

Sistemi olonomi di parti rigide

Dispense per il corso di Meccanica Razionale 2

di Stefano Siboni

1. Sistemi olonomi costituiti da un numero finito di parti rigide

Si consideri un sistema costituito da un certo numero M di parti rigide $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_M$. Queste parti rigide verranno trattate come se fossero composte da un numero finito di punti materiali, ma la trattazione rimane valida anche per parti continue — curve, superfici, solidi materiali o unioni finite di questi. Una configurazione del sistema viene individuata assegnando le configurazioni di tutte le parti Ω_j , $j = 1, \dots, M$, in termini di appropriati parametri lagrangiani q_1, \dots, q_n ed eventualmente del tempo — qualora il sistema sia a vincoli dipendenti dal tempo. La parametrizzazione che ne risulta avrà la forma standard $P = P(t, q)$, con $q \in A \subseteq \mathbb{R}^n$, essendo A un sottoinsieme assegnato di \mathbb{R}^n . Ad un qualsiasi istante t^* ed in una configurazione P^* del sistema compatibile con i vincoli allo stesso istante⁽¹⁾, un atto di moto virtuale relativo a (t^*, P^*) è specificato mediante gli atti di moto virtuali delle singole parti rigide Ω_j . Questi saranno necessariamente atti di moto rigido e potranno sempre esprimersi nella forma generale

$$\vec{v}_i = \vec{v}_j + \vec{\omega}_j \wedge (P_i - C_j) \quad \forall P_i \in \Omega_j \quad (1.1)$$

dove $\vec{\omega}_j$ indica la velocità angolare istantanea della parte rigida Ω_j , C_j è la posizione di un punto preassegnato della stessa parte rigida e \vec{v}_j rappresenta la velocità virtuale del medesimo punto $C_j \in \Omega_j$. Il generico atto di moto virtuale sarà dunque caratterizzato completamente dall'insieme dei $2M$ vettori

$$\vec{v}_1, \vec{\omega}_1, \vec{v}_2, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{v}_M, \vec{\omega}_M \in \mathbb{R}^3 \quad (1.2)$$

per mezzo delle relazioni (1.1).

2. Condizione dei vincoli ideali

La condizione dei vincoli ideali equivale a richiedere che per un dato sistema sia soddisfatto il **principio delle reazioni vincolari**. Questo stabilisce che nella generica configurazione P^* del sistema, compatibile con i vincoli all'istante t^* comunque assegnato, le reazioni vincolari esplicabili dai vincoli siano tutti e soltanto i sistemi di vettori applicati

$$(P_i, \vec{\Phi}_i) \quad , \quad i = 1, \dots, N$$

⁽¹⁾ in modo che dovrà aversi $P^* = P(t^*, q^*)$, per $q^* \in A$ opportuno

la cui potenza virtuale risulta non negativa per qualsiasi atto di moto virtuale $\vec{v} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N)$ relativo a (t^*, P^*) :

$$\pi^\phi = \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \cdot \vec{\Phi}_i \geq 0 \quad \forall \vec{v} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N) \text{ atto di moto virtuale relativo a } (t^*, P^*).$$

Mettendo in evidenza i contributi delle singole parti rigide Ω_j la potenza virtuale delle reazioni vincolari diventa

$$\pi^\phi = \sum_{j=1}^M \sum_{P_i \in \Omega_j} [\vec{v}_j + \vec{\omega}_j \wedge (P_i - C_j)] \cdot \vec{\Phi}_i = \sum_{j=1}^M \left[\vec{v}_j \cdot \sum_{P_i \in \Omega_j} \vec{\Phi}_i + \sum_{P_i \in \Omega_j} \vec{\omega}_j \wedge (P_i - C_j) \cdot \vec{\Phi}_i \right]$$

ed è sufficiente scambiare i prodotti scalare e vettore nel prodotto misto per ottenere

$$\pi^\phi = \sum_{j=1}^M \left[\vec{v}_j \cdot \sum_{P_i \in \Omega_j} \vec{\Phi}_i + \vec{\omega}_j \cdot \sum_{P_i \in \Omega_j} (P_i - C_j) \wedge \vec{\Phi}_i \right].$$

Indicati con \vec{R}^{ϕ, Ω_j} e $\vec{M}_{C_j}^{\phi, \Omega_j}$ rispettivamente il risultante ed il momento risultante in C_j delle reazioni vincolari applicate alla parte rigida Ω_j , si può scrivere pertanto

$$\pi^\phi = \sum_{j=1}^M \left[\vec{v}_j \cdot \vec{R}^{\phi, \Omega_j} + \vec{\omega}_j \cdot \vec{M}_{C_j}^{\phi, \Omega_j} \right]$$

essendo

$$\vec{R}^{\phi, \Omega_j} = \sum_{P_i \in \Omega_j} \vec{\Phi}_i \quad \text{e} \quad \vec{M}_{C_j}^{\phi, \Omega_j} = \sum_{P_i \in \Omega_j} (P_i - C_j) \wedge \vec{\Phi}_i \quad \forall j = 1, \dots, M.$$

In tal modo la condizione di idealità dei vincoli si riduce alla richiesta che si abbia

$$\sum_{j=1}^M \left[\vec{v}_j \cdot \vec{R}^{\phi, \Omega_j} + \vec{\omega}_j \cdot \vec{M}_{C_j}^{\phi, \Omega_j} \right] \geq 0 \quad (2.1)$$

per ogni set di vettori $\vec{v}_1, \vec{\omega}_1, \dots, \vec{v}_M, \vec{\omega}_M \in \mathbb{R}^3$ che individua un atto di moto virtuale relativo all'istante t^* ed alla configurazione P^* compatibile con i vincoli a quell'istante. È esercitabile dai vincoli qualsiasi sistema di reazioni vincolari i cui risultanti e momenti risultanti, relativi alle parti rigide componenti, soddisfino la relazione (2.1); viceversa, qualsiasi sistema di reazioni vincolari esplicabili dai vincoli deve verificare la stessa condizione. Si arriva così alla importante conclusione che per un sistema composto di parti rigide la condizione dei vincoli ideali non si traduce in una prescrizione sulle singole reazioni vincolari esplicabili dai vincoli, ma piuttosto in una condizione sui risultanti e momenti risultanti delle reazioni applicate ad ogni singola parte rigida costituente:

$$\vec{R}^{\phi, \Omega_j} \quad , \quad \vec{M}_{C_j}^{\phi, \Omega_j} \quad , \quad j = 1, \dots, M.$$

Questa osservazione è in linea con il concetto fisico generale che il moto di un sistema rigido risulta determinato non già dal dettaglio delle singole sollecitazioni agenti su ogni suo punto, ma soltanto dal risultante e dal momento risultante di tali sollecitazioni.

