $(A - \lambda_i \mathbb{I})^{a_i} \vec{v}_i = 0$ e dunque $(A - \lambda_i \mathbb{I})^j \vec{v}_i = 0 \forall j \geq a_i$. La soluzione fondamentale è il prodotto di un polinomio non costante — di grado minore di a_i — e di una esponenziale, con coefficiente λ_i .

- Se esiste un autovalore λ_i tale che $\Re(\lambda_i) > 0$, ogni soluzione fondamentale corrispondente tende a 0 per $t \rightarrow -\infty$ e diverge nel limite $t \rightarrow +\infty$. Ciò assicura l'instabilità di $x = 0$.
- Se $\Re(\lambda_i) < 0 \forall i = 1, \dots, n$, tutte le soluzioni fondamentali convergono a 0 per $t \rightarrow +\infty$ e, per $t \geq 0$ abbastanza grande, decrescono in valore assoluto. Ciò garantisce l'attrattività e la stabilità del punto fisso $x = 0$.
- Se $\lambda_i = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, è un autovalore nullo o immaginario puro, di molteplicità algebrica a_i , la soluzione fondamentale corrispondente all'autovettore \vec{v}_i è:
 - del tipo $e^{i\omega t}$ se \vec{v}_i è autovettore in senso ordinario;
 - del tipo $e^{i\omega t} P(t)$, con $P(t)$ polinomio non costante, di grado minore di a_i , se \vec{v}_i è autovettore generalizzato.
- Se tutti gli autovettori relativi agli autovalori nulli o immaginari puri che servono per costruire una base di \mathbb{R}^n sono ordinari, le soluzioni fondamentali corrispondenti sono limitate $\forall t \in \mathbb{R}$ e non convergono a 0 per $t \rightarrow \pm\infty$.
- Se esiste un autovettore di base relativo ad un autovalore nullo o immaginario puro che sia generalizzato, la relativa soluzione fondamentale diverge per $t \rightarrow +\infty$.

28. Teorema di analisi lineare di stabilità

L'analisi lineare della stabilità di una soluzione costante x_0 si basa sull'idea intuitiva che sia possibile ottenere informazioni sulla stabilità di x_0 andando a studiare le equazioni linearizzate nell'intorno del punto x_0 . Dato il sistema autonomo di equazioni differenziali in forma normale del primo ordine

$$\dot{x} = f(x) \quad (28.1)$$

con f di classe C^1 su un aperto D di \mathbb{R}^n , tale che $f(x_0) = 0$ per un $x_0 \in D$, l'approssimazione di Taylor di f nell'intorno di $x = x_0$ fornisce

$$\dot{x} = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \rightarrow x_0)$$

e trascurando il termine di resto porge il sistema di equazioni linearizzate:

$$\dot{x} = df(x_0)(x - x_0) \quad (28.2)$$

in cui $df(x_0)$ è la matrice jacobiana di f in x_0 . Del sistema linearizzato (28.2), omogeneo e a coefficienti costanti, $x(t) = x_0 \forall t \in \mathbb{R}$ è una soluzione statica ovvia, le cui proprietà di stabilità possono essere studiate usando il teorema di cui alla precedente sezione 27. Il teorema di analisi lineare di stabilità (o di **Poincaré-Liapunov**) afferma che le conclusioni tratte sulla stabilità/instabilità del punto fisso del sistema linearizzato possono estendersi alle corrispondenti proprietà di stabilità/instabilità della soluzione $x(t) = x_0 \forall t \in \mathbb{R}$ del sistema non lineare (28.1), sebbene non in tutti i casi. Del teorema si omette la dimostrazione, che è basata sulla costruzione sistematica delle appropriate funzioni di Liapunov e su una applicazione del criterio di Liapunov di stabilità asintotica e dei due criteri di Liapunov di instabilità.

• **Teorema di analisi lineare di stabilità (Poincaré-Liapunov)**

Sia dato il sistema autonomo di equazioni differenziali ordinarie in forma normale del primo ordine

$$\dot{x} = f(x)$$

con f funzione C^1 dell'aperto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ a valori in \mathbb{R}^n . Sia $x_0 \in D$ tale che $f(x_0) = 0$, in modo che la funzione costante

$$x(t) = x_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

è soluzione delle equazioni differenziali assegnate. Il sistema di equazioni differenziali linearizzate nell'intorno di $x = x_0$ è definito da

$$\dot{x} = df(x_0)(x - x_0)$$

in cui la matrice jacobiana $df(x_0)$ della funzione f in x_0 ha autovalori — in generale complessi —

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n.$$

Allora:

- se esiste almeno un autovalore λ_i con parte reale positiva

$$\Re(\lambda_i) > 0$$

la soluzione $x = x_0$ è instabile;

- qualora tutti gli autovalori abbiano parte reale negativa

$$\Re(\lambda_i) < 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

la stessa soluzione $x = x_0$ risulta asintoticamente stabile;

- nulla può dirsi nel caso residuo, qualora cioè gli autovalori abbiano tutti parte reale non positiva

$$\Re(\lambda_i) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

e almeno uno di questi sia nullo o immaginario puro — ossia con parte reale uguale a zero.

Si osservi che il teorema di analisi lineare non è in grado di individuare le proprietà di stabilità o instabilità di una soluzione costante x_0 in qualsiasi caso: esistono casi indeterminati, noti come **casi critici** di stabilità, per esaminare i quali sarebbe necessario ricorrere ad altre strategie, come ad esempio una applicazione diretta dei criteri di Liapunov. Per questi stessi casi, la natura stabile o instabile della soluzione costante dipende in modo cruciale dai termini di ordine superiore al primo nell'approssimazione di Taylor che conduce al sistema di equazioni linearizzate: a parità di jacobiana $df(x_0)$, la soluzione x_0 può risultare stabile o instabile secondo la forma dei termini non lineari.

• **Controesempio che mostra come il teorema di analisi lineare non possa essere esteso per dirimere i casi critici**

Si consideri un sistema scleronomo unidimensionale soggetto ad un potenziale cubico; l'equazione del moto assume per esempio la forma

$$\ddot{x} = \alpha x^3 \quad x \in \mathbb{R} \quad (28.3)$$

con α costante reale assegnata. Il sistema può essere ricondotto alla forma normale equivalente del primo ordine introducendo la velocità generalizzata come ulteriore variabile dipendente, accanto a x :

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \alpha x^3 \end{cases} \quad (x, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Da tale equazione è evidente che l'unica soluzione statica si identifica con $(x(t), v(t)) = (0, 0) \forall t \in \mathbb{R}$, corrispondente all'unico equilibrio $x = 0$. L'espressione matriciale equivalente dell'equazione differenziale si scrive

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \alpha x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha x^3 \end{pmatrix}$$

per cui le equazioni linearizzate del moto nell'intorno di $(x, v) = (0, 0)$ diventano

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

con autovalori nulli (autovalore $\lambda = 0$ doppio), soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0.$$

Ricorre un caso critico, visto che gli autovalori del sistema linearizzato né hanno tutti parte reale negativa (stabilità asintotica), né almeno uno di essi presenta parte reale positiva (instabilità). **Il tutto indipendentemente dal valore di α .** Ma l'equazione (28.3) descrive un sistema scleronomo unidimensionale posizionale di energia potenziale

$$W(x) = -\alpha x^4/4$$

al quale è dato applicare l'analisi di Weierstrass per concludere che:

- (i) se $\alpha < 0$ l'energia potenziale ha in $x = 0$ un minimo assoluto proprio, la cui stabilità è assicurata dalla discussione di Weierstrass, visto che i moti sono tutti oscillatori (ovvero dal teorema di Lagrange-Dirichlet, qui applicabile);
- (ii) se $\alpha > 0$ l'energia potenziale ha un massimo assoluto stretto nello stesso punto $x = 0$, che quindi è instabile per Weierstrass (tutti i moti di energia anche solo leggermente superiore a 0 sono indefinitamente progressivi o retrogradi).

Pertanto α **non influenza il sistema linearizzato delle equazioni del moto, ma determina la natura stabile o instabile dell'equilibrio.**

29. Stabilità degli equilibri nei sistemi olonomi

È ben noto che le configurazioni di equilibrio dei sistemi olonomi sono associate a stati di quiete che sono moti naturali del sistema. Per gli equilibri ordinari, e nell'ipotesi di vincoli ideali, detti moti si identificano con soluzioni delle equazioni di Lagrange che corrispondono a degli stati di quiete. Nel caso usualmente più importante per le applicazioni, di sistemi scleronomi a vincoli ideali, le soluzioni che specificano gli stati di quiete in configurazioni ordinarie corrispondono a valori costanti dei parametri lagrangiani q e sono perciò della forma

$$q_i(t) = q_i^0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, n$$

con $q^o = (q_1^o, \dots, q_n^o)$ appartenente all'interno del dominio A di definizione della parametrizzazione $P(q)$ del sistema scleronomo. Dette soluzioni sono note come **soluzioni statiche** delle equazioni di Lagrange. Si ricorda che, in linea di principio, soluzioni statiche possono essere definite anche per i sistemi reonomi; in tal caso, tuttavia, difficilmente esse corrispondono a stati di quiete del sistema e quindi, di regola, non possono essere riguardate come rappresentative di configurazioni di equilibrio ordinarie.

Nei sistemi scleronomi si parla di stabilità, instabilità, attrattività, stabilità asintotica per le configurazioni di equilibrio ordinarie. Le definizioni vengono introdotte facendo riferimento alla soluzione statica corrispondente; né potrebbe essere altrimenti, dal momento che tutte le definizioni alla Liapunov si riferiscono a soluzioni di equazioni differenziali, mentre le configurazioni di un sistema scleronomo non sono moti e dunque non rappresentano soluzioni delle equazioni di Lagrange. Si ha così la seguente:

- **Definizione. Equilibrio stabile.**

La configurazione di equilibrio ordinaria $P(q^o)$ di un sistema scleronomo si dice stabile se la corrispondente soluzione statica $q(t) = q^o \forall t \in \mathbb{R}$ delle equazioni di Lagrange è stabile nel senso di Liapunov.

Definizioni analoghe si hanno per le configurazioni di equilibrio ordinarie instabili, attrattive, asintoticamente stabili, che vengono introdotte facendo riferimento alle corrispondenti soluzioni statiche delle equazioni lagrangiane del moto.

Va sottolineato come nessuna delle precedenti definizioni sia in generale estendibile agli **equilibri di confine**. Questi infatti sono caratterizzati unicamente dal teorema dei lavori virtuali e non sono interpretabili come soluzioni statiche delle equazioni di Lagrange: la nozione di stabilità alla Liapunov, come pure quelle di instabilità, attrattività o stabilità asintotica, risultano completamente prive di significato.

In base alle precedenti definizioni, è evidente che le proprietà di stabilità degli equilibri ordinari nei sistemi scleronomi possono essere analizzate applicando i teoremi generali di stabilità alle soluzioni statiche delle equazioni di Lagrange. Per gli equilibri dei sistemi scleronomi è però possibile sviluppare dei **criteri specifici**, che dipendono in modo cruciale dalla particolare struttura delle equazioni di Lagrange del moto e che risultano particolarmente efficienti nell'accertare le proprietà di stabilità degli equilibri. Si considereranno, per la loro rilevanza pratica, i teoremi sottoriportati:

- teorema di Lagrange-Dirichlet — criterio di stabilità;
- teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet — criterio di instabilità;
- forma forte del teorema di Lagrange-Dirichlet e sua inversione completa nell'ipotesi di equilibrio isolato e di sollecitazioni completamente dissipative — criteri di Barbasin-Krasovskii.

Questi risultati verranno enunciati e discussi uno ad uno nelle sezioni seguenti. Del teorema di Lagrange-Dirichlet si provvederà la dimostrazione, basata su una semplice applicazione del criterio di Liapunov di stabilità. Del teorema di inversione parziale si fornirà soltanto l'idea della prova, riconducibile ad una forma speciale del teorema di analisi lineare di stabilità, applicato alle equazioni di Lagrange del moto. Quanto ai criteri di Barbasin-Krasovskii, data la relativa complessità della dimostrazione ci si limiterà all'enunciato del teorema ed alla sua discussione. **In ogni caso i vantaggi rispetto all'applicazione diretta dei teoremi di Liapunov o di analisi lineare di stabilità saranno evidenti, in quanto:**

- (i) diversamente dai criteri di Liapunov, nelle applicazioni **non si renderà necessaria** la costruzione esplicita di **alcuna funzione di Liapunov** — l'individuazione della funzione di Liapunov appropriata non è un problema semplice e non esistono metodi generali, “algoritmici”, per la sua soluzione;
- (ii) per un sistema scleronomo a n gradi di libertà l'analisi di stabilità si baserà essenzialmente sulla **determinazione degli autovalori — tutti reali — di una matrice reale simmetrica** $n \times n$, la matrice hessiana del potenziale nella configurazione di equilibrio in esame. Il teorema di analisi lineare richiederebbe, nelle stesse condizioni, il calcolo degli autovalori **in generale complessi** di una matrice $2n \times 2n$, rappresentativa del sistema linearizzato nell'intorno della soluzione statica.

30. Teorema di Lagrange-Dirichlet

Il teorema di Lagrange-Dirichlet è il più classico dei criteri di stabilità per gli equilibri ordinari dei sistemi scleronomi. Si tratta di una **condizione sufficiente per la stabilità** dell'equilibrio. L'enunciato è il seguente.

30.1 Teorema di Lagrange-Dirichlet

Si consideri un sistema scleronomo a vincoli ideali di parametrizzazione $P(q)$, $q \in A \subseteq \mathbb{R}^n$, soggetto a sollecitazioni posizionali conservative di potenziale $U(q)$ e ad eventuali sollecitazioni $D(q, \dot{q})$ di potenza non positiva.⁽¹⁾ Sia inoltre $q^o \in \text{int}(A)$ un massimo relativo proprio del potenziale U .

Allora $P(q^o)$ è una configurazione di equilibrio stabile del sistema.

⁽¹⁾ Si intende, come sempre, che il potenziale sia funzione di classe C^2 nel dominio A , mentre $D(q, \dot{q})$ è di classe C^1 nei propri argomenti. Ciò al fine di assicurare l'applicabilità del teorema di esistenza ed unicità.

Dimostrazione

Poichè le componenti lagrangiane delle sollecitazioni sono date da

$$Q_h(q, \dot{q}) = \frac{\partial U}{\partial q_h}(q) + D_h(q, \dot{q}) \quad h = 1, \dots, n$$

e le configurazioni di equilibrio ordinarie si identificano con le soluzioni statiche $(q(t), \dot{q}(t)) = (q^o, 0) \forall t \in \mathbb{R}$, è evidente che il massimo relativo proprio q^o del potenziale costituisce certamente un equilibrio ordinario del sistema:

$$Q_h(q^o, 0) = \frac{\partial U}{\partial q_h}(q^o) + D_h(q^o, 0) = 0 \quad h = 1, \dots, n.$$

Basta osservare che in ogni massimo relativo proprio del potenziale, interno al dominio di definizione A , il gradiente del potenziale si annulla e che per $\dot{q} = 0$ si annulla anche la sollecitazione di potenza non positiva D , continua nei propri argomenti. Appurato questo, la prova del teorema non è che una applicazione del criterio di Liapunov di stabilità, assumendo come equazioni differenziali quelle di Lagrange, come variabili dipendenti le variabili di fase $(q, \dot{q}) \in \text{int}(A) \times \mathbb{R}^n$ e come funzione di Liapunov l'energia meccanica $H(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$. Si tratta di provare la stabilità della soluzione statica $(q(t), \dot{q}(t)) = (q^o, 0)$ verificando che $H(q, \dot{q})$ soddisfa tutte le proprietà richieste dal criterio di stabilità di Liapunov.

- (i) La funzione $H(q, \dot{q})$ è di classe C^1 in qualsiasi sfera $B[\gamma] \subset A \times \mathbb{R}^n$ di centro $(q, \dot{q}) = (q^o, 0)$ e raggio γ abbastanza piccolo.⁽¹⁾ Per convincersene basta ricordare che nella definizione di $H(q, \dot{q})$ l'energia cinetica di un sistema scleronomo è una forma quadratica definita positiva delle velocità generalizzate \dot{q} :

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n a_{hk}(q) \dot{q}_h \dot{q}_k$$

e dunque risulta di classe C^∞ nelle variabili $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$, mentre i coefficienti $a_{hk}(q)$ sono determinati in funzione della parametrizzazione $P(q)$ per mezzo delle espressioni

$$a_{hk}(q) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial P_i}{\partial q_h}(q) \frac{\partial P_i}{\partial q_k}(q);$$

siccome la parametrizzazione $P(q)$ di un sistema scleronomo è per definizione di classe C^2 del proprio dominio di definizione A , ne segue che gli a_{hk} sono funzioni di classe C^1 nell'argomento $q \in A$, al pari della T . Il potenziale U non pone infine alcun problema di regolarità, visto che lo si assume sempre di classe C^2 in A . L'energia meccanica ha dunque la regolarità prescritta su tutto A , nonché in particolare su qualsiasi sfera chiusa di centro $(q, \dot{q}) = (q^o, 0)$ e raggio γ che sia completamente contenuta in A .

⁽¹⁾ in modo che la sfera sia effettivamente inclusa in $A \times \mathbb{R}^n$

(ii) Su una sfera $B[\gamma] \subseteq A \times \mathbb{R}^n$ di centro $(q, \dot{q}) = (q^o, 0)$ e raggio $\gamma > 0$ abbastanza piccolo la funzione H risulta definita positiva. Poiché per ipotesi $q^o \in \text{int}(A)$ è un massimo relativo proprio del potenziale U , esiste infatti una sfera $B'[\gamma] \subset \text{int}(A) \subset \mathbb{R}^n$, di centro $q, = q^o$ e raggio γ tale che:

$$U(q) < U(q^o) \quad \forall q \in B'[\gamma] \setminus \{q^o\};$$

d'altra parte, il potenziale U è sempre definito a meno di una costante additiva arbitraria e si può quindi assumere $U(q^o) = 0$, in modo che:

$$-U(q) > -U(q^o) = 0 \quad \forall q \in B'[\gamma] \setminus \{q^o\}.$$

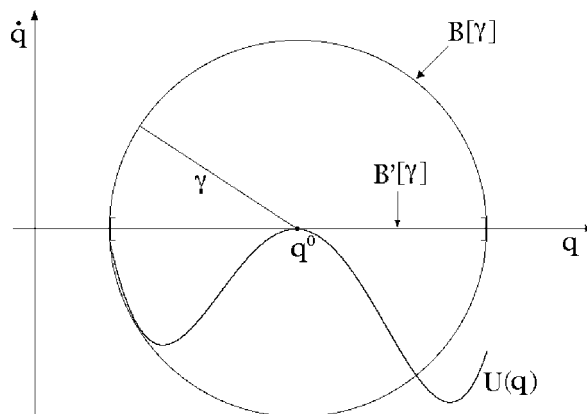
È facile convincersi che su una sfera $B[\gamma] \subset A \times \mathbb{R}^n$ centrata in $(q, \dot{q}) = (q^o, 0)$ e di pari raggio γ , la funzione H è definita positiva. H è infatti nulla al centro della sfera:

$$H(q^o, 0) = T(q^o, 0) - U(q^o) = 0$$

e si mantiene non negativa in $B[\gamma]$:

$$H(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q) \geq 0$$

in quanto $T(q, \dot{q}) \geq 0 \quad \forall (q, \dot{q}) \in A \times \mathbb{R}^n$ e $-U(q) \geq 0 \quad \forall (q, \dot{q}) \in B[\gamma]$.



Ciò prova il carattere semidefinito positivo di H in $B[\gamma]$. Per dimostrare che H è definita positiva in $B[\gamma]$ basta verificare che $(q, \dot{q}) = (q^o, 0)$ rappresenta l'unico punto di $B[\gamma]$ in cui H si annulla, risultando così strettamente positiva in ogni altro punto della stessa sfera. In effetti, l'equazione

$$H(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q) = 0 \quad (q, \dot{q}) \in B[\gamma]$$

mostra a primo membro la somma di due espressioni non negative in $B[\gamma]$, e quindi l'unico modo per soddisfarla è quello di richiedere che l'una e l'altra si annullino separatamente:

$$\begin{cases} T(q, \dot{q}) = 0 \\ -U(q) = 0 \end{cases} \quad (q, \dot{q}) \in B[\gamma].$$

La seconda equazione è soddisfatta se e soltanto se $q = q^o$, per cui la prima diventa

$$T(q^o, \dot{q}) = 0 \quad (q, \dot{q}) \in B[\gamma]$$

e data la positività di T quale funzione delle \dot{q} , porta a concludere che debba aversi $\dot{q} = 0$. In definitiva, la funzione H si annulla soltanto in $(q, \dot{q}) = (q^o, 0)$ ed è strettamente positiva in $B[\gamma] \setminus \{q^o\}$.

(iii) la derivata \dot{H} dell'energia meccanica lungo le soluzioni delle equazioni di Lagrange è semidefinita negativa in $B[\gamma]$. È sufficiente osservare che la derivata di H lungo le soluzioni delle equazioni lagrangiane del moto per un sistema scleronomo si valuta usando il teorema dell'energia cinetica il quale, in presenza di sollecitazioni posizionali conservative assume la ben nota forma:

$$\dot{H}(q, \dot{q}) = \frac{dH}{dt} = D(q, \dot{q}) \cdot \dot{q}. \quad (30.1)$$

Dalla relazione (30.1) segue immediatamente che \dot{H} si annulla nel centro della sfera $[\gamma]$ in quanto la potenza delle sollecitazioni D non può che annullarsi a velocità generalizzata nulla:

$$\dot{H}(q^o, 0) = D(q^o, 0) \cdot 0 = 0,$$

mentre su tutta la sfera si mantiene non positiva per via della postulata dissipatività delle sollecitazioni D :

$$\dot{H}(q, \dot{q}) = D(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} \leq 0 \quad \forall (q, \dot{q}) \in H[\gamma]$$

— si osservi che in effetti \dot{H} risulterebbe semidefinita negativa in tutto $A \times \mathbb{R}^n$.

Rimane così accertato che l'energia meccanica H verifica tutte le condizioni richieste perchè la si possa assumere come funzione di Liapunov per il criterio di stabilità. La soluzione statica $(q(t), \dot{q}(t)) = (q^o, 0) \forall t \in \mathbb{R}$ risulta dunque stabile e con quella, per definizione, la relativa configurazione di equilibrio $P(q^o)$. \square

Per completare la discussione del teorema di Lagrange-Dirichlet è importante fare alcune osservazioni.

30.2 Dissipatività

Come ci si aspetta per via del carattere “locale” della definizione di stabilità, non è indispensabile richiedere che D sia dissipativa “globalmente”:

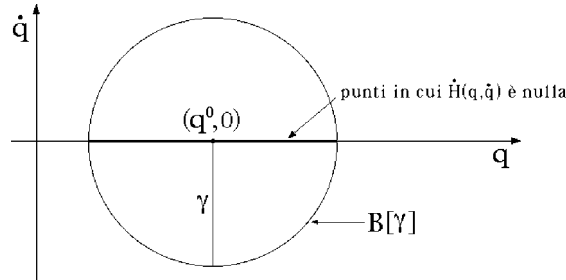
$$D(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} \leq 0 \quad \forall (q, \dot{q}) \in A \times \mathbb{R}^n.$$

La precedente dimostrazione rimane infatti valida qualora D sia dissipativa nell'intorno della configurazione di equilibrio considerata, e per velocità generalizzate sufficientemente vicine a zero — in un intorno di $\dot{q} = 0$. Ciò basta ad assicurare il carattere semidefinito negativo di \dot{H} in qualsiasi sfera $B[\gamma] \subset A \times \mathbb{R}^n$.

30.3 Stabilità asintotica

L'argomento della dimostrazione non consente di applicare il teorema di Liapunov di stabilità asintotica, in quanto \dot{H} è soltanto semidefinita e non definita negativa in $B[\gamma]$. Qualunque sia il raggio $\gamma > 0$ è infatti evidente che la potenza delle sollecitazioni D si annulla in tutti i punti di $B[\gamma]$ ubicati sull'asse $\dot{q} = 0$:

$$\dot{H}(q, \dot{q}) = D(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} = 0 \quad \forall (q, \dot{q}) \in \{(q, \dot{q}) \in B[\gamma] : \dot{q} = 0\}$$



per cui \dot{H} risulta ivi soltanto semidefinita negativa.

30.4 Sollecitazioni posizionali conservative

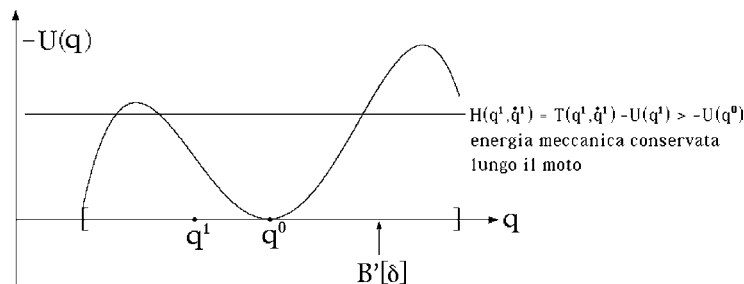
Nel caso le sollecitazioni dissipative siano assenti, non soltanto l'attrattività dell'equilibrio stabile non può essere provata con il precedente argomento, ma è persino dato di escluderla facendo uso della conservazione dell'energia. Si è già osservato infatti che in una sfera $B[\gamma]$ di centro $(q, \dot{q}) = (q^0, 0)$ e raggio γ sufficientemente piccolo l'energia meccanica $H(q, \dot{q})$ è definita positiva: la stessa proprietà ricorre in qualsiasi sfera $B[\delta]$ di raggio $\delta < \gamma$, con

$$H(q, \dot{q}) > H(q^0, 0) = -U(q^0) \quad \forall (q, \dot{q}) \in B[\delta] \setminus \{(q^0, 0)\}.$$

È allora evidente che per ogni condizione iniziale $(q(0), \dot{q}(0)) = (q^1, \dot{q}^1) \in B[\delta] \setminus \{(q^0, 0)\}$ la soluzione $(q(t), \dot{q}(t))$ del relativo problema di Cauchy non può convergere a $(q^0, 0)$ per $t \rightarrow +\infty$, in quanto per la continuità di $H(q, \dot{q})$ in tal caso dovrebbe aversi:

$$H(q^1, \dot{q}^1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} H[q(t), \dot{q}(t)] = H[\lim_{t \rightarrow +\infty} (q(t), \dot{q}(t))] = H(q^0, 0) = -U(q^0)$$

mentre è $H(q^1, \dot{q}^1) > -U(q^0)$. Data l'arbitrarietà di $\delta < \gamma$, piccolo a piacere, ciò basta ad escludere l'attrattività della soluzione statica $(q(t), \dot{q}(t)) = (q^0, 0)$ e dunque della corrispondente configurazione di equilibrio $P(q^0)$.



31. Inversione parziale di Lagrange-Dirichlet

Il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet fornisce una **condizione sufficiente per l'instabilità** dell'equilibrio. L'enunciato classico del teorema è riportato qui di seguito.

31.1 Teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet

Si consideri un sistema scleronomo a vincoli ideali di parametrizzazione $P(q)$, $q \in A \subseteq \mathbb{R}^n$, soggetto esclusivamente a sollecitazioni posizionali conservative di potenziale $U(q)$.⁽¹⁾ Sia inoltre $q^\circ \in \text{int}(A)$ un punto critico di U in cui la matrice hessiana del potenziale:

$$H_U(q^\circ) = \begin{pmatrix} U_{q_1 q_1}(q^\circ) & \cdots & U_{q_1 q_n}(q^\circ) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{q_n q_1}(q^\circ) & \cdots & U_{q_n q_n}(q^\circ) \end{pmatrix}$$

abbia almeno un autovalore positivo. Allora $P(q^\circ)$ è un equilibrio instabile del sistema.

Prima di illustrare brevemente le idee base della dimostrazione, conviene introdurre alcune importanti osservazioni generali.

31.2 Forme alternative dell'ipotesi su q°

Va ricordato che per il lemma di Schwarz la matrice hessiana H_U è reale e simmetrica, in modo che tutti i suoi autovalori risultano necessariamente reali. Per le note proprietà delle matrici reali simmetriche è evidente come la condizione che $H_U(q^\circ)$ abbia almeno un autovalore positivo equivalga a richiedere che la stessa $H_U(q^\circ)$ sia definita positiva, semidefinita positiva o indefinita: nel primo caso infatti tutti gli autovalori della matrice sono positivi, nel secondo caso accanto agli autovalori positivi compare l'autovalore zero, di data molteplicità algebrica, mentre nel terzo gli autovalori sono in parte positivi e in parte negativi, oltre all'eventuale autovalore nullo.

La stessa condizione è anche sufficiente ad escludere che nel punto critico q° ricorra un massimo relativo proprio del potenziale U . Come ben noto dall'analisi matematica, il risultato segue dall'approssimazione di Taylor nell'intorno del punto critico q° :

$$\begin{aligned} U(q^\circ + \Delta q) &= U(q^\circ) + \sum_{h=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_h}(q^\circ) \Delta q_h + \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k}(q^\circ) \Delta q_h \Delta q_k + o(|\Delta q|^2) = \\ &= U(q^\circ) + \frac{\partial U}{\partial q}(q^\circ) \cdot \Delta q + \frac{1}{2} \Delta q^T H_U(q^\circ) \Delta q + o(|\Delta q|^2) \quad (\Delta q \rightarrow 0) \end{aligned}$$

ricordando che nello stesso punto $\partial U / \partial q(q^\circ) = 0$ e che lungo qualsiasi autovettore Δq della matrice hessiana, di autovalore $\lambda > 0$ e modulo abbastanza piccolo, il potenziale U cresce

⁽¹⁾ di classe C^2 in A , al solito.

rispetto al valore iniziale $U(q^o)$:

$$\begin{aligned} U(q^o + \Delta q) &= U(q^o) + \frac{1}{2} \Delta q^T H_U(q^o) \Delta q + o(|\Delta q|^2) = \\ &= U(q^o) + \frac{1}{2} \Delta q^T \lambda \Delta q + o(|\Delta q|^2) = U(q^o) + \frac{1}{2} \lambda |\Delta q|^2 + o(|\Delta q|^2) = \\ &= U(q^o) + \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{o(|\Delta q|^2)}{|\Delta q|^2} \right) |\Delta q|^2 > U(q^o) \quad \forall |\Delta q| \sim 0 \end{aligned}$$

— basta assumere $|\Delta q|$ tanto piccolo da assicurare che sia $o(|\Delta q|^2)/|\Delta q|^2 < \lambda/2$.

Qualora nessuno degli autovalori di $H_U(q^o)$ sia positivo, l'assenza del massimo in q^o non può essere dedotta dall'esame della sola matrice hessiana di U . La condizione sull'hessiana può quindi essere sostituita dalla richiesta che

l'equilibrio q^o non rappresenti un massimo relativo proprio del potenziale, e che l'assenza del massimo sia riconoscibile dall'esame della matrice hessiana di U in q^o .

31.3 Ipotesi del teorema

Si osservi che le ipotesi del teorema sono sostanzialmente le stesse di quello di Lagrange-Dirichlet, salvo per il fatto che *tutte* le sollecitazioni attive applicate *devono avere natura posizionale conservativa* e che la configurazione q^o deve essere un equilibrio con hessiana del potenziale munita di almeno un autovalore positivo. Questa seconda condizione basta ad escludere che q^o sia un massimo relativo proprio del potenziale ma, come si vedrà nel successivo accenno alla dimostrazione, *non è l'assenza del massimo a determinare l'instabilità della configurazione*, quanto piuttosto la presenza dell'autovalore positivo di $H_U(q^o)$. Fondamentale è inoltre la condizione che le sollecitazioni applicate siano *esclusivamente posizionali conservative*: non è infrequente ad esempio che, in presenza di sollecitazioni non energetiche (girostatiche) quali le forze di Coriolis, un equilibrio la cui hessiana abbia almeno un autovalore positivo possa risultare stabile — *effetto stabilizzante delle forze di Coriolis*, si veda l'appendice per esempi notevoli di questo fenomeno.

31.4 Traccia della dimostrazione

Il teorema di inversione parziale non è altro che la forma particolare assunta dal teorema di analisi lineare di stabilità quando applicato ad un equilibrio ordinario q^o delle equazioni lagrangiane del moto per un sistema scleronomo posizionale conservativo e a vincoli ideali.

I punti salienti della dimostrazione sono descritti nei capi seguenti.