3. Equilibri

Conformemente alla definizione generale, una configurazione P_0 del sistema ideale si dice **un equilibrio** del sistema se la quiete in P_0

$$P(t) = P_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

costituisce un moto naturale del sistema in esame. Ciò avviene se e soltanto se $P(t) = P_0$, $t \in \mathbb{R}$, è un moto possibile del sistema e se detto moto si realizza tramite reazioni vincolari esplicabili dai vincoli ideali ad ogni istante $t \in \mathbb{R}$. Si ha allora la seguente forma del

4. Teorema dei lavori virtuali

La configurazione P_0 è un equilibrio del sistema ideale se e soltanto se sono verificate entrambe le condizioni seguenti:

(i) $P(t) = P_0$, $t \in \mathbb{R}$, è un moto possibile;

(ii) $\forall t \in \mathbb{R}$ la potenza virtuale delle forze attive, calcolate all'istante t , nella configurazione P_0 assegnata e con atto di moto nullo, risulta non positiva

$$\sum_{j=1}^M \left[\vec{v}_j \cdot \vec{R}^{a, \Omega_j}(t, P_0, 0) + \vec{\omega}_j \cdot \vec{M}_{C_j}^{a, \Omega_j}(t, P_0, 0) \right] \leq 0 \quad (4.1)$$

$\forall \vec{v}_1, \vec{\omega}_1, \dots, \vec{v}_M, \vec{\omega}_M \in \mathbb{R}^3$ che specificano tramite le (1.1) un atto di moto virtuale relativo a (t, P_0) .

La diseguaglianza (4.1) si ottiene riesprimendo la potenza virtuale delle forze attive, calcolate in condizioni statiche, in modo analogo a quanto visto per il principio delle reazioni vincolari. La differenza è data dal fatto che al \geq si sostituisce ora un \leq , e che le forze attive calcolate in condizioni statiche prendono il posto delle reazioni vincolari. In tal modo i risultanti $\vec{R}^{a, \Omega_j}(t, P_0, 0)$ e i momenti risultanti $\vec{M}_{C_j}^{a, \Omega_j}(t, P_0, 0)$ in C_j delle forze attive, valutate staticamente, compaiono in luogo dei corrispondenti risultanti \vec{R}^{ϕ, Ω_j} e momenti risultanti $\vec{M}_{C_j}^{\phi, \Omega_j}$ in C_j delle reazioni vincolari.

Da sottolineare, analogamente a quanto già evidenziato per le reazioni vincolari esplicabili, come la condizione di equilibrio non dipenda dal dettaglio delle sollecitazioni attive applicate, ma soltanto dai risultanti e momenti risultanti delle sollecitazioni agenti su ciascuna parte rigida Ω_j .

5. Equazioni cardinali della statica

Se P_0 è un equilibrio del sistema ideale, la quiete in P_0 costituisce un moto naturale del sistema e soddisfa perciò, oltre ai vincoli olonomi a tutti i tempi, il postulato delle reazioni vincolari nella forma

$$0 = \vec{F}_i(t, P_0, 0) + \vec{\Phi}_i \quad \forall P_i \quad (5.1)$$

dove $\forall t \in \mathbb{R}$ le reazioni vincolari $\vec{\Phi}_i$ devono essere compatibili con la condizione dei vincoli ideali. Sommando membro a membro le equazioni (5.1) su tutti i punti della parte rigida Ω_j si ottiene l'equazione

$$0 = \vec{R}^{a, \Omega_j}(t, P_0, 0) + \vec{R}^{\phi, \Omega_j} \quad (5.2)$$

che deve essere soddisfatta $\forall t \in \mathbb{R}$ con un qualsiasi risultante \vec{R}^{ϕ, Ω_j} consentito dal principio delle reazioni vincolari.

In modo analogo, moltiplicando vettorialmente a sinistra per $P_i - C_j$ la (5.1) e sommando membro a membro le equazioni così ottenute su tutti i punti $P_i \in \Omega_j$, si perviene all'ulteriore equazione

$$0 = \vec{M}_{C_j}^{a, \Omega_j}(t, P_0, 0) + \vec{M}_{C_j}^{\phi, \Omega_j} \quad (5.3)$$

verificata $\forall t \in \mathbb{R}$ con valori del momento risultante $\vec{M}_{C_j}^{\phi, \Omega_j}$ compatibili con la condizione dei vincoli ideali. Basta ripetere l'operazione su tutte le parti rigide del sistema — ossia per $j = 1, \dots, M$ — per ottenere il sistema di $2M$ equazioni vettoriali

$$\begin{cases} 0 = \vec{R}^{a, \Omega_j}(t, P_0, 0) + \vec{R}^{\phi, \Omega_j} \\ 0 = \vec{M}_{C_j}^{a, \Omega_j}(t, P_0, 0) + \vec{M}_{C_j}^{\phi, \Omega_j} \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall j = 1, \dots, M, \quad (5.4)$$

dove i risultanti \vec{R}^{ϕ, Ω_j} ed i momenti risultanti $\vec{M}_{C_j}^{\phi, \Omega_j}$ delle reazioni vincolari possono essere tutti e soli quelli compatibili con la condizione (2.1) dei vincoli ideali. Quelle ottenute sono le cosiddette **equazioni cardinali della statica** per le parti rigide costituenti il sistema. Si dirà dunque che:

una configurazione P_0 soddisfa le equazioni cardinali statiche per tutte le parti rigide del sistema se la quiete in P_0 è un moto possibile del sistema e le equazioni (5.4) sono verificate $\forall j = 1, \dots, M$ e $\forall t \in \mathbb{R}$, con \vec{R}^{ϕ, Ω_j} e $\vec{M}_{C_j}^{\phi, \Omega_j}$ esplicabili dai vincoli ideali in (t, P_0) .

5.1 Necessità delle equazioni cardinali statiche per l'equilibrio

Per come sono state dedotte appare evidente che **le equazioni cardinali della statica per tutte le parti rigide costituiscono una condizione necessaria all'equilibrio in P_0** : se P_0 è un equilibrio, allora deve soddisfare le equazioni cardinali statiche per tutte le parti rigide del sistema.

5.2 Sufficienza delle equazioni cardinali statiche per l'equilibrio

È facile convincersi che, viceversa, se la configurazione P_0 soddisfa le equazioni cardinali statiche per tutte le parti rigide Ω_j , allora P_0 è un equilibrio: **le equazioni cardinali della statica per tutte le parti rigide del sistema sono una condizione sufficiente per l'equilibrio**. Risulta infatti che $P(t) = P_0$ è per definizione un moto possibile del sistema e che inoltre la potenza virtuale delle forze attive in $(t, P_0, 0)$ ha segno non positivo per ogni atto di moto virtuale relativo all'istante t ed alla configurazione P_0 considerata:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^M \left[\vec{v}_j \cdot \vec{R}^{a, \Omega_j}(t, P_0, 0) + \vec{\omega}_j \cdot \vec{M}_{C_j}^{a, \Omega_j}(t, P_0, 0) \right] = \\ & = \sum_{j=1}^M \left[\vec{v}_j \cdot (-\vec{R}^{\phi, \Omega_j}) + \vec{\omega}_j \cdot (-\vec{M}_{C_j}^{\phi, \Omega_j}) \right] = - \sum_{j=1}^M \left[\vec{v}_j \cdot \vec{R}^{\phi, \Omega_j} + \vec{\omega}_j \cdot \vec{M}_{C_j}^{\phi, \Omega_j} \right] \leq 0 \end{aligned}$$

per via della condizione (2.1). In virtù di tale risultato, il teorema dei lavori virtuali assicura che P_0 è una configurazione di equilibrio e ciò prova l'asserto.

5.3 Necessità e sufficienza delle equazioni cardinali statiche per l'equilibrio

Compendiando i risultati precedenti si conclude che:

le equazioni cardinali della statica di ciascuna parte rigida costituente il sistema sono condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio.

Vale la pena di sottolineare che quanto dimostrato **non è in contraddizione** con l'asserto secondo il quale **le equazioni cardinali della statica sono in generale necessarie ma non sufficienti per l'equilibrio**, a meno che non si abbia a che fare con un sistema rigido a vincoli ideali. Tale affermazione si riferisce infatti alle equazioni cardinali statiche **dell'intero sistema**, che costituirebbero un set di **due sole equazioni vettoriali** — peraltro identificabili con la somma membro a membro delle (5.2) e (5.3) per $j = 1, \dots, M$. Nella fattispecie, le equazioni cardinali statiche vanno considerate **per ogni parte rigida** e danno luogo ad un sistema di $2M$ equazioni vettoriali.

6. Equivalenza fra equazioni cardinali statiche e teorema dei lavori virtuali

Per quanto stabilito sopra si può affermare che in un sistema olonomo a vincoli ideali costituito da un numero finito di parti rigide Ω_j le equazioni cardinali statiche per tutte le Ω_j ed il teorema dei lavori virtuali sono equivalenti, consentendo entrambi di ricavare tutte le configurazioni di equilibrio del sistema.

Nell'analisi statica del sistema si dispone quindi di due strumenti:

- (i) teorema dei lavori virtuali;
- (ii) equazioni cardinali statiche per tutte le parti rigide componenti.

6.1 Approccio pratico alla statica dei sistemi

Equivalenza formale non significa tuttavia che le due strategie siano ugualmente appetibili nei calcoli pratici. Di regola, *l'uso del teorema dei lavori virtuali è preferibile a quello delle equazioni cardinali statiche per tutte le parti rigide componenti*. Il motivo è che il teorema dei lavori virtuali consente di calcolare le configurazioni di equilibrio prescindendo completamente dalle reazioni vincolari: esso infatti si riduce ad un set di n equazioni e/o disequazioni (per le configurazioni di confine) nelle quali non compaiono le reazioni vincolari, ma soltanto gli n parametri lagrangiani del sistema.

Per contro, le $2M$ equazioni cardinali statiche — equivalenti a $6M$ equazioni scalari — contengono come incognite non soltanto gli n parametri lagrangiani atti ad individuare le configurazioni di equilibrio del sistema, ma anche i risultanti ed i momenti risultanti delle reazioni vincolari relativi alle varie parti rigide Ω_j , che costituiscono un ulteriore set di $6M$ incognite. Detti risultanti e momenti devono peraltro soddisfare il principio delle reazioni vincolari espresso da (2.1), che si traduce in un sistema di n equazioni e/o disequazioni poiché in un sistema olonomo a n gradi di libertà i vettori $\vec{v}_1, \vec{\omega}_1, \dots, \vec{v}_M, \vec{\omega}_M \in \mathbb{R}^3$ che individuano gli atti di moto virtuali in (t^*, P^*) non sono indipendenti, ma devono potersi esprimere in termini di n coefficienti scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ scelti opportunamente, gli stessi che definiscono l'atto di moto virtuale nella forma generale

$$\vec{v} = \sum_{h=1}^n \alpha_h \frac{\partial P}{\partial q_h}(t^*, q^*).$$

In definitiva, le equazioni cardinali della statica costituiscono, assieme alla condizione dei vincoli ideali, un set di $6M$ equazioni + n equazioni e/o disequazioni in $6M + n$ incognite, che è certamente più impegnativo da risolvere che non applicare il teorema dei lavori virtuali, con sole n equazioni e/o disequazioni in altrettante incognite.

Nella soluzione del problema statico conviene pertanto, come regola generale:

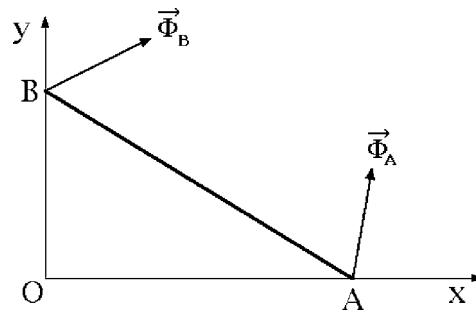
- (i) individuare gli equilibri facendo ricorso al teorema dei lavori virtuali;
- (ii) per ogni configurazione di equilibrio calcolare i risultanti e i momenti risultanti delle reazioni vincolari agenti su ogni singola parte rigida Ω_j componente il sistema, usando le equazioni cardinali statiche per ciascuna delle parti rigide.

7. Sistemi ideali a reazioni vincolari concentrate

Nella trattazione dei sistemi a vincoli ideali non è necessario considerare esplicitamente le reazioni vincolari agenti sui singoli punti: la statica viene descritta in modo esauriente con il teorema dei lavori virtuali, la dinamica con le equazioni di Lagrange.

Una simile astrazione può tuttavia non essere adeguata ad analizzare sistemi meccanici di interesse pratico. Può risultare più realistico, o vantaggioso, formulare delle ipotesi circa la ubicazione e la tipologia delle reazioni vincolari che effettivamente agiscono sul sistema.

Per esempio, supponendo che un'asta rigida rettilinea AB abbia gli estremi A e B rispettivamente vincolati a scorrere lungo gli assi Ox e Oy di una terna cartesiana ortogonale, potrebbe essere ragionevole assumere che le reazioni vincolari interne all'asta possano consistere in un qualsiasi sistema di vettori applicati ad AB di risultante e momento risultante nullo, secondo il modello di corpo rigido perfetto, mentre le reazioni vincolari esterne potrebbero ridursi ad una sola reazione $\vec{\Phi}_A$ agente in A e ad un'ulteriore reazione $\vec{\Phi}_B$ applicata in B .



Si arriva così alla seguente definizione.

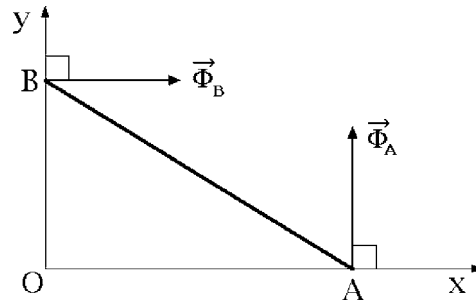
7.1 Sistemi a reazioni vincolari concentrate

Tipicamente, per semplicità, si assume che le reazioni vincolari agenti su ogni parte rigida Ω_j del sistema siano classificabili secondo lo schema seguente:

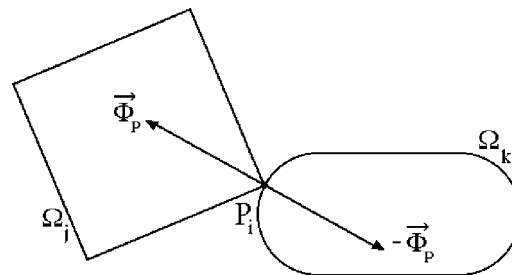
- **reazioni vincolari interne** alla parte Ω_j e
- **reazioni vincolari esterne** alla stessa parte rigida,

in modo che le reazioni vincolari applicate in ciascun punto di Ω_j sono date dalla somma dei contributi interni ed esterni. Seguendo l'idea generale di solido rigido perfetto, ovvero di sistema rigido libero a vincoli ideali, *si ammette che qualsiasi sistema di vettori applicati ad Ω_j con risultante e momento risultante nulli, possa costituire un sistema di reazioni vincolari interne esplicabili dai vincoli*. Per quanto riguarda invece le reazioni esterne, si conviene che queste agiscano su un numero finito — e in genere piccolo — di punti di Ω_j . Si dice che il sistema è **a reazioni vincolari** (esterne) **concentrate**.