(i) Le equazioni lagrangiane del moto sono date da:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_h} = 0 \quad \forall h = 1, \dots, n \quad (31.1)$$

con lagrangiana $\mathfrak{L}(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) + U(q)$ della forma:

$$\mathfrak{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n a_{hk}(q) \dot{q}_h \dot{q}_k + U(q).$$

Al fine di applicare il teorema di analisi lineare di stabilità, tali equazioni devono essere **linearizzate nell'intorno della soluzione statica** $(q, \dot{q}) = (q^o, 0)$. Un modo molto conveniente di provvedere a ciò è quello di considerare la cosiddetta **lagrangiana \mathcal{L}_{lin} del sistema linearizzato**, ottenuta ponendo $q = q^o + \xi$ ed approssimando la lagrangiana \mathcal{L} con il corrispondente polinomio di Taylor al secondo ordine nell'intorno di $(q, \dot{q}) = (q^o, 0)$, ovvero di $(\xi, \dot{\xi}) = (0, 0)$:

$$\mathcal{L}_{\text{lin}} = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n a_{hk}(q^o) \dot{\xi}_h \dot{\xi}_k + U(q^o) + \sum_{h=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_h}(q^o) \xi_h + \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k}(q^o) \xi_h \xi_k.$$

Tenuto conto che l'equilibrio ordinario q^o è necessariamente un punto critico del potenziale ed omessa l'irrelevante costante additiva $U(q^o)$, la lagrangiana del sistema linearizzato si riduce all'espressione matriciale semplificata:

$$\mathcal{L}_{\text{lin}}(\xi, \dot{\xi}) = \frac{1}{2} \dot{\xi}^T A(q^o) \dot{\xi} + \frac{1}{2} \xi^T H_U(q^o) \xi$$

in cui $A(q^o)$ è la matrice dell'energia cinetica calcolata per $q = q^o$ e $H_U(q^o)$ indica l'hessiana del potenziale nello stesso punto. Le equazioni linearizzate del moto diventano perciò

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{lin}}}{\partial \dot{\xi}_h} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{lin}}}{\partial \xi_h} = 0 \quad \forall h = 1, \dots, n$$

ed esplicitamente si scrivono, grazie alla simmetria delle matrici $A(q^o)$ e $H_U(q^o)$, nella forma matriciale equivalente:

$$A(q^o) \ddot{\xi} - H_U(q^o) \xi = 0. \quad (31.2)$$

Si verifica che questa procedura equivale alla linearizzazione diretta delle equazioni di Lagrange (31.1):

$$\sum_{h=1}^n a_{sh}(q) \ddot{q}_h + \sum_{h,k=1}^n \left[\frac{\partial a_{sh}}{\partial q_k}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{hk}}{\partial q_s}(q) \right] \dot{q}_h \dot{q}_k - \frac{\partial U}{\partial q_s}(q) = 0 \quad \forall s = 1, \dots, n,$$

che infatti porge $\forall s = 1, \dots, n$ l'approssimazione di Taylor:

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^n [a_{sh}(q^o) + o(|\xi|)] \ddot{\xi}_h + \sum_{h,k=1}^n \left[\frac{\partial a_{sh}}{\partial q_k}(q^o) - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{hk}}{\partial q_s}(q^o) + o(|\xi|) \right] \dot{\xi}_h \dot{\xi}_k - \\ - \frac{\partial U}{\partial q_s}(q^o) - \sum_{h=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial q_s \partial q_h}(q^o) \xi_h + o(|\xi|^2) = 0 \end{aligned}$$

e quindi, conservando i soli termini del primo ordine in $\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}$, le equazioni linearizzate

$$\sum_{h=1}^n a_{sh}(q^o) \ddot{\xi}_h - \sum_{h=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial q_s \partial q_h}(q^o) \xi_h = 0 \quad \forall s = 1, \dots, n,$$

identificabili con la (31.2).

- (ii) Poiché in qualsiasi configurazione la matrice dell'energia cinetica è definita positiva, e quindi invertibile, le equazioni linearizzate (31.2) sono sempre riconducibili alla forma normale:

$$\ddot{\xi} = A(q^o)^{-1} H_U(q^o) \xi$$

che è peraltro equivalente al sistema del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = u \\ \dot{u} = A(q^o)^{-1} H_U(q^o) \xi \end{cases}$$

di $2n$ equazioni nelle $2n$ variabili (ξ, u) . Conseguentemente, le equazioni linearizzate del moto diventano

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi \\ u \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ \hline A(q^o)^{-1} H_U(q^o) & \mathbb{O} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \xi \\ u \end{pmatrix}$$

ed è a queste che si può applicare il teorema di analisi lineare di stabilità, studiando le proprietà di stabilità della soluzione statica $(\xi(t), u(t)) = (0, 0) \forall t \in \mathbb{R}$ mediante gli autovalori della matrice reale $2n \times 2n$:

$$D = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ \hline A(q^o)^{-1} H_U(q^o) & \mathbb{O} \end{array} \right). \quad (31.3)$$

- (iii) Se λ è un autovalore della matrice D , allora λ^2 soddisfa il problema agli autovalori generalizzato:

$$[H_U(q^o) - \lambda^2 A(q^o)]a = 0, \quad a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Se infatti λ è autovalore di D devono esistere due vettori $a, b \in \mathbb{C}^n$, non entrambi nulli, tali che:

$$D \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

ossia

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ \hline A(q^o)^{-1} H_U(q^o) & \mathbb{O} \end{array} \right) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} b \\ A(q^o)^{-1} H_U(q^o) a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff \begin{cases} b = \lambda a \\ A(q^o)^{-1} H_U(q^o) a = \lambda b. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si deduce che necessariamente deve aversi $a \neq 0$, poichè in caso contrario risulterebbe anche $b = \lambda a = 0$, contro l'ipotesi che vuole i vettori a e b non entrambi nulli. Sostituendo la prima equazione nella seconda si deduce allora la relazione:

$$A(q^o)^{-1}H_U(q^o)a = \lambda^2 a, \quad a \neq 0,$$

che, moltiplicando a sinistra membro a membro per $A(q^o)$, equivale al problema agli autovalori generalizzato:

$$[H_U(q^o) - \lambda^2 A(q^o)]a = 0, \quad a \neq 0.$$

Gli autovalori di D vanno quindi ricercati fra le radici quadrate, positive e negative, delle soluzioni μ del problema agli autovalori generalizzato:

$$[H_U(q^o) - \mu A(q^o)]a = 0, \quad a \neq 0. \tag{31.4}$$

(iv) *Il problema agli autovalori generalizzato (31.4) ha autovalori μ_1, \dots, μ_n tutti reali e definisce una base $\{a_1, \dots, a_n\}$ di \mathbb{R}^n composta di autovettori:*

$$[H_U(q^o) - \mu_i A(q^o)]a_i = 0, \quad a_i \neq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Per dimostrare l'asserto si osserva preliminarmente che la matrice $A(q^o)$, reale simmetrica e definita positiva, può sempre ridursi alla forma diagonale mediante una matrice di trasformazione C **ortogonale**, e dunque scriversi nella forma:⁽¹⁾

$$A(q^o) = C^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} C = C^T \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} C$$

dove $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ sono gli autovalori di $A(q^o)$ e $C^{-1} = C^T$. Questa rappresentazione consente di definire la **radice quadrata aritmetica della matrice $A(q^o)$** :

$$A(q^o)^{1/2} \stackrel{\text{def}}{=} C^T \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix} C$$

che è una matrice reale simmetrica definita positiva e soddisfa l'ulteriore proprietà:

$$\begin{aligned} A(q^o)^{1/2} A(q^o)^{1/2} &= C^T \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix} C C^T \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix} C = \\ &= C^T \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix}^2 C = C^T \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} C = A(q^o). \end{aligned}$$

⁽¹⁾ grazie all'esistenza di una base ortonormale di autovettori, assicurata dalla simmetria.

Il problema agli autovalori (31.4) può allora risciversi come:

$$\left[[A(q^o)^{1/2}]^{-1} H_U(q^o) [A(q^o)^{1/2}]^{-1} - \mu \mathbb{I} \right] A(q^o)^{1/2} a = 0, \quad a \neq 0 \quad (31.5)$$

da cui si deduce che μ e $A(q^o)^{1/2} a$ si identificano rispettivamente con gli autovalori ed i corrispondenti autovettori della matrice

$$[A(q^o)^{1/2}]^{-1} H_U(q^o) [A(q^o)^{1/2}]^{-1},$$

la quale è reale e simmetrica in quanto prodotto palindromo di matrici simmetriche:

$$\left[[A(q^o)^{1/2}]^{-1} H_U(q^o) [A(q^o)^{1/2}]^{-1} \right]^T = [A(q^o)^{1/2}]^{-1} H_U(q^o) [A(q^o)^{1/2}]^{-1}.$$

I relativi autovalori μ_i sono perciò tutti reali ed è definita una base ortonormale $\{v_1, \dots, v_n\}$ di autovettori di $[A(q^o)^{1/2}]^{-1} H_U(q^o) [A(q^o)^{1/2}]^{-1}$:

$$[A(q^o)^{1/2}]^{-1} H_U(q^o) [A(q^o)^{1/2}]^{-1} v_i = \mu_i v_i, \quad v_i \neq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

cui corrisponde, in virtù di (31.5), la base di \mathbb{R}^n :⁽¹⁾

$$a_1 = [A(q^o)^{1/2}]^{-1} v_1, \quad \dots, \quad a_n = [A(q^o)^{1/2}]^{-1} v_n$$

di autovettori di (31.4). La prova è completa.

(v) Se $\{a_1, \dots, a_n\}$ è una base di autovettori del problema (31.4), rispettivamente relativi agli autovalori — reali — μ_1, \dots, μ_n , allora i numeri:

$$+\sqrt{\mu_1}, -\sqrt{\mu_1}, \dots, +\sqrt{\mu_n}, -\sqrt{\mu_n}, \quad (31.6)$$

sono tutti autovalori della matrice D . Si dimostra l'asserto costruendo esplicitamente gli autovettori associati agli scalari (31.6). Sia $a_i \neq 0$ un autovettore del problema (31.4), di autovalore μ_i . Vale allora:

$$\begin{aligned} D \begin{pmatrix} a_i \\ \sqrt{\mu_i} a_i \end{pmatrix} &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ \hline A(q^o)^{-1} H_U(q^o) & \mathbb{O} \end{array} \right) \begin{pmatrix} a_i \\ \sqrt{\mu_i} a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_i} a_i \\ A(q^o)^{-1} H_U(q^o) a_i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_i} a_i \\ A(q^o)^{-1} \mu_i A(q^o) a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_i} a_i \\ \mu_i a_i \end{pmatrix} = \sqrt{\mu_i} \begin{pmatrix} a_i \\ \sqrt{\mu_i} a_i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

⁽¹⁾ I vettori ottenuti moltiplicando gli elementi di una base per una matrice invertibile costituiscono ancora una base.

per cui si conclude che il vettore di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} a_i \\ \sqrt{\mu_i} a_i \end{pmatrix} \neq 0$$

è autovettore della matrice D , di autovalore $\sqrt{\mu_i}$. In modo del tutto analogo si verifica la relazione

$$D \begin{pmatrix} a_i \\ -\sqrt{\mu_i} a_i \end{pmatrix} = -\sqrt{\mu_i} \begin{pmatrix} a_i \\ -\sqrt{\mu_i} a_i \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{pmatrix} a_i \\ -\sqrt{\mu_i} a_i \end{pmatrix} \neq 0$$

e si conclude pertanto che anche $-\sqrt{\mu_i}$ è autovalore della matrice D . Ciò dimostra che tutti gli scalari $\pm\sqrt{\mu_i}$, $i = 1, \dots, n$, sono autovalori di D . *Da ogni autovettore del problema (31.4) associato ad un μ_i non nullo si ricavano così due autovettori della matrice D , associati agli autovalori distinti $+\sqrt{\mu_i}$ e $-\sqrt{\mu_i}$ rispettivamente.*

Per $\mu_i = 0$ la questione si complica un poco, in quanto i vettori

$$\begin{pmatrix} a_i \\ \sqrt{\mu_i} a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} a_i \\ -\sqrt{\mu_i} a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

vengono a coincidere e dunque non sono linearmente indipendenti: essi forniscono *un unico* autovettore della matrice D , che pertanto ammette certamente l'autovalore 0. Si ha però

$$D \begin{pmatrix} a_i \\ a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i \\ A(q^o)^{-1} H_U(q^o) a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

e di conseguenza

$$D^2 \begin{pmatrix} a_i \\ a_i \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} a_i \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Si conclude così che il vettore non nullo

$$\begin{pmatrix} a_i \\ a_i \end{pmatrix}$$

costituisce un *autovettore generalizzato* di D associato all'autovalore 0, la cui lineare indipendenza dall'autovettore

$$\begin{pmatrix} a_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

è peraltro evidente, in quanto $a_i \neq 0$. Se k è la molteplicità dell'autovalore $\mu_i = 0$, la procedura precedente può essere allora applicata a tutti i k vettori linearmente indipendenti che risolvono (31.4) e consente di individuare per la matrice D k autovettori e altrettanti autovettori generalizzati linearmente indipendenti relativi all'autovalore zero: per il teorema di Jordan *la molteplicità dell'autovalore nullo di D non può essere inferiore a $2k$.*

- (vi) Combinando i punti (iv) e (v) si caratterizza completamente lo spettro della matrice D , che viene identificato con l'insieme delle radici quadrate positive e negative degli autovalori del problema generalizzato (31.4):

$$+\sqrt{\mu_1}, -\sqrt{\mu_1}, \dots, +\sqrt{\mu_n}, -\sqrt{\mu_n}.$$

Si osservi in particolare che qualora $\mu = 0$ sia soluzione del problema agli autovalori generalizzato (31.4), con molteplicità k , allora 0 è autovalore di molteplicità $2k$ della matrice D .

- (vii) Sussiste una relazione relativamente semplice fra le soluzioni μ del problema agli autovalori generalizzato (31.4) e gli autovalori della matrice hessiana $H_U(q^o)$ del potenziale. È già stato dimostrato infatti che le soluzioni μ si identificano con gli autovalori della matrice simmetrica $[A(q^o)^{1/2}]^{-1}H_U(q^o)[A(q^o)^{1/2}]^{-1}$. Quest'ultima è legata a $H_U(q^o)$ da una relazione di **congruenza**⁽¹⁾:

$$[A(q^o)^{1/2}]^{-1}H_U(q^o)[A(q^o)^{1/2}]^{-1} = \left[[A(q^o)^{1/2}]^{-1} \right]^T H_U(q^o) [A(q^o)^{1/2}]^{-1}$$

in quanto $[A(q^o)^{1/2}]^{-1}$ è simmetrica e non singolare. Si noti che gli autovalori delle due matrici **non sono gli stessi**, come invece si verificherebbe se le matrici fossero **simili**. Vale però il **teorema di Sylvester**, o legge d'inerzia, il quale stabilisce che due matrici simmetriche congruenti hanno lo stesso numero di autovalori positivi, negativi e nulli — nel senso che se lo zero è autovalore di una matrice lo è anche dell'altra, e con la stessa molteplicità. Se ne conclude che

fra le soluzioni μ_1, \dots, μ_n del problema (31.4) il numero di quelle positive, negative, nulle coincide rispettivamente con quello degli autovalori positivi, negativi, nulli della matrice hessiana $H_U(q^o)$.

Non rimane che applicare questo risultato nelle ipotesi del teorema di inversione parziale.

- (viii) Se l'hessiana del potenziale ha almeno un autovalore positivo, come assunto nelle ipotesi del teorema di inversione parziale, allora il problema agli autovalori generalizzato (31.4) ammette almeno una soluzione $\mu > 0$. La matrice di rappresentazione D delle equazioni linearizzate del moto ammette pertanto gli autovalori

$$+\sqrt{\mu} \quad -\sqrt{\mu}$$

dei quali il primo è ovviamente positivo e quindi **con parte reale positiva**. Il **teorema di analisi lineare di stabilità implica allora l'instabilità** della soluzione statica $(\xi, u) = (0, 0)$ e, con quella, dell'equilibrio $P(q^o)$. La dimostrazione è completa.

□

⁽¹⁾ Si ricorda che due matrici reali simmetriche A e B si dicono congruenti se esiste una matrice reale non singolare C tale che $A=C^TBC$.

La prova del teorema rende possibile qualche utile commento.

31.5 Equivalenza fra inversione parziale e analisi lineare

Se il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet fallisce nell'analizzare la stabilità di un equilibrio, è inutile sperare che l'analisi lineare possa avere successo: *il risultato è lo stesso* e l'uso dell'analisi lineare si risolverebbe soltanto in una perdita di tempo!

31.6 Massimi relativi propri del potenziale

La linearizzazione delle equazioni del moto nell'intorno della soluzione statica non permette di concludere nulla circa la stabilità o l'instabilità di questa se l'hessiana del potenziale è definita negativa: in tal caso infatti *tutti gli autovalori di D sono immaginari puri e il teorema di analisi lineare di stabilità non fornisce alcuna informazione (caso critico)*. In questa circostanza, il teorema di Lagrange-Dirichlet è molto più potente della tecnica di analisi lineare di stabilità. Tuttavia, il teorema è specifico dei sistemi scleronomi e non può estendersi allo studio delle soluzioni statiche di equazioni differenziali qualsiasi, se queste non sono esprimibili in forma lagrangiana.

31.7 Estensione al caso non posizionale conservativo

Nella sua formulazione classica, il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet richiede che le sollecitazioni attive agenti sul sistema siano tutte posizionali e conservative. Dalla prova del teorema, quale tratteggiata in precedenza, emerge tuttavia che eventuali sollecitazioni non posizionali conservative possono essere tollerate a condizione di non sopravvivere alla procedura di linearizzazione nell'intorno della soluzione statica. Così un sistema scleronomo a vincoli ideali, soggetto alle sollecitazioni:

$$Q_h(q, \dot{q}) = \frac{\partial U}{\partial q_h}(q) + D_h(q, \dot{q}) \quad h = 1, \dots, n,$$

dà luogo alle stesse equazioni linearizzate del moto del sistema puramente posizionale conservativo di sollecitazioni:

$$Q_h(q) = \frac{\partial U}{\partial q_h}(q) \quad h = 1, \dots, n,$$

qualora le forze non posizionali conservative $D_h(q, \dot{q})$ siano di ordine superiore al primo in $(q - q^o, \dot{q}) \rightarrow (0, 0)$:

$$D(q, \dot{q}) = o(|q - q^o|, |\dot{q}|) \quad (q - q^o, \dot{q}) \rightarrow (0, 0).$$

In queste condizioni, il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet deve ritenersi applicabile anche in presenza di sollecitazioni non posizionali conservative.

Putroppo, nei sistemi scleronomi più comuni le forze dissipative agenti presentano almeno una componente di tipo viscoso, le cui componenti lagrangiane sono funzioni lineari delle velocità generalizzate, che ovviamente sopravvivono al procedimento di linearizzazione: *in tali casi l'inversione parziale di Lagrange-Dirichlet è dunque inutilizzabile.*

32. Casi critici

Diverse sono le ragioni per cui il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet viene denominato in questo modo:

- (i) in primo luogo, il carattere parziale dell'inversione consiste nel fatto che mentre il teorema di Lagrange-Dirichlet rimane perfettamente valido anche in presenza di eventuali sollecitazioni di potenza non positiva, l'inversione parziale classica è applicabile soltanto ai sistemi posizionali conservativi — per quanto si sia già sottolineato che quest'ultima condizione possa essere parzialmente indebolita;
- (ii) in secondo luogo, quand'anche ci si limiti a considerare sistemi scleronomi puramente posizionali conservativi, l'inversione del teorema di Lagrange-Dirichlet è solo parziale perchè non copre la totalità dei casi non trattati dal teorema di Lagrange-Dirichlet. Si osservi infatti che la matrice hessiana $H_U(q^o)$ del potenziale può risultare semidefinita non definita negativa: in tal caso il teorema di inversione parziale non può applicarsi in quanto nessuno degli autovalori di $H_U(q^o)$ ha segno positivo; d'altra parte, non è ovvio si possa fare uso del teorema di Lagrange-Dirichlet perchè la condizione di hessiana semidefinita negativa non basta ad assicurare che la configurazione q^o costituisca un massimo relativo proprio del potenziale. In definitiva, se capita che q^o non sia un massimo relativo proprio del potenziale e che l'hessiana $H_U(q^o)$ non abbia alcun autovalore positivo, né l'uno né l'altro dei due teoremi è utilizzabile.

Convenzionalmente, i casi ai quali non è possibile applicare i teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale sono detti **critici** agli effetti dell'analisi di stabilità.

Va tuttavia precisato che, per semplicità, nella pratica corrente si preferisce fare uso della sola matrice hessiana del potenziale e concludere che la configurazione q^o è:

- instabile se $H_U(q^o)$ ha almeno un autovalore positivo, per l'inversione parziale di Lagrange-Dirichlet;
- stabile qualora tutti gli autovalori di $H_U(q^o)$ siano negativi, in quanto questa condizione implica che q^o costituisca un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità segue dal teorema di Lagrange-Dirichlet, anche in presenza di eventuali sollecitazioni dissipative.

Il caso di $H_U(q^o)$ semidefinita non definita negativa richiederebbe una ulteriore analisi volta ad accertare l'eventuale ricorrere in q^o di un massimo relativo proprio del potenziale, che ne sancirebbe la stabilità per Lagrange-Dirichlet. L'analisi potrebbe essere condotta considerando approssimazioni di Taylor del potenziale $U(q)$, nell'intorno di $q = q^o$, di ordine superiore al secondo, oppure riscrivendo la funzione potenziale in una forma appropriata, in modo da rendere evidente o escludere il ricorrere del massimo cercato. In ambo i casi, tuttavia, poichè i calcoli relativi possono risultare alquanto laboriosi, di regola si preferisce rinunciare a questa più dettagliata analisi e qualificare l'equilibrio come critico.

33. Esempio notevole

Come esempio di illustrazione dei teoremi precedenti si consideri un sistema unidimensionale costituito da un punto materiale di massa m vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse Ox e soggetto ad una sollecitazione posizionale $f(x)$ e ad una forza di resistenza viscosa $-\beta\dot{x}$, con costante di frizione $\beta > 0$. L'equazione del moto si scrive:

$$m\ddot{x} = f(x) - \beta\dot{x} \quad x \in \mathbb{R}$$

e può essere riespressa nella forma normale del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \frac{1}{m}f(x) - \frac{\beta}{m}v \end{cases} \quad (x, v) \in \mathbb{R}^2. \quad (33.1)$$

Le configurazioni di equilibrio $x = x_0$ corrispondono alle soluzioni statiche $(x(t), v(t)) = (x_0, 0) \forall t \in \mathbb{R}$, che si hanno negli zeri della f :

$$f(x_0) = 0.$$

Le equazioni linearizzate del moto nell'intorno della soluzione statica $(x_0, 0)$ sono date da:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{1}{m}f'(x_0)(x - x_0) - \frac{\beta}{m}v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(x_0)/m & -\beta/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ v \end{pmatrix}$$

dove la matrice jacobiana del secondo membro in $(x_0, 0)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(x_0)/m & -\beta/m \end{pmatrix}$$

ha equazione caratteristica:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ f'(x_0)/m & -\beta/m - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{\beta}{m}\lambda - \frac{f'(x_0)}{m} = 0$$

ed autovalori:

$$\lambda_{\pm} = -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} + \frac{f'(x_0)}{m}}$$

che forniscono la base per l'applicazione del teorema di analisi lineare di stabilità. Si ha

così che:

- (i) se $f'(x_0) > 0$ gli autovalori λ_+ , λ_- risultano uno positivo ed uno negativo, per cui il teorema di analisi lineare implica l'instabilità dell'equilibrio;
- (ii) per $f'(x_0) < 0$ gli autovalori sono o complessi coniugati con parte reale negativa, oppure entrambi reali, distinti e negativi. Il teorema di analisi lineare assicura la stabilità asintotica della configurazione di equilibrio;
- (iii) qualora si abbia infine $f'(x_0) = 0$ ricorre un caso critico, in quanto $\lambda_+ = 0$ e $\lambda_- < 0$, per cui il teorema di analisi lineare non è applicabile.

Da notare che nel caso (i), sebbene sia $U''(x_0) = f'(x_0) > 0$ non è consentito fare uso del teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet, per via della sollecitazione dissipativa $-\beta\dot{x}$, che peraltro non viene rimossa dalla procedura di linearizzazione.

Nel caso (ii) la condizione $U''(x_0) = f'(x_0) < 0$ assicura che x_0 sia un massimo relativo proprio del potenziale. L'essere $-\beta\dot{x}$ una sollecitazione dissipativa comporta la stabilità dell'equilibrio per Lagrange-Dirichlet, ma non fornisce alcuna informazione circa la sua attrattività.

Nell'ipotesi (iii) si ha stabilità, per Lagrange-Dirichlet, se x_0 costituisce un massimo relativo proprio del potenziale, per quanto non riconoscibile dall'esame della derivata seconda $U''(x_0) = f'(x_0) = 0$. In caso contrario la questione della stabilità dell'equilibrio rimane senza risposta.

33.1 Pendolo semplice con resistenza viscosa

Fra gli esempi più significativi della classe precedente vi è quello del pendolo semplice soggetto ad una forza di resistenza viscosa. Se si indica con θ l'elongazione del pendolo rispetto alla direzione verticale condotta verso il basso dal centro della circonferenza vincolare, le equazioni del moto assumono la forma:

$$mR\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - \beta R\dot{\theta}$$

dove m è la massa del pendolo, R indica il raggio della circonferenza vincolare e $\beta > 0$ è la costante di frizione. La corrispondente forma normale del primo ordine si scrive:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\frac{g}{R} \sin \theta - \frac{\beta}{m} \omega \end{cases} \quad (\theta, \omega) \in \mathbb{R}^2$$

ed è del tipo (33.1) con sollecitazione posizionale $f(\theta) = -mg \sin \theta$. Le relative configurazioni di equilibrio sono dunque tutti e soli i punti:

$$\theta = \pi n, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

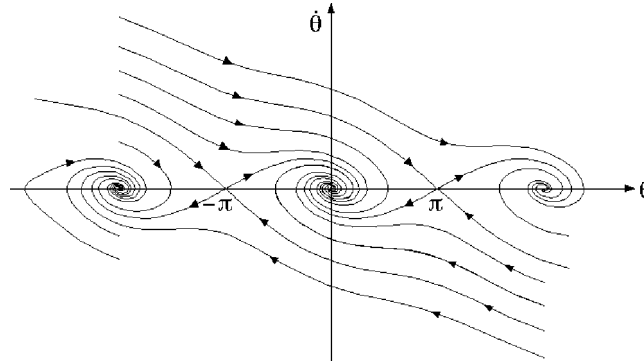
dei quali quelli con n pari risultano asintoticamente stabili, mentre quelli con n dispari

sono instabili, per via delle ovvie relazioni

$$f'(\theta) = -mg \cos \theta \quad f'(2p\pi) = -mg < 0 \quad f'[(2p+1)\pi] = mg > 0 \quad \forall p \in \mathbb{Z}.$$

A causa della dissipazione non è più possibile caratterizzare le orbite delle soluzioni come curve di livello dell'energia meccanica, che non costituisce un integrale primo del sistema, e le orbite devono essere ottenute mediante integrazione numerica delle equazioni del moto.

Il tipico ritratto di fase ha allora l'aspetto illustrato nella figura seguente:



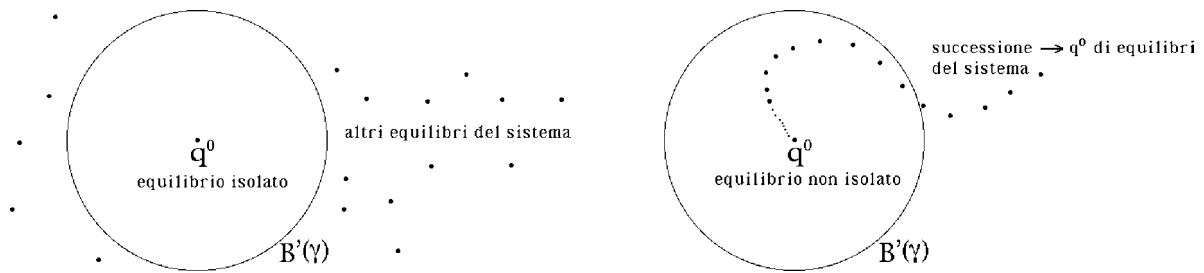
Da notare, in particolare, l'andamento delle curve separatrici e l'aspetto spirale delle orbite in prossimità degli equilibri asintoticamente stabili $\theta = 2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$.

34. Forma forte dei teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale — criteri di Barbasin-Krasovskii

I teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale possono essere enunciati in una forma più forte, al punto che l'inversione può rendersi in un certo senso completa, a patto di introdurre le opportune ipotesi aggiuntive sugli equilibri e sulla natura delle sollecitazioni attive agenti sul sistema scleronomo a vincoli ideali. Una estensione ormai classica dei teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale è quella ottenuta per mezzo dei **criteri di stabilità di Barbasin-Krasovskii**, che sono un raffinamento dei teoremi di Liapunov di stabilità asintotica e di instabilità. La dimostrazione di questi criteri, piuttosto complessa, non verrà presa in esame in queste note. Ci si limiterà ad enunciare ed illustrare la forma forte del teorema di Lagrange-Dirichlet e della sua inversione parziale. A questo scopo si rende necessario ricordare le nozioni di **equilibrio isolato** e di **sollecitazione completamente dissipativa**.

34.1 Equilibrio isolato

Una configurazione di equilibrio q^o di un sistema scleronomo si dice isolata se non è punto di accumulazione di altri equilibri del sistema. Se è cioè possibile determinare una sfera aperta $B'(\gamma)$, di centro q^o e raggio $\gamma > 0$, che non contiene altre configurazioni di equilibrio del sistema oltre a q^o stessa.



Si intende, in particolare, che se le configurazioni di equilibrio del sistema sono in numero finito, ciascuna di esse è isolata.

34.2 Sollecitazioni completamente dissipative

Una sollecitazione di potenza non positiva si dice completamente dissipativa se la sua potenza si annulla soltanto per velocità generalizzate tutte nulle

$$Q(t, q, \dot{q}) \cdot \dot{q} \leq 0 \quad \forall (t, q, \dot{q}) \in \mathbb{R} \times A \times \mathbb{R}^n \quad , \quad Q(t, q, \dot{q}) \cdot \dot{q} = 0 \quad \implies \quad \dot{q} = 0 .$$

Come la denominazione suggerisce, le sollecitazioni completamente dissipative sono particolari sollecitazioni dissipative. Si osservi che la potenza di una sollecitazione è sempre nulla per velocità generalizzate nulle, per cui la definizione potrebbe riformularsi in modo del tutto equivalente imponendo la condizione che la potenza si annulli se e soltanto se le velocità generalizzate sono tutte uguali a zero.

34.3 Esempi di sollecitazioni completamente dissipative

Le sollecitazioni di resistenza viscosa e idraulica, applicate ai punti di un sistema scleronomo, corrispondono a sollecitazioni completamente dissipative. Per verificarlo si consideri ad esempio il caso delle sollecitazioni di resistenza viscosa e si imponga l'annullarsi della relativa potenza

$$\pi = - \sum_{i=1}^N \beta_i |\dot{P}_i|^2 = 0 .$$

Condizione necessaria e sufficiente a che ciò avvenga è che tutte le velocità istantanee siano nulle e che quindi, dati i vincoli indipendenti dal tempo, si abbia

$$\dot{P}_i = \sum_{h=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \dot{q}_h = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N \quad \iff \quad \sum_{h=1}^n \frac{\partial P}{\partial q_h} \dot{q}_h = 0$$

da cui si deduce che, necessariamente,

$$\dot{q}_h = 0 \quad \forall h = 1, \dots, n$$

a causa della lineare indipendenza dei vettori $\partial P / \partial q_h$, $h = 1, \dots, n$, assicurata dalla definizione di sistema olonomo. La potenza π si annulla pertanto se e soltanto se $\dot{q} = 0$, come affermato.

34.4 Teorema di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale per l'equilibrio isolato in presenza di sollecitazioni completamente dissipative

Si consideri un sistema scleronomo a vincoli ideali di parametrizzazione $P(q)$, $q \in A \subseteq \mathbb{R}^n$, soggetto a sollecitazioni posizionali conservative di potenziale $U(q)$ e a sollecitazioni $D(q, \dot{q})$ completamente dissipative indipendenti dal tempo.⁽¹⁾ Sia inoltre $q^o \in \text{int}(A)$ un equilibrio isolato del sistema. Allora:

- (i) se q^o è un massimo relativo del potenziale la configurazione $P(q^o)$ risulta asintoticamente stabile;
- (ii) se q^o non è un massimo relativo del potenziale si ha l'instabilità della configurazione $P(q^o)$.

L'enunciato merita alcuni commenti, anche in relazione con i teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale.

34.4.1 Massimo relativo proprio

Nell'ipotesi di equilibrio isolato, il massimo relativo del potenziale U deve essere necessariamente proprio. Se così non fosse, infatti, dovrebbe esistere una sfera $B'(\gamma)$, di centro q^o e raggio γ , in cui

$$U(q) \leq U(q^o) \quad \forall q \in B'(\gamma)$$

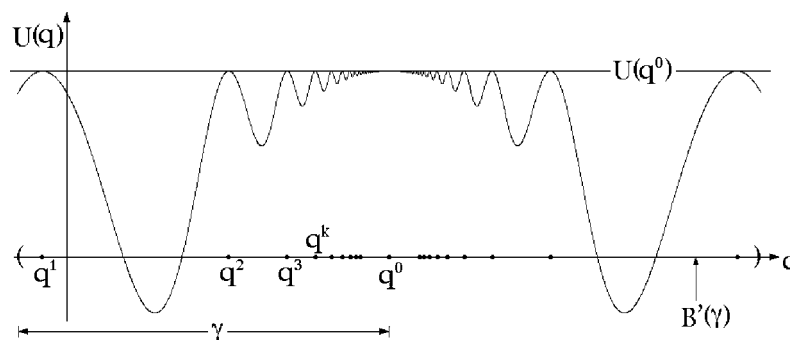
ed una successione di punti $q^k \in B'(\gamma)$, $k \in \mathbb{N}$, tali che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} q^k = q^o \quad \text{e} \quad U(q^k) = U(q^o) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Poiché U è per ipotesi una funzione differenziabile nel proprio dominio A , varrebbe allora

$$\frac{\partial U}{\partial q}(q^k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

e la successione $(q^k)_{k \in \mathbb{N}}$ risulterebbe al tempo stesso convergente a q^o e costituita da punti di equilibrio, in palese contrasto con l'ipotesi che q^o sia un equilibrio isolato.