Le reazioni vincolari esterne possono soddisfare ulteriori condizioni di carattere geometrico; così ad esempio, nel caso dell'asta AB potrebbe essere plausibile assumere che i contatti in A e B siano privi di attrito e che le relative reazioni vincolari esterne $\vec{\Phi}_A$ e $\vec{\Phi}_B$ risultino ortogonali ai rispettivi assi Ox e Oy .



Qualora poi due parti rigide Ω_j e Ω_k di un sistema complesso fossero connesse in un comune punto P_i per mezzo di una cerniera, sarebbe del tutto ragionevole imporre che le reazioni vincolari esterne applicate a $P_i \in \Omega_j$ e a $P_i \in \Omega_k$ siano opposte fra loro, conformemente al principio di azione e reazione — dette reazioni derivano da una interazione di contatto fra i corpi rigidi Ω_j e Ω_k .

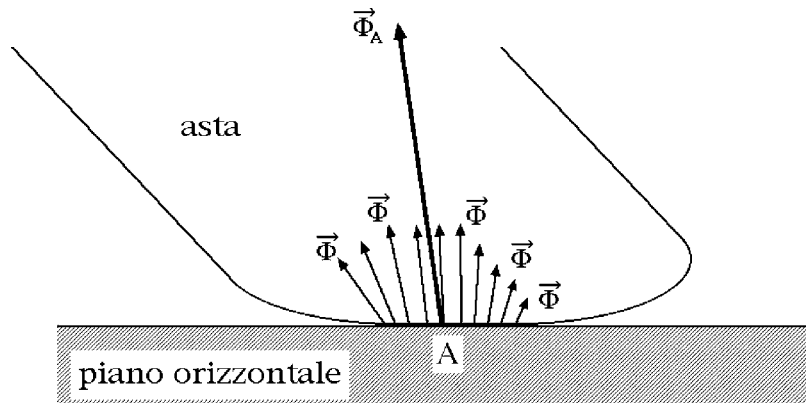


7.2 Limiti del modello a reazioni concentrate

Un modello a reazioni vincolari esterne concentrate potrebbe non essere adeguato per descrivere il comportamento statico e dinamico di un sistema olonomo reale. In particolare, l'effettiva distribuzione delle reazioni vincolari esterne dipende, in generale, dal modo in cui fisicamente vengono realizzati i vincoli. Riprendendo l'esempio dell'asta già considerato in precedenza, se l'asta fosse vincolata a rimanere nel piano coordinato Oxy perchè confinata fra due superfici piane parallele a Oxy , rasenti il piano coordinato stesso, apparirebbe molto più plausibile descrivere le reazioni vincolari esterne ad AB come un campo di reazioni vincolari applicate lungo l'intero corpo dell'asta, piuttosto che mediante due sole reazioni vincolari esterne applicate negli estremi A e B .

Anche ammettendo che le reazioni vincolari esterne significative siano applicate soltanto agli estremi, può rendersi necessario considerare che i punti A e B rappresentano in realtà delle superfici di contatto fra l'asta rigida e i vincoli esterni; tali superfici, per quanto

piccole, sono sede di **campi** di reazioni vincolari distribuite i cui risultanti appaiono certamente rappresentabili in modo soddisfacente per mezzo delle reazioni concentrate $\vec{\Phi}_A$ e $\vec{\Phi}_B$, ma i cui momenti risultanti rispetto ai punti A e B potrebbero tranquillamente assumere valori non nulli, obbligando così ad introdurre negli stessi punti A e B degli opportuni **momenti concentrati** di reazioni vincolari esterne.



7.3 Calcolo delle reazioni vincolari

In un sistema a vincoli ideali, composto di un numero finito di parti rigide, per ciascuna configurazione di equilibrio è possibile determinare un set di risultanti e momenti risultanti delle reazioni vincolari agenti su ogni singola parte rigida che realizza la quiete in quella configurazione e soddisfa i requisiti imposti dalla condizione dei vincoli ideali.

La conoscenza dei risultanti e momenti risultanti delle reazioni relativi alle varie parti rigide non consente di calcolare le reazioni vincolari interne applicate ai singoli punti, in quanto comunque troppo numerose. Se però il sistema è anche a reazioni vincolari esterne concentrate, c'è la possibilità che le reazioni vincolari esterne siano determinabili in modo esplicito, una ad una, perchè in numero **finito e piccolo**.

Tipicamente si tratta di risolvere un sistema di **equazioni algebriche lineari**, le equazioni cardinali statiche per tutte le parti rigide componenti, rispetto alle componenti delle reazioni vincolari esterne concentrate.

Nell'esempio suesposto dell'asta vincolata le reazioni vincolari esterne incognite $\vec{\Phi}_A$ e $\vec{\Phi}_B$ si ricavano risolvendo il sistema di equazioni algebriche lineari

$$\begin{cases} \vec{\Phi}_A + \vec{\Phi}_B = \vec{R}^\phi \\ (B - A) \wedge \vec{\Phi}_B = \vec{M}_A^\phi \end{cases}$$

dove i termini noti \vec{R}^ϕ e \vec{M}_A^ϕ sono gli opposti del risultante e del momento risultante, rispettivamente, delle forze attive agenti sul sistema calcolate in condizioni statiche.

Nella fattispecie, il sistema è costituito da 6 equazioni scalari e va risolto rispetto alle 6 incognite rappresentate dalle componenti cartesiane delle reazioni vincolari concentrate $\vec{\Phi}_A$ e $\vec{\Phi}_B$.

In generale, è lecito aspettarsi che qualora il numero di reazioni vincolari esterne concentrate risulti adeguatamente piccolo, le equazioni cardinali statiche per tutte le parti rigide consentano di determinare univocamente tutte tali reazioni.

7.4 Sistemi staticamente determinati e indeterminati

Per le equazioni cardinali statiche relative a tutte le parti rigide del sistema, due sono i casi possibili:

- (i) la soluzione esiste unica, le reazioni vincolari esterne concentrate sono determinate in modo univoco e il sistema si dice **staticamente determinato**;
- (ii) esistono infinite soluzioni, per cui le reazioni vincolari esterne concentrate non sono fissate in modo univoco dalle equazioni cardinali statiche e il sistema si dice **staticamente indeterminato**

Notare che in un sistema di equazioni lineari non è possibile ottenere un numero finito e strettamente maggiore di uno di soluzioni, dunque non esistono situazioni “intermedie” rispetto ai due casi individuati.