⁽¹⁾ Al solito, resta inteso che il potenziale sia funzione di classe C^2 nel dominio A , mentre $D(q, \dot{q})$ è di classe C^1 nei propri argomenti.

34.4.2 Inversione completa

Il ricorrere del massimo relativo è non soltanto condizione sufficiente per la stabilità, come nel teorema di Lagrange-Dirichlet, ma anche necessaria. Se inoltre la configurazione si presenta effettivamente come un massimo relativo del potenziale, la stabilità è anche asintotica. In questo senso, l'inversione del teorema di Lagrange-Dirichlet può ritenersi **completa**. A tale scopo, tuttavia, è cruciale la presenza delle sollecitazioni completamente dissipative e si richiede inoltre che la configurazione di equilibrio considerata sia **isolata**.

34.4.3 Attrattività

Si osservi che non può aversi attrattività degli equilibri non isolati. Se infatti q^o è un equilibrio punto di accumulazione di altri equilibri, qualunque sfera aperta $B(\sigma)$ centrata in q^o e di raggio $\sigma > 0$ piccolo a piacere contiene almeno un equilibrio q^* distinto da q^o , la cui corrispondente soluzione delle equazioni del moto non converge a q^o per $t \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = q^* \neq q^o.$$

L'arbitrarietà di $\sigma > 0$ consente di escludere l'attrattività dell'equilibrio.

34.4.4 Esempio di applicazione

Il problema della stabilità dell'equilibrio per il pendolo semplice con resistenza viscosa, già esaminato alla sezione 33, può essere vantaggiosamente affrontato usando il teorema precedente. Le configurazioni di equilibrio $\theta = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, sono ovviamente tutte isolate, dal momento che gli equilibri adiacenti sono posti a distanza π l'uno dall'altro. Se deve solo verificare che la sollecitazione non posizionale e indipendente dal tempo $-\beta R \dot{\theta}$ è completamente dissipativa, cosa alla quale si provvede senza difficoltà calcolando la relativa potenza:

$$\pi = -\beta R \dot{\theta} \dot{\theta} = -\beta R \dot{\theta}^2 \leq 0$$

e rilevando che questa si annulla soltanto a velocità generalizzata nulla:

$$-\beta R \dot{\theta}^2 = 0 \quad \iff \quad \dot{\theta} = 0.$$

Nelle configurazioni di equilibrio $\theta = 2\pi p$, $p \in \mathbb{Z}$, che corrispondono a massimi relativi propri del potenziale $U(\theta) = mgR \cos \theta$, si ha quindi stabilità asintotica. Le configurazioni residue $\theta = (2p + 1)\pi$, $p \in \mathbb{Z}$, non sono massimi relativi propri del potenziale e risultano perciò instabili.

Da notare che l'uso del teorema di analisi lineare aveva richiesto lo studio degli autovalori di una matrice 2×2 , mentre i criteri di Barbasin-Krasovskii consentono di ottenere gli stessi risultati studiando la sola derivata seconda del potenziale — formalmente, una matrice 1×1 .

35. Piccole oscillazioni

Lo studio delle piccole oscillazioni permette di caratterizzare i piccoli moti nell'intorno delle posizioni di equilibrio stabile dei sistemi scleronomi. Per la sua notevole rilevanza pratica, in queste note verrà trattato estesamente il problema delle piccole oscillazioni per i **sistemi scleronomi posizionali conservativi**, con l'intesa che il problema si affronta in maniera analoga anche in presenza di sollecitazioni dissipative. L'idea che sta alla base di questo tipo di analisi è quella di sostituire alle equazioni lagrangiane del moto un set di equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti ottenute mediate una appropriata approssimazione di Taylor al primo ordine nell'intorno della soluzione statica.

36. Linearizzazione delle equazioni di Lagrange

Il primo passo verso lo studio delle piccole oscillazioni nell'intorno di una posizione di equilibrio stabile è la cosiddetta **linearizzazione delle equazioni di Lagrange** nell'intorno della corrispondente soluzione statica. La procedura è la stessa già esaminata nella sezione 31 per la dimostrazione del teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

36.1 Linearizzazione delle equazioni di Lagrange

Per un sistema scleronomo posizionale conservativo le equazioni lagrangiane del moto sono quelle omogenee

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_s} = 0 \quad \forall s = 1, \dots, n$$

con lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) + U(q)$ ed energia cinetica puramente quadratica nelle velocità generalizzate \dot{q} :

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n a_{hk}(q) \dot{q}_h \dot{q}_k + U(q).$$

Esplicitamente, ricordando la simmetria dei coefficienti $a_{hk}(q)$ negli indici $h, k = 1, \dots, n$, esse si scrivono:

$$\sum_{h=1}^n a_{sh}(q) \ddot{q}_h + \sum_{h,k=1}^n \left[\frac{\partial a_{sh}}{\partial q_k}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{hk}}{\partial q_s}(q) \right] \dot{q}_h \dot{q}_k - \frac{\partial U}{\partial q_s}(q) = 0 \quad \forall s = 1, \dots, n.$$

La linearizzazione delle equazioni del moto nell'intorno della soluzione statica $(q, \dot{q}) = (q^o, 0)$, con q^o equilibrio ordinario, consiste nel porre $\xi = q - q^o$, $\dot{\xi} = \dot{q}$ e nell'introdurre l'approssimazione di Taylor al primo ordine in $(\xi, \dot{\xi})$ nell'intorno di $(\xi, \dot{\xi}) = (0, 0)$:

$$\sum_{h=1}^n [a_{sh}(q^o) + o(|\xi|)] \ddot{\xi}_h + \sum_{h,k=1}^n \left[\frac{\partial a_{sh}}{\partial q_k}(q^o) - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{hk}}{\partial q_s}(q^o) + o(|\xi|) \right] \dot{\xi}_h \dot{\xi}_k - \frac{\partial U}{\partial q_s}(q^o) - \sum_{h=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial q_s \partial q_h}(q^o) \xi_h + o(|\xi|^2) = 0 \quad \forall s = 1, \dots, n$$

per poi conservare i soli termini del primo ordine in ξ , $\dot{\xi}$, $\ddot{\xi}$, ricordando che l'equilibrio ordinario q^o è un punto critico del potenziale:

$$\sum_{h=1}^n a_{sh}(q^o)\ddot{\xi}_h - \sum_{h=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial q_s \partial q_h}(q^o)\xi_h = 0 \quad \forall s = 1, \dots, n.$$

Lo stesso sistema di equazioni linearizzate del moto si può esprimere in forma matriciale:

$$A(q^o)\ddot{\xi} - H_U(q^o)\xi = 0 \quad (36.1)$$

usando la matrice $A(q^o)$ dell'energia cinetica calcolata in $q = q^o$ e la matrice hessiana $H_U(q^o)$ del potenziale nella stessa configurazione.

36.2 Lagrangiana del sistema linearizzato

Come già osservato nella sezione 31, alle stesse equazioni (36.1) si può pervenire seguendo una procedura alternativa, totalmente equivalente, basata sul calcolo della cosiddetta **lagrangiana del sistema linearizzato**. Questa si definisce ricorrendo all'approssimazione di Taylor al secondo ordine nell'intorno di $(\xi, \dot{\xi}) = (0, 0)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{L}(q^o + \xi, \dot{\xi}) &= \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n [a_{hk}(q^o) + o(|\xi|)] \dot{\xi}_h \dot{\xi}_k + \\ &+ U(q^o) + \sum_{h=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_h}(q^o)\xi_h + \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k}(q^o)\xi_h \xi_k + o(|\xi|^2) \end{aligned}$$

e trascurando il resto di ordine superiore al secondo in $|\xi|$, $|\dot{\xi}|$, nonché la costante additiva irrilevante $U(q^o)$:

$$\mathcal{L}_{\text{lin}}(\xi, \dot{\xi}) = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n a_{hk}(q^o)\dot{\xi}_h \dot{\xi}_k + \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k}(q^o)\xi_h \xi_k;$$

la lagrangiana del sistema linearizzato può essere scritta anche in rappresentazione matriciale:

$$\mathcal{L}_{\text{lin}}(\xi, \dot{\xi}) = \frac{1}{2} \dot{\xi}^T A(q^o) \dot{\xi} + \frac{1}{2} \xi^T H_U(q^o) \xi.$$

Le equazioni linearizzate si identificano allora con le equazioni di Lagrange di lagrangiana \mathcal{L}_{lin} :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{lin}}}{\partial \dot{\xi}_s} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{lin}}}{\partial \xi_s} = 0 \quad \forall s = 1, \dots, n$$

che infatti si riducono alle (36.1). Quando applicata allo studio delle piccole oscillazioni nell'intorno di un equilibrio stabile, la lagrangiana del sistema linearizzato è anche nota come **lagrangiana delle piccole oscillazioni** e viene indicata con $\mathcal{L}_{\text{p.o.}}$.

36.3 Significato fisico delle equazioni linearizzate

In linea di principio la linearizzazione delle equazioni di Lagrange può essere eseguita nell'intorno di qualsiasi soluzione statica $(q, \dot{q}) = (q^o, 0)$. Tuttavia, il significato dell'approssimazione cambia notevolmente secondo che la configurazione di equilibrio ordinaria q^o sia stabile o instabile. In entrambi i casi si può ragionevolmente ritenere che l'approssimazione offerta dal sistema linearizzato sia soddisfacente fino a che i valori di q e \dot{q} poco si discostano da quelli di equilibrio, q^o e 0. Ma mentre nel caso stabile i moti ottenuti perturbando poco lo stato di quiete in q^o si mantengono prossimi a $(q^o, 0)$ per ogni $t \geq 0$, in modo che le corrispondenti soluzioni del sistema linearizzato possono ritenersi una buona approssimazione di quelle esatte per tempi relativamente lunghi, viceversa, nel caso instabile, la tipica soluzione perturbata tende ad allontanarsi rapidamente dalla soluzione statica, per cui l'approssimazione fornita dalle soluzioni delle equazioni linearizzate potrà considerarsi soddisfacente e utile soltanto su tempi molto brevi.

Di regola, quindi, soltanto la linearizzazione nell'intorno degli equilibri stabili ha interesse dal punto di vista fisico ed applicativo.

37. Teoria standard delle piccole oscillazioni

La teoria delle piccole oscillazioni non viene sviluppata semplicemente postulando la stabilità dell'equilibrio q^o , come imposto dalla verosimiglianza fisica dell'approssimazione, ma assumendo la condizione più forte che l'**hessiana del potenziale in q^o sia definita negativa**. La necessità di questa condizione non è evidente e risulterà chiara nella discussione seguente. Detta condizione implica, come ben noto, che l'equilibrio ordinario q^o sia un massimo relativo proprio del potenziale U , la cui stabilità è assicurata dal teorema di Lagrange-Dirichlet. Va comunque precisato che la stabilità in q^o può anche aversi per una hessiana del potenziale soltanto semidefinita non definita negativa. Questo caso, che viene escluso dall'analisi, costituirà l'oggetto di una osservazione successiva.

37.1 Hessiana del potenziale definita negativa

L'equazione delle piccole oscillazioni è data dalla (36.1)

$$A(q^o)\ddot{\xi} - H_U(q^o)\xi = 0$$

con $A(q^o)$ ed $H_U(q^o)$ matrici reali simmetriche, definita positiva la prima e definita negativa la seconda. Per stabilire la struttura generale delle soluzioni si deve introdurre una opportuna trasformazione lineare delle coordinate ξ , che riduce il set di equazioni ad una forma particolarmente semplice. Questa trasformazione di coordinate verrà ora costruita in due passi successivi.

Per prima cosa si osserva, come già fatto nella sezione 31, che la matrice simmetrica definita positiva $A(q^o)$ può sempre essere ricondotta alla forma diagonale per mezzo della trasformazione — di similitudine:

$$A(q^o) = R^{-1}DR = R^T DR = R^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \textcircled{0} \\ & \ddots & \\ \textcircled{0} & & \lambda_n \end{pmatrix} R$$

con R matrice ortogonale — $R^{-1} = R^T$ — e autovalori λ_i tutti positivi. Ciò consente di definire la radice quadrata aritmetica della matrice $A(q^o)$:

$$A(q^o)^{1/2} \stackrel{\text{def}}{=} R^T \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \mathbb{O} \\ & \ddots & \\ \mathbb{O} & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} R$$

che è immediato verificare essere a sua volta reale simmetrica e definita positiva e il cui quadrato coincide con $A(q^o)$:

$$A(q^o)^{1/2} A(q^o)^{1/2} = A(q^o).$$

Si introduce allora il cambiamento lineare di coordinate:

$$A(q^o)^{1/2} \xi = \eta \quad \Longleftrightarrow \quad \xi = [A(q^o)^{1/2}]^{-1} \eta \quad (37.1)$$

che riduce la (36.1) alla forma:

$$A(q^o)^{1/2} A(q^o)^{1/2} [A(q^o)^{1/2}]^{-1} \ddot{\eta} - H_U(q^o) [A(q^o)^{1/2}]^{-1} \eta = 0$$

e con una ulteriore moltiplicazione a sinistra per $[A(q^o)^{1/2}]^{-1}$ conduce all'equazione equivalente:

$$\ddot{\eta} - [A(q^o)^{1/2}]^{-1} H_U(q^o) [A(q^o)^{1/2}]^{-1} \eta = 0 \quad (37.2)$$

dove la matrice

$$[A(q^o)^{1/2}]^{-1} H_U(q^o) [A(q^o)^{1/2}]^{-1} \quad (37.3)$$

risulta reale simmetrica definita negativa. Si tratta di una matrice simmetrica in quanto prodotto palindromo di matrici simmetriche

$$\begin{aligned} \left[[A(q^o)^{1/2}]^{-1} H_U(q^o) [A(q^o)^{1/2}]^{-1} \right]^T &= \left[[A(q^o)^{1/2}]^{-1} \right]^T \left[H_U(q^o) \right]^T \left[[A(q^o)^{1/2}]^{-1} \right]^T = \\ &= [A(q^o)^{1/2}]^{-1} H_U(q^o) [A(q^o)^{1/2}]^{-1} \end{aligned}$$

e definita negativa perchè $\forall a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ si ha

$$a^T [A(q^o)^{1/2}]^{-1} H_U(q^o) [A(q^o)^{1/2}]^{-1} a = ([A(q^o)^{1/2}]^{-1} a)^T H_U(q^o) [A(q^o)^{1/2}]^{-1} a < 0$$

causa il carattere definito negativo dell'hessiana $H_U(q^o)$. Esiste allora una ulteriore matrice ortogonale S che diagonalizza la (37.3) mediante una relazione di similitudine e congruenza:

$$[A(q^o)^{1/2}]^{-1} H_U(q^o) [A(q^o)^{1/2}]^{-1} = S^{-1} \Omega S = S^T \Omega S$$

con gli autovalori tutti negativi:

$$\Omega = \begin{pmatrix} -\omega_1^2 & & \mathbb{O} \\ & \ddots & \\ \mathbb{O} & & -\omega_n^2 \end{pmatrix} \quad \omega_h > 0 \quad \forall h = 1, \dots, n,$$

in modo che l'equazione (37.2) diventa

$$\ddot{\eta} - S^{-1}\Omega S\eta = 0$$

e con un nuovo cambiamento lineare di variabili

$$S\eta = z \tag{37.4}$$

si riduce alla forma

$$\ddot{z} - \Omega z = 0.$$

Questa equazione matriciale è equivalente al sistema di equazioni differenziali scalari disaccoppiate

$$\begin{cases} \ddot{z}_1 + \omega_1^2 z_1 = 0 \\ \ddot{z}_2 + \omega_2^2 z_2 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \ddot{z}_n + \omega_n^2 z_n = 0 \end{cases}$$

ognuna delle quali si può interpretare come l'equazione differenziale di un oscillatore armonico unidimensionale di elongazione z_h e pulsazione $\omega_h > 0$:

$$\ddot{z}_h + \omega_h^2 z_h = 0 \quad h = 1, \dots, n$$

la cui soluzione generale è data da

$$z_h(t) = A_h \cos(\omega_h t + \Phi_h) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

in termini delle due costanti reali arbitrarie $A_h \geq 0$ e Φ_h . **Lo studio delle piccole oscillazioni nell'intorno dell'equilibrio q^o viene quindi formalmente ricondotto all'analisi di un sistema di n oscillatori armonici unidimensionali indipendenti.** La soluzione generale delle equazioni linearizzate del moto si ottiene considerando tutte le possibili combinazioni delle soluzioni precedenti:

$$\begin{cases} z_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \Phi_1) \\ z_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \Phi_2) \\ \dots\dots\dots \\ z_n = A_n \cos(\omega_n t + \Phi_n) \end{cases} \tag{37.5}$$

e dipende quindi, come è lecito attendersi per un sistema di n equazioni differenziali del secondo ordine, da $2n$ costanti reali arbitrarie:

$$A_h \in \mathbb{R}^+, \quad \Phi_h \in \mathbb{R} \quad \forall h = 1, \dots, n.$$

Scegliendo opportunamente la matrice S può sempre assumersi che

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n. \tag{37.6}$$

37.2 Modi, coordinate, pulsazioni e frequenze normali delle piccole oscillazioni

I modi normali⁽¹⁾ delle piccole oscillazioni sono definiti considerando le soluzioni (37.5) in cui tutte le ampiezze A_i sono nulle salvo una. L' h -esimo modo normale delle piccole oscillazioni è perciò dato da, $\forall h = 1, \dots, n$:

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ z_{h-1} = 0 \\ z_h = A_h \cos(\omega_h t + \Phi_h) \\ z_{h+1} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ z_n = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_{h-1} \\ z_h \\ z_{h+1} \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ A_h \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\omega_h t + \Phi_h)$$

e deve intendersi definito a meno di un fattore positivo arbitrario. In forza della (37.6) i modi normali sono ordinati nel senso delle pulsazioni crescenti: il primo ha la pulsazione minima ("modo basso"), l'ultimo quella massima ("modo alto"). La soluzione generale (37.5) si esprime come combinazione lineare arbitraria degli n modi normali di oscillazione:

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ \dots \\ z_{h-1}(t) \\ z_h(t) \\ z_{h+1}(t) \\ \dots \\ z_n(t) \end{pmatrix} = \sum_{h=1}^n c_h \cos(\omega_h t + \Phi_h) \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ A_h \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow h\text{-esima riga}$$

Le coordinate z sono legate alle originarie $\xi = q - q^o$ da una trasformazione lineare che è la composizione delle trasformazioni lineari (37.1) e (37.4):

$$z = SA(q^o)^{1/2} \xi \iff \xi = [A(q^o)^{1/2}]^{-1} S^{-1} z \tag{37.7}$$

e sono dette **coordinate normali** del sistema nell'intorno della configurazione stabile q^o :

$$z_h, \quad h = 1, \dots, n.$$

Le pulsazioni $\omega_h > 0$ degli oscillatori armonici unidimensionali equivalenti sono denominate **pulsazioni normali** delle piccole oscillazioni:

$$\omega_h > 0, \quad h = 1, \dots, n,$$

mentre le corrispondenti frequenze $\omega_h/2\pi$ degli stessi oscillatori costituiscono le cosiddette **frequenze normali** delle piccole oscillazioni:

$$\frac{\omega_h}{2\pi} > 0, \quad h = 1, \dots, n.$$

⁽¹⁾ noti anche come modi caratteristici

e una volta eseguito il prodotto matriciale a secondo membro si riduce alla forma:

$$q - q^o = a_h \cos(\omega_h t + \Phi_h)$$

dove $a_h \in \mathbb{R}^n$ è un vettore non nullo opportuno, determinato a meno di un fattore arbitrario. È allora possibile fornire una semplice interpretazione fisica dei modi normali direttamente nelle coordinate lagrangiane preassegnate, senza dover introdurre le coordinate normali, in quanto:

i modi normali delle piccole oscillazioni sono le soluzioni delle equazioni linearizzate (36.1) per le quali tutti i parametri lagrangiani q_h oscillano con legge sinusoidale attorno ai rispettivi valori di equilibrio q_h^o e con la stessa pulsazione.

Si noti che a priori non appare affatto evidente come una simile definizione sia ben posta: la buona posizione segue dalla discussione precedente, dalla quale è emerso che **tutte** le soluzioni delle equazioni linearizzate possono scriversi come combinazioni lineari di soluzioni sinusoidali di pulsazioni opportune. Una volta accertato questo, tuttavia, i modi normali di oscillazione possono essere caratterizzati in modo molto semplice. Si tratta di ricercare soluzioni della forma:

$$q - q^o = a \cos(\omega t + \Phi) \quad (37.8)$$

con una pulsazione $\omega > 0$ ed un vettore delle ampiezze $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ opportuni. La condizione che il vettore a sia diverso da zero si giustifica con l'ovvia richiesta che il moto non coincida con la semplice quiete in q^o . Sostituendo la (37.8) nelle equazioni linearizzate (36.1) si ottiene l'equazione algebrica

$$-\omega^2 A(q^o) a \cos(\omega t + \Phi) - H_U(q^o) a \cos(\omega t + \Phi) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

che raccolti i fattori comuni diventa

$$-[\omega^2 A(q^o) + H_U(q^o)] a \cos(\omega t + \Phi) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e dovendo essere verificata $\forall t \in \mathbb{R}$ equivale alla condizione

$$[\omega^2 A(q^o) + H_U(q^o)] a = 0 \quad a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (37.9)$$

Quest'ultima relazione rappresenta un sistema lineare omogeneo di n equazioni algebriche in n variabili, le componenti del vettore a ; condizione necessaria e sufficiente affinché esista almeno una soluzione a non banale è che la matrice incompleta del sistema sia singolare:

$$\det[\omega^2 A(q^o) + H_U(q^o)] = 0. \quad (37.10)$$

La (37.10) è un'equazione algebrica di grado n nell'incognita ω^2 che, risolta, permette di ricavare le n pulsazioni normali di oscillazione del sistema:

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \dots, \quad \omega_n$$

e per questo è nota come **equazione caratteristica delle pulsazioni normali**. Una volta determinate le pulsazioni normali si calcoleranno, a meno di un fattore non nullo arbitrario, i relativi vettori di ampiezza a_h come soluzioni non banali dei sistemi algebrici lineari omogenei:

$$[\omega_h^2 A(q^o) + H_U(q^o)] a_h = 0 \quad h = 1, \dots, n.$$

Per la soluzione generale delle equazioni linearizzate si avrà infine l'espressione:

$$q - q^o = \sum_{h=1}^n c_h a_h \cos(\omega_h t + \Phi_h) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

per c_h e Φ_h , $h = 1, \dots, n$, costanti reali assegnate a piacere.

Da sottolineare che la procedura sopradescritta è formalmente analoga alla soluzione di un problema agli autovalori

$$[H_U(q^o) - \lambda \mathbb{I}] a = 0, \quad a \neq 0,$$

in cui però alla matrice identità \mathbb{I} si sia sostituita la matrice dell'energia cinetica $A(q^o)$ e in luogo dell'autovalore λ si sia considerato lo scalare $-\omega^2$. Si parla talvolta di **problema agli autovalori generalizzato**.

37.5 Principio di ortogonalità

I vettori di ampiezza $a_h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ relativi a pulsazioni normali distinte soddisfano ad una particolare condizione di "ortogonalità". Per fissare le idee, si considerino le pulsazioni normali ω_1 ed ω_2 , con $\omega_1 \neq \omega_2$, e siano a_1, a_2 i rispettivi vettori di ampiezza dei modi normali. Valgono allora le equazioni:

$$[\omega_1^2 A(q^o) + H_U(q^o)] a_1 = 0 \quad [\omega_2^2 A(q^o) + H_U(q^o)] a_2 = 0$$

ossia, trasponendo la seconda,

$$[\omega_1^2 A(q^o) + H_U(q^o)] a_1 = 0 \quad a_2^T [\omega_2^2 A(q^o) + H_U(q^o)] = 0. \quad (37.11)$$

Basta allora moltiplicare a sinistra per a_2^T la prima delle (37.11) e la e a destra per a_1 la seconda per ottenere le relazioni scalari

$$a_2^T [\omega_1^2 A(q^o) + H_U(q^o)] a_1 = 0 \quad a_2^T [\omega_2^2 A(q^o) + H_U(q^o)] a_1 = 0$$

che sottratte membro a membro porgono:

$$(\omega_1^2 - \omega_2^2) a_2^T A(q^o) a_1 = 0$$

e grazie alla condizione $\omega_1 \neq \omega_2$ conducono alla proprietà di ortogonalità richiesta:

$$a_2^T A(q^o) a_1 = 0.$$

In generale, il principio di ortogonalità afferma che:

se $a_i, a_j \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sono vettori di ampiezza relativi a pulsazioni normali distinte $\omega_i, \omega_j > 0$, vale

$$a_i^T A(q^o) a_j = 0.$$

Il principio deve il suo nome al fatto che l'applicazione:

$$(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow x^T A(q^o) y \in \mathbb{R}$$

è una forma bilineare simmetrica definita positiva che, nell'accezione più generale, definisce un prodotto scalare in \mathbb{R}^n :

$$\langle x|y \rangle \stackrel{\text{def}}{=} x^T A(q^o) y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

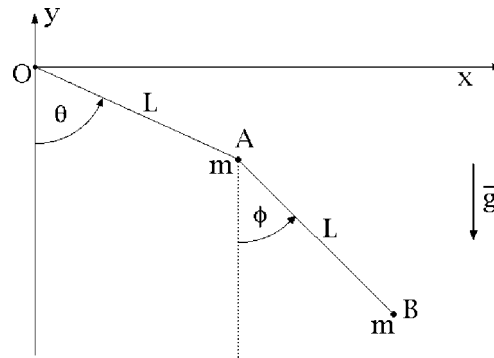
37.6 Sistemi forzati

Nella maggior parte delle applicazioni, delle piccole oscillazioni non interessa determinare il dettaglio del moto ma soltanto le pulsazioni normali. Tale è il caso, in particolare, dei sistemi scleronomi soggetti ad una forzante esterna dipendente dal tempo, per esempio di tipo sinusoidale. Di questo problema non si darà una trattazione generale rigorosa, ma ci si limiterà ad osservare che per questo tipo di sistemi si verifica lo stesso fenomeno già riscontrato nell'oscillatore armonico, con eventuale smorzamento viscoso, soggetto a forzante sinusoidale: la **risonanza**, cioè a dire la sensibile crescita dell'ampiezza di oscillazione nel moto di regime allorquando la pulsazione ω della forzante esterna risulta prossima a una delle pulsazioni normali delle piccole oscillazioni in prossimità dell'equilibrio. Fenomeno analogo ricorre nel caso che la forzante esterna sia una sovrapposizione di sollecitazioni sinusoidali di diversa pulsazione.

Modelli di questo tipo possono essere utilizzati per descrivere strutture soggette ad una sollecitazione dipendente dal tempo, come edifici o ponti sottoposti all'azione del vento o di una scossa sismica.

38. Esempio notevole di studio delle piccole oscillazioni. Il pendolo doppio

Come esempio illustrativo della teoria delle piccole oscillazioni si considera un sistema a vincoli ideali costituito da due punti materiali pesanti A e B , di eguale massa m , vincolati a restare nel piano verticale Oxy in modo che il punto A si mantenga a distanza fissa L dall'origine O e che la distanza $|A - B|$ sia a sua volta fissata al valore L . Il sistema, usualmente noto come **pendolo doppio**, è scleronomo e a due gradi di libertà: un set di parametri lagrangiani atto a descriverne convenientemente le configurazioni è costituito dalle variabili angolari θ e ϕ evidenziate nella figura seguente:



dove l'asse coordinato Oy si intende orientato verticalmente verso l'alto.

38.1 Energia cinetica

I vettori posizione dei punti materiali A e B si esprimono in funzione dei parametri lagrangiani per mezzo delle espressioni seguenti:

$$A - O = L \sin \theta \hat{e}_1 - L \cos \theta \hat{e}_2$$

$$B - O = A - O + B - A = L(\sin \theta + \sin \phi) \hat{e}_1 - L(\cos \theta + \cos \phi) \hat{e}_2$$

e le corrispondenti velocità istantanee si ricavano derivando rispetto al tempo:

$$\dot{A} = L(\cos \theta \dot{\theta} \hat{e}_1 + \sin \theta \dot{\theta} \hat{e}_2)$$

$$\dot{B} = L(\cos \theta \dot{\theta} + \cos \phi \dot{\phi}) \hat{e}_1 + L(\sin \theta \dot{\theta} + \sin \phi \dot{\phi}) \hat{e}_2.$$

L'energia cinetica del sistema è la somma delle energie cinetiche dei due punti materiali costituenti:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} \dot{A}^2 + \frac{m}{2} \dot{B}^2 = \frac{1}{2} m L^2 [\dot{\theta}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2 \cos(\theta - \phi) \dot{\theta} \dot{\phi}] = \\ &= \frac{1}{2} m L^2 [2\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2 \cos(\theta - \phi) \dot{\theta} \dot{\phi}] \end{aligned}$$

e può scriversi nella forma matriciale seguente:

$$T = \frac{1}{2} m L^2 \begin{pmatrix} \dot{\theta} & \dot{\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \cos(\theta - \phi) \\ \cos(\theta - \phi) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}$$

per cui la matrice dell'energia cinetica vale:

$$A(\theta, \phi) = m L^2 \begin{pmatrix} 2 & \cos(\theta - \phi) \\ \cos(\theta - \phi) & 1 \end{pmatrix}.$$

38.2 Configurazioni di equilibrio

Il sistema ha natura posizionale conservativa e il suo potenziale è dato dalla somma dei potenziali gravitazionali dei due punti materiali:

$$\begin{aligned} U = U_g &= -mg(A - O) \cdot \hat{e}_2 - mg(B - O) \cdot \hat{e}_2 = \\ &= mgL \cos \theta + mgL(\cos \theta + \cos \phi) = mgL(2 \cos \theta + \cos \phi). \end{aligned}$$

Gli equilibri — tutti ordinari — del sistema sono tutti e soli i punti critici del potenziale e si ricavano perciò annullando le derivate parziali prime della funzione U :

$$U_\theta = -2mgL \sin \theta \quad U_\phi = -mgL \sin \phi$$

dalle quali si deducono le configurazioni di equilibrio:

$$(\theta, \phi) = (0, 0), \quad (0, \pi), \quad (\pi, 0), \quad (\pi, \pi).$$

La matrice delle derivate seconde del potenziale:

$$H_U(\theta, \phi) = mgL \begin{pmatrix} -2 \cos \theta & 0 \\ 0 & -\cos \phi \end{pmatrix}$$

permette poi di verificare che soltanto la configurazione $(\theta, \phi) = (0, 0)$, in quanto massimo relativo proprio del potenziale, è un equilibrio stabile del sistema.

38.3 Equazione delle piccole oscillazioni

Nella configurazione di equilibrio stabile $(\theta, \phi) = (0, 0)$ la matrice dell'energia cinetica e l'hessiana del potenziale valgono:

$$A(0, 0) = mL^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad H_U(0, 0) = mgL \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

per cui le pulsazioni normali $\omega > 0$ delle piccole oscillazioni nell'intorno dell'equilibrio stabile devono soddisfare l'equazione caratteristica:

$$\det \left[mL^2 \omega^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + mgL \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = 0$$

ossia:

$$\det \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{g}{L\omega^2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = 0$$

o ancora, posto $g/L\omega^2 = \mu$,

$$\det \begin{pmatrix} 2 - 2\mu & 1 \\ 1 & 1 - \mu \end{pmatrix} = 0.$$

Esplicitato il determinante, l'equazione caratteristica diventa infine:

$$2\mu^2 - 4\mu + 1 = 0$$

e porge:

$$\mu = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \iff \frac{L\omega^2}{g} = \frac{1}{\mu} = 2 \mp \sqrt{2}$$

per cui le pulsazioni normali delle piccole oscillazioni risultano:

$$\omega_1 = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \omega_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

38.4 Primo modo normale di oscillazione

Per $\omega = \omega_1 = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \sqrt{g/L}$, cui corrisponde $\mu = (2 + \sqrt{2})/2$, l'equazione (37.9) delle ampiezze normali diventa

$$[\omega_1^2 A(q^o) + H_U(q^o)]a_1 = \begin{pmatrix} 2 - 2 - \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 - 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

e conduce al sistema di equazioni algebriche lineari omogenee:

$$\begin{cases} -\sqrt{2}v_1 + v_2 = 0 \\ v_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}v_2 = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione generale si scrive nella forma:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_2 \quad \forall v_2 \in \mathbb{R},$$

costituendo un sottospazio vettoriale unidimensionale di \mathbb{R}^2 . I vettori delle ampiezze associati alla pulsazione normale ω_1 sono pertanto tutti e soli i vettori di \mathbb{R}^2 :

$$a_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \sqrt{2}\alpha \end{pmatrix} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ed il modo normale di oscillazione corrispondente (“*modo basso*”) è dato dall'espressione

$$\begin{pmatrix} \theta(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \Phi_1) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (38.1)$$

con $A_1 \neq 0$ e Φ_1 costanti reali arbitrarie.

38.5 Secondo modo normale di oscillazione

Per la pulsazione normale più elevata $\omega = \omega_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}\sqrt{g/L}$, equivalente a $\mu = (2 - \sqrt{2})/2$, l'equazione (37.9) delle ampiezze normali assume la forma

$$[\omega_2^2 A(q^\circ) + H_U(q^\circ)]a_2 = \begin{pmatrix} 2 - 2 + \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = 0$$

e si riduce al sistema di equazioni algebriche lineari omogenee:

$$\begin{cases} \sqrt{2}w_1 + w_2 = 0 \\ w_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}w_2 = 0 \end{cases}$$

che ammette la soluzione generale — ancora sottospazio vettoriale unidimensionale di \mathbb{R}^2 :

$$w_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}w_2 \quad \forall w_2 \in \mathbb{R}.$$

Le ampiezze associate alla pulsazione normale ω_2 si riconoscono allora nei vettori di \mathbb{R}^2 :

$$a_2 = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \sqrt{2}\alpha \end{pmatrix} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ed il relativo modo normale di oscillazione (“*modo alto*”) è rappresentabile come:

$$\begin{pmatrix} \theta(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \Phi_2) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (38.2)$$

dove $A_2 \neq 0$ e Φ_2 sono ancora costanti reali arbitrarie.

38.6 Interpretazione dei modi normali

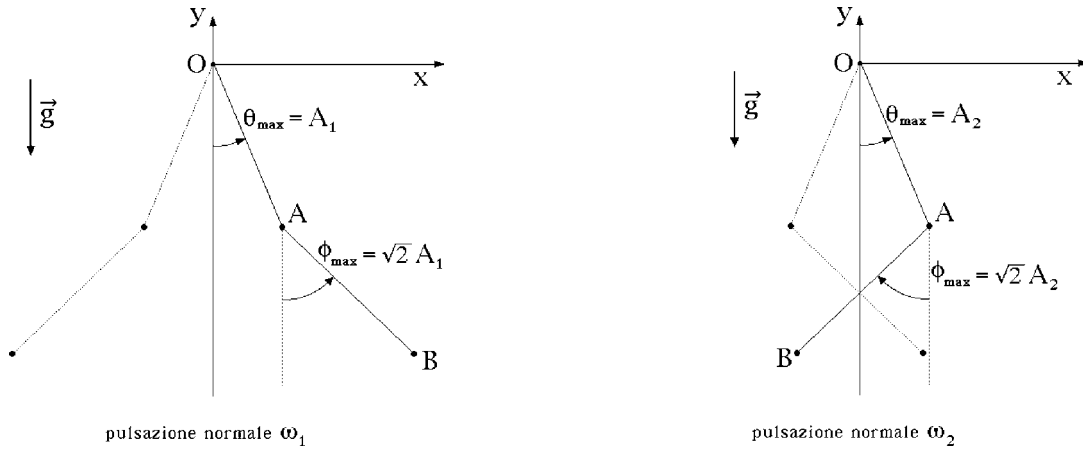
Dalle espressioni esplicite (38.1) e (38.2) dei modi normali si deduce facilmente che i piccoli moti del sistema intorno alla configurazione di equilibrio sono molto diversi fra loro nei rispettivi modi normali. Nel primo caso, infatti, corrispondente alla frequenza normale più bassa $\omega_1/2\pi$, le leggi orarie sinusoidali $\theta(t)$ e $\phi(t)$ hanno **la stessa fase**

$$\theta(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \Phi_1) \quad \phi(t) = A_1 \sqrt{2} \cos(\omega_1 t + \Phi_1)$$

oltre che ampiezze in rapporto $\sqrt{2}$ fra di loro. Per il modo normale di frequenza più alta $\omega_2/2\pi$ le leggi orarie $\theta(t)$ e $\phi(t)$ sono invece **in opposizione di fase**:

$$\theta(t) = -A_2 \cos(\omega_2 t + \Phi_2) = A_2 \cos(\omega_2 t + \Phi_2 + \pi) \quad \phi(t) = A_2 \sqrt{2} \cos(\omega_2 t + \Phi_2)$$

fermo restando il rapporto $\sqrt{2}$ fra le ampiezze di oscillazione. L'andamento qualitativo delle piccole oscillazioni, in corrispondenza dei due modi normali del sistema è rappresentato nella figura seguente:



38.7 Forma generale delle piccole oscillazioni

La soluzione generale dell'equazione delle piccole oscillazioni, nell'intorno della configurazione di equilibrio stabile $(\theta, \phi) = (0, 0)$, è una qualsiasi sovrapposizione dei due modi normali di oscillazione $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} \theta(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{2 - \sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{L}}t + \Phi_1\right) + A_2 \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{2 + \sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{L}}t + \Phi_2\right)$$

con A_1, A_2, Φ_1, Φ_2 costanti reali arbitrarie, determinate univocamente dalle condizioni iniziali $\theta(0), \phi(0), \dot{\theta}(0), \dot{\phi}(0)$.

38.8 Verifica del principio di ortogonalità

La verifica della "ortogonalità" dei vettori di ampiezza a_1 ed a_2 , associati a pulsazioni normali distinte, è immediata. Si ha infatti:

$$\begin{aligned} a_1^T A(q^o) a_2 &= (1 \quad \sqrt{2}) mL^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \\ &= mL^2 (1 \quad \sqrt{2}) \begin{pmatrix} -2 + \sqrt{2} \\ -1 + \sqrt{2} \end{pmatrix} = mL^2 (-2 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + 2) = 0 \end{aligned}$$

come richiesto.

39. Piccole oscillazioni forzate e smorzate nell'intorno di un equilibrio

Si consideri un sistema olonomo a vincoli ideali indipendenti dal tempo, ad n gradi di libertà, e sia

$$\mathcal{L} = T + U = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n a_{hk}(q) \dot{q}_h \dot{q}_k + U(q)$$

la sua lagrangiana espressa in termini delle coordinate generalizzate $q = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$. Il sistema, oltre che alle sollecitazioni posizionali conservative descritte dal potenziale $U(q)$, è sottoposto ad una sollecitazione di potenza non positiva della forma

$$D(q, \dot{q}) = (D_1, D_2, \dots, D_n) \in \mathbb{R}^n$$

di classe C^1 nei suoi argomenti. In tale ipotesi è noto che la sollecitazione D si annulla per $\dot{q} = 0$ e non influisce quindi sulle soluzioni statiche né sulle corrispondenti configurazioni di equilibrio del sistema. Sia $q^0 = (q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0)$ una configurazione di equilibrio stabile per la quale:

- (i) l'hessiana $H_U(q^0)$ del potenziale U nella configurazione q^0 risulti definita negativa (la configurazione è perciò un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità segue dal teorema di Lagrange-Dirichlet). Equivalentemente, l'hessiana $H_V(q^0)$ dell'energia potenziale $V = -U$ in q^0 sia definita positiva;
- (ii) la matrice B che definisce la sollecitazione D linearizzata nell'intorno della soluzione statica $(q, \dot{q}) = (q^0, 0)$:

$$\begin{aligned} D(q, \dot{q}) &= D(q^0, 0) + \frac{\partial D}{\partial q}(q^0, 0) \cdot (q - q^0) + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}}(q^0, 0) \cdot \dot{q} + O(2) = \\ &= \frac{\partial D}{\partial \dot{q}}(q^0, 0) \cdot \dot{q} + O(2) = -B[\dot{q}] + O(2) \quad (q, \dot{q}) \rightarrow (q^0, 0) \end{aligned} \quad (39.1)$$

soddisfi la condizione che la matrice reale e simmetrica $B + B^T$ sia definita positiva, avendo indicato con B^T la trasposta di B e con $[\dot{q}]$ il vettore colonna $(\dot{q}_1 \dots \dot{q}_n)^T$.

- (iii) la matrice A di elementi $a_{hk}(q^0)$, $h, k = 1, \dots, n$ sia reale, simmetrica e definita positiva, conformemente alla definizione generale di sistema olonomo.

Si supponga infine che al sistema sia applicata una sollecitazione esterna sinusoidale F , di pulsazione ω determinata e componenti lagrangiane

$$F_h = f_h \cos(\omega t + \phi_h), \quad h = 1, 2, \dots, n,$$

dove $f_h \geq 0$ e $\phi_h \in \mathbb{R}$ sono costanti assegnate — ampiezze e fasi per ciascuna componente della forzante esterna.

Sotto tali ipotesi, è allora possibile:

- (a) scrivere le equazioni lagrangiane del moto linearizzate nell'intorno della soluzione statica $(q^0, 0)$ in esame;
- (b) analizzare i piccoli moti del sistema nell'intorno della soluzione statica predetta, assumendo siano applicabili le equazioni linearizzate ricavate al punto (a);
- (c) caratterizzare i valori della pulsazione ω della forzante esterna in corrispondenza dei quali si ha risonanza per i piccoli moti del sistema nell'intorno della soluzione statica.

Si osservi preliminarmente come la condizione (i) sia più restrittiva rispetto alla semplice richiesta che la configurazione di equilibrio q^0 — punto critico del potenziale U — sia stabile. In particolare, l'essere q^0 configurazione di equilibrio stabile non impone che il potenziale abbia un massimo relativo proprio nello stesso punto, dal momento che il teorema di Lagrange-Dirichlet fornisce una condizione sufficiente, ma non necessaria, per la stabilità. Né d'altra parte l'eventuale presenza in q^0 di un massimo relativo proprio per U richiede che la matrice hessiana $H_U(q^0)$ debba essere definita negativa, potendo questa risultare soltanto semidefinita non definita negativa.

Anche la condizione (ii) è parimenti restrittiva, rispetto alla semplice richiesta circa la natura dissipativa della sollecitazione D . Conviene in primo luogo osservare che se si ricava l'espressione della potenza di D in termini della (39.1)

$$\pi = \dot{q} \cdot D(q, \dot{q}) = \dot{q} \cdot \left(D(q^0, 0) + \frac{\partial D}{\partial q}(q^0, 0) \cdot (q - q^0) + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}}(q^0, 0) \cdot \dot{q} + O(2) \right)$$

e la si riscrive in forma matriciale, con ovvio significato dei simboli,

$$\pi = [\dot{q}]^T [D(q^0, 0)] + [\dot{q}]^T \left[\frac{\partial D}{\partial q}(q^0, 0) \right] [q - q^0] + [\dot{q}]^T \left[\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}(q^0, 0) \right] [\dot{q}] + [\dot{q}]^T O(2)$$

si deduce immediatamente che la condizioni di potenza non positiva non può essere soddisfatta se non imponendo l'annullarsi della sollecitazione $D(q^0, 0)$ e del relativo gradiente rispetto alle coordinate lagrangiane, $(\partial D / \partial q)(q^0, 0)$. Fissato infatti $q \in \mathbb{R}^n$, per \dot{q} sufficientemente vicino a 0 e a meno di termini di ordine superiore la potenza della sollecitazione sarà data da

$$\pi = [\dot{q}]^T [D(q^0, 0)] + [\dot{q}]^T \left[\frac{\partial D}{\partial q}(q^0, 0) \right] [q - q^0]$$

che dovendo risultare sempre $\leq 0 \forall \dot{q} \in \mathbb{R}^n$ implica $[D(q^0, 0)] + \left[\frac{\partial D}{\partial q}(q^0, 0) \right] [q - q^0] = 0$.

L'arbitrarietà di $q - q^0 \in \mathbb{R}^n$ comporterà poi che si abbia separatamente

$$[D(q^0, 0)] = 0 \quad \text{e} \quad \left[\frac{\partial D}{\partial q}(q^0, 0) \right] = 0.$$

L'espressione linearizzata di $[D(q, \dot{q})]$ si riduce così a

$$[D(q, \dot{q})] = \left[\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}(q^0, 0) \right] [\dot{q}] + O(2)$$

per cui la matrice B si identifica con

$$B = - \left[\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}(q^0, 0) \right]$$

ed affinché la potenza abbia segno definito — negativo — deve soddisfare la condizione

$$[\dot{q}]^T B [\dot{q}] \geq 0 \quad \forall [\dot{q}] \in \mathbb{R}^n . \quad (39.2)$$

La matrice B è certamente reale, ma non necessariamente simmetrica; tuttavia, trasponendo membro a membro la (39.2) si ottiene

$$[\dot{q}]^T B^T [\dot{q}] \geq 0 \quad \forall [\dot{q}] \in \mathbb{R}^n$$

e sommando questa relazione con la precedente si perviene alla diseuguaglianza

$$[\dot{q}]^T (B + B^T) [\dot{q}] \geq 0 \quad \forall [\dot{q}] \in \mathbb{R}^n \quad (39.3)$$

nella quale $B + B^T$ è reale e simmetrica. Le condizioni (39.2) e (39.3) sono in tutto e per tutto equivalenti, potendosi scrivere

$$[\dot{q}]^T (B + B^T) [\dot{q}] = [\dot{q}]^T B [\dot{q}] + [\dot{q}]^T B^T [\dot{q}] = 2[\dot{q}]^T B [\dot{q}] .$$

Di conseguenza, la condizione sulla potenza π implica che $B + B^T$ sia semidefinita positiva. *La condizione richiesta che vuole $B + B^T$ definita positiva è dunque più forte* di quanto imposto dall'essere D una sollecitazione a potenza non positiva.

Quanto infine alla (iii), la matrice A non è altro che la matrice rappresentativa dell'energia cinetica — che per un sistema a vincoli indipendenti dal tempo si riduce ad una forma quadratica definita positiva di \dot{q} , comunque si fissi q — calcolata nella configurazione di equilibrio $q = q^0$. Risulta quindi evidente che A è sempre una matrice reale simmetrica definita positiva, esattamente come richiesto.

39.1 Equazioni linearizzate

Le equazioni di Lagrange del sistema sono

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = D_h + F_h \quad h = 1, \dots, n$$

e il metodo più semplice per linearizzarle nell'intorno della soluzione statica $(q, \dot{q}) = (q^0, 0)$ consiste nel calcolare una lagrangiana \mathcal{L}_{po} delle piccole oscillazioni per mezzo di uno sviluppo di Taylor al secondo ordine nelle variabili (q, \dot{q}) . Si ha, precisamente, l'espressione:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n a(q^0)_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k + U(q^0) + \sum_{h=1}^n \frac{\partial U(q^0)}{\partial q_h} (q_h - q_h^0) + \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n \frac{\partial^2 U(q^0)}{\partial q_h \partial q_k} (q_h - q_h^0) (q_k - q_k^0)$$

che, omissa la costante additiva inessenziale $U(q^0)$ e ricordata la condizione $(\partial U/\partial q)(q^0) = 0$ sulla configurazione di equilibrio, equivale a

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n a(q^0)_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n \frac{\partial^2 U(q^0)}{\partial q_h \partial q_k} (q_h - q_h^0)(q_k - q_k^0).$$

Quest'ultima, in notazione matriciale, assume la forma

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2} [\dot{q}]^T A [\dot{q}] + \frac{1}{2} [q - q^0]^T H_U(q^0) [q - q^0]$$

e con il cambiamento di variabili $[q - q^0] = \xi \in \mathbb{R}^n$ diventa

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2} \dot{\xi}^T A \dot{\xi} + \frac{1}{2} \xi^T H_U(q^0) \xi \quad (39.4)$$

in cui si è introdotta la matrice hessiana del potenziale in q^0 , $H_U(q^0)$. Nelle nuove variabili le equazioni linearizzate si scrivono

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{po}}{\partial \dot{\xi}_h} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{po}}{\partial \xi_h} \right) = - \sum_{k=1}^n B_{hk} \dot{\xi}_k + F_h \quad h = 1, \dots, n$$

e sostituendo la (39.4) assumono la forma

$$\sum_{k=1}^n A_{hk} \ddot{\xi}_k - \sum_{k=1}^n H_U(q^0)_{hk} \xi_k = - \sum_{k=1}^n B_{hk} \dot{\xi}_k + F_h \quad h = 1, \dots, n$$

equivalente a quella matriciale

$$A \ddot{\xi} - H_U(q^0) \xi = -B \dot{\xi} + F,$$

ovvero a

$$A \ddot{\xi} + B \dot{\xi} + H_V(q^0) \xi = F \quad (39.5)$$

per via dell'ovvia identità $H_V(q^0) = -H_U(q^0)$. D'ora innanzi, per brevità, si converrà di indicare con H_V la matrice hessiana dell'energia potenziale nella configurazione di equilibrio, omettendo l'indicazione specifica della configurazione. Il sistema (39.5) delle equazioni linearizzate può facilmente ricondursi alla forma normale del primo ordine, introducendo la variabile vettoriale $\eta = \dot{\xi}$:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \eta \\ A \dot{\eta} = -B \eta - H_V \xi + F \end{cases}$$

in modo che si ha

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \eta \\ \dot{\eta} = -A^{-1} B \eta - A^{-1} H_V \xi + A^{-1} F \end{cases}$$

e quindi, con ovvio significato dei simboli \mathbb{O} , \mathbb{I} , \mathbb{D} ,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ -A^{-1} H_V & -A^{-1} B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ A^{-1} F \end{pmatrix} := \mathbb{D} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ A^{-1} F \end{pmatrix} \quad (39.6)$$

per il fatto che la matrice A è certamente non singolare in quanto definita positiva.

39.2 Piccoli moti nell'intorno della soluzione statica

Le (39.6) costituiscono un sistema lineare a coefficienti costanti non omogeneo. È ben noto dall'analisi matematica che la soluzione generale di tale sistema si scrive sommando ad una sua soluzione particolare la soluzione generale del sistema omogeneo associato:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ -A^{-1}H_V & -A^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \mathbb{D} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} .$$

Tale soluzione generale è una combinazione lineare di funzioni a valori vettoriali linearmente indipendenti del tipo $P(t)e^{\lambda t}$, dove $P(t)$ è un polinomio di grado conveniente e λ un autovalore della matrice \mathbb{D} :

$$\det(\mathbb{D} - \lambda\mathbb{I}) = 0 .$$

Si verifica la seguente:

39.2.1 Proposizione. Caratterizzazione degli autovalori del sistema linearizzato

Gli autovalori di \mathbb{D} sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\det(\lambda^2 A + \lambda B + H_V) = 0 . \quad (39.7)$$

Dimostrazione

Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $\det(\lambda^2 A + \lambda B + H_V) = 0$. Esiste allora un vettore $a \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tale che

$$(\lambda^2 A + \lambda B + H_V)a = 0$$

ed il vettore

$$\begin{pmatrix} a \\ \lambda a \end{pmatrix} ,$$

certamente non nullo in quanto $a \neq 0$, è autovettore di \mathbb{D} con autovalore λ . Infatti:

$$\begin{aligned} \mathbb{D} \begin{pmatrix} a \\ \lambda a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ -A^{-1}H_V & -A^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \lambda a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ -A^{-1}H_V a - \lambda A^{-1}B a \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a \\ -A^{-1}(H_V + \lambda B)a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ -A^{-1}(-\lambda^2 A)a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda^2 a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ \lambda a \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Viceversa, sia $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore di \mathbb{D} e

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

un autovettore ad esso associato. Vale allora:

$$\mathbb{D} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ -A^{-1}H_V & -A^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \neq 0 ,$$

ossia

$$\begin{pmatrix} v \\ -A^{-1}H_V u - A^{-1}B v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u \\ \lambda v \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{cases} v = \lambda u \\ -A^{-1}H_V u - A^{-1}B \lambda u = \lambda^2 u \end{cases}$$

da cui si deduce infine

$$\begin{cases} v = \lambda u \\ (\lambda^2 A + \lambda B + H_V)u = 0 . \end{cases}$$

Si osservi che deve essere necessariamente $u \neq 0$, poiché in caso contrario si avrebbe $v = \lambda u = \lambda 0 = 0$ e dunque $(u, v) = 0$, contro l'ipotesi. Di conseguenza la matrice $\lambda^2 A + \lambda B + H_V$ deve essere singolare:

$$\det(\lambda^2 A + \lambda B + H_V) = 0 ,$$

il che completa la dimostrazione. \square

Un secondo utile risultato è il seguente.

39.2.2 Proposizione. Parte reale degli autovalori

Le soluzioni dell'equazione caratteristica $\det(\lambda^2 A + \lambda B + H_V) = 0$ hanno tutte parte reale strettamente negativa.

Dimostrazione

Per il caso particolare di B simmetrica il risultato può essere provato direttamente per via algebrica, mentre quello generale si affronta convenientemente usando i teoremi di stabilità.

Caso di B simmetrica

Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ una soluzione dell'equazione caratteristica. La matrice $\lambda^2 A + \lambda B + H_V$ risulta singolare ed esiste un vettore $a \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tale che

$$(\lambda^2 A + \lambda B + H_V)a = 0 .$$

Indicato con a^+ il trasposto coniugato del vettore colonna a , dall'equazione precedente si deduce

$$\lambda^2 a^+ A a + \lambda a^+ B a + a^+ H_V a = 0 \quad (39.8)$$

e basta evidenziare le parti reale ed immaginaria del vettore a

$$a = u + iv , \quad u, v \in \mathbb{R}^n ,$$

per ottenere:

$$a^+ A a = (u^T - iv^T)A(u + iv) = u^T A u + iu^T A v - iv^T A u + v^T A v = u^T A u + v^T A v$$

$$a^+ H_V a = u^T H_V u + v^T H_V v$$

$$a^+ B a = u^T B u + v^T B v .$$

I coefficienti $a^+ Aa$, $a^+ H_V a$ e $a^+ Ba$ sono numeri reali strettamente positivi, in quanto i vettori reali u e v non possono assumere valori simultaneamente nulli, e le matrici A , H_V , B sono per ipotesi reali simmetriche e definite positive. L'equazione (39.8) implica allora

$$\lambda = \frac{1}{2a^+ Aa} \left[-a^+ Ba \pm \sqrt{(a^+ Ba)^2 - 4 a^+ Aa a^+ H_V a} \right]$$

con

$$-a^+ Ba < 0 \quad \text{e} \quad (a^+ Ba)^2 - 4 a^+ Aa a^+ H_V a < (a^+ Ba)^2$$

per cui λ — sia esso reale o complesso — ha sempre parte reale negativa.

Caso generale

Se $B + B^T$ è definita positiva ma non necessariamente simmetrica si considera il sistema delle equazioni linearizzate del moto omogenee — senza cioè il termine forzante —

$$A\ddot{\xi} + H_V(q^0)\dot{\xi} = -B\dot{\xi}. \tag{39.9}$$

Questo descrive un sistema scleronomo a vincoli ideali di energia cinetica

$$T(\xi, \dot{\xi}) = \frac{1}{2} \dot{\xi}^T A \dot{\xi}$$

ed energia potenziale

$$V(\xi) = \frac{1}{2} \xi^T H_V(q^0) \xi$$

soggetto ad una ulteriore sollecitazione non posizionale

$$Q(\xi, \dot{\xi}) = -B\dot{\xi}.$$

Il sistema è autonomo e grazie al carattere non singolare di $H_V(q^0)$ presenta in $\xi = 0$ un'unica configurazione di equilibrio, necessariamente isolata, che peraltro costituisce un massimo relativo proprio del potenziale U . A questo si aggiunge che la sollecitazione non posizionale ha natura *completamente dissipativa*, in quanto la sua potenza può esprimersi nella forma

$$\pi = \dot{\xi}^T (-B\dot{\xi}) = -\dot{\xi}^T B \dot{\xi} = -\frac{\dot{\xi}^T B \dot{\xi} + \dot{\xi}^T B^T \dot{\xi}}{2} = -\frac{1}{2} \dot{\xi}^T (B + B^T) \dot{\xi}$$

e si riconosce mantenersi negativa per ogni $\dot{\xi} \neq 0$, a causa dell'ipotesi assunta su $B + B^T$. Sono in tal modo soddisfatti i requisiti per l'applicazione dei criteri di Barbasin-Krasovskii, che implicano la *stabilità asintotica* dell'equilibrio isolato $\xi = 0$. D'altra parte il sistema (39.9) è *lineare*: constatare la stabilità asintotica dell'origine *equivale* ad affermare che tutti gli autovalori della matrice di rappresentazione D hanno parte reale strettamente negativa. In virtù della proposizione 39.2.1 si conclude allora che la stessa proprietà deve sussistere per le soluzioni λ dell'equazione caratteristica (39.7). \square

Un immediato corollario di questo risultato è la

39.2.3 Proposizione. Soluzione particolare

Comunque si assegni la pulsazione ω della forzante F , le equazioni linearizzate del secondo ordine (39.5) ammettono una soluzione particolare della forma

$$\xi_i(t) = a_i \cos(\omega t + \alpha_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad , \quad (39.10)$$

per una opportuna scelta delle costanti reali $a_i \geq 0$ ed α_i , $i = 1, \dots, n$. Ad essa corrisponde la soluzione particolare

$$\xi_i(t) = a_i \cos(\omega t + \alpha_i) \quad \eta_i(t) = -\omega a_i \sin(\omega t + \alpha_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad ,$$

del sistema (39.6).

Dimostrazione

Siccome H_V è definita positiva e dunque non singolare, per $\omega = 0$ la proposizione risulta banalmente verificata assegnando $a = H_V^{-1} F$ e la soluzione particolare è costante in t . Ci si può quindi limitare a considerare il caso di $\omega \neq 0$. In tale ipotesi, si riscriva il primo membro della (39.5) nella forma di un operatore differenziale vettoriale applicato a ξ :

$$\left[A \frac{d^2}{dt^2} + B \frac{d}{dt} + H_V \right] \xi = F \quad . \quad (39.11)$$

Posto $\xi_i(t) = a_i \cos(\omega t + \alpha_i) \quad \forall i = 1, \dots, n$ ed applicato membro a membro l'operatore differenziale complesso

$$\Delta := \mathbb{I} \left(1 - \frac{i}{\omega} \frac{d}{dt} \right) \quad ,$$

si ottiene

$$\Delta \left[A \frac{d^2}{dt^2} + B \frac{d}{dt} + H_V \right] \xi = \Delta F$$

che equivale a

$$\left[A \frac{d^2}{dt^2} + B \frac{d}{dt} + H_V \right] \Delta \xi = \Delta F \quad . \quad (39.12)$$

D'altra parte valgono $\forall h = 1, \dots, n$ le ovvie relazioni

$$(\Delta \xi)_h = \left(1 - \frac{i}{\omega} \frac{d}{dt} \right) a_h \cos(\omega t + \alpha_h) = a_h [\cos(\omega t + \alpha_h) + i \sin(\omega t + \alpha_h)] = a_h e^{i\alpha_h} e^{i\omega t}$$

$$(\Delta F)_h = \left(1 - \frac{i}{\omega} \frac{d}{dt} \right) f_h \cos(\omega t + \phi_h) = f_h [\cos(\omega t + \phi_h) + i \sin(\omega t + \phi_h)] = f_h e^{i\phi_h} e^{i\omega t}$$

e di conseguenza le identità vettoriali

$$\Delta \xi = \tilde{a} e^{i\omega t} \quad \Delta F = \tilde{F} e^{i\omega t}$$

in cui si sono introdotti i vettori complessi:

$$\tilde{a} = \begin{pmatrix} a_1 e^{i\alpha_1} \\ \dots \\ a_n e^{i\alpha_n} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{F} = \begin{pmatrix} f_1 e^{i\phi_1} \\ \dots \\ f_n e^{i\phi_n} \end{pmatrix}. \quad (39.13)$$

La funzione complessa $\tilde{a}e^{i\omega t}$ è soluzione di (39.12) se e soltanto se (39.10) lo è della (39.11). Sostituendo le espressioni complesse di $\Delta \xi$ e ΔF nell'equazione (39.12) si ottiene perciò

$$(-\omega^2 A + i\omega B + H_V)\tilde{a} e^{i\omega t} = \tilde{F} e^{i\omega t}$$

ovvero, semplificando il fattore di fase $e^{i\omega t}$,

$$(-\omega^2 A + i\omega B + H_V)\tilde{a} = \tilde{F}.$$

Questa equazione algebrica complessa ammette l'unica soluzione

$$\tilde{a} = (-\omega^2 A + i\omega B + H_V)^{-1} \tilde{F} \quad (39.14)$$

dal momento che la matrice $\lambda^2 A + \lambda B + H_V$ può essere singolare soltanto per valori di λ con parte reale strettamente negativa, e per $\lambda = i\omega$ risulta quindi certamente *invertibile*. Dall'equazione

$$\begin{pmatrix} a_1 e^{i\alpha_1} \\ \dots \\ a_n e^{i\alpha_n} \end{pmatrix} = (-\omega^2 A + i\omega B + H_V)^{-1} \begin{pmatrix} f_1 e^{i\phi_1} \\ \dots \\ f_n e^{i\phi_n} \end{pmatrix} \quad (39.15)$$

si deducono infine le costanti $a_h \geq 0$ ed $\alpha_h \in \mathbb{R}$, $\forall h = 1, \dots, n$.

La seconda parte della proposizione segue banalmente per il modo in cui il sistema (39.6) è stato ricavato dalla (39.5). \square

39.2.4 Conclusioni

Le proposizioni dimostrate consentono di affermare che la soluzione generale delle equazioni delle piccole oscillazioni — (39.5) o (39.6) — consiste della somma di una soluzione particolare di tipo sinusoidale:

$$\xi_h(t) = a_h \cos(\omega t + \alpha_h) \quad , \quad h = 1, \dots, n \quad ,$$

i cui coefficienti di ampiezza — $a_h \geq 0$ — e di fase — $\alpha_h \in \mathbb{R}$ — sono determinati dalla (39.15), e della soluzione generale dell'omogenea associata, la quale tende esponenzialmente a zero per $t \rightarrow +\infty$. Una volta trascorso il transiente iniziale, che peraltro reca tutta la dipendenza dalle condizioni iniziali, il moto asintotico del sistema è dunque descritto dalla sola soluzione di tipo sinusoidale, con pulsazione uguale a quella della forzante sinusoidale esterna.

39.3 Risonanza

Nell'ipotesi che le equazioni delle piccole oscillazioni siano ancora applicabili anche in presenza della forzante sinusoidale F — ipotesi ragionevole qualora le ampiezze f_h , $h = 1, \dots, n$ della forzante siano sufficientemente piccole — i fenomeni di risonanza possono essere trattati in modo analogo a quanto avviene per un oscillatore armonico unidimensionale soggetto a smorzamento viscoso e a forzante sinusoidale. La sola differenza di rilievo è rappresentata dal fatto che in un sistema ad n gradi di libertà le oscillazioni coinvolgono una pluralità di variabili, ciascuna caratterizzata da una propria ampiezza e da una propria fase di oscillazione. Si tratta quindi di introdurre un criterio ragionevole ed univoco per definire la condizione di risonanza del sistema, criterio che coinvolga simultaneamente tutti i gradi di libertà e le relative ampiezze e fasi.

Il modo più semplice e intuitivo di fare questo consiste nel considerare l'energia meccanica totale media accumulata nel sistema in un periodo di oscillazione $T = 2\pi/\omega$, una volta che sia stata superata la fase transiente e raggiunto il moto di regime.