7.5 Vincoli ideali

È importante sottolineare come un sistema a reazioni vincolari concentrate non sia necessariamente a vincoli ideali; il problema non si pone per le reazioni interne le quali, avendo risultante e momento risultante nulli, soddisfano sempre la condizione (2.1). Sono piuttosto le reazioni esterne che potrebbero non verificare la (2.1), oppure non essere in grado di produrre qualsiasi risultante \vec{R}^{ϕ, Ω_j} e momento risultante $\vec{M}_{C_j}^{\phi, \Omega_j}$ compatibile con la stessa relazione. Nell'uno come nell'altro caso il sistema non può considerarsi a vincoli ideali. Per l'idealità dei vincoli si deve dunque richiedere che *le reazioni vincolari esterne concentrate esplicabili dai vincoli siano in grado di generare tutti e soltanto i risultanti \vec{R}^{ϕ, Ω_j} ed i momenti risultanti $\vec{M}_{C_j}^{\phi, \Omega_j}$ compatibili con la (2.1).*

Qualora la condizione non sia soddisfatta non sarà possibile fare uso del teorema dei lavori virtuali per determinare gli equilibri del sistema!

7.6 Vincoli non ideali

Se un sistema a reazioni vincolari concentrate non è a vincoli ideali la sola strategia utile per determinarne gli equilibri consiste nel risolvere le equazioni cardinali statiche, le quali sono necessarie e sufficienti per l'equilibrio.

In ossequio alla definizione generale, una certa configurazione P_0 si dirà di equilibrio per il sistema se in essa è possibile collocare il sistema in quiete rispettando i vincoli olonomi a tutti i tempi — $P(t) = P_0 \forall t \in \mathbb{R}$ è un moto possibile — ed applicando soltanto reazioni

vincolari consentite dai vincoli, conformemente all'ipotesi delle reazioni vincolari esterne concentrate.

Da questa ovvia definizione segue immediatamente che nella configurazione di equilibrio P_0 devono essere soddisfatte le equazioni cardinali statiche per tutte le parti rigide

$$\begin{cases} 0 = \vec{R}^{a,\Omega_j}(t, P_0, 0) + \vec{R}^{\phi^e,\Omega_j} \\ 0 = \vec{M}_{C_j}^{a,\Omega_j}(t, P_0, 0) + \vec{M}_{C_j}^{\phi^e,\Omega_j} \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall j = 1, \dots, M, \quad (7.1)$$

dove i risultanti $\vec{R}^{\phi^e,\Omega_j}$ e i momenti risultanti $\vec{M}_{C_j}^{\phi^e,\Omega_j}$ delle reazioni vincolari devono potersi calcolare, ad ogni istante, in termini delle sole reazioni vincolari esterne concentrate consentite dai vincoli — quelle interne non vengono chiamate in causa, avendo comunque risultanti e momenti risultanti nulli, per definizione. *Le equazioni cardinali statiche per tutte le parti rigide sono condizioni necessarie per l'equilibrio.*

Se viceversa si assumono verificate le (7.1) in una certa configurazione P_0 del sistema, e lo stato di quiete $P(t) = P_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ è un moto possibile, per ogni punto P_i del sistema il postulato delle reazioni vincolari porge l'equazione

$$0 = \vec{F}_i(t, P_0, 0) + \vec{\Phi}_i^e + \vec{\Phi}_i^i$$

nella quale si sono evidenziate le reazioni vincolari interne ed esterne alla parte rigida di appartenenza di P_i . Di qui si deduce

$$\vec{\Phi}_i^i = -\vec{F}_i(t, P_0, 0) - \vec{\Phi}_i^e$$

e moltiplicando vettorialmente a sinistra per $P_i - C_j$

$$(P_i - C_j) \wedge \vec{\Phi}_i^i = -(P_i - C_j) \wedge \vec{F}_i(t, P_0, 0) - (P_i - C_j) \wedge \vec{\Phi}_i^e.$$

Basta infine sommare membro a membro ciascuna delle due precedenti equazioni su tutti i punti P_i della generica parte rigida Ω_j per ottenere

$$\vec{R}^{\phi^i,\Omega_j} = -(\vec{R}^{a,\Omega_j}(t, P_0, 0) + \vec{R}^{\phi^e,\Omega_j}) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall j = 1, \dots, M,$$

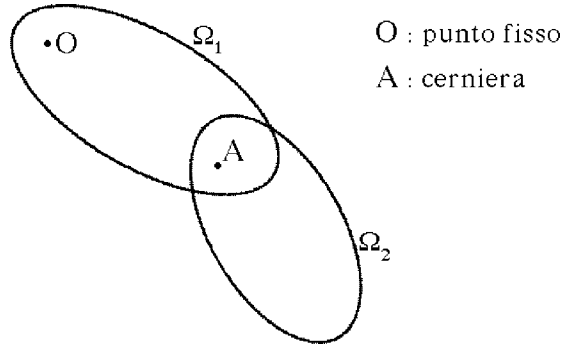
e

$$\vec{M}_{C_j}^{\phi^i,\Omega_j} = -(\vec{M}_{C_j}^{a,\Omega_j}(t, P_0, 0) + \vec{M}_{C_j}^{\phi^e,\Omega_j}) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall j = 1, \dots, M,$$

in modo che le reazioni vincolari interne sono certamente esplicabili dai vincoli, avendo risultanti e momenti risultanti nulli su ciascuna parte rigida Ω_j : nel trarre questa conclusione è **cruciale l'assunto che tutte le parti rigide costituenti il sistema siano corpi rigidi perfetti**, come espressamente specificato nella definizione 7.1. Dunque *le equazioni cardinali statiche per tutte le parti rigide sono condizioni sufficienti per l'equilibrio.*

8. Esempio di sistema a reazioni vincolari esterne concentrate e a vincoli ideali

Si consideri un sistema a vincoli ideali composto da due parti rigide Ω_1 e Ω_2 , la prima delle quali ha il punto O fissato nell'origine della terna di riferimento assoluta. I due corpi rigidi sono inoltre incernierati nel punto $A \neq O$, come illustrato nella figura seguente:



Il sistema è olonomo a 6 gradi di libertà ma non conviene introdurre alcun sistema di coordinate lagrangiane, che nella discussione seguente non è necessario. Per ogni punto P di Ω_1 il generico spostamento virtuale si esprime per mezzo del teorema di Poisson, considerato il punto fisso O :

$$\delta P = \delta \vec{\omega}_1 \wedge (P - O) \quad \forall \delta \vec{\omega}_1 \in \mathbb{R}^3$$

mentre per un qualsiasi punto $P \in \Omega_2$ lo stesso teorema di Poisson porge:

$$\delta P = \delta \vec{\omega}_1 \wedge (A - O) + \delta \vec{\omega}_2 \wedge (P - A) \quad \forall \delta \vec{\omega}_1, \delta \vec{\omega}_2 \in \mathbb{R}^3.$$

La condizione dei vincoli ideali diventa perciò:

$$\begin{aligned} \delta L^\phi &= \sum_{P \in \Omega_1} \delta \vec{\omega}_1 \wedge (P - O) \cdot \vec{\Phi}_P + \sum_{P \in \Omega_2} [\delta \vec{\omega}_1 \wedge (A - O) + \delta \vec{\omega}_2 \wedge (P - A)] \cdot \vec{\Phi}_P = \\ &= \delta \vec{\omega}_1 \cdot \sum_{P \in \Omega_1} (P - O) \wedge \vec{\Phi}_P + \delta \vec{\omega}_1 \cdot (A - O) \wedge \sum_{P \in \Omega_2} \vec{\Phi}_P + \delta \vec{\omega}_2 \cdot \sum_{P \in \Omega_2} (P - A) \wedge \vec{\Phi}_P = \\ &= \delta \vec{\omega}_1 \cdot \vec{M}_O^{\phi,1} + \delta \vec{\omega}_1 \cdot (A - O) \wedge \vec{R}^{\phi,2} + \delta \vec{\omega}_2 \cdot \vec{M}_A^{\phi,2} = \\ &= \delta \vec{\omega}_1 \cdot [\vec{M}_O^{\phi,1} + (A - O) \wedge \vec{R}^{\phi,2}] + \delta \vec{\omega}_2 \cdot \vec{M}_A^{\phi,2} \geq 0 \quad \forall \delta \vec{\omega}_1, \delta \vec{\omega}_2 \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

e si riduce al sistema di equazioni vettoriali:

$$\begin{cases} \vec{M}_O^{\phi,1} + (A - O) \wedge \vec{R}^{\phi,2} = 0 \\ \vec{M}_A^{\phi,2} = 0 \end{cases}$$

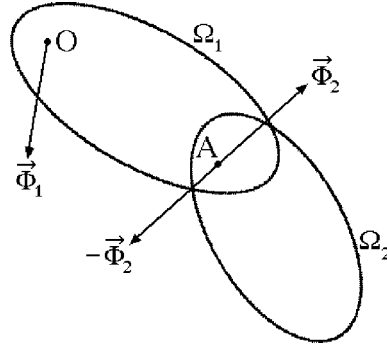
il cui numero di componenti scalari — 6 — coincide con il numero di gradi di libertà del sistema, come deve essere. In condizioni di vincoli ideali le reazioni vincolari esplicabili dal sistema sono tutte e soltanto quelle i cui risultanti $\vec{R}^{\phi,1}$, $\vec{R}^{\phi,2}$ e momenti risultanti $\vec{M}_O^{\phi,1}$, $\vec{M}_A^{\phi,2}$ appartengono all'insieme:

$$V = \left\{ (\vec{R}^{\phi,1}, \vec{R}^{\phi,2}, \vec{M}_O^{\phi,1}, \vec{M}_A^{\phi,2}) = (\vec{R}^{\phi,1}, \vec{R}^{\phi,2}, -(A-O) \wedge \vec{R}^{\phi,2}, 0) \quad \forall \vec{R}^{\phi,1}, \vec{R}^{\phi,2} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

che nella fattispecie presenta la struttura di un sottospazio vettoriale di dimensione $12 - 6 = 6$ in \mathbb{R}^{12} .

Un sistema a reazioni vincolari esterne concentrate si ottiene assumendo reazioni vincolari interne arbitrarie, purché di risultanti e momenti risultanti nulli sulle parti rigide Ω_1 e Ω_2 , e per quanto riguarda le reazioni esterne:

- sulla parte rigida Ω_1 una reazione concentrata $\vec{\Phi}_1$ applicata in O e una seconda reazione $\vec{\Phi}_2$ agente in A , entrambe arbitrarie;
- sulla parte rigida Ω_2 una reazione $-\vec{\Phi}_2$ applicata in A . La scelta del vettore è suggerita dal principio di azione e reazione, considerato che in questo modello $\vec{\Phi}_2$ rappresenta l'azione del punto $A \in \Omega_2$ sul punto corrispondente di Ω_1 , mentre $-\vec{\Phi}_2$ esprime la reazione che il punto A di Ω_1 esercita su $A \in \Omega_2$.



In questo modello semplificato, a reazioni esterne concentrate, risultanti e momenti risultanti assumono la forma:

$$\begin{cases} \vec{R}^{\phi,1} = \vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_2 \\ \vec{R}^{\phi,2} = -\vec{\Phi}_2 \\ \vec{M}_O^{\phi,1} = (A - O) \wedge \vec{\Phi}_2 \\ \vec{M}_A^{\phi,2} = 0 \end{cases}$$

per cui le reazioni esplicabili dai vincoli sono tutte e soltanto quelle i cui risultanti e momenti risultanti appartengono al sottoinsieme di \mathbb{R}^{12} :

$$\tilde{V} = \left\{ (\vec{R}^{\phi,1}, \vec{R}^{\phi,2}, \vec{M}_O^{\phi,1}, \vec{M}_A^{\phi,2}) = (\vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_2, -\vec{\Phi}_2, (A - O) \wedge \vec{\Phi}_2, 0) \quad \forall \vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2 \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

che con il cambiamento di variabili $(\vec{R}^{\phi,1}, \vec{R}^{\phi,2}) \rightarrow (\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ definito dalla biiezione di \mathbb{R}^6 in sè:

$$\begin{cases} \vec{\alpha} = \vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_2 \\ \vec{\beta} = -\vec{\Phi}_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{\Phi}_1 = \vec{\alpha} + \vec{\beta} \\ \vec{\Phi}_2 = -\vec{\beta} \end{cases}$$

si riduce a:

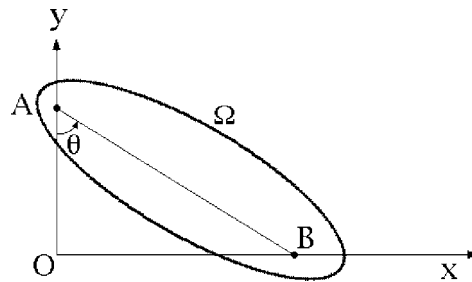
$$\tilde{V} = \left\{ (\vec{R}^{\phi,1}, \vec{R}^{\phi,2}, \vec{M}_O^{\phi,1}, \vec{M}_A^{\phi,2}) = (\vec{\alpha}, \vec{\beta}, -(A - O) \wedge \vec{\beta}, 0) \quad \forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

e si riconosce quindi coincidere con il sottospazio V . *I risultanti e i momenti risultanti delle reazioni vincolari sulle singole parti rigide sono tutte e soltanto quelle compatibili con la condizione dei vincoli ideali: il sistema ideale e quello a reazioni concentrate sono perciò equivalenti agli effetti dinamici, condividendo tutti i moti naturali (e gli equilibri).*

9. Esempio di sistema a reazioni vincolari concentrate non a vincoli ideali

Si considera un semplice esempio di sistema a reazioni vincolari concentrate che non soddisfa il requisito dei vincoli ideali. L'esempio illustra come *la mancata equivalenza dinamica fra sistema ideale e sistema a reazioni concentrate possa invalidare l'equivalenza fra equazioni cardinali e teorema dei lavori virtuali* per la determinazione degli equilibri. Si tratta di una contraddizione apparente, dovuta al fatto che in condizioni di vincoli non ideali il teorema dei lavori virtuali non è in realtà applicabile.

È data una lamina piana Ω vincolata a muoversi nel piano coordinato Oxy di una terna di riferimento cartesiana ortogonale, con il punto $A \in \Omega$ costretto a scorrere sull'asse Oy ed un secondo punto $B \in \Omega$ vincolato a rimanere sull'asse coordinato Ox .