A questo scopo, si ricorda che l'energia meccanica totale del sistema è data dall'espressione

$$H(\xi, \dot{\xi}) = \frac{1}{2} \dot{\xi}^T A \dot{\xi} + \frac{1}{2} \xi^T H_V \xi$$

in cui, a regime, risulta

$$\xi_h = a_h \cos(\omega t + \alpha_h) \quad \dot{\xi}_h = -\omega a_h \sin(\omega t + \alpha_h) \quad , \quad h = 1, 2, \dots, n \quad ,$$

e quindi

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n \omega^2 A_{hk} a_h a_k \sin(\omega t + \alpha_h) \sin(\omega t + \alpha_k) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n (H_V)_{hk} a_h a_k \cos(\omega t + \alpha_h) \cos(\omega t + \alpha_k) . \end{aligned}$$

L'energia del sistema è quindi una funzione periodica del tempo, di periodo $2\pi/\omega$, ed appare del tutto ragionevole assumerne il valore medio su un periodo come indice della quantità media di energia meccanica accumulata nel sistema a regime. Detto valore medio si calcola come

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &:= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} H(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n \omega^2 A_{hk} a_h a_k \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sin(\omega t + \alpha_h) \sin(\omega t + \alpha_k) dt + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n (H_V)_{hk} a_h a_k \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \cos(\omega t + \alpha_h) \cos(\omega t + \alpha_k) dt \end{aligned}$$

ed in forza delle ovvie relazioni integrali

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi/\omega} \sin(\omega t + \alpha_h) \sin(\omega t + \alpha_k) dt = \\ &= \int_0^{2\pi/\omega} \frac{\cos(\alpha_h - \alpha_k) - \cos(2\omega t + \alpha_h + \alpha_k)}{2} dt = \frac{\pi}{\omega} \cos(\alpha_h - \alpha_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi/\omega} \cos(\omega t + \alpha_h) \cos(\omega t + \alpha_k) dt = \\ &= \int_0^{2\pi/\omega} \frac{\cos(\alpha_h - \alpha_k) + \cos(2\omega t + \alpha_h + \alpha_k)}{2} dt = \frac{\pi}{\omega} \cos(\alpha_h - \alpha_k) \end{aligned}$$

diventa

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n \omega^2 A_{hk} a_h a_k \frac{1}{2} \cos(\alpha_h - \alpha_k) + \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n (H_V)_{hk} a_h a_k \frac{1}{2} \cos(\alpha_h - \alpha_k) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{h,k=1}^n (\omega^2 A + H_V)_{hk} a_h a_k \cos(\alpha_h - \alpha_k) . \end{aligned}$$

Siccome poi, causa la simmetria della matrice $\omega^2 A + H_V$, risulta

$$\begin{aligned} & \sum_{h,k=1}^n (\omega^2 A + H_V)_{hk} a_h a_k \sin(\alpha_h - \alpha_k) = \sum_{k,h=1}^n (\omega^2 A + H_V)_{kh} a_k a_h \sin(\alpha_k - \alpha_h) = \\ &= - \sum_{k,h=1}^n (\omega^2 A + H_V)_{kh} a_k a_h \sin(\alpha_h - \alpha_k) = - \sum_{h,k=1}^n (\omega^2 A + H_V)_{hk} a_h a_k \sin(\alpha_h - \alpha_k) = 0 \end{aligned}$$

l'espressione finale può essere riscritta in forma complessa come

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{h,k=1}^n (\omega^2 A + H_V)_{hk} a_h a_k e^{-i\alpha_h} e^{i\alpha_k} = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{h,k=1}^n (\omega^2 A + H_V)_{hk} \tilde{a}_h^* \tilde{a}_k = \frac{1}{4} \tilde{a}^+ (\omega^2 A + H_V) \tilde{a} \end{aligned}$$

con \tilde{a} dato da (39.14). Pertanto:

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \frac{1}{4} [(-\omega^2 A + i\omega B + H_V)^{-1} \tilde{F}]^+ (\omega^2 A + H_V) (-\omega^2 A + i\omega B + H_V)^{-1} \tilde{F} = \\ &= \frac{1}{4} \tilde{F}^+ (-\omega^2 A - i\omega B^T + H_V)^{-1} (\omega^2 A + H_V) (-\omega^2 A + i\omega B + H_V)^{-1} \tilde{F} . \end{aligned}$$

Questa funzione dipende dai parametri caratteristici del sistema libero nell'intorno della soluzione statica $(q^0, 0)$, incorporati nelle matrici A , B , H_V , e dai parametri che caratterizzano la forzante F , ossia la pulsazione ω , le ampiezze f_h e le fasi ϕ_h :

$$\langle H \rangle = \langle H \rangle(A, B, H_V; \omega, f_1, \dots, f_n, \phi_1, \dots, \phi_n) .$$

Assegnate che siano ampiezze e fasi della forzante, $\langle H \rangle$ può riguardarsi come funzione della sola variabile reale ω ed assume valori strettamente positivi per qualsiasi valore della pulsazione. Grandi valori di $\langle H \rangle$ indicano che il sistema accumula, a regime, una grande

quantità di energia meccanica fornita dalla forzante esterna, mentre all'opposto piccoli valori di $\langle H \rangle$ si accompagnano ad un più ridotto accumulo di energia. Le pulsazioni di risonanza possono essere allora identificate con i massimi relativi propri di questa funzione $\omega \rightarrow \langle H \rangle(\omega)$, in corrispondenza dei quali piccole variazioni della pulsazione si traducono in una diminuzione dell'energia meccanica media accumulata nel sistema. Graficamente, le pulsazioni di risonanza sono dunque identificabili con i "picchi" della funzione $\omega \rightarrow \langle H \rangle(\omega)$. È importante sottolineare come, sulla base della precedente definizione, le pulsazioni di risonanza dipendano, in generale, dai coefficienti di ampiezza e di fase della forzante, circostanza questa che non si riscontra nel caso dell'oscillatore unidimensionale. Nondimeno, tale dipendenza risulta sovente molto debole e con buona approssimazione può essere trascurata. L'affermazione può essere meglio compresa riscrivendo convenientemente la relazione che definisce $\langle H \rangle$. A questo scopo si ricorda che se M^* indica la matrice degli aggiunti classici di una matrice quadrata M assegnata, vale $MM^* = \det M$ e, qualora M risulti invertibile, $M^{-1} = (\det M)^{-1}M^*$. Si ha allora

$$(-\omega^2 A + i\omega B + H_V)^{-1} = \frac{1}{\det(-\omega^2 A + i\omega B + H_V)} (-\omega^2 A + i\omega B + H_V)^*$$

e quindi

$$\begin{aligned} (-\omega^2 A - i\omega B^T + H_V)^{-1} &= \frac{1}{\det(-\omega^2 A - i\omega B^T + H_V)} (-\omega^2 A - i\omega B^T + H_V)^* = \\ &= \frac{1}{\det(-\omega^2 A - i\omega B + H_V)} (-\omega^2 A - i\omega B^T + H_V)^* \end{aligned}$$

per cui

$$\langle H \rangle = \frac{\tilde{F}^+ (-\omega^2 A - i\omega B^T + H_V)^* (\omega^2 A + H_V) (-\omega^2 A + i\omega B + H_V)^* \tilde{F}}{4 |\det(-\omega^2 A + H_V + i\omega B)|^2}. \quad (39.16)$$

La funzione a denominatore

$$Q(\omega) = 4 |\det(-\omega^2 A + H_V + i\omega B)|^2 = 4 \det(-\omega^2 A + H_V + i\omega B) \det(-\omega^2 A + H_V - i\omega B)$$

è un polinomio di grado $4n$ a coefficienti reali, in quanto prodotto di due polinomi caratteristici entrambi di grado $2n$, i coefficienti del primo risultando complessi coniugati di quelli del secondo. Il polinomio non ha zeri reali ed è anche una funzione pari in \mathbb{R}

$$Q(-\omega) = 4 |\det(-\omega^2 A + H_V - i\omega B)|^2 = 4 |\det(-\omega^2 A + H_V + i\omega B)|^2 = Q(\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

per cui i coefficienti dei termini di ordine dispari devono essere tutti nulli. La funzione $Q(\omega)$ può dunque riguardarsi come un polinomio di grado $2n$ in ω^2 . Essa viene determinata unicamente dalle matrici A , B , H_V , e non dipende dai parametri che caratterizzano la forzante sinusoidale F .

L'espressione a numeratore

$$P(\omega) = \tilde{F}^+ (-\omega^2 A - i\omega B^T + H_V)^* (\omega^2 A + H_V) (-\omega^2 A + i\omega B + H_V)^* \tilde{F}$$

si presenta a propria volta come un polinomio in ω a coefficienti reali, ma di grado $4n - 2$. Esso reca tutta la dipendenza di $\langle H \rangle$ dai parametri di ampiezza e di fase della forzante.

Per quanto già sottolineato in precedenza, entrambi i polinomi assumono valori strettamente positivi su tutta la retta reale ed il loro quoziente

$$\langle H \rangle = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}$$

tende a zero per $\omega \rightarrow \pm\infty$, visto che il grado di $Q(\omega)$ è maggiore di quello di $P(\omega)$.

I coefficienti del polinomio $Q(\omega)$ sono funzioni continue degli elementi di B per cui, se considerate nel piano complesso \mathbb{C} , le radici di $Q(\omega)$ devono variare con continuità in funzione di B ; in particolare le radici di $Q(\omega)$ per $B \sim 0$ non possono discostarsi molto da quelle dello stesso polinomio per $B = 0$. Ma in assenza di smorzamento — $B = 0$ — il polinomio $Q(\omega) = 4 [\det(-\omega^2 A + H_V)]^2$ presenta esattamente $2n$ radici reali doppie, congetturate con le rispettive molteplicità; di queste, n sono positive e coincidono banalmente con le pulsazioni normali delle piccole oscillazioni del sistema conservativo nell'intorno della soluzione statica stabile considerata, mentre le restanti n risultano opposte alle precedenti:

$$-\omega_n, \dots, -\omega_2, -\omega_1, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \quad \omega_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

L'introduzione di un piccolo termine di smorzamento rimuove, come già dimostrato, ogni radice reale del polinomio $Q(\omega)$; le $2n$ radici doppie del caso non smorzato vengono ora sostituite da $2n$ coppie di radici complesse coniugate, vicine alle pulsazioni normali delle piccole oscillazioni ed ai loro opposti. Sull'asse reale, in prossimità di queste radici, si localizzeranno i minimi relativi propri di $Q(\omega)$, i cui valori risulteranno a loro volta molto vicini a zero, ancorché strettamente positivi. Di conseguenza, per $B \sim 0$ la funzione

$$\frac{1}{Q(\omega)} = \frac{1}{4 |\det(-\omega^2 A + i\omega B + H_V)|^2}$$

sarà caratterizzata da al più $2n$ massimi relativi propri ed in corrispondenza di essi assumerà valori molto elevati. Questi intensi "picchi" della $1/Q(\omega)$ vengono per così dire "modulati" dal numeratore $P(\omega)$, che è un polinomio di grado inferiore: di norma i massimi relativi propri di $\langle H \rangle$ non ne risultano modificati in modo sensibile, sebbene i valori di $Q(\omega)$ e di $P(\omega)/Q(\omega)$ possano differire significativamente in un punto di massimo.

Si illustrano le considerazioni precedenti con un semplice esempio, considerando le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix} \quad H_V = \begin{pmatrix} 2.2 & -1.2 & 0 \\ -1.2 & 2.4 & -1.2 \\ 0 & -1.2 & 2.2 \end{pmatrix}$$

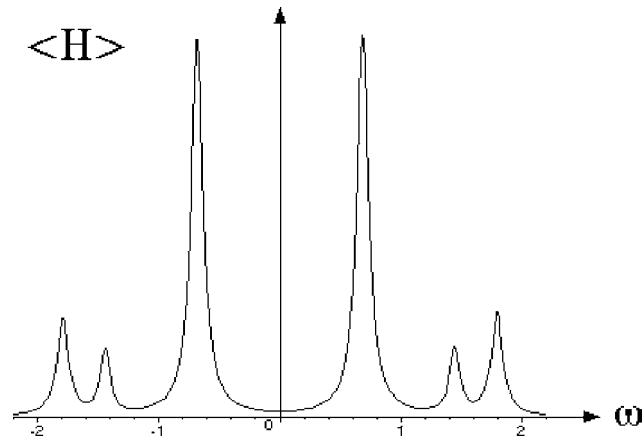
che soddisfano, come è immediato verificare, le ipotesi (i), (ii) e (iii). Per i seguenti valori di ampiezza e fase della forzante:

$$f_1 = 2 \quad f_2 = 2 \quad f_3 = 2 \quad \phi_1 = \pi/5 \quad \phi_2 = 1 \quad \phi_3 = 0 \quad (39.17)$$

l'energia media a regime è data dall'espressione

$$\begin{aligned} \langle H \rangle = & (0.27225 \omega^{12} - 3.1482875 \omega^{10} + 14.1381629 \omega^8 - 30.8403124 \omega^6 + \\ & + 33.2674736 \omega^4 - 15.9990464 \omega^2 + 2.78784)^{-1} \cdot \\ & \cdot (0.70125 \omega^{10} - 5.82361819 \omega^8 + 0.038820248 \omega^7 + 18.2235627 \omega^6 - \\ & - 0.176377392 \omega^5 - 23.0346493 \omega^4 + 0.205358970 \omega^3 + 3.05428152 \omega^2 + 11.9445406) \end{aligned}$$

e presenta 6 picchi di risonanza, come illustrato dal grafico seguente:



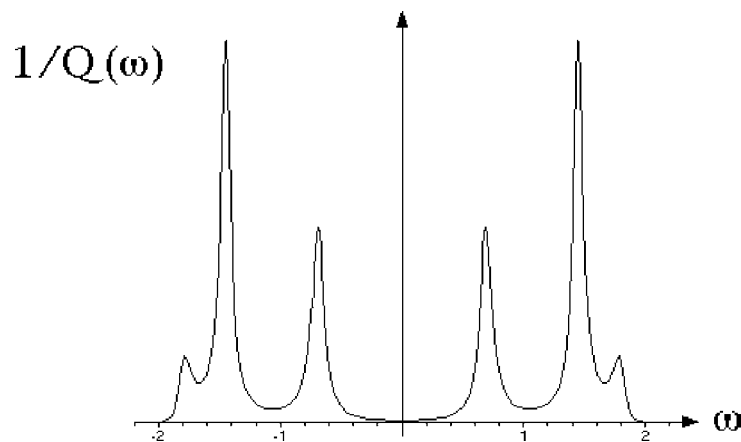
Per le pulsazioni di risonanza, massimi relativi propri di $\langle H \rangle$, non è possibile ottenere una espressione esplicita, ma una semplice indagine numerica porge i valori:

$$\begin{aligned} & 0.685134299, \quad 1.44581932, \quad 1.79735307, \\ & -0.685073381, \quad -1.44601108, \quad -1.79744576, \end{aligned} \tag{39.18}$$

Per contro, i massimi relativi propri della funzione

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q(\omega)} = & (0.27225 \omega^{12} - 3.1482875 \omega^{10} + 14.1381629 \omega^8 - 30.8403124 \omega^6 + \\ & + 33.2674736 \omega^4 - 15.9990464 \omega^2 + 2.78784)^{-1} \end{aligned}$$

il cui grafico è illustrato nella figura sottoriportata



si stimano numericamente come:

$$\begin{aligned} &0.687226539, \quad 1.44657338, \quad 1.78130864 \\ &-0.687226539, \quad -1.44657338, \quad -1.78130864, \end{aligned}$$

e risultano due a due opposti in segno, come deve aversi in virtù del fatto che P è un polinomio pari. Tali massimi di fatto sono in numero di 3 e non dipendono dai parametri della forzante. Nondimeno, essi assumono valori molto prossimi alle pulsazioni di risonanza (39.18), che all'opposto sono in numero di 6, tutte distinte e dipendenti dalla scelta dei parametri della forzante. Questa osservazione potrebbe suggerire, almeno nel limite di smorzamento debole ($B \sim 0$) — di definire le pulsazioni di risonanza come i massimi relativi propri della $1/Q(\omega)$, in modo che la definizione sia indipendente dai parametri della forzante applicata al sistema. In tal caso è facile dimostrare che il numero massimo di pulsazioni di risonanza — positive — coincide con il numero n di gradi di libertà del sistema.

Se lo smorzamento B non è piccolo, tuttavia, l'approssimazione precedente in generale perde di validità. Se ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad H_V = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

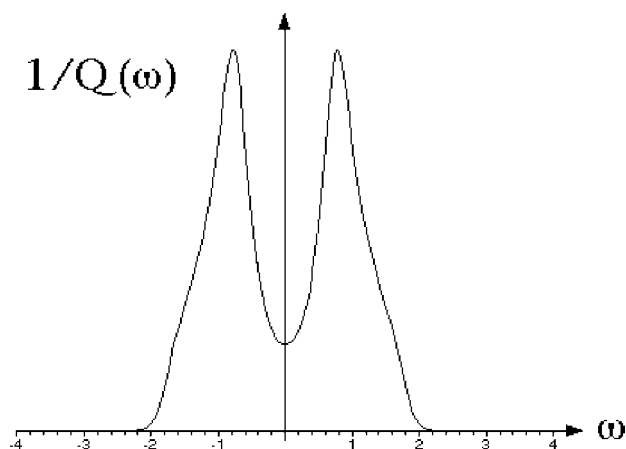
si ottiene la funzione

$$\frac{1}{Q(\omega)} = \frac{1}{4} \frac{1}{\omega^{12} - 9.99\omega^{10} + 40.94\omega^8 - 87.43\omega^6 + 102.56\omega^4 - 58.24\omega^2 + 16}$$

i cui massimi relativi propri sono in numero di due soltanto

$$-0.779920760 \quad 0.779920760,$$

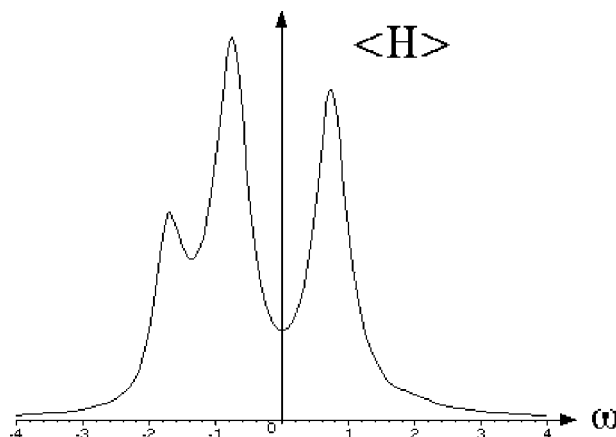
come confermato dal grafico corrispondente:



Con gli stessi valori (39.17) dei parametri della forzante si ha però

$$\langle H \rangle = (\omega^{12} - 9.99\omega^{10} + 40.94\omega^8 - 87.43\omega^6 + 102.56\omega^4 - 58.24\omega^2 + 16)^{-1} \cdot (3\omega^{10} - 22.8121217\omega^8 - 4.33675290\omega^7 + 71.0482934\omega^6 + 13.0102587\omega^5 - 90.1197972\omega^4 - 17.3470116\omega^3 + 21.5198479\omega^2 + 70.0244606)$$

cui corrispondono il grafico



e le pulsazioni di risonanza

$$-1.70351995, \quad -0.758324829 \quad 0.732932055,$$

che sono in numero di **tre**. I massimi relativi propri di $1/Q(\omega)$ non forniscono dunque una approssimazione adeguata per lo spettro delle pulsazioni di risonanza del sistema forzato; in particolare, non esiste alcun massimo relativo proprio di $1/Q(\omega)$ che approssimi la pulsazione di risonanza -1.70351995 .

Come ultima osservazione, è importante sottolineare che il grafico di $\langle H \rangle$ non soltanto consente di individuare le pulsazioni di risonanza del sistema forzato, ma permette altresì di “pesare” le risonanze. A picchi di risonanza più alti corrispondono infatti stati risonanti del sistema caratterizzati da una più elevata energia media per periodo di oscillazione, mentre i picchi meno pronunciati devono intendersi associati a risonanze “deboli”, con energia media per periodo più piccola.

40. Appendice.

Effetto stabilizzante delle forze di Coriolis in un sistema a due gradi di libertà

Si vuole analizzare l'effetto delle forze di Coriolis su un sistema meccanico costituito da un punto materiale vincolato a muoversi nel piano coordinato Oxy e soggetto a sollecitazioni posizionali conservative di potenziale U . A questo scopo, si consideri un punto materiale di massa unitaria P , vincolato a restare nel piano coordinato Oxy di una terna di riferimento cartesiana ortogonale $Oxyz$. Si assuma il punto soggetto ad un sistema di sollecitazioni posizionali conservative complessivamente descritte dalla funzione potenziale

$$U : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow U(x, y) \in \mathbb{R} ,$$

di classe C^2 in \mathbb{R}^2 . In tale ipotesi, se il sistema di riferimento $Oxyz$ è inerziale, le equazioni del moto del punto materiale si scrivono

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) \\ \ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) \end{cases}$$

ed il sistema ha natura posizionale e conservativa. Le configurazioni di equilibrio si identificano con i punti critici del potenziale e sono quindi tutte e sole le soluzioni del sistema di equazioni

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = 0 .$$

Le proprietà di stabilità di una generica configurazione di equilibrio $(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$ possono essere discusse ricorrendo ai teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale. A questo scopo conviene, al solito, determinare la matrice hessiana del potenziale nella configurazione di equilibrio:

$$H_U(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{xx} & H_{yx} \\ H_{xy} & H_{yy} \end{pmatrix}$$

e calcolarne gli autovalori λ_1, λ_2 , soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$\det(H_U(\bar{x}, \bar{y}) - \lambda \mathbb{I}) = \begin{vmatrix} H_{xx} - \lambda & H_{yx} \\ H_{xy} & H_{yy} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (H_{xx} + H_{yy})\lambda + H_{xx}H_{yy} - H_{xy}H_{yx} = 0$$

in modo che:

- (i) se $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$, la configurazione (\bar{x}, \bar{y}) costituisce un massimo relativo proprio del potenziale e risulta quindi stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet;

(ii) se $\lambda_1 > 0$ oppure $\lambda_2 > 0$, la configurazione è instabile per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet, in quanto l'esame dell'hessiana consente di escludere la presenza in (\bar{x}, \bar{y}) di un massimo relativo proprio del potenziale U .

Si supponga ora che il sistema di riferimento $Oxyz$ ruoti con velocità angolare costante di modulo ω attorno all'asse Oz rispetto ad una terna di riferimento inerziale. La terna $Oxyz$ è quindi sede di forze fittizie, centrifughe e di Coriolis. Il campo delle forze centrifughe è notoriamente posizionale e conservativo, e si può includere il relativo potenziale — C^∞ — nell'espressione del potenziale U . Con quest'unica modifica, la procedura per il calcolo delle configurazioni di equilibrio relativo alla terna $Oxyz$ non cambia rispetto a quanto discusso in precedenza, dal momento che la forza di Coriolis ha componenti nulle all'annullarsi della velocità del punto materiale cui è applicata. La forza di Coriolis agente sul punto materiale di massa unitaria è data infatti dall'espressione

$$\vec{F}_{Cor} = -2\vec{\omega} \wedge \dot{\vec{x}} = -2\omega \hat{e}_3 \wedge (\dot{x} \hat{e}_1 + \dot{y} \hat{e}_2) = -2\omega(\dot{x} \hat{e}_2 - \dot{y} \hat{e}_1) = 2\omega \dot{y} \hat{e}_1 - 2\omega \dot{x} \hat{e}_2 .$$

Si assuma dunque di aver rideterminato tutte le configurazioni di equilibrio in presenza delle sollecitazioni d'inerzia e ricalcolato hessiana e relativi autovalori del nuovo potenziale, comprensivo del termine centrifugo. L'analisi delle proprietà di stabilità della configurazione di equilibrio (\bar{x}, \bar{y}) è ora più complessa, in quanto le sollecitazioni di Coriolis sono non energetiche ed il sistema, benché ancora conservativo, non ha carattere posizionale. Se da un lato il teorema di Lagrange-Dirichlet continua ad essere applicabile, non è più dato valersi della sua inversione parziale, valida soltanto nel caso posizionale conservativo (o, nella versione alternativa tratta dai teoremi di Barbasin-Krasovskii, in presenza di sollecitazioni posizionali conservative e completamente dissipative).

L'unico modo per affrontare il problema rimane quindi quello di applicare il teorema di stabilità per linearizzazione, partendo dalle equazioni del moto. Scelte le coordinate cartesiane x ed y come parametri lagrangiani, le equazioni del moto del punto P risultano

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + 2\omega \dot{y} \\ \ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) - 2\omega \dot{x} \end{cases}$$

e con le sostituzioni

$$\dot{x} = u \quad \dot{y} = v$$

si riducono alla forma normale del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + 2\omega v \\ \dot{v} = \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) - 2\omega u \\ \dot{x} = u \\ \dot{y} = v . \end{cases}$$

L'analisi di stabilità richiede ora la linearizzazione delle precedenti equazioni nell'intorno della configurazione di equilibrio $(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$, o meglio del punto $(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (\bar{x}, \bar{y}, 0, 0)$

che costituisce l'orbita della soluzione statica corrispondente. Posto $x = \bar{x} + \xi$ e $y = \bar{y} + \eta$, con una approssimazione di Taylor troncata al primo ordine nel punto iniziale $(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$ delle due derivate parziali, si ottiene l'equazione linearizzata

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y}) \xi + \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \eta + 2\omega v \\ \dot{v} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \xi + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y}) \eta - 2\omega u \\ \dot{x} = u \\ \dot{y} = v \end{cases}$$

equivalente all'equazione differenziale in forma matriciale

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\omega & H_{xx} & H_{yx} \\ -2\omega & 0 & H_{xy} & H_{yy} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u \\ v \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

in cui ovviamente $H_{xy} = H_{yx}$ per il teorema di Schwarz.

Lo studio della stabilità delle configurazioni di equilibrio richiede la determinazione dello spettro completo della matrice B , di cui si calcola nel seguito il polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda \mathbb{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 2\omega & H_{xx} & H_{yx} \\ -2\omega & -\lambda & H_{xy} & H_{yy} \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & H_{xx} & H_{yx} \\ -2\omega & H_{xy} & H_{yy} \\ 1 & -\lambda & 0 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 2\omega & H_{xx} \\ -2\omega & -\lambda & H_{xy} \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -\lambda^2 H_{yy} + H_{xx} H_{yy} + H_{xy} (2\omega \lambda - H_{xy}) - \lambda [-\lambda^3 + 2\omega (H_{xy} - 2\omega \lambda) + H_{xx} \lambda] = \\ &= \lambda^4 + (4\omega^2 - H_{xx} - H_{yy}) \lambda^2 + H_{xx} H_{yy} - H_{xy}^2 . \end{aligned}$$

Gli autovalori di B sono quindi tutte e sole le soluzioni in λ dell'equazione biquadratica

$$\lambda^4 + (4\omega^2 - H_{xx} - H_{yy}) \lambda^2 + H_{xx} H_{yy} - H_{xy}^2 = 0 . \quad (40.1)$$

Tuttavia, se λ_1 e λ_2 sono gli autovalori reali della matrice hessiana del potenziale in (\bar{x}, \bar{y}) , si ha che

$$H_{xx} + H_{yy} = \lambda_1 + \lambda_2 \quad H_{xx} H_{yy} - H_{xy}^2 = \lambda_1 \lambda_2$$

per cui la (40.1) equivale a

$$\lambda^4 + (4\omega^2 - \lambda_1 - \lambda_2) \lambda^2 + \lambda_1 \lambda_2 = 0 , \quad (40.2)$$

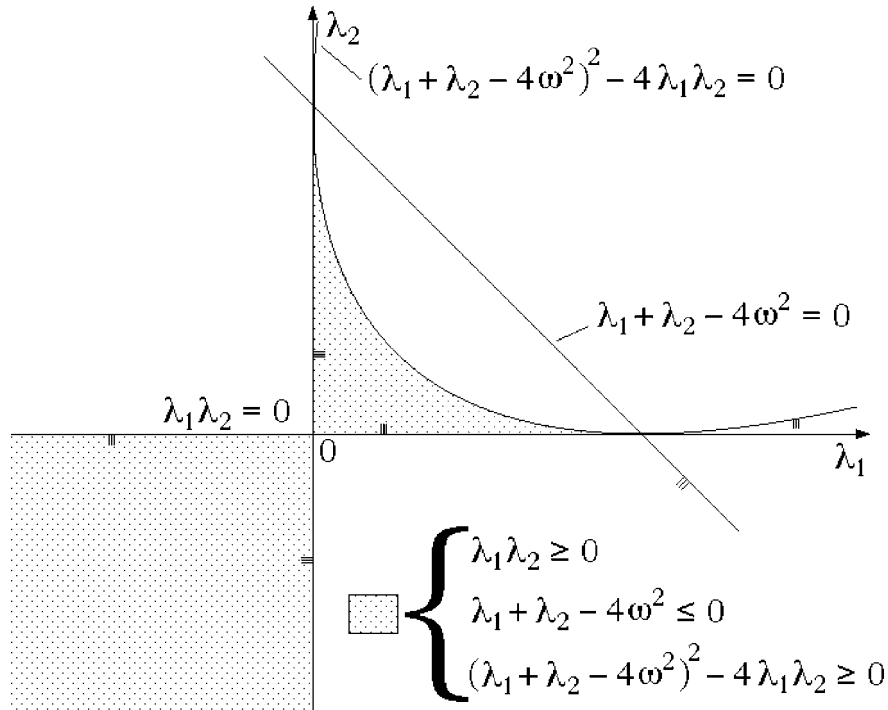
con soluzioni in λ^2 :

$$\lambda_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[\lambda_1 + \lambda_2 - 4\omega^2 \pm \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2 - 4\omega^2)^2 - 4\lambda_1 \lambda_2} \right] .$$

Per il teorema di linearizzazione si può avere stabilità solo se $\lambda_+^2, \lambda_-^2 \leq 0$, ossia:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 4\omega^2 \leq 0 \\ (\lambda_1 + \lambda_2 - 4\omega^2)^2 - 4\lambda_1\lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_1\lambda_2 \geq 0 \end{cases} \quad (40.3)$$

La regione di validità delle (40.3) nello spazio degli autovalori λ_1, λ_2 è rappresentata graficamente nella figura seguente.



La stabilità è assicurata per $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, allorché (\bar{x}, \bar{y}) risulta un massimo relativo proprio del potenziale U , stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

Nei casi residui si può soltanto parlare di stabilità lineare (gli autovalori di B sono immaginari puri, ma (\bar{x}, \bar{y}) non è in generale massimo relativo proprio di U e ad esso non si può comunque applicare l'inversione parziale di Lagrange-Dirichlet). Da un rapido esame del grafico si riconosce facilmente che la regione di stabilità lineare aumenta di estensione al crescere di $|\omega|$, come è ragionevole attendersi.

Notevole il fatto che alcune configurazioni con $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$, instabili nel caso posizionale conservativo, possono venire stabilizzate dalle sollecitazioni di Coriolis.

Si osservi inoltre che nei punti di sella del potenziale, per i quali $\lambda_1\lambda_2 < 0$, l'ultima delle (40.3) non è mai soddisfatta e su di essi le sollecitazioni di Coriolis non possono perciò esercitare alcuna azione stabilizzante.

41. Appendice.

Effetto stabilizzante delle forze di Coriolis nel problema dei tre corpi ristretto

Un esempio notevole di come le sollecitazioni girostatiche possano stabilizzare configurazioni di equilibrio altrimenti instabili è offerto dal cosiddetto *problema dei tre corpi ristretto* in meccanica celeste, relativamente a particolari configurazioni di equilibrio note come *punti lagrangiani triangolari*.

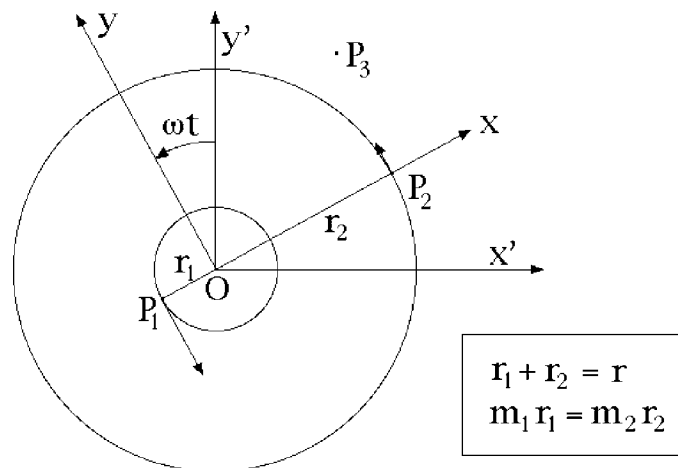
41.1 Il problema

Un classico problema della meccanica celeste è quello cosiddetto **dei tre corpi**, consistente nel determinare la dinamica di tre punti materiali P_1 , P_2 , P_3 soggetti alle mutue interazioni gravitazionali. L'estrema complessità del problema — e la non integrabilità delle relative equazioni del moto — inducono a considerare casi particolari, di notevole interesse astronomico. Nel più famoso di questi, il **problema dei tre corpi ristretto**, si assume che le masse m_1 ed m_2 dei corpi interagenti P_1 e P_2 siano molto grandi rispetto a quella del terzo, il quale quindi si potrà ritenere soggetto all'azione gravitazionale dei primi due senza tuttavia alterarne sensibilmente il moto. Come ulteriore semplificazione, viene inoltre ipotizzato che i due corpi principali gravitino attorno al comune centro di massa O lungo orbite circolari, percorse con velocità costante. Si postula infine che le condizioni iniziali del “terzo corpo” P_3 siano assegnate in modo tale per cui il moto di questo avvenga nel piano orbitale dei corpi principali — dal teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni massimali del problema di Cauchy per un sistema di equazioni differenziali in forma normale si deduce facilmente che dette condizioni iniziali debbono essere assegnate in modo che la posizione iniziale del terzo corpo giaccia sul piano orbitale dei due corpi principali e che la velocità iniziale sia parallela a tale piano. È evidente dalla struttura delle equazioni del moto che la massa di P_3 può assumersi unitaria, senza alcuna perdita di generalità.

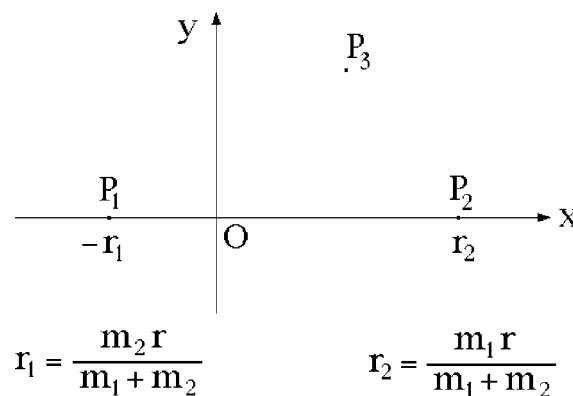
Rispetto ad una terna inerziale $Ox'y'z'$ con origine nel centro di massa O e piano coordinato $Ox'y'$ coincidente con quello orbitale, i corpi principali P_1 e P_2 percorrono le loro orbite circolari mantenendosi in posizioni diametralmente opposte rispetto a O e con velocità angolare costante, di modulo:

$$\omega = \sqrt{G(m_1 + m_2)/r^3},$$

essendo r la distanza costante $|P_2 - P_1|$. Il moto del punto P_3 ha luogo nel campo gravitazionale **non stazionario** in tal modo generato da P_1 e P_2 . Il primo passo per tentare una descrizione qualitativa del moto di P_3 consiste proprio nel rimuovere la dipendenza dal tempo del campo gravitazionale mediante un opportuno cambiamento di coordinate, introducendo una terna di riferimento $Oxyz$ con l'origine in O , i piani Oxy ed $Ox'y'$ coincidenti e l'asse Ox passante per P_1 e P_2 — si veda la figura seguente.



Rispetto ad essa le posizioni di P_1 e P_2 risultano costanti nel tempo, al pari del campo gravitazionale totale prodotto dai due corpi principali; precisamente, P_1 si colloca nel punto dell'asse Ox di ascissa $-m_2 r / (m_1 + m_2)$, mentre l'ascissa di P_2 sarà $m_1 r / (m_1 + m_2)$.