Il sistema si suppone a vincoli ideali e la sua configurazione viene individuata per mezzo dell'angolo θ indicato in figura. I vettori posizione dei punti A e B si scrivono in funzione di θ :

$$A - O = |A - B| \cos \theta \hat{e}_2 \quad B - O = |A - B| \sin \theta \hat{e}_1$$

e i loro spostamenti virtuali valgono perciò:

$$\delta A = -|A - B| \sin \theta \hat{e}_2 \delta \theta \quad \delta B = |A - B| \cos \theta \hat{e}_1 \delta \theta$$

per cui lo spostamento virtuale di un arbitrario punto $P \in \Omega$ si calcola usando il teorema di Poisson:

$$\delta P = -\delta\theta |A - B| \sin\theta \hat{e}_2 + \delta\theta \hat{e}_3 \wedge (P - A) = [-|A - B| \sin\theta \hat{e}_2 + \hat{e}_3 \wedge (P - A)] \delta\theta.$$

Dall'espressione degli spostamenti virtuali segue la condizione dei vincoli ideali:

$$\begin{aligned} \delta L^\phi &= \sum_{P \in \Omega} \delta P \cdot \vec{\Phi}_P = \sum_{P \in \Omega} [-|A - B| \sin\theta \hat{e}_2 + \hat{e}_3 \wedge (P - A)] \delta\theta \cdot \vec{\Phi}_P = \\ &= (-|A - B| \sin\theta \hat{e}_2 \cdot \vec{R}^\phi + \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_A^\phi) \delta\theta \geq 0 \quad \forall \delta\theta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

che per l'arbitrarietà di $\delta\theta$ si riduce all'equazione:

$$-|A - B| \sin\theta \hat{e}_2 \cdot \vec{R}^\phi + \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_A^\phi = 0. \quad (9.1)$$

Nella configurazione individuata da un assegnato valore di θ le reazioni vincolari esercitabili dal sistema sono tutte e sole quelle il cui risultante \vec{R}^ϕ e momento risultante \vec{M}_A^ϕ soddisfano l'equazione (9.1) e dunque appartengono all'insieme:

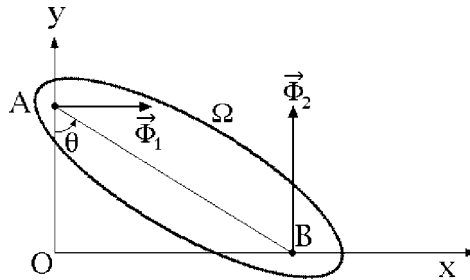
$$V = \left\{ (\vec{R}^\phi, \vec{M}_A^\phi \cdot \hat{e}_1, \vec{M}_A^\phi \cdot \hat{e}_2, \vec{M}_A^\phi \cdot \hat{e}_3) = (\vec{R}^\phi, \vec{M}_A^\phi \cdot \hat{e}_1, \vec{M}_A^\phi \cdot \hat{e}_2, |A - B| \sin\theta \hat{e}_2 \cdot \vec{R}^\phi) \right. \\ \left. \forall \vec{R}^\phi \in \mathbb{R}^3, \forall \vec{M}_A^\phi \cdot \hat{e}_1 \in \mathbb{R}, \forall \vec{M}_A^\phi \cdot \hat{e}_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

che costituisce un sottospazio vettoriale di dimensione 5 dello spazio \mathbb{R}^6 . Si può ragionevolmente pensare di introdurre un sistema equivalente a reazioni vincolari esterne concentrate assumendo reazioni interne arbitrarie, salvo che per l'annullarsi di risultante e momento risultante, una reazione vincolare esterna in A ortogonale a Oy :

$$\vec{\Phi}_1 = \Phi_{Ax} \hat{e}_1 + \Phi_{Az} \hat{e}_3 \quad \forall \Phi_{Ax}, \Phi_{Az} \in \mathbb{R}$$

e una reazione vincolare esterna in B ortogonale a Ox :

$$\vec{\Phi}_2 = \Phi_{By} \hat{e}_2 + \Phi_{Bz} \hat{e}_3 \quad \forall \Phi_{By}, \Phi_{Bz} \in \mathbb{R}.$$



In tal modo il sistema di reazioni vincolari esplicabili dai vincoli, in una data configurazione, è specificato completamente. Nondimeno, il risultante delle reazioni vincolari vale:

$$\vec{R}^\phi = \Phi_{Ax} \hat{e}_1 + \Phi_{By} \hat{e}_2 + (\Phi_{Az} + \Phi_{Bz}) \hat{e}_3$$

mentre per il momento risultante in A si ha:

$$\begin{aligned}\vec{M}_A^\phi &= |A - B|(\sin \theta \hat{e}_1 - \cos \theta \hat{e}_2) \wedge (\Phi_{By} \hat{e}_2 + \Phi_{Bz} \hat{e}_3) = \\ &= |A - B|(-\Phi_{Bz} \cos \theta \hat{e}_1 - \Phi_{Bz} \sin \theta \hat{e}_2 + \Phi_{By} \sin \theta \hat{e}_3)\end{aligned}$$

sicché risultante e momento risultante delle reazioni vincolari si collocano nel sottoinsieme di \mathbb{R}^6 :

$$\tilde{V} = \left\{ (\vec{R}^\phi, \vec{M}_A^\phi \cdot \hat{e}_1, \vec{M}_A^\phi \cdot \hat{e}_2, \vec{M}_A^\phi \cdot \hat{e}_3) = (\Phi_{Ax}, \Phi_{By}, \Phi_{Az} + \Phi_{Bz}, -|A - B|\Phi_{Bz} \cos \theta, -|A - B|\Phi_{Bz} \sin \theta, |A - B|\Phi_{By} \sin \theta), \quad \forall \Phi_{Ax}, \Phi_{Az}, \Phi_{By}, \Phi_{Bz} \in \mathbb{R} \right\},$$

sottospazio vettoriale di dimensione 4. \tilde{V} è **strettamente incluso** in V , dal momento che la quarta e la quinta componente dei suoi vettori non sono arbitrarie come in V :

$$-|A - B|\Phi_{Bz} \cos \theta \quad -|A - B|\Phi_{Bz} \sin \theta.$$

Ciò esprime il fatto che il momento assiale rispetto alla retta AB delle reazioni vincolari risulta nullo:

$$\begin{aligned}\vec{M}_A^\phi \cdot (B - A) &= \vec{M}_A^\phi \cdot |A - B|(\sin \theta \hat{e}_1 - \cos \theta \hat{e}_2) = \\ &= |A - B|(\sin \theta \vec{M}_A^\phi \cdot \hat{e}_1 - \cos \theta \vec{M}_A^\phi \cdot \hat{e}_2) = 0\end{aligned}$$

Il sistema semplificato non è dinamicamente equivalente a quello ideale e una applicazione — indebita! — del teorema dei lavori virtuali potrebbe condurre a riconoscere come equilibri configurazioni non identificabili come tali mediante le equazioni cardinali statiche: teorema dei lavori virtuali ed equazioni cardinali della statica non sono paradigmi equivalenti per la caratterizzazione degli equilibri.