Tuttavia, $Oxyz$ ruota con velocità angolare costante ω attorno all'asse $Oz = Oz'$ e rappresenta quindi una terna di riferimento non inerziale, in cui il punto P_3 risentirà oltre che delle forze reali gravitazionali anche di quella centrifuga e delle forze di Coriolis. Le forze centrifughe non comportano grossi problemi, avendo natura posizionale conservativa al pari delle sollecitazioni gravitazionali. Meritano particolare attenzione, viceversa, le forze di Coriolis che, per un punto materiale di massa unitaria, sono date dall'espressione:

$$\vec{F}_{Cor} = -2\vec{\omega} \wedge \dot{\vec{x}} = -2\omega \hat{e}_3 \wedge (\dot{x} \hat{e}_1 + \dot{y} \hat{e}_2) = -2\omega(\dot{x} \hat{e}_2 - \dot{y} \hat{e}_1) = 2\omega \dot{y} \hat{e}_1 - 2\omega \dot{x} \hat{e}_2 .$$

Le equazioni del moto del punto P_3 nella terna di riferimento $Oxyz$ si scriveranno quindi

nella forma

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + 2\omega\dot{y} \\ \ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) - 2\omega\dot{x} \end{cases} \quad \omega^2 = G(m_1 + m_2)/r^3 \quad (41.1)$$

con il potenziale totale dato dalla somma del potenziale centrifugo e dei potenziali gravitazionali dovuti alle due masse m_1, m_2 :

$$U(x, y) = \frac{G(m_1 + m_2)}{2r^3}(x^2 + y^2) + \frac{Gm_1}{\sqrt{\left(x + \frac{m_2 r}{m_1 + m_2}\right)^2 + y^2}} + \frac{Gm_2}{\sqrt{\left(x - \frac{m_1 r}{m_1 + m_2}\right)^2 + y^2}}.$$

Una volta ricavate le equazioni del moto di P_3 , (41.1), il primo problema che sorge spontaneo affrontare è al solito quello di determinare le eventuali soluzioni statiche e di analizzarne le proprietà di stabilità. Rispetto alla terna inerziale $Ox'y'z'$ queste soluzioni statiche si interpretano come moti di rotazione uniforme di P_3 lungo orbite circolari, moti per i quali l'intero sistema dei punti P_1, P_2, P_3 ruota rigidamente con velocità angolare ω attorno al centro di massa O . Lo studio di stabilità risulta poi cruciale ai fini della effettiva realizzabilità pratica di queste speciali soluzioni.

41.2 Equazioni del moto adimensionali

Posto $x = rX, y = rY$ e $\mathcal{U}(X, Y) = U(rX, rY)$, dalle (41.1) si ottiene

$$\begin{cases} r\ddot{X} = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial X}(rX, rY) + 2\omega r\dot{Y} \\ r\ddot{Y} = \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial Y}(rX, rY) - 2\omega r\dot{X} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} \ddot{X} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X}(X, Y) + 2\omega\dot{Y} \\ \ddot{Y} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial Y}(X, Y) - 2\omega\dot{X} \end{cases} \quad \omega^2 = G(m_1 + m_2)/r^3$$

dove il potenziale assume ora la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(X, Y) &= \frac{G}{r} \left\{ \frac{(m_1 + m_2)}{2}(X^2 + Y^2) + \right. \\ &\quad \left. + m_1 \left[\left(X + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 + Y^2 \right]^{-1/2} + m_2 \left[\left(X - \frac{m_1 r}{m_1 + m_2} \right)^2 + Y^2 \right]^{-1/2} \right\} = \\ &= \frac{G(m_1 + m_2)}{r} \left[\frac{X^2 + Y^2}{2} + \frac{\mu}{\sqrt{(X + 1 - \mu)^2 + Y^2}} + \frac{1 - \mu}{\sqrt{(X - \mu)^2 + Y^2}} \right] \end{aligned}$$

essendo $\mu = m_1/(m_1 + m_2)$. L'ulteriore sostituzione $t = \tau/\omega$ porge

$$\ddot{X} = \omega^2 \frac{d^2 X}{d\tau^2}, \quad \dot{X} = \omega \frac{dX}{d\tau} \quad \ddot{Y} = \omega^2 \frac{d^2 Y}{d\tau^2}, \quad \dot{Y} = \omega \frac{dY}{d\tau},$$

per cui le equazioni del moto adimensionalizzate diventano:

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{d\tau^2} = \frac{1}{\omega^2 r^2} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X}(X, Y) + 2 \frac{dY}{d\tau} \\ \frac{d^2 Y}{d\tau^2} = \frac{1}{\omega^2 r^2} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial Y}(X, Y) - 2 \frac{dX}{d\tau} \end{cases}$$

con

$$\frac{1}{\omega^2 r^2} \mathcal{U}(X, Y) = \frac{X^2 + Y^2}{2} + \frac{\mu}{\sqrt{(X + 1 - \mu)^2 + Y^2}} + \frac{1 - \mu}{\sqrt{(X - \mu)^2 + Y^2}}.$$

Non rimane che porre $\mathbb{U}(X, Y) = \frac{1}{\omega^2 r^2} \mathcal{U}(X, Y)$ per ottenere la forma finale adimensionalizzata delle equazioni del moto:

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{d\tau^2} = \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial X}(X, Y) + 2 \frac{dY}{d\tau} \\ \frac{d^2 Y}{d\tau^2} = \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial Y}(X, Y) - 2 \frac{dX}{d\tau} \end{cases} \quad (41.2)$$

in cui il potenziale adimensionale

$$\mathbb{U}(X, Y) = \frac{X^2 + Y^2}{2} + \frac{\mu}{\sqrt{(X + 1 - \mu)^2 + Y^2}} + \frac{1 - \mu}{\sqrt{(X - \mu)^2 + Y^2}}$$

dipende dalle variabili spaziali adimensionali (X, Y) e dall'unico parametro $\mu = m_1/(m_1 + m_2)$. Si conclude che le configurazioni di equilibrio relativo del sistema e le relative proprietà di stabilità sono determinate unicamente dal parametro $\mu \in (0, 1)$. Evidenti proprietà di simmetria delle equazioni del moto consentono di limitare l'analisi ai valori del parametro compresi nell'intervallo $[1/2, 1)$. Basta infatti osservare che il potenziale \mathbb{U} è invariante sotto la sostituzione

$$\mu \longrightarrow 1 - \mu \quad X \longrightarrow -X \quad Y \longrightarrow -Y$$

e che di conseguenza le equazioni (41.2) sono a loro volta invarianti sotto la stessa sostituzione; la dinamica del sistema con $\mu < 1/2$ è sempre banalmente coniugata a quella dello stesso sistema con parametro $1 - \mu > 1/2$ — si tratta di una semplice inversione spaziale $(X, Y) \rightarrow (-X, -Y)$.

41.3 Configurazioni di equilibrio relativo nella terna O_{xyz}

Le configurazioni di equilibrio relativo si hanno in corrispondenza dei punti critici del potenziale, in quanto all'equilibrio le sollecitazioni di Coriolis presentano tutte le componenti nulle. Si tratta allora di risolvere le equazioni

$$\frac{\partial U}{\partial X}(X, Y) = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial Y}(X, Y) = 0. \quad (41.3)$$

Si osservi tuttavia che la discussione delle proprietà di stabilità di queste configurazioni può essere condotta applicando il teorema di Lagrange-Dirichlet, **ma non la sua inversione parziale** a causa delle sollecitazioni di Coriolis, le cui componenti lagrangiane non sono identicamente nulle e debbono perciò essere prese in considerazione. Si tratta notoriamente di sollecitazioni non energetiche, in presenza delle quali i punti di massimo relativo proprio del potenziale risultano comunque stabili per Lagrange-Dirichlet. I problemi sorgono per i punti del potenziale che non siano di massimo relativo proprio, laddove l'inversione parziale di Lagrange-Dirichlet non è di alcuna utilità. L'unica speranza è allora quella di ricorrere al teorema di stabilità per linearizzazione. Si vedrà nel seguito che nessuna delle configurazioni di equilibrio del sistema corrisponde ad un massimo relativo proprio del potenziale. Si rende così necessario il calcolo degli autovalori di B , matrice rappresentativa delle equazioni del moto linearizzate nell'intorno della configurazione di equilibrio e ricondotte al primo ordine mediante le usuali variabili ausiliarie.

41.4 Equazioni del moto linearizzate nell'intorno di una configurazione di equilibrio — soluzione statica. Analisi di stabilità

Sia $(X, Y) = (\bar{X}, \bar{Y})$ una qualsiasi configurazione di equilibrio relativo del sistema. Le equazioni del moto linearizzate nell'intorno della configurazione (\bar{X}, \bar{Y}) si ottengono ponendo $X = \bar{X} + \xi$, $Y = \bar{Y} + \eta$ nelle (41.2), approssimando i secondi membri con un polinomio di Taylor al primo ordine nelle variabili $(\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta})$ con punto iniziale $(\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}) = (0, 0, 0, 0)$ e trascurando il resto — ossia i termini di ordine superiore al primo:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}(\bar{X}, \bar{Y}) \xi + \frac{\partial^2 U}{\partial Y \partial X}(\bar{X}, \bar{Y}) \eta + 2 \frac{d\eta}{d\tau} \\ \frac{d^2 \eta}{d\tau^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y}(\bar{X}, \bar{Y}) \xi + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}(\bar{X}, \bar{Y}) \eta - 2 \frac{d\xi}{d\tau} \end{cases}.$$

Per brevità, con ovvio significato dei simboli, si riscrive il sistema precedente nella forma

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = H_{XX} \xi + H_{YX} \eta + 2 \dot{\eta} \\ \ddot{\eta} = H_{XY} \xi + H_{YY} \eta - 2 \dot{\xi} \end{cases}$$

che, posto $\dot{\xi} = u$, $\dot{\eta} = v$, diventa

$$\begin{cases} \dot{u} = H_{XX} \xi + H_{YX} \eta + 2v \\ \dot{v} = H_{XY} \xi + H_{YY} \eta - 2u \\ \dot{\xi} = u \\ \dot{\eta} = v \end{cases}$$

equivalente all'equazione matriciale

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & H_{XX} & H_{YX} \\ -2 & 0 & H_{XY} & H_{YY} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u \\ v \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

in cui ovviamente $H_{XY} = H_{YX}$ per il teorema di Schwarz. Lo studio della stabilità delle configurazioni di equilibrio richiede la determinazione dello spettro completo di B , di cui si calcola nel seguito il polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda \mathbb{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & H_{XX} & H_{YX} \\ -2 & -\lambda & H_{XY} & H_{YY} \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & H_{XX} & H_{YX} \\ -2 & H_{XY} & H_{YY} \\ 1 & -\lambda & 0 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & H_{XX} \\ -2 & -\lambda & H_{XY} \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -\lambda^2 H_{YY} + H_{XX} H_{YY} + H_{XY} (2\lambda - H_{XY}) - \lambda [-\lambda^3 + 2(H_{XY} - 2\lambda) + H_{XX} \lambda] = \\ &= \lambda^4 + (4 - H_{XX} - H_{YY}) \lambda^2 + H_{XX} H_{YY} - H_{XY}^2. \end{aligned}$$

Gli autovalori di B sono quindi tutte e sole le soluzioni in λ dell'equazione biquadratica

$$\lambda^4 + (4 - H_{XX} - H_{YY}) \lambda^2 + H_{XX} H_{YY} - H_{XY}^2 = 0. \quad (41.4)$$

La presenza anche di un solo autovalore con parte reale positiva implicherà l'instabilità della configurazione, mentre si avrà stabilità asintotica qualora tutti gli autovalori abbiano parte reale negativa. È immediato verificare che quest'ultima condizione non può in realtà mai ricorrere.

41.5 Calcolo delle configurazioni di equilibrio relativo

Per determinare le configurazioni di equilibrio occorre e basta risolvere le equazioni (41.3).

Si scrivono esplicitamente le espressioni per le derivate parziali prime del potenziale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X}(X, Y) &= X - \frac{\mu(X + 1 - \mu)}{[(X + 1 - \mu)^2 + Y^2]^{3/2}} - \frac{(1 - \mu)(X - \mu)}{[(X - \mu)^2 + Y^2]^{3/2}} \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial Y}(X, Y) &= Y \left[1 - \frac{\mu}{[(X + 1 - \mu)^2 + Y^2]^{3/2}} - \frac{1 - \mu}{[(X - \mu)^2 + Y^2]^{3/2}} \right] \end{aligned} \quad (41.5)$$

e se ne deducono le equazioni per le configurazioni di equilibrio

$$\begin{cases} X - \frac{\mu(X + 1 - \mu)}{[(X + 1 - \mu)^2 + Y^2]^{3/2}} - \frac{(1 - \mu)(X - \mu)}{[(X - \mu)^2 + Y^2]^{3/2}} = 0 \\ Y \left[1 - \frac{\mu}{[(X + 1 - \mu)^2 + Y^2]^{3/2}} - \frac{1 - \mu}{[(X - \mu)^2 + Y^2]^{3/2}} \right] = 0. \end{cases} \quad (41.6)$$

La forma fattorizzata della seconda equazione (41.6) consente di distinguere due casi, imponendo l'annullarsi del primo o del secondo fattore. Una prima possibilità consiste nell'assumere

$$1 - \frac{\mu}{[(X+1-\mu)^2 + Y^2]^{3/2}} - \frac{1-\mu}{[(X-\mu)^2 + Y^2]^{3/2}} = 0$$

per cui il sistema (41.6) diviene

$$\begin{cases} X - \frac{\mu(X+1-\mu)}{[(X+1-\mu)^2 + Y^2]^{3/2}} - \frac{(1-\mu)(X-\mu)}{[(X-\mu)^2 + Y^2]^{3/2}} = 0 \\ 1 - \frac{\mu}{[(X+1-\mu)^2 + Y^2]^{3/2}} - \frac{1-\mu}{[(X-\mu)^2 + Y^2]^{3/2}} = 0. \end{cases} \quad (41.7)$$

Una sostituzione della seconda equazione nella prima consente di semplificare il sistema (41.7)

$$\begin{cases} -\frac{\mu(1-\mu)}{[(X+1-\mu)^2 + Y^2]^{3/2}} + \frac{(1-\mu)\mu}{[(X-\mu)^2 + Y^2]^{3/2}} = 0 \\ 1 - \frac{\mu}{[(X+1-\mu)^2 + Y^2]^{3/2}} - \frac{1-\mu}{[(X-\mu)^2 + Y^2]^{3/2}} = 0 \end{cases}$$

ovvero di scrivere il nuovo sistema di equazioni

$$\begin{cases} -\frac{1}{[(X+1-\mu)^2 + Y^2]^{3/2}} + \frac{1}{[(X-\mu)^2 + Y^2]^{3/2}} = 0 \\ 1 - \frac{\mu}{[(X+1-\mu)^2 + Y^2]^{3/2}} - \frac{1-\mu}{[(X-\mu)^2 + Y^2]^{3/2}} = 0 \end{cases}$$

la prima delle quali porge

$$\frac{1}{[(X-\mu)^2 + Y^2]^{3/2}} = \frac{1}{[(X+1-\mu)^2 + Y^2]^{3/2}}$$

cosicché dalla seconda si deduce

$$\frac{1}{[(X-\mu)^2 + Y^2]^{3/2}} = \frac{1}{[(X+1-\mu)^2 + Y^2]^{3/2}} = 1. \quad (41.8)$$

Queste ultime relazioni equivalgono al sistema algebrico

$$\begin{cases} (X+1-\mu)^2 + Y^2 = 1 \\ (X-\mu)^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \quad (41.9)$$

che per sottrazione membro a membro della seconda equazione dalla prima conduce all'equazione di primo grado in X

$$(X+1-\mu)^2 - (X-\mu)^2 = 2X+1-2\mu = 0$$

per cui

$$X = \mu - \frac{1}{2}. \quad (41.10)$$

Si può infine sostituire il risultato ottenuto nella prima delle (41.9) per ottenere

$$Y^2 = 1 - \left(\mu - \frac{1}{2} - \mu\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

e quindi $Y = \pm\sqrt{3}/2$. In conclusione, si perviene alla coppia di configurazioni di equilibrio:

$$(X, Y) = \left(\mu - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \left(\mu - \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \quad (41.11)$$

È immediato verificare che nell'ipotesi di μ prossimo a 0 o 1 — la massa m_1 è rispettivamente molto più piccola o molto più grande di m_2 — le configurazioni di equilibrio (41.11) si collocano approssimativamente sull'orbita del corpo di minore massa, a precedere ed a seguire quest'ultimo secondo un angolo di $\pi/3$ radianti misurato nel centro di massa. Di qui il nome di **configurazioni triangolari** con il quale vengono abitualmente designate le configurazioni di equilibrio relativo appena determinate.

Il secondo insieme di soluzioni del sistema (41.6) si ottiene soddisfacendo identicamente la seconda equazione con $Y = 0$:

$$\begin{cases} X - \frac{\mu(X+1-\mu)}{[(X+1-\mu)^2 + Y^2]^{3/2}} - \frac{(1-\mu)(X-\mu)}{[(X-\mu)^2 + Y^2]^{3/2}} = 0 \\ Y = 0 \end{cases} \quad (41.12)$$

e quindi risolvendo l'equazione in X

$$X - \frac{\mu(X+1-\mu)}{|X+1-\mu|^3} - \frac{(1-\mu)(X-\mu)}{|X-\mu|^3} = 0. \quad (41.13)$$

Si dimostra che l'equazione precedente ammette esattamente tre soluzioni reali. A questo scopo conviene distinguere tre casi, allo scopo di rimuovere i valori assoluti a denominatore.

(i) Si assuma $X > \mu$. In tale ipotesi valgono le disequaglianze

$$X + 1 - \mu > 1 > 0 \quad \text{e} \quad X - \mu > 0$$

per cui i valori assoluti nella (41.13) si possono eliminare, porgendo

$$X - \frac{\mu(X+1-\mu)}{(X+1-\mu)^3} - \frac{(1-\mu)(X-\mu)}{(X-\mu)^3} = 0 \quad \iff \quad X - \frac{\mu}{(X+1-\mu)^2} - \frac{1-\mu}{(X-\mu)^2} = 0.$$

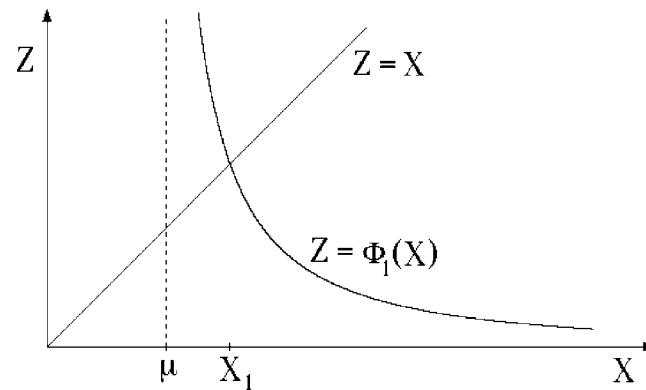
L'esistenza di una ed una sola soluzione $X = X_1 > \mu$ si riconosce immediatamente notando che la funzione ausiliaria

$$\Phi_1(x) = \frac{\mu}{(X+1-\mu)^2} + \frac{1-\mu}{(X-\mu)^2}$$

è monotona decrescente in $X \in (\mu, +\infty)$, con

$$\lim_{X \rightarrow \mu^+} \Phi_1(X) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} \Phi_1(X) = 0,$$

e che l'equazione in X equivale a $\Phi_1(X) = X$ — la figura fornisce una illustrazione grafica di questo risultato.



(ii) Sia $\mu - 1 < X < \mu$, per cui

$$X + 1 - \mu > 0 \quad \text{e} \quad X - \mu < 0$$

e quindi la (41.13) assume la forma

$$X - \frac{\mu}{(X + 1 - \mu)^2} + \frac{1 - \mu}{(X - \mu)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = \Phi_2(X).$$

Si osservi che per $X \in (\mu - 1, \mu)$ è $X + 1 - \mu \in (0, 1)$ e $X - \mu \in (-1, 0)$, in modo che le funzioni

$$X \longrightarrow \frac{\mu}{(X + 1 - \mu)^2} \quad X \longrightarrow \frac{1 - \mu}{(X - \mu)^2}$$

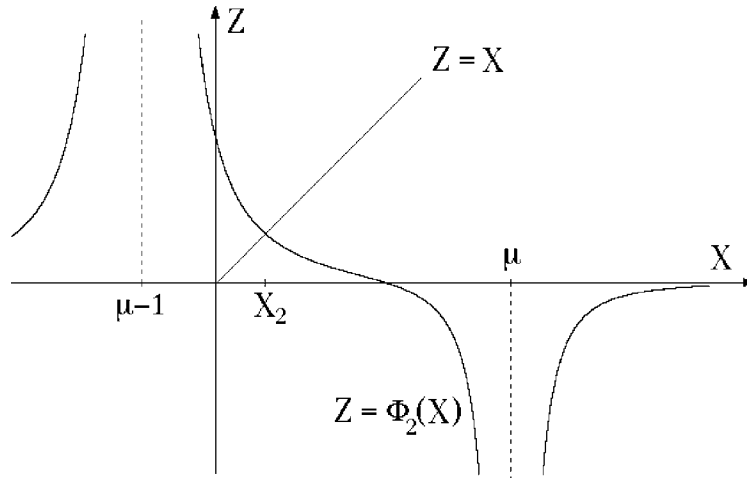
risultano rispettivamente decrescente e crescente in $(\mu - 1, \mu)$. Di conseguenza, la funzione ausiliaria

$$\Phi_2(X) = \frac{\mu}{(X + 1 - \mu)^2} - \frac{1 - \mu}{(X - \mu)^2}$$

risulta a sua volta decrescente nello stesso intervallo $(\mu - 1, \mu)$; inoltre

$$\lim_{X \rightarrow \mu-1^+} \Phi_2(X) = +\infty \quad \lim_{X \rightarrow \mu^-} \Phi_2(X) = -\infty$$

ed esiste pertanto una ed una sola soluzione $X = X_2$ di $\Phi_2(X) = X$ in $(\mu - 1, \mu)$.



(iii) Si consideri infine $X < \mu - 1$. In questo caso le disequaglianze

$$X + 1 - \mu < 0 \quad X - \mu < -1 < 0$$

fanno sì che la (41.13) si riduca alla forma equivalente

$$X + \frac{\mu}{(X + 1 - \mu)^2} + \frac{1 - \mu}{(X - \mu)^2} = 0 \quad X = \Phi_3(X) .$$

Nella fattispecie, per $X \in (-\infty, \mu - 1)$ risulta

$$X + 1 - \mu \in (-\infty, 0) \quad \text{e} \quad X - \mu \in (-\infty, -1)$$

per cui le funzioni

$$X \longrightarrow \frac{\mu}{(X + 1 - \mu)^2} \quad X \longrightarrow \frac{1 - \mu}{(X - \mu)^2}$$

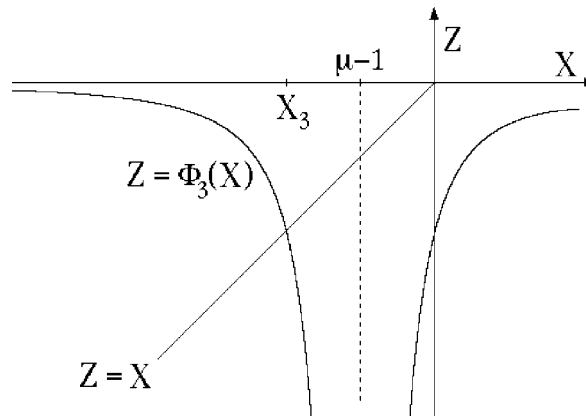
sono entrambe crescenti in $(-\infty, \mu - 1)$, mentre la funzione ausiliaria

$$\Phi_3(X) = -\frac{\mu}{(X + 1 - \mu)^2} - \frac{1 - \mu}{(X - \mu)^2}$$

è monotona decrescente nello stesso intervallo. A ciò si aggiunga che

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} \Phi_3(X) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{X \rightarrow \mu - 1^-} \Phi_3(X) = -\infty$$

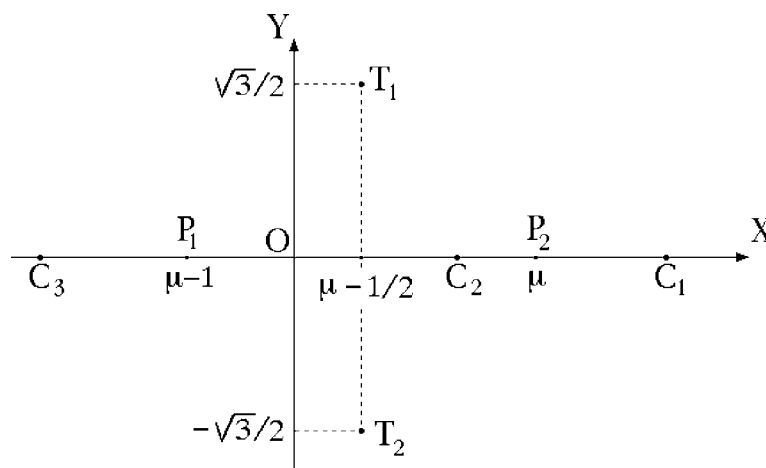
per concludere che l'equazione $\Phi_3(X) = X$ ammettere sempre una ed una sola soluzione $X = X_3 \in (-\infty, \mu - 1)$.



Si è così giunti alla conclusione che alle configurazioni di equilibrio triangolari (41.11) devono aggiungersi altre tre configurazioni del tipo

$$(X, Y) = (X_1, 0), \quad (X_2, 0), \quad (X_3, 0)$$

con $X_1 = X_1(\mu) > \mu$, $X_2 = X_2(\mu) \in (\mu - 1, \mu)$ e $X_3 = X_3(\mu) < \mu - 1$. Trattandosi di punti allineati con le posizioni occupate dalle masse puntiformi m_1 ed m_2 , dette configurazioni vengono abitualmente indicate come **configurazioni collineari** lagrangiane. Nella figura della pagina seguente sono rappresentate le 5 configurazioni di equilibrio relativo per il problema a tre corpi ristretto: C_1, C_2, C_3 indicano le configurazioni collineari, mentre T_1 e T_2 individuano quelle triangolari.



41.6 Hessiana del potenziale ed analisi di stabilità delle configurazioni di equilibrio relativo

Per procedere all'analisi delle proprietà di stabilità delle configurazioni di equilibrio appena determinate, occorre provvedere preliminarmente al calcolo delle derivate parziali seconde del potenziale. Come è immediato verificare sulla base delle (41.5), le espressioni in questione sono le seguenti:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial X^2}(X, Y) &= 1 - \frac{\mu}{[(X+1-\mu)^2 + Y^2]^{3/2}} + \frac{3\mu(X+1-\mu)^2}{[(X+1-\mu)^2 + Y^2]^{5/2}} \\ &\quad - \frac{1-\mu}{[(X-\mu)^2 + Y^2]^{3/2}} + \frac{3(1-\mu)(X-\mu)^2}{[(X-\mu)^2 + Y^2]^{5/2}} \\ \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial X \partial Y}(X, Y) &= \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial Y \partial X}(X, Y) = \frac{3\mu Y(X+1-\mu)}{[(X+1-\mu)^2 + Y^2]^{5/2}} + \frac{3(1-\mu)Y(X-\mu)}{[(X-\mu)^2 + Y^2]^{5/2}} \\ \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial Y^2}(X, Y) &= 1 - \frac{\mu}{[(X+1-\mu)^2 + Y^2]^{3/2}} - \frac{1-\mu}{[(X-\mu)^2 + Y^2]^{3/2}} \\ &\quad + 3Y^2 \left[\frac{\mu}{[(X+1-\mu)^2 + Y^2]^{5/2}} + \frac{1-\mu}{[(X-\mu)^2 + Y^2]^{5/2}} \right]\end{aligned}$$

Si esaminano ora le singole configurazioni di equilibrio.

41.6.1 Punti triangolari

Nei punti triangolari le espressioni precedenti si calcolano facilmente, dato che le coordinate cartesiane delle configurazioni di equilibrio sono note in modo esplicito. Si ha così:

$$\frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial X^2} \left(\mu - \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 - \mu + 3\mu \left(\mu - \frac{1}{2} + 1 - \mu \right)^2 - 1 + \mu + 3(1-\mu) \left(\mu - \frac{1}{2} - \mu \right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial X \partial Y} \left(\mu - \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right) &= \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial Y \partial X} \left(\mu - \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \\ &= 3\mu \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\mu - \frac{1}{2} + 1 - \mu \right) + 3(1-\mu) \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\mu - \frac{1}{2} - \mu \right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} (2\mu - 1)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial Y^2} \left(\mu - \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 - \mu - 1 + \mu + 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 (\mu + 1 - \mu) = \frac{9}{4}.$$

Si osservi che l'identità della matrice hessiana del potenziale nei due punti triangolari è attesa a priori per via della simmetria $\mathbb{U}(X, -Y) = \mathbb{U}(X, Y) \forall (X, Y) \in \mathbb{R}^2$.

L'equazione caratteristica (41.4) delle equazioni del moto linearizzate nell'intorno della configurazione di equilibrio diventa:

$$\lambda^4 + \left(4 - \frac{3}{4} - \frac{9}{4} \right) \lambda^2 + \frac{27}{16} - \frac{27}{16} (2\mu - 1)^2 = 0$$

ossia

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{16} [1 - (2\mu - 1)^2] = 0, \quad (41.14)$$

in cui

$$\frac{27}{16} [1 - (2\mu - 1)^2] > 0 \quad \forall \mu \in (0, 1).$$

Le due soluzioni in λ^2 dell'equazione (41.14) sono date da

$$\lambda^2 = \lambda_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[-1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{27}{16} [1 - (2\mu - 1)^2]} \right] = \frac{1}{2} \left[-1 \pm \sqrt{1 - \frac{27}{4} [1 - (2\mu - 1)^2]} \right] \quad (41.15)$$

e poiché il discriminante soddisfa la diseguaglianza

$$\Delta = 1 - \frac{27}{4} [1 - (2\mu - 1)^2] < 1$$

si può concludere che:

- (a) per $\Delta \geq 0$ entrambe le radici λ_{\pm}^2 in (41.15) sono reali e negative; le loro radici quadrate, autovalori della matrice B , risultano quindi tutte immaginarie pure; la circostanza descritta è critica, non potendo essere discussa neppure mediante il teorema di stabilità per linearizzazione;
- (b) nel caso di $\Delta < 0$, le soluzioni λ_{\pm}^2 sono complesse coniugate. La presenza di una parte immaginaria non nulla comporta che 2 dei 4 autovalori di B abbiano parte reale strettamente positiva. In tale ipotesi la configurazione di equilibrio è instabile in forza del teorema di stabilità per linearizzazione.

Una semplice manipolazione algebrica mostra che il caso (a) si verifica se e soltanto se

$$|2\mu - 1| \geq \sqrt{23/27}$$

e ricorre pertanto per

$$\mu \geq \frac{1}{2} (1 + \sqrt{23/27}) = 0.961479104$$

oppure per

$$\mu \leq \frac{1}{2} (1 - \sqrt{23/27}) = 0.038520897.$$

Basta poi ricordare la definizione del parametro $\mu = m_1/(m_1 + m_2)$ per dedurre che le diseguaglianze precedenti equivalgono a richiedere

$$m_1/m_2 \geq \frac{1 + \sqrt{23/27}}{1 - \sqrt{23/27}} = 24.95993579 \quad (41.16.a)$$

ovvero

$$m_2/m_1 \geq \frac{1 + \sqrt{23/27}}{1 - \sqrt{23/27}} = 24.95993579. \quad (41.16.b)$$

Si ha dunque instabilità delle configurazioni triangolari per

$$\frac{1}{2}(1 - \sqrt{23/27}) < \mu < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{23/27})$$

ossia per

$$0.040064206 = \frac{1 - \sqrt{23/27}}{1 + \sqrt{23/27}} < \frac{m_1}{m_2} < \frac{1 + \sqrt{23/27}}{1 - \sqrt{23/27}} = 24.95993579 .$$

Le condizioni residue (41.16.a)-(41.16.b) ricorrono allorquando la sproporzione fra le masse m_1 ed m_2 è sufficientemente elevata — il rapporto fra la massa maggiore e la massa minore non deve risultare inferiore al valore critico 24.95993579. Esse corrispondono a casi critici di stabilità lineare ed una analisi più sofisticata consente di provarne la stabilità nel senso di Liapunov. È importante sottolineare come in assenza delle forze di Coriolis, le configurazioni triangolari risulterebbero instabili per ogni scelta del parametro μ . L'hessiana del potenziale \mathbb{U} si scrive infatti:

$$H_{\mathbb{U}}\left(\mu - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{4}(2\mu - 1) \\ \frac{3\sqrt{3}}{4}(2\mu - 1) & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

con equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 3\lambda + \frac{27}{16}[1 - (2\mu - 1)^2] = 0$$

ed autovalori *entrambi positivi*

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left\{ 3 \pm \sqrt{9 - \frac{27}{4}[1 - (2\mu - 1)^2]} \right\} .$$

Si è così individuato un esempio notevole di configurazioni di equilibrio, altrimenti instabili, che vengono stabilizzate dalle sollecitazioni di Coriolis — sollecitazioni girostatiche. Tali configurazioni sono note come *punti lagrangiani triangolari* del problema dei tre corpi ristretto.

41.6.2 Punti collineari $(X_1, 0)$, $(X_2, 0)$, $(X_3, 0)$

Le derivate parziali seconde del potenziale in un generico punto del tipo $(X, Y) = (X, 0)$ si scrivono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial X^2}(X, 0) &= 1 + \frac{2\mu}{|X + 1 - \mu|^3} + \frac{2(1 - \mu)}{|X - \mu|^3} \\ \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial X \partial Y}(X, 0) &= \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial Y \partial X}(X, 0) = 0 \\ \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial Y^2}(X, 0) &= 1 - \frac{\mu}{|X + 1 - \mu|^3} - \frac{1 - \mu}{|X - \mu|^3} \end{aligned} \quad (41.17)$$

e con $X = X_1, X_2, X_3$ l'equazione caratteristica relativa alle equazioni del moto linearizzate diventa

$$\lambda^4 + \left[4 - 1 - \frac{2\mu}{|X+1-\mu|^3} - \frac{2(1-\mu)}{|X-\mu|^3} - 1 + \frac{\mu}{|X+1-\mu|^3} + \frac{1-\mu}{|X-\mu|^3} \right] \lambda^2 + \left[1 + \frac{2\mu}{|X+1-\mu|^3} + \frac{2(1-\mu)}{|X-\mu|^3} \right] \left[1 - \frac{\mu}{|X+1-\mu|^3} - \frac{1-\mu}{|X-\mu|^3} \right] = 0$$

equivalente a

$$\lambda^4 + \left[2 - \frac{\mu}{|X+1-\mu|^3} - \frac{1-\mu}{|X-\mu|^3} \right] \lambda^2 + \left[1 + \frac{2\mu}{|X+1-\mu|^3} + \frac{2(1-\mu)}{|X-\mu|^3} \right] \left[1 - \frac{\mu}{|X+1-\mu|^3} - \frac{1-\mu}{|X-\mu|^3} \right] = 0.$$

Posto per brevità $\alpha = \frac{\mu}{|X+1-\mu|^3} + \frac{1-\mu}{|X-\mu|^3} > 0$, l'equazione precedente si riduce a

$$\lambda^4 + (2 - \alpha) \lambda^2 + (1 + 2\alpha)(1 - \alpha) = 0$$

e le sue soluzioni in λ^2 risultano

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} \left[\alpha - 2 \pm \sqrt{(\alpha - 2)^2 + 4(1 + 2\alpha)(\alpha - 1)} \right] = \lambda_{\pm}^2.$$

Se $\alpha > 1$ si ha che $\sqrt{(\alpha - 2)^2 + 4(1 + 2\alpha)(\alpha - 1)} > |\alpha - 2|$ e quindi λ_+^2 e λ_-^2 sono reali e di segno opposto. Di conseguenza, 2 dei 4 autovalori di B sono immaginari puri, uno negativo ed *uno positivo* — instabilità.

Il caso residuo $0 < \alpha \leq 1$ non può mai ricorrere per $X = X_1, X_2, X_3$, come si dimostrerà nel seguito. Le ascisse dei punti lagrangiani collineari soddisfano l'equazione (41.13) che conviene riesprimere nella forma

$$X_i - \frac{\mu X_i}{|X_i + 1 - \mu|^3} - \frac{\mu(1 - \mu)}{|X_i + 1 - \mu|^3} - \frac{(1 - \mu)X_i}{|X_i - \mu|^3} + \frac{\mu(1 - \mu)}{|X_i - \mu|^3} = 0$$

ovvero

$$X_i \left[1 - \frac{\mu}{|X_i + 1 - \mu|^3} - \frac{1 - \mu}{|X_i - \mu|^3} \right] = \mu(1 - \mu) \left[\frac{1}{|X_i + 1 - \mu|^3} - \frac{1}{|X_i - \mu|^3} \right] \quad (41.18)$$

per $i = 1, 2, 3$. Si discutono separatamente le tre configurazioni.

(i) Per la configurazione $(X_1, 0)$ vale $X_1 > \mu$ e quindi

$$\frac{1}{|X_1 + 1 - \mu|^3} - \frac{1}{|X_1 - \mu|^3} < 0$$

in quanto $X_1 + 1 - \mu > X_1 - \mu > 0$. Perciò dalla (41.18) segue che necessariamente $1 - \alpha < 0$, ossia che $\alpha > 1$;

(ii) La configurazione $(X_2, 0)$ soddisfa $\mu - 1 < X_2 < \mu$ e quindi

$$0 < X_2 + 1 - \mu < 1 \quad -1 < X_2 - \mu < 0 .$$

Da queste disequazioni si ricava che

$$0 < |X_2 + 1 - \mu| < 1 \quad |X_2 - \mu| < 1$$

per cui

$$\frac{1}{|X_2 + 1 - \mu|^3} > 1 \quad \frac{1}{|X_2 - \mu|^3} > 1$$

ed infine

$$\alpha = \frac{\mu}{|X_2 + 1 - \mu|^3} + \frac{1 - \mu}{|X_2 - \mu|^3} > \mu + 1 - \mu = 1 ;$$

(iii) Per $(X_3, 0)$ si ha $X_3 < \mu - 1$ e conseguentemente

$$0 > X_3 + 1 - \mu > X_3 - \mu$$

in modo che $|X_3 + 1 - \mu| < |X_3 - \mu|$ e

$$\frac{1}{|X_3 + 1 - \mu|^3} - \frac{1}{|X_3 - \mu|^3} > 0 .$$

Il segno negativo di X_3 e l'equazione (41.18) implicano allora che si abbia di nuovo $\alpha > 1$.

In conclusione, le equazioni del moto linearizzate nell'intorno delle configurazioni di equilibrio $(X, Y) = (X_1, 0), (X_2, 0), (X_3, 0)$ presentano sempre un autovalore con parte reale positiva. Si tratta quindi di configurazioni di equilibrio instabili per il teorema di linearizzazione.

Vale la pena di sottolineare come in questo caso la presenza delle forze di Coriolis non alteri le proprietà di stabilità delle configurazioni. In effetti, in forza delle (41.17) l'hessiana del potenziale è data dall'espressione

$$H_{\mathbb{U}}(X_i, 0) = \begin{pmatrix} 1 + 2\alpha & 0 \\ 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, 3 ,$$

ed avendosi comunque $\alpha > 1$ si deduce che le configurazioni collineari corrispondono sempre a punti di sella del potenziale — gli autovalori della matrice sono $1 + 2\alpha$ ed $1 - \alpha$, positivo il primo, negativo il secondo.

41.7 I punti lagrangiani triangolari nel sistema solare

Lo studio dei punti lagrangiani riveste una notevole importanza in campo astronomico. Nell'ambito del sistema solare si ritrovano infatti diversi esempi di corpi celesti disposti secondo configurazioni lagrangiane triangolari stabili — le configurazioni lagrangiane instabili non hanno naturalmente alcuna speranza di sopravvivere a lungo. L'esempio più famoso è forse quello dei due gruppi di asteroidi noti rispettivamente come “Greci” e “Troiani”. Benché non si tratti di gruppi particolarmente compatti, le posizioni medie delle decine di asteroidi che li compongono coincidono approssimativamente con i punti lagrangiani triangolari lungo l'orbita di Giove attorno al Sole, punti stabili in forza del fatto che il rapporto fra la massa del Sole e quella di Giove è dell'ordine di 10^3 . Si intende che il modello delle configurazioni triangolari rappresenta soltanto una approssimazione, visto che l'orbita di Giove è leggermente eccentrica e quindi non circolare; inoltre, il modello non tiene conto delle perturbazioni gravitazionali dovute ad altri corpi del sistema solare, quali in particolare i grandi pianeti esterni Saturno, Urano o Nettuno. Ciò non toglie che, stabilmente, i Greci precedano di $\pi/3$ radianti Giove lungo la sua orbita, e che analogamente i Troiani lo seguano alla stessa distanza.

Altri casi di configurazioni lagrangiane naturali sono stati scoperti nel sistema dei satelliti di Saturno, all'epoca delle osservazioni condotte dalle sonde Voyager 1 e 2, fra il 1980 ed il 1981. Le immagini trasmesse dalle due sonde hanno consentito, tra l'altro, di scoprire nuovi satelliti di piccola massa, evidenziando in particolare che:

- il piccolo satellite Elena — o, in sigla, 1980S6 — precede Dione di $\pi/3$ radianti sulla sua orbita;
- i satelliti Telesto e Calipso — noti anche con le sigle rispettive 1980S25 e 1980S13 — seguono e precedono Teti alla stessa distanza angolare lungo la sua orbita.

Anche in questa circostanza la stabilità delle configurazioni lagrangiane triangolari è giustificata dalla grande sproporzione fra la massa di Saturno e le masse di Dione e Teti. Quelli descritti costituiscono i primi esempi noti di satelliti lagrangiani nel sistema solare.

42. Appendice. Criterio di Hurwitz e regola dei segni di Cartesio

Si è visto come il teorema di analisi lineare di stabilità richieda: (1) la linearizzazione delle equazioni differenziali nell'intorno della soluzione costante — punto fisso — che si vuole studiare e (2) lo studio degli autovalori della relativa matrice di rappresentazione del sistema linearizzato, che costituisce un sistema lineare omogeneo a coefficienti costanti. Per un sistema di n equazioni differenziali del primo ordine in n variabili quella di rappresentazione del sistema linearizzato è una matrice quadrata reale $n \times n$; il calcolo dei relativi autovalori comporta la soluzione di una equazione algebrica di grado n a coefficienti reali — equazione caratteristica — che è sempre dato esprimere nella forma

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \quad (42.1)$$

È importante osservare come anche per sistemi con un numero relativamente ridotto di

variabili — più di due — la determinazione degli autovalori costituisce un'operazione decisamente non banale, specie se, come accade solitamente, i coefficienti del polinomio caratteristico in (42.1) non sono assegnati in forma numerica, ma soltanto simbolica — in termini di masse, lunghezze, costanti elastiche o altre grandezze caratteristiche del sistema. In tal caso infatti non è possibile ricorrere a metodi numerici per la soluzione del problema in tutta la sua generalità. *Appare quindi del tutto evidente l'importanza di avere a disposizione criteri generali per individuare il segno della parte reale degli autovalori λ , radici dell'equazione caratteristica (42.1), senza dover ricorrere alla soluzione esplicita o numerica di questa.* I criteri più importanti correntemente usati sono:

- il teorema di Hurwitz, e
- la regola dei segni di Cartesio.

Di essi, particolarmente notevole è il primo, che fornisce una caratterizzazione completa dei polinomi reali le cui radici abbiano tutte la parte reale di segno negativo. La regola di Cartesio, pur di grande interesse pratico, è invece di applicabilità più limitata in quanto permette soltanto, in taluni casi, di riconoscere la presenza di una radice reale e positiva del polinomio.

42.1 Criterio di Hurwitz

Il criterio di Hurwitz prescrive che per una equazione algebrica a coefficienti reali della forma

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,$$

con $a_0 > 0$, le radici hanno tutte parte reale negativa *se e soltanto se* tutti i minori fondamentali $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ della *matrice di Hurwitz*

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \end{pmatrix} \tag{42.2}$$

sono positivi. La matrice (42.2) si ottiene assegnando preliminarmente i valori a_1, a_2, \dots, a_n agli elementi della diagonale principale; lungo ciascuna colonna, muovendo dall'elemento diagonale corrispondente, ci si sposta verso l'alto inserendo i valori a_i con indici $i = 0, 1, \dots, n$ *creascenti* e verso il basso assegnando gli stessi valori con indici $i = 0, 1, \dots, n$ *decreascenti*, con la convenzione che sia $a_i = 0$ per $i < 0$ o $i > n$.

Così ad esempio, per un polinomio di terzo grado a coefficienti reali

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$$

con $a_0 > 0$, la matrice di Hurwitz assume la forma

$$H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}$$

e la condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le tre radici abbiano parte reale negativa è data dalle tre disequazioni simultanee:

$$\Delta_1 = a_1 > 0 \quad \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{pmatrix} > 0 \quad \Delta_3 = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} > 0.$$

In modo analogo, per il polinomio di quarto grado a coefficienti reali — con $a_0 > 0$ —

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4$$

la matrice di Hurwitz si scrive

$$H_4 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{pmatrix}$$

e la condizione necessaria e sufficiente per tutte le quattro radici con parte reale negativa consiste nel richiedere che siano positivi i quattro minori fondamentali di detta matrice:

$$\Delta_1 = a_1 > 0 \quad \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{pmatrix} > 0$$

$$\Delta_3 = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} > 0 \quad \Delta_4 = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{pmatrix} > 0.$$

A titolo illustrativo si consideri il polinomio di terzo grado

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 \tag{42.3}$$

che ha positivo il coefficiente del termine di grado massimo, per cui il criterio di Hurwitz è direttamente applicabile — in caso contrario sarebbe necessario cambiare segno all'intero polinomio, operazione ininfluente sulle radici. La matrice di Hurwitz vale in questo caso

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e i tre minori fondamentali risultano rispettivamente uguali a 1, 0 e 0, come è immediato verificare:

$$\Delta_1 = 1 \quad , \quad \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad \Delta_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Le radici del polinomio non possono essere tutte con parte reale negativa. In effetti il polinomio in esame si scrive

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)$$

e le sue radici sono quindi -1 , $+i$ e $-i$. Come ulteriore esempio si esamina il polinomio di quinto grado $\lambda^5 + 2\lambda^4 + 2\lambda^3 + 4\lambda^2 + 11\lambda + 10$, la cui matrice di Hurwitz assume la forma

$$H_5 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

È sufficiente calcolare i primi due minori fondamentali per concludere che le radici del polinomio non hanno tutte parte reale negativa:

$$\Delta_1 = 2 \quad \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0,$$

in quanto $\Delta_2 = 0$ e il criterio di Hurwitz non è perciò soddisfatto.

42.1.1 Condizione necessaria perché tutte le radici abbiano parte reale negativa

Il criterio di Hurwitz fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché le radici di un polinomio a coefficienti reali abbiano tutte parte reale negativa. Per accertare la stessa proprietà esiste tuttavia una condizione *solo necessaria* ma molto più semplice che, se non soddisfatta, consente di escludere il segno negativo della parte reale di tutte le radici. Si ha infatti che *se le radici di un polinomio a coefficienti reali hanno tutte parte reale negativa, allora i coefficienti del polinomio devono avere tutti dello stesso segno*. Il teorema fondamentale dell'algebra assicura infatti che un generico polinomio di grado n

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n \tag{42.4}$$

si possa sempre esprimere nella forma fattorizzata

$$a_0 \prod_j (\lambda - \alpha_j) \prod_k (\lambda - \beta_k)(\lambda - \beta_k^*), \tag{42.5}$$

essendo α_j gli zeri reali del polinomio e $\{\beta_k, \beta_k^*\}$ quelli complessi coniugati. Ma conformemente all'ipotesi che tutte le radici abbiano parte reale negativa, gli zeri reali α_j devono risultare tutti di segno negativo, mentre per ogni coppia di zeri complessi coniugati $\{\beta_k, \beta_k^*\}$ si ha

$$(\lambda - \beta_k)(\lambda - \beta_k^*) = \lambda^2 - 2\Re\beta_k\lambda + |\beta_k|^2$$

con $\Re\beta_k < 0$ e $|\beta_k|^2 > 0$. Di conseguenza il prodotto (42.5) diventa

$$a_0 \prod_j (\lambda + |\alpha_j|) \prod_k (\lambda^2 - 2\Re\beta_k\lambda + |\beta_k|^2)$$

con tutti i coefficienti costanti $|\alpha_j|$, $-\Re\beta_k < 0$ e $|\beta_k|^2$ strettamente positivi. È allora evidente che, eseguiti i prodotti e raccolti i termini simili, i coefficienti del polinomio (42.4) sono ottenuti moltiplicando il coefficiente a_0 per opportune somme di quantità positive e presentano perciò tutti lo stesso segno di a_0 .

Si verifica facilmente che la condizione appena ricavata è anche sufficiente per i polinomi reali di primo e secondo grado, ma non per quelli di grado superiore. Un controesempio è offerto dal polinomio (42.3), che presenta tutti i coefficienti positivi ma, come già verificato, non ha tutte le radici con parte reale negativa.

42.2 Regola dei segni di Cartesio

La regola dei segni di Cartesio fornisce un criterio per individuare il numero massimo di radici reali positive di un polinomio a coefficienti reali. È così chiamata in quanto originariamente proposta dal filosofo francese René Descartes, il quale tuttavia non la dimostrò, limitandosi a discuterne soltanto degli esempi illustrativi.

Dato un qualsiasi polinomio reale di grado n , ordinato secondo le potenze decrescenti della variabile indipendente λ ,

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

si prende in esame la successione finita dei relativi coefficienti

$$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$$

e la sottosuccessione di questa

$$a_0 = b_0, b_1, \dots, a_{n-1}, b_m \quad (42.6)$$

ottenuta sopprimendo tutti i coefficienti nulli: ovviamente il primo coefficiente a_0 è non nullo, in quanto determina il grado del polinomio, e costituisce il primo elemento della sottosuccessione (42.6). È altrettanto evidente che $m \leq n$, con $m < n$ se e solo se almeno uno dei coefficienti del polinomio è uguale a zero. Si dice che la sottosuccessione (42.6) presenta una *permanenza* se due dei suoi elementi consecutivi hanno lo stesso segno, mentre nella sottosuccessione ricorre una *variazione* se due dei suoi elementi consecutivi sono di segno opposto. La regola di Cartesio prevede allora che per un polinomio a coefficienti reali

il numero massimo di radici reali positive sia pari al numero v di variazioni sul segno dei coefficienti ordinati per potenze decrescenti, ignorando gli eventuali coefficienti nulli. Il numero effettivo di radici reali positive può essere inferiore a v , nel qual caso tuttavia deve differire da v per un numero intero pari: $v - 2, v - 4, \dots$

Così ad esempio il polinomio reale

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda + 4$$

non presenta alcuna variazione dei propri coefficienti e quindi non può ammettere alcuno zero reale positivo. Per contro, il polinomio di quarto grado

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda - 5$$

presenta una variazione — fra gli ultimi due coefficienti 3 e -5 — e deve quindi ammettere esattamente una radice reale positiva. Non sempre la regola permette di accertare con sicurezza l'esistenza di uno zero positivo. Per esempio il polinomio

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 7\lambda^2 + 3\lambda + 5$$

mostra due variazioni di segno dei propri coefficienti, fra 1 e -2 e fra -2 e 7, per cui il polinomio potrebbe ammettere al massimo due radici reali positive, ma anche non ammetterne alcuna. In effetti, si verifica proprio questa seconda circostanza.

43. Appendice. Moto in un campo di forze conservative rapidamente variabili nel tempo

Un problema di un certo interesse applicativo consiste nell'analizzare l'effetto di forze periodiche rapidamente variabili nel tempo su un sistema scleronomo posizionale e conservativo. L'idea è che le soluzioni si possano scrivere come somma di un termine di uguale periodicità, rapidamente variabile nel tempo, e di un termine regolare che non subisce alcuna variazione apprezzabile in un periodo. Sviluppando un'idea introdotta da P. L. Kapitza nel 1951, è possibile ricavare le equazioni differenziali approssimate che descrivono le soluzioni regolari ed una espressione approssimata per la componente rapidamente variabile del moto. Sebbene non rigoroso, l'approccio consente di giustificare qualitativamente il comportamento, talvolta assai bizzarro e controintuitivo, di questo tipo di sistemi.

43.1 Sistema scleronomo a n gradi di libertà

Si consideri un sistema scleronomo a n gradi di libertà soggetto a sollecitazioni posizionali conservative di potenziale $U(q)$ e a forze non posizionali del tipo:

$$\frac{\partial u(t, q)}{\partial q_\alpha} \quad \alpha = 1, \dots, n,$$

dove $u(t, q)$ è un potenziale scalare della forma:

$$u(t, q) = c(q) \cos \omega t + s(q) \sin \omega t$$

con pulsazione $\omega \gg 1$ — e quindi periodo $T = 2\pi/\omega \ll 1$, mentre $c(q)$ e $s(q)$ indicano funzioni C^2 arbitrarie dei parametri lagrangiani $q = (q_1, \dots, q_n)$. Nell'ipotesi di vincoli ideali, ed espressa l'energia cinetica nella forma standard

$$T = \frac{1}{2} a_{hk}(q) \dot{q}_h \dot{q}_k,$$

le equazioni del moto del sistema sono ovviamente quelle di Lagrange:

$$a_{\alpha k}(q)(\ddot{q}_k) + \left[\frac{\partial a_{\alpha k}}{\partial q_h}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{hk}}{\partial q_\alpha}(q) \right] \dot{q}_h \dot{q}_k = \frac{\partial U(q)}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial u(t, q)}{\partial q_\alpha} \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad (43.1)$$

in cui per brevità si assume la convenzione di somma sugli indici ripetuti. Di queste e-

quazioni si cercano le soluzioni nella forma:

$$q(t) = Q(t) + \xi(t) \quad (43.2)$$

con $\xi(t)$ periodica di periodo $T \ll 1$ e a media nulla, e $Q(t)$ funzione regolare non significativamente variabile in un periodo T . Non è richiesto che $\partial u(t, q)/\partial q$ sia piccolo, ma si fa l'ipotesi che tale risulti il termine rapidamente variabile $\xi(t)$ — condizione plausibile se ω è abbastanza grande per $c(q)$ e $s(q)$ fissate. Sostituendo l'espressione (43.2) nell'equazione (43.1), questa diventa:

$$\begin{aligned} a_{\alpha k}(Q + \xi)(\ddot{Q}_k + \ddot{\xi}_k) + \left[\frac{\partial a_{\alpha k}(Q + \xi)}{\partial q_h} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{hk}(Q + \xi)}{\partial q_\alpha} \right] (\dot{Q}_h + \dot{\xi}_h)(\dot{Q}_k + \dot{\xi}_k) = \\ = \frac{\partial U(Q + \xi)}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial u(t, Q + \xi)}{\partial q_\alpha} \end{aligned} \quad (43.3)$$

e con una approssimazione di Taylor al primo ordine in ξ si riduce a:

$$\begin{aligned} \left[a_{\alpha k}(Q) + \frac{\partial a_{\alpha k}(Q)}{\partial q_\beta} \xi_\beta \right] (\ddot{Q}_k + \ddot{\xi}_k) + \\ + \left[\frac{\partial a_{\alpha k}(Q)}{\partial q_h} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{hk}(Q)}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial}{\partial q_\beta} \left(\frac{\partial a_{\alpha k}(Q)}{\partial q_h} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{hk}(Q)}{\partial q_\alpha} \right) \xi_\beta \right] (\dot{Q}_h + \dot{\xi}_h)(\dot{Q}_k + \dot{\xi}_k) = \\ = \frac{\partial U(Q)}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial^2 U(Q)}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \xi_\beta + \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial^2 u(t, Q)}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \xi_\beta. \end{aligned} \quad (43.4)$$

La media temporale dell'equazione precedente su un periodo T , indicata per brevità con il simbolo $\langle \rangle$, non ha effetto sulle funzioni della sola componente $Q(t)$ e porge:

$$\begin{aligned} a_{\alpha k}(Q) \ddot{Q}_k + \frac{\partial a_{\alpha k}(Q)}{\partial q_\beta} \langle \xi_\beta \ddot{\xi}_k \rangle + \\ + \left[\frac{\partial a_{\alpha k}(Q)}{\partial q_h} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{hk}(Q)}{\partial q_\alpha} \right] [\dot{Q}_h \dot{Q}_k + \langle \dot{\xi}_h \dot{\xi}_k \rangle] + \\ + \frac{\partial}{\partial q_\beta} \left[\frac{\partial a_{\alpha k}(Q)}{\partial q_h} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{hk}(Q)}{\partial q_\alpha} \right] [\dot{Q}_h \langle \xi_\beta \dot{\xi}_k \rangle + \dot{Q}_k \langle \xi_\beta \dot{\xi}_h \rangle + \langle \xi_\beta \dot{\xi}_h \dot{\xi}_k \rangle] = \\ = \frac{\partial U(Q)}{\partial q_\alpha} + \left\langle \frac{\partial^2 u(t, Q)}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \xi_\beta \right\rangle. \end{aligned} \quad (43.5)$$

Si sottrae poi la (43.5) dalla (43.4) per ottenere:

$$\begin{aligned} a_{\alpha k}(Q) \ddot{\xi}_k + \frac{\partial a_{\alpha k}(Q)}{\partial q_\beta} \ddot{Q}_k \xi_\beta + \frac{\partial a_{\alpha k}(Q)}{\partial q_\beta} [\xi_\beta \ddot{\xi}_k - \langle \xi_\beta \ddot{\xi}_k \rangle] + \\ + \left[\frac{\partial a_{\alpha k}(Q)}{\partial q_h} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{hk}(Q)}{\partial q_\alpha} \right] [\dot{Q}_h \dot{\xi}_k + \dot{Q}_k \dot{\xi}_h + \dot{\xi}_h \dot{\xi}_k - \langle \dot{\xi}_h \dot{\xi}_k \rangle] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial}{\partial q_\beta} \left[\frac{\partial a_{\alpha k}(Q)}{\partial q_h} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{hk}(Q)}{\partial q_\alpha} \right] [\dot{Q}_h \dot{Q}_k \xi_\beta + \dot{Q}_h \dot{\xi}_k \xi_\beta + \dot{Q}_k \dot{\xi}_h \xi_\beta + \dot{\xi}_h \dot{\xi}_k \xi_\beta - \\
 & - \dot{Q}_h \langle \xi_\beta \dot{\xi}_k \rangle - \dot{Q}_k \langle \dot{\xi}_h \xi_\beta \rangle - \langle \xi_\beta \dot{\xi}_h \dot{\xi}_k \rangle] = \\
 & = \frac{\partial^2 U(Q)}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \xi_\beta + \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial^2 u(t, Q)}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \xi_\beta - \left\langle \frac{\partial^2 u(t, Q)}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \xi_\beta \right\rangle
 \end{aligned}$$

e quindi:

$$a_{\alpha k}(Q) \ddot{\xi}_k = \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_\alpha} + O(\xi) + O(\dot{\xi}) \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (43.6)$$

Dall'equazione precedente si deduce, all'ordine più basso in ξ ,

$$\ddot{\xi}_k = a_{k\alpha}^{-1}(Q) \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_\alpha} \quad k = 1, \dots, n$$

e una doppia integrazione in t , ricordando la condizione di periodicità su $\xi(t)$, fornisce:

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_k &= a_{k\alpha}^{-1}(Q) \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_\alpha} \frac{1}{\omega} \quad k = 1, \dots, n \\
 \xi_k &= -a_{k\alpha}^{-1}(Q) \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_\alpha} \frac{1}{\omega^2} \quad k = 1, \dots, n,
 \end{aligned}$$

essendosi introdotta la notazione:

$$u^+(t, q) = c(q) \sin \omega t - s(q) \cos \omega t \quad (43.7)$$

e indicato con $a_{k\alpha}^{-1}(Q)$ l'elemento comune alla riga k e alla colonna α dell'inversa della matrice rappresentativa dell'energia cinetica calcolata in Q . Queste relazioni vengono sostituite nell'equazione (43.5) per ricavare l'equazione differenziale che governa la soluzione regolare $Q(t)$. In particolare, le medie da calcolare in (43.5) sono le seguenti:

$$\begin{aligned}
 \langle \xi_\beta \ddot{\xi}_k \rangle &= \left\langle a_{\beta h}^{-1}(Q) \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_h} (-1) a_{kl}^{-1}(Q) \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_l} \frac{1}{\omega^2} \right\rangle = \\
 &= -\frac{1}{\omega^2} a_{\beta h}^{-1}(Q) a_{kl}^{-1}(Q) \left\langle \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_h} \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_l} \right\rangle \\
 \langle \dot{\xi}_h \dot{\xi}_k \rangle &= \frac{1}{\omega^2} \left\langle a_{hl}^{-1}(Q) \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_l} a_{kr}^{-1}(Q) \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_r} \right\rangle = \\
 &= \frac{1}{\omega^2} a_{hl}^{-1}(Q) a_{kr}^{-1}(Q) \left\langle \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_l} \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_r} \right\rangle \\
 \langle \xi_\beta \dot{\xi}_k \rangle &= \left\langle -a_{\beta l}^{-1}(Q) \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_l} \frac{1}{\omega^2} a_{km}^{-1}(Q) \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_m} \frac{1}{\omega} \right\rangle = \\
 &= -\frac{1}{\omega^3} a_{\beta l}^{-1}(Q) a_{km}^{-1}(Q) \left\langle \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_l} \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_m} \right\rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \xi_\beta \dot{\xi}_h \rangle &= -\frac{1}{\omega^3} a_{\beta l}^{-1}(Q) a_{hm}^{-1}(Q) \left\langle \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_l} \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_m} \right\rangle \\
 \langle \xi_\beta \dot{\xi}_h \dot{\xi}_k \rangle &= \frac{1}{\omega^4} a_{\beta m}^{-1}(Q) a_{hl}^{-1}(Q) a_{kr}^{-1}(Q) \left\langle \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_m} \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_l} \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_r} \right\rangle \\
 \left\langle \frac{\partial^2 u(t, Q)}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \xi_\beta \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 u(t, Q)}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \left(-\frac{1}{\omega^2} \right) a_{\beta k}^{-1}(Q) \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_k} \right\rangle = \\
 &= -\frac{1}{\omega^2} a_{\beta k}^{-1}(Q) \left\langle \frac{\partial^2 u(t, Q)}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_k} \right\rangle = \\
 &= -\frac{1}{2\omega^2} \left[a_{\beta k}^{-1}(Q) \left\langle \frac{\partial^2 u(t, Q)}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_k} \right\rangle + a_{k\beta}^{-1}(Q) \left\langle \frac{\partial^2 u(t, Q)}{\partial q_\alpha \partial q_k} \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_\beta} \right\rangle \right] \\
 &= -\frac{1}{2\omega^2} a_{\beta k}^{-1}(Q) \left[\left\langle \frac{\partial^2 u(t, Q)}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_k} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_\beta} \frac{\partial^2 u(t, Q)}{\partial q_\alpha \partial q_k} \right\rangle \right] = \\
 &= -\frac{1}{2\omega^2} a_{\beta k}^{-1}(Q) \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left\langle \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_\beta} \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_k} \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Poichè $\omega \gg 1$, si tiene conto soltanto dei termini di ordine più basso in $1/\omega$ — ossia proporzionali a $1/\omega^2$. Si ha così:

$$\begin{aligned}
 a_{\alpha k}(Q) \ddot{Q}_k - \frac{\partial a_{\alpha k}(Q)}{\partial q_\beta} \frac{1}{\omega^2} a_{\beta h}^{-1}(Q) a_{kl}^{-1}(Q) \left\langle \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_h} \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_l} \right\rangle + \\
 + \left[\frac{\partial a_{\alpha k}(Q)}{\partial q_h} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{hk}(Q)}{\partial q_\alpha} \right] \dot{Q}_k \dot{Q}_h + \\
 + \left[\frac{\partial a_{\alpha k}(Q)}{\partial q_h} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{hk}(Q)}{\partial q_\alpha} \right] \frac{1}{\omega^2} a_{hl}^{-1}(Q) a_{kr}^{-1}(Q) \left\langle \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_l} \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_r} \right\rangle + \\
 + O\left(\frac{1}{\omega^3}\right) + O\left(\frac{1}{\omega^4}\right) = \\
 = \frac{\partial U(Q)}{\partial q_\alpha} - \frac{1}{2\omega^2} a_{\beta k}^{-1}(Q) \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left\langle \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_\beta} \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_k} \right\rangle
 \end{aligned}$$

ovvero:

$$\begin{aligned}
 a_{\alpha k}(Q) \ddot{Q}_k + \left[\frac{\partial a_{\alpha k}(Q)}{\partial q_h} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{hk}(Q)}{\partial q_\alpha} \right] \dot{Q}_k \dot{Q}_h &= \frac{\partial U(Q)}{\partial q_\alpha} + \\
 + \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial a_{\alpha k}(Q)}{\partial q_\beta} a_{\beta h}^{-1}(Q) a_{kl}^{-1}(Q) \left\langle \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_h} \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_l} \right\rangle + \\
 + \frac{1}{\omega^2} \left[-\frac{\partial a_{\alpha k}(Q)}{\partial q_h} + \frac{1}{2} \frac{\partial a_{hk}(Q)}{\partial q_\alpha} \right] a_{hl}^{-1}(Q) a_{kr}^{-1}(Q) \left\langle \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_l} \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_r} \right\rangle - \\
 - \frac{1}{2\omega^2} a_{\beta k}^{-1}(Q) \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left\langle \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_\beta} \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_k} \right\rangle.
 \end{aligned}$$

I termini correttivi proporzionali a $1/\omega^2$ assumono al forma:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial a_{\alpha k}(Q)}{\partial q_\beta} a_{\beta h}^{-1}(Q) a_{kl}^{-1}(Q) \left\langle \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_h} \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_l} \right\rangle - \\ & - \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial a_{\alpha k}(Q)}{\partial q_h} a_{hl}^{-1}(Q) a_{kr}^{-1}(Q) \left\langle \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_l} \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_r} \right\rangle + \\ & + \frac{1}{2\omega^2} \frac{\partial a_{hk}(Q)}{\partial q_\alpha} a_{hl}^{-1}(Q) a_{kr}^{-1}(Q) \left\langle \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_l} \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_r} \right\rangle - \\ & - \frac{1}{2\omega^2} a_{\beta k}^{-1}(Q) \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left\langle \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_\beta} \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_k} \right\rangle \end{aligned}$$

e si riducono a:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\omega^2} \frac{\partial a_{hk}(Q)}{\partial q_\alpha} a_{hl}^{-1}(Q) a_{kr}^{-1}(Q) \left\langle \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_l} \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_r} \right\rangle - \\ & - \frac{1}{2\omega^2} a_{\beta k}^{-1}(Q) \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left\langle \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_\beta} \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_k} \right\rangle \end{aligned} \quad (43.8)$$

in quanto i primi due risultano opposti, come è immediato verificare riscrivendo il secondo con una appropriata ridenominazione degli indici saturati:

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial a_{\alpha k}(Q)}{\partial q_h} a_{hl}^{-1}(Q) a_{kr}^{-1}(Q) \left\langle \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_l} \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_r} \right\rangle = \\ & = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial a_{\alpha k}(Q)}{\partial q_\beta} a_{\beta h}^{-1}(Q) a_{kl}^{-1}(Q) \left\langle \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_h} \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_l} \right\rangle \end{aligned}$$

e notando l'identità delle medie temporali:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_h} \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_l} \right\rangle &= \left\langle \left[\frac{\partial c(q)}{\partial q_h} \cos \omega t + \frac{\partial s(q)}{\partial q_h} \sin \omega t \right] \left[\frac{\partial c(q)}{\partial q_l} \cos \omega t + \frac{\partial s(q)}{\partial q_l} \sin \omega t \right] \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial c(q)}{\partial q_h} \frac{\partial c(q)}{\partial q_l} + \frac{1}{2} \frac{\partial s(q)}{\partial q_h} \frac{\partial s(q)}{\partial q_l} \\ \left\langle \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_h} \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_l} \right\rangle &= \left\langle \left[\frac{\partial c(q)}{\partial q_h} \sin \omega t - \frac{\partial s(q)}{\partial q_h} \cos \omega t \right] \left[\frac{\partial c(q)}{\partial q_l} \sin \omega t - \frac{\partial s(q)}{\partial q_l} \cos \omega t \right] \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial c(q)}{\partial q_h} \frac{\partial c(q)}{\partial q_l} + \frac{1}{2} \frac{\partial s(q)}{\partial q_h} \frac{\partial s(q)}{\partial q_l} \end{aligned}$$

che implica:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial a_{\alpha k}(Q)}{\partial q_\beta} a_{\beta h}^{-1}(Q) a_{kl}^{-1}(Q) \left\langle \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_h} \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_l} \right\rangle = \\ & = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial a_{\alpha k}(Q)}{\partial q_\beta} a_{\beta h}^{-1}(Q) a_{kl}^{-1}(Q) \left\langle \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_h} \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_l} \right\rangle. \end{aligned}$$

I termini correttivi residui (43.8) si possono infine riesprimere come un'unica derivata parziale:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\omega^2} \frac{\partial a_{hk}(Q)}{\partial q_\alpha} a_{hl}^{-1}(Q) a_{kr}^{-1}(Q) \left\langle \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_l} \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_r} \right\rangle - \\
 & - \frac{1}{2\omega^2} a_{\beta k}^{-1}(Q) \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left\langle \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_\beta} \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_k} \right\rangle = \\
 = & - \frac{1}{2\omega^2} a_{hk}(Q) a_{hl}^{-1}(Q) \frac{\partial a_{kr}^{-1}(Q)}{\partial q_\alpha} \left\langle \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_l} \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_r} \right\rangle - \\
 & - \frac{1}{2\omega^2} a_{\beta k}^{-1}(Q) \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left\langle \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_\beta} \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_k} \right\rangle = \\
 = & - \frac{1}{2\omega^2} \delta_{kl} \frac{\partial a_{kr}^{-1}(Q)}{\partial q_\alpha} \left\langle \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_l} \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_r} \right\rangle - \\
 & - \frac{1}{2\omega^2} a_{\beta k}^{-1}(Q) \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left\langle \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_\beta} \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_k} \right\rangle = \\
 = & - \frac{1}{2\omega^2} \frac{\partial a_{kr}^{-1}(Q)}{\partial q_\alpha} \left\langle \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_k} \frac{\partial u^+(t, Q)}{\partial q_r} \right\rangle - \\
 & - \frac{1}{2\omega^2} a_{rk}^{-1}(Q) \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left\langle \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_r} \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_k} \right\rangle = \\
 = & - \frac{1}{2\omega^2} \frac{\partial a_{kr}^{-1}(Q)}{\partial q_\alpha} \left\langle \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_k} \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_r} \right\rangle - \\
 & - \frac{1}{2\omega^2} a_{rk}^{-1}(Q) \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left\langle \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_r} \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_k} \right\rangle = \\
 = & - \frac{1}{2\omega^2} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left[a_{rk}^{-1}(Q) \left\langle \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_r} \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_k} \right\rangle \right].
 \end{aligned}$$

In conclusione, l'equazione differenziale che governa il moto regolare $Q(t)$ si può scrivere:

$$a_{\alpha k}(Q) \ddot{Q}_k + \left[\frac{\partial a_{\alpha k}(Q)}{\partial q_h} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{hk}(Q)}{\partial q_\alpha} \right] \dot{Q}_k \dot{Q}_h = \frac{\partial U_{\text{eff}}(Q)}{\partial q_\alpha} \quad (43.9)$$

e coincide quindi con l'equazione del moto completa (43.1) salvo che per la sostituzione del potenziale rapidamente variabile nel tempo $U(q) + u(t, q)$ con il potenziale efficace indipendente da t :

$$U_{\text{eff}}(Q) = U(q) - \frac{1}{2\omega^2} a_{rk}^{-1}(Q) \left\langle \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_r} \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_k} \right\rangle, \quad (43.10)$$

dove:

$$\left\langle \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_r} \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_k} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial c(Q)}{\partial q_r} \frac{\partial c(Q)}{\partial q_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial s(Q)}{\partial q_r} \frac{\partial s(Q)}{\partial q_k} \quad \forall r, k = 1, \dots, n. \quad (43.11)$$

Da notare che, come ci si aspetta, a parità di $c(q)$ e $s(q)$ l'effetto delle sollecitazioni rapida-

mente variabili in t diminuisce al crescere della pulsazione ω — essendo proporzionale a $1/\omega^2$. La stessa proprietà si estende alla parte rapidamente variabile della soluzione:

$$\xi_h = -a_{hk}^{-1}(Q) \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_k} \frac{1}{\omega^2} \quad h = 1, \dots, n. \quad (43.12)$$

43.2 Punto materiale vincolato a una curva fissa e liscia

Particolarmente semplice è il caso di un punto materiale di massa m vincolato a scorrere lungo una curva di ascissa curvilinea x e soggetto alla sollecitazione:

$$U'(x) + f(t, x)$$

con $f(t, x) = f_1(x) \cos \omega t + f_2(x) \sin \omega t$ e $\omega \gg 1$. Le equazioni pure del moto del sistema sono date da:

$$m\ddot{x} = U'(x) + f(t, x) \quad (43.13)$$

e se ne ricercano le soluzioni nella forma:

$$x(t) = X(t) + \xi(t) \quad (43.14)$$

dove $\xi(t)$ è periodica di periodo $T = 2\pi/\omega \ll 1$ e a media nulla, mentre $X(t)$ è regolare e non apprezzabilmente variabile in un periodo. Come nel caso generale si richiede che $\xi(t)$ sia piccola, ma lo stesso requisito non viene esteso necessariamente a $f(t, x)$. Sostituendo la relazione (43.14), l'equazione (43.13) diventa:

$$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} = U'(X + \xi) + f(t, X + \xi)$$

e con una approssimazione di Taylor al primo ordine in ξ si riduce a:

$$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} = U'(X) + U''(X)\xi + f(t, X) + \frac{\partial f(t, X)}{\partial X}\xi. \quad (43.15)$$

Se di questa equazione viene calcolata la media su un periodo T , indicata con il simbolo $\langle \rangle$, si ottiene la relazione:

$$m\ddot{X} = U'(X) + \left\langle \frac{\partial f(t, X)}{\partial X}\xi \right\rangle \quad (43.16)$$

che sottratta membro a membro dalla (43.15) porge:

$$m\ddot{\xi} = U''(X)\xi + f(t, X) + \frac{\partial f(t, X)}{\partial X}\xi - \left\langle \frac{\partial f(t, X)}{\partial X}\xi \right\rangle. \quad (43.17)$$

Dei termini a secondo membro tutti quelli in ξ sono di ordine superiore rispetto a $f(t, X)$, per cui si può scrivere:

$$m\ddot{\xi} = f(t, X)$$

ed una doppia integrazione rispetto al tempo, tenuto conto della condizione di media nulla su ξ , fornisce la stima del termine rapidamente variabile:

$$\xi = -\frac{1}{m\omega^2}f(t, X). \quad (43.18)$$

L'equazione (43.16) diventa così:

$$m\ddot{X} = U'(X) - \frac{1}{m\omega^2} \left\langle \frac{\partial f(t, X)}{\partial X} f(t, X) \right\rangle$$

vale a dire:

$$m\ddot{X} = U'(X) - \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{1}{2m\omega^2} \langle f(t, X)^2 \rangle \right] \quad (43.19)$$

e coincide pertanto con l'equazione del moto (43.13) salvo che per la eliminazione del termine dipendente dal tempo $f(t, X)$ e la sostituzione di $U(x)$ con il potenziale efficace:

$$U_{\text{eff}}(x) = U(x) - \frac{1}{2m\omega^2} \langle f(t, X)^2 \rangle, \quad (43.20)$$

essendo:

$$\langle f(t, X)^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T [f_1(X) \cos \omega t + f_2(X) \sin \omega t]^2 dt = \frac{1}{2} f_1(X)^2 + \frac{1}{2} f_2(X)^2.$$

È esattamente lo stesso risultato che si otterrebbe dalla relazione generale (43.10), per $n = 1$, ponendo $Q = X$ e:

$$a_{11}^{-1}(Q) = \frac{1}{m} \quad \frac{\partial u(t, Q)}{\partial q_1} = f(t, X).$$

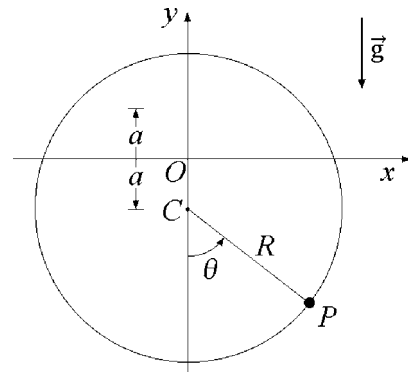
43.2.1 Esempio. Pendolo semplice con centro oscillante lungo la verticale

Nel piano Oxy di una terna inerziale $Oxyz$ si consideri un punto materiale pesante P , di massa m , vincolato a una circonferenza liscia di raggio R , il cui centro C è forzato a scorrere lungo l'asse verticale Oy secondo la legge $C - O = a \sin \omega t \hat{e}_2$, con $a > 0$ e $\omega \gg 1$ costanti. Come parametro lagrangiano si introduce l'angolo al centro θ evidenziato in figura. Il vettore posizione del punto rispetto alla terna $Oxyz$ è dato da:

$$P - O = R \sin \theta \hat{e}_1 + (a \sin \omega t - R \cos \theta) \hat{e}_2$$

e derivato in t porge la corrispondente velocità assoluta:

$$\dot{P} = R \cos \theta \hat{e}_1 + (a\omega \cos \omega t + R \sin \theta \dot{\theta}) \hat{e}_2$$



dalla quale si ricava l'espressione dell'energia cinetica:

$$T = \frac{m}{2} \dot{P}^2 = \frac{mR^2}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{ma^2\omega^2}{2} \cos^2 \omega t + maR\omega \cos \omega t \sin \theta \dot{\theta}.$$

Nonostante la dipendenza esplicita dal tempo dei vincoli, l'effetto della forza peso può comunque essere descritto dal potenziale scalare:

$$U_g = -mg \hat{e}_2 \cdot (P - O) = -mga \sin \omega t + mgR \cos \theta$$

per cui, omissi i termini additivi dipendenti da t , la lagrangiana $\mathcal{L} = T + U_g$ del sistema risulta:

$$\mathcal{L} = \frac{mR^2}{2} \dot{\theta}^2 + mgR \cos \theta + maR\omega \cos \omega t \sin \theta \dot{\theta}$$

e la relativa equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

porge l'equazione pura del moto:

$$mR^2 \ddot{\theta} + mgR \sin \theta - maR\omega^2 \sin \theta \sin \omega t = 0.$$

Quest'ultima si può riscrivere nella forma equivalente:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R} \sin \theta + \frac{a}{R} \omega^2 \sin \theta \sin \omega t \quad (43.21)$$

con il termine $(a/R)\omega^2 \sin \theta \sin \omega t$ periodico in t di periodo $T = 2\pi/\omega \gg 1$. Le soluzioni sono esprimibili nella forma:

$$\theta(t) = \Theta(t) + \xi(t)$$

dove il termine regolare $\Theta(t)$ è soluzione dell'equazione:

$$\ddot{\Theta} = -\frac{g}{R} \sin \Theta - \frac{a^2\omega^2}{2R^2} \sin \Theta \cos \Theta := \frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial \Theta}(\Theta) \quad (43.22)$$

in cui compare il potenziale efficace:

$$U_{\text{eff}}(\Theta) = \frac{g}{R} \cos \Theta - \frac{1}{2\omega^2} \left\langle \frac{a^2}{R^2} \omega^4 \sin^2 \Theta \sin^2 \omega t \right\rangle = \frac{g}{R} \cos \Theta - \frac{a^2\omega^2}{4R^2} \sin^2 \Theta \quad (43.23)$$

mentre il termine rapidamente variabile è dato da:

$$\xi(t) = -\frac{1}{\omega^2} \frac{a}{R} \omega^2 \sin \Theta \sin \omega t = -\frac{a}{R} \sin \Theta \sin \omega t. \quad (43.24)$$

Gli equilibri in Θ si ottengono dall'equazione:

$$U'_{\text{eff}}(\Theta) = -\frac{g}{R} \sin \Theta - \frac{a^2 \omega^2}{2R^2} \sin \Theta \cos \Theta = 0$$

e non si riducono alle sole radici ovvie:

$$\Theta = 0 \qquad \Theta = \pi \qquad (43.25)$$

ma comprendono anche le soluzioni non banali:

$$\Theta = \arccos\left(-\frac{2gR}{a^2 \omega^2}\right) := \Theta^* \qquad \Theta = -\arccos\left(-\frac{2gR}{a^2 \omega^2}\right) = -\Theta^*, \qquad (43.26)$$

definite e distinte dalle precedenti a condizione che la pulsazione ω sia abbastanza grande:

$$\omega > \frac{\sqrt{2gR}}{a}. \qquad (43.27)$$

Le caratteristiche di stabilità degli equilibri sono determinate dal segno della derivata seconda:

$$U''_{\text{eff}}(\Theta) = -\frac{g}{R} \cos \Theta - \frac{a^2 \omega^2}{2R^2} (\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta).$$

Gli equilibri $\Theta = \Theta^*$ e $\Theta = -\Theta^*$, quando definiti, sono sempre instabili per via del segno positivo della derivata:

$$U''_{\text{eff}}(\Theta^*) = U''_{\text{eff}}(-\Theta^*) = -\frac{g}{R} \cos \Theta^* - \frac{a^2 \omega^2}{2R^2} (\cos^2 \Theta^* - \sin^2 \Theta^*) = \frac{a^2 \omega^2}{2R^2} \sin^2 \Theta^* > 0.$$

Per $\Theta = 0$ risulta all'opposto:

$$U''_{\text{eff}}(0) = -\frac{g}{R} - \frac{a^2 \omega^2}{2R^2} < 0$$

per cui l'equilibrio costituisce sempre un massimo relativo proprio del potenziale efficace, stabile per Lagrange-Dirichlet; la presenza del termine rapidamente variabile nel tempo non cambia le proprietà di stabilità dell'equilibrio.

In $\Theta = \pi$ la derivata seconda del potenziale efficace non ha invece segno definito:

$$U''_{\text{eff}}(\pi) = \frac{g}{R} - \frac{a^2 \omega^2}{2R^2}$$

ed obbliga a distinguere tre diversi sotto casi.

- se $\omega < \sqrt{2gR}/a$ risulta $U''_{\text{eff}}(\pi) > 0$ e l'equilibrio è instabile per l'inversione parziale di Lagrange-Dirichlet;
- per $\omega > \sqrt{2gR}/a$ vale invece $U''_{\text{eff}}(\pi) < 0$ e la stabilità dell'equilibrio segue dal teorema di Lagrange-Dirichlet;

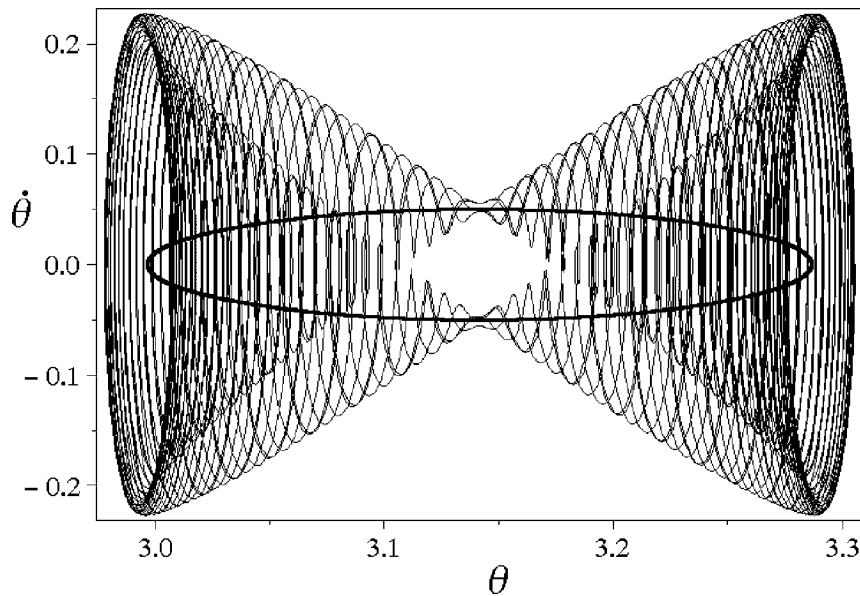
- qualora sia infine $\omega = \sqrt{2gR}/a$ si ha $U''_{\text{eff}}(\pi) = 0$ e ricorre un caso critico. In effetti, uno sviluppo di Taylor del potenziale efficace al quarto ordine in $\Theta = \pi$ mostra che la configurazione costituisce un minimo relativo proprio, la cui instabilità è assicurata dall'analisi di Weierstrass.

Va rilevato che gli equilibri $\Theta = 0$ e $\Theta = \pi$ dell'equazione mediata (43.22) corrispondono a soluzioni statiche per l'equazione del moto esatta (43.21) — sebbene non costituiscano equilibri in quanto i vincoli reonomi non ammettono stati di quiete per il sistema. La relazione (43.24) mostra d'altro canto che per $(\Theta(t), \dot{\Theta}(t))$ sufficientemente prossimo a una soluzione costante $(0, 0)$ o $(\pi, 0)$ i termini rapidamente variabili:

$$\xi(t) = -\frac{a}{R} \sin \Theta(t) \sin \omega t \qquad \dot{\xi}(t) = -\frac{a}{R} \cos \Theta(t) \dot{\Theta}(t) \sin \omega t - \omega \frac{a}{R} \sin \Theta(t) \cos \omega t$$

possono rendersi piccoli a piacere. *Le proprietà di stabilità o instabilità ricavate per gli equilibri $\Theta = 0$ e $\Theta = \pi$ si estendono dunque alle corrispondenti soluzioni costanti $\theta(t) = 0$ e $\theta(t) = \pi$ dell'equazione esatta (43.21).* Si sottolinea, in particolare, l'effetto stabilizzante e senz'altro controintuitivo della sollecitazione rapidamente variabile nel tempo sulla soluzione statica $\theta(t) = \pi$ per ω sufficientemente elevato — condizione (43.27).

È altresì importante notare come l'analisi di stabilità qui sviluppata non sia rigorosa, dal momento che il potenziale efficace $U_{\text{eff}}(\Theta)$ è stato introdotto sulla base di una approssimazione delle equazioni del moto. I risultati ottenuti giustificano, nondimeno, le osservazioni sperimentali desunte dalla integrazione numerica dell'equazione del moto completa (43.21). Per $R = 1$, $g = 1$, $a = 0.1$ e $\omega = 15$ la figura seguente confronta la soluzione $\theta(t)$ dell'equazione del moto esatta, di dati iniziali $\theta(0) = 3.1416$, $\dot{\theta}(0) = 0.05$ (curva in tratto sottile), con la soluzione $\Theta(t)$ dell'equazione mediata di eguali condizioni iniziali $\Theta(0) = 3.1416$ e $\dot{\Theta}(0) = 0.05$ (curva in grassetto), nell'intervallo $t \in [0, 80]$:



La simulazione suggerisce che l'effetto della sollecitazione rapidamente variabile sia proprio quello di stabilizzare la soluzione costante $\theta(t) = \pi$, altrimenti instabile.

Da rilevare, infine, che gli equilibri $\pm\Theta^*$, oltretutto instabili, dell'equazione mediata non corrispondono a soluzioni costanti dell'equazione esatta del moto: di conseguenza non risultano particolarmente rilevanti nello studio del sistema, salvo per la circostanza che, corrispondendo a minimi relativi propri del potenziale efficace, in prossimità di essi il moto regolare si inverte o tende comunque a rallentare.

43.2.2 Esempio. Pendolo semplice con centro oscillante in orizzontale

Se nel sistema precedente si ammette che la circonferenza vincolare sia costretta ad oscillare con il proprio centro C lungo l'asse orizzontale Ox , secondo la legge $C - O = a \sin \omega t \hat{e}_1$, l'equazione pura del moto si calcola in modo analogo e risulta:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R} \sin \theta + \frac{a\omega^2}{R} \cos \theta \sin \omega t.$$

Come nel caso precedente il sistema non presenta configurazioni di equilibrio, a causa dei vincoli reonomi che non sono compatibili con alcuno stato di quiete. In questo caso, tuttavia, mancano persino le soluzioni costanti — per la (43.21) si erano riconosciute le soluzioni $\theta(t) = 0$ e $\theta(t) = \pi \forall t \in \mathbb{R}$. Per $\omega \gg 1$ il potenziale efficace (43.20) diventa:

$$U_{\text{eff}}(\Theta) = \frac{g}{R} \cos \Theta - \frac{1}{2\omega^2} \left\langle \frac{a^2\omega^4}{R^2} \cos^2 \Theta \sin^2 \omega t \right\rangle = \frac{g}{R} \cos \Theta - \frac{a^2\omega^2}{4R^2} \cos^2 \Theta$$

e l'equazione del moto mediata sul tempo si scrive:

$$\ddot{\Theta} = -\frac{g}{R} \sin \Theta + \frac{a^2\omega^2}{2R^2} \cos \Theta \sin \Theta.$$

Di questa si possono determinare le soluzioni costanti ed analizzarne le caratteristiche di stabilità. Si riassumono di seguito i risultati.

La soluzione costante $\Theta = 0$ è definita incondizionatamente e risulta:

- stabile per Lagrange-Dirichlet se $\omega \leq \sqrt{2gR}/a$;
- instabile per l'inversione parziale di Lagrange-Dirichlet nel caso sia $\omega > \sqrt{2gR}/a$.

La soluzione $\Theta = \pi$ è sempre definita ed instabile.

Le soluzioni:

$$\Theta = \arccos\left(\frac{2gR}{\omega^2 a^2}\right) := \Theta^* \qquad \Theta = -\Theta^*$$

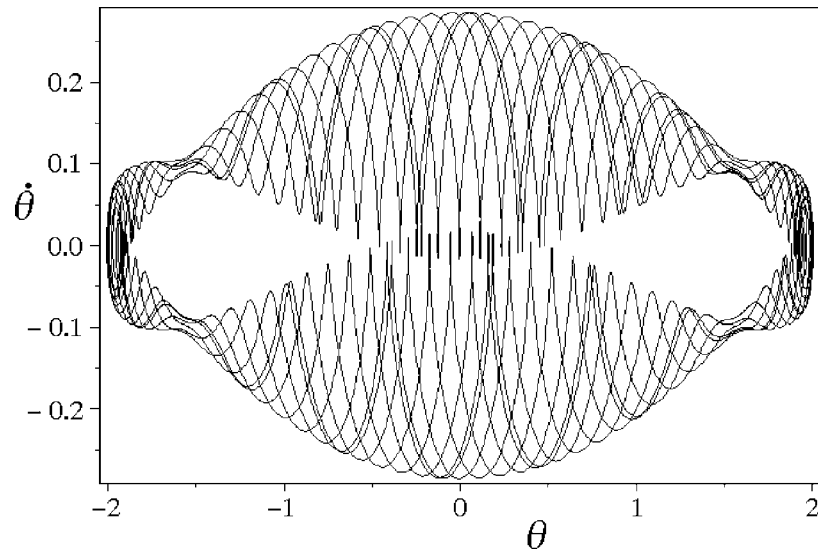
appaiono se e solo se $\omega > \sqrt{2gR}/a$, nel qual caso sono stabili per Lagrange-Dirichlet.

L'analisi del moto medio, tuttavia, in questo caso non conduce a risultati utili allo studio del moto reale, a meno che l'ampiezza a non sia molto piccola ed il termine rapidamente variabile nel tempo non costituisca effettivamente una piccola perturbazione delle equazioni del moto. Fallisce, in particolare, nel prevedere moti pressochè stazionari per condizioni iniziali $(\theta(0), \dot{\theta}(0))$ prossime a $(\Theta^*, 0)$ qualora si abbia $\omega > \sqrt{2gR}/a$; in tal caso, infatti, il termine in $\sin \omega t$ risulta troppo grande per poter essere riguardato come una perturbazione.

Per $R = 1$, $g = 1$, $a = 0.1$ e $\omega = 15$ la figura seguente mostra l'orbita nel piano delle fasi della soluzione esatta di condizioni iniziali:

$$(\theta(0), \dot{\theta}(0)) = (\Theta^*, 0) = (\arccos(200/225), 0) = (0.475882249662, 0)$$

sull'intervallo $t \in [0, 50]$:



È evidente che l'orbita non rimane affatto confinata nell'intorno della condizione iniziale, in contrasto con quanto predetto dalle equazioni mediate.

Indice degli argomenti

1.	Nozione intuitiva di stabilità ed instabilità.....	1
2.	Stabilità secondo Liapunov.....	1
3.	Instabilità secondo Liapunov.....	2
4.	Attrattività.....	4
5.	Stabilità asintotica.....	4
6.	Indipendenza delle proprietà di stabilità ed attrattività.....	4
6.1	Esempio di punto fisso attrattivo ma instabile.....	5
7.	Estensione a soluzioni costanti qualsiasi.....	7
8.	Estensione a soluzioni arbitrarie.....	9
9.	Osservazione sul significato fisico della instabilità.....	10
10.	Pregi e difetti della definizione di stabilità secondo Liapunov.....	12
11.	Discussione di Weierstrass.....	12
12.	Punto vincolato a una curva fissa liscia e soggetto a forze posizionali.....	13
13.	Funzione di Weierstrass.....	13
14.	Sistemi unidimensionali posizionali conservativi.....	14
15.	Teorema di Weierstrass dei dati iniziali.....	16
16.	Criteri di Weierstrass.....	18
16.1	Caso (1): $\Phi(x_0) > 0, \dot{x}_0 > 0$ — velocità iniziale positiva.....	19
16.2	Caso (2): $\Phi(x_0) > 0, \dot{x}_0 < 0$ — velocità iniziale negativa.....	23
16.3	Caso (3): $\Phi(x_0) = 0$ — velocità iniziale nulla.....	25
17.	Analisi qualitativa delle soluzioni.....	27
18.	Piano delle fasi e ritratto di fase.....	30
18.1	Piano delle fasi.....	30
18.2	Ritratto di fase.....	30
18.3	Orbite degli stati di quiete.....	31
18.4	Orbite nell'intorno dei punti di inversione.....	31
18.5	Orbite nell'intorno dei punti di meta asintotica.....	32
18.6	Orbite dei moti periodici.....	35
18.7	Orbite dei moti a meta asintotica. Separatrici.....	37
18.8	Orbite dei moti indefinitamente progressivi o retrogradi.....	39
18.9	Esempio di ritratto di fase.....	39
19.	Discussione di Weierstrass ed analisi di stabilità dell'equilibrio.....	40
20.	Esempio notevole di analisi di Weierstrass. Il pendolo semplice.....	42
21.	Quadro sinottico dei principali teoremi di stabilità.....	46
22.	Il metodo di Liapunov per l'analisi di stabilità.....	47
23.	Teorema di Liapunov di stabilità (caso autonomo).....	48
24.	Teorema di Liapunov di stabilità asintotica (caso autonomo).....	53
25.	Esempi illustrativi dei criteri di Liapunov.....	56
25.1	Esempio di sistema conservativo.....	56
25.2	Esempio di sistema non conservativo.....	57

25.3	Esempio di sistema non conservativo — con funzione di Liapunov alternativa ...	58
26.	Sistemi lineari nel piano	60
26.1	Sistemi lineari a coefficienti costanti del piano	60
26.2	Classificazione del punto fisso in $(x_1, x_2) = (0, 0)$	60
27.	Sistemi lineari di \mathbb{R}^n	69
28.	Teorema di analisi lineare di stabilità	72
29.	Stabilità degli equilibri nei sistemi olonomi	75
30.	Teorema di Lagrange-Dirichlet	76
30.1	Teorema di Lagrange-Dirichlet	76
30.2	Dissipatività	79
30.3	Stabilità asintotica	80
30.4	Sollecitazioni posizionali conservative	80
31.	Inversione parziale di Lagrange-Dirichlet	81
31.1	Teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet	81
31.2	Forme alternative dell'ipotesi su q^o	81
31.3	Ipotesi del teorema	82
31.4	Traccia della dimostrazione	82
31.5	Equivalenza fra inversione parziale e analisi lineare	89
31.6	Massimi relativi propri del potenziale	89
31.7	Estensione al caso non posizionale conservativo	89
32.	Casi critici	90
33.	Esempio notevole	91
33.1	Pendolo semplice con resistenza viscosa	92
34.	Forma forte dei teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale — criteri di Barbasin-Krasovskii	93
34.1	Equilibrio isolato	93
34.2	Sollecitazioni completamente dissipative	94
34.3	Esempi di sollecitazioni completamente dissipative	94
34.4	Teorema di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale per l'equilibrio isolato in presenza di sollecitazioni completamente dissipative	95
34.4.1	Massimo relativo proprio	95
34.4.2	Inversione completa	96
34.4.3	Attrattività	96
34.4.4	Esempio di applicazione	96
35.	Piccole oscillazioni	97
36.	Linearizzazione delle equazioni di Lagrange	97
36.1	Linearizzazione delle equazioni di Lagrange	97
36.2	Lagrangiana del sistema linearizzato	98
36.3	Significato fisico delle equazioni linearizzate	99
37.	Teoria standard delle piccole oscillazioni	99
37.1	Hessiana del potenziale definita negativa	99
37.2	Modi, coordinate, pulsazioni e frequenze normali delle piccole oscillazioni	102
37.3	Hessiana del potenziale semidefinita non definita negativa	103
37.4	Equazione caratteristica dei modi normali	103

37.5	Principio di ortogonalità	105
37.6	Sistemi forzati	106
38.	Esempio notevole di studio delle piccole oscillazioni. Il pendolo doppio	106
38.1	Energia cinetica	107
38.2	Configurazioni di equilibrio	108
38.3	Equazione delle piccole oscillazioni	108
38.4	Primo modo normale di oscillazione	109
38.5	Secondo modo normale di oscillazione	110
38.6	Interpretazione dei modi normali	110
38.7	Forma generale delle piccole oscillazioni	111
38.8	Verifica del principio di ortogonalità	111
39.	Piccole oscillazioni forzate e smorzate nell'intorno di un equilibrio	112
39.1	Equazioni linearizzate	114
39.2	Piccoli moti nell'intorno della soluzione statica	116
39.2.1	Proposizione. Caratterizzazione degli autovalori del sistema linearizzato	116
39.2.2	Proposizione. Parte reale degli autovalori	117
39.2.3	Proposizione. Soluzione particolare	119
39.2.4	Conclusioni	120
39.3	Risonanza	121
40.	Appendice. Effetto stabilizzante delle forze di Coriolis in un sistema a due gradi di libertà	128
41.	Appendice. Effetto stabilizzante delle forze di Coriolis nel problema dei tre corpi ristretto	132
41.1	Il problema	132
41.2	Equazioni del moto adimensionali	134
41.3	Configurazioni di equilibrio relativo nella terna <i>Oxyz</i>	136
41.4	Equazioni del moto linearizzate nell'intorno di una configurazione di equilibrio — soluzione statica. Analisi di stabilità	136
41.5	Calcolo delle configurazioni di equilibrio relativo	137
41.6	Hessiana del potenziale e analisi di stabilità delle configurazioni di equilibrio relativo	143
41.6.1	Punti triangolari	143
41.6.2	Punti collineari $(X_1, 0)$, $(X_2, 0)$, $(X_3, 0)$	145
41.7	I punti lagrangiani triangolari nel sistema solare	148
42.	Appendice. Criterio di Hurwitz e regola dei segni di Cartesio	148
42.1	Criterio di Hurwitz	149
42.1.1	Condizione necessaria perché tutte le radici abbiano parte reale negativa	151
42.2	Regola dei segni di Cartesio	152
43.	Appendice. Moto in un campo di forze conservative rapidamente variabili nel tempo	153
43.1	Sistema scleronomo a n gradi di libertà	153
43.2	Punto materiale vincolato a una curva fissa e liscia	159
43.2.1	Esempio. Pendolo semplice con centro oscillante lungo la verticale	160
43.2.2	Esempio. Pendolo semplice con centro oscillante in orizzontale	164