Così ad esempio, se il sistema fosse a vincoli ideali e soggetto esclusivamente ad una coppia di momento:

$$\alpha(B - A) \quad (\alpha \neq 0)$$

tutte le configurazioni sarebbero di equilibrio, mentre per il modello a reazioni vincolari concentrate le equazioni cardinali statiche permettono di escludere l'esistenza di qualsivoglia configurazione di equilibrio. In effetti, con $\vec{R}^a = 0$ e $\vec{M}_A^a = \alpha(B - A)$ la componente lagrangiana Q_θ delle sollecitazioni attive è definita da:

$$Q_\theta \delta\theta = (-|A - B| \sin \theta \hat{e}_2 \cdot \vec{R}^a + \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_A^a) \delta\theta$$

e risulta quindi identicamente nulla:

$$Q_\theta = -|A - B| \sin \theta \hat{e}_2 \cdot \vec{R}^a + \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_A^a = -|A - B| \sin \theta \hat{e}_2 \cdot 0 + \hat{e}_3 \cdot \alpha(B - A) = 0$$

dal che, per il teorema dei lavori virtuali, si riconosce che tutte le configurazioni sono di equilibrio se i vincoli si assumono ideali. Per contro, nel modello a reazioni esterne concentrate l'equazione cardinale del momento angolare in A proiettata lungo l'asse AB porge, in condizioni statiche:

$$[(B - A) \wedge \vec{\Phi}_B + \alpha(B - A)] \cdot (B - A) = 0$$

ossia:

$$\alpha |B - A|^2 = 0$$

e **non è mai soddisfatta!** L'interpretazione fisica del risultato è immediata, in quanto la quiete in una qualsiasi configurazione comporterebbe che i vincoli siano in grado di bilanciare la coppia attiva di momento $\alpha(B - A)$ con una coppia di reazioni vincolari di momento opposto; ma se le reazioni vincolari esterne sono applicate nei soli punti A e B il momento risultante in A delle reazioni deve risultare ortogonale a $B - A$ ed il bilanciamento richiesto risulta impossibile.

10. Relazione simbolica della dinamica per i moti naturali

I moti naturali del sistema ideale sono, fra tutti i moti possibili, quelli che si accompagnano a reazioni vincolari effettivamente esplicabili dai vincoli e quindi compatibili con il principio delle reazioni vincolari. In termini della parametrizzazione $P(t, q)$, $(t, q) \in \mathbb{R} \times A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, del sistema olonomo, un generico moto possibile si scrive nella forma

$$P(t) = P(t, q(t))$$

dove la funzione $q(t)$ soddisfa soltanto a requisiti minimi, quali l'appartenenza alla classe C^2 in un intervallo di tempo I e l'ovvia inclusione della sua immagine nell'insieme A di definizione dei parametri lagrangiani $q = (q_1, \dots, q_n)$; se sono presenti anche vincoli anolonomi, la funzione $q(t)$ deve essere scelta in modo da soddisfare altresì le relazioni di definizione di tali vincoli:

$$f(t, q(t), \dot{q}(t)) \geq 0.$$

Il moto possibile risulta così regolare — cioè di classe C^2 — nell'intervallo I e soddisfa ivi tutti i vincoli imposti al sistema, olonomi ed anolonomi. Il moto $P(t)$, $t \in I$, è naturale per il sistema a vincoli ideali se e solo se $\forall t \in I$ risulta

$$\sum_{i=1}^N [m_i \ddot{P}_i - \vec{F}_i(t, P, \dot{P})] \cdot \vec{v}_i \geq 0$$

$\forall \vec{v} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N)$, atto di moto virtuale relativo a $(t, P(t))$. Questa **relazione simbolica della dinamica** può esprimersi in una forma equivalente, ma più adatta alla successiva analisi, evidenziando i contributi relativi alle singole parti rigide costituenti il sistema e

facendo uso dei vettori $\vec{v}_j, \vec{\omega}_j$ per caratterizzare gli atti di moto virtuali. La condizione necessaria e sufficiente affinché il moto possibile $P(t)$ sia naturale è allora che a tutti i tempi $t \in I$ si abbia

$$\sum_{j=1}^M \sum_{P_i \in \Omega_j} [\vec{v}_j + \vec{\omega}_j \wedge (P_i - C_j)] \cdot [m_i \ddot{P}_i - \vec{F}_i(t, P, \dot{P})] \geq 0 \quad (10.1)$$

per ogni set di vettori $\vec{v}_1, \vec{\omega}_1, \dots, \vec{v}_M, \vec{\omega}_M \in \mathbb{R}^3$ che individuano un atto di moto virtuale relativo alla coppia $(t, P(t))$. Le sommatorie su ogni parte rigida nel primo membro della (10.1) si riscrivono come:

$$\begin{aligned} & \vec{v}_j \cdot \sum_{P_i \in \Omega_j} [m_i \ddot{P}_i - \vec{F}_i] + \vec{\omega}_j \cdot \sum_{P_i \in \Omega_j} (P_i - C_j) \wedge [m_i \ddot{P}_i - \vec{F}_i] = \\ & = \vec{v}_j \cdot \left[\sum_{P_i \in \Omega_j} m_i \ddot{P}_i - \sum_{P_i \in \Omega_j} \vec{F}_i \right] + \vec{\omega}_j \cdot \left[\sum_{P_i \in \Omega_j} (P_i - C_j) \wedge m_i \ddot{P}_i - \sum_{P_i \in \Omega_j} (P_i - C_j) \wedge \vec{F}_i \right]. \end{aligned} \quad (10.2)$$

I termini contenenti \vec{F}_i sono i risultanti ed i momenti risultanti in $C_j \in \Omega_j$ delle forze attive applicate alla parte rigida Ω_j — ovvero delle sole forze attive esterne ad Ω_j —

$$\vec{R}^{a, \Omega_j}(t, P, \dot{P}) = \sum_{P_i \in \Omega_j} \vec{F}_i(t, P, \dot{P}) \quad \vec{M}_{C_j}^{a, \Omega_j}(t, P, \dot{P}) = \sum_{P_i \in \Omega_j} (P_i - C_j) \wedge \vec{F}_i(t, P, \dot{P}).$$

Le sommatorie residue sono legate alle derivate in t della quantità di moto \vec{Q}^{Ω_j} e del momento angolare in C_j , $\vec{K}_{C_j}^{\Omega_j}$ della parte rigida Ω_j . Si ha infatti:

$$\frac{d\vec{Q}^{\Omega_j}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{P_i \in \Omega_j} m_i \dot{P}_i = \sum_{P_i \in \Omega_j} m_i \ddot{P}_i$$

ed analogamente:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{K}_{C_j}^{\Omega_j}}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{P_i \in \Omega_j} (P_i - C_j) \wedge m_i \dot{P}_i = \\ &= \sum_{P_i \in \Omega_j} (\dot{P}_i - \dot{C}_j) \wedge m_i \dot{P}_i + \sum_{P_i \in \Omega_j} (P_i - C_j) \wedge m_i \ddot{P}_i = \\ &= -\dot{C}_j \wedge \sum_{P_i \in \Omega_j} m_i \dot{P}_i + \sum_{P_i \in \Omega_j} (P_i - C_j) \wedge m_i \ddot{P}_i = \\ &= -\dot{C}_j \wedge \vec{Q}^{\Omega_j} + \sum_{P_i \in \Omega_j} (P_i - C_j) \wedge m_i \ddot{P}_i \end{aligned}$$

in modo che risulta

$$\sum_{P_i \in \Omega_j} (P_i - C_j) \wedge m_i \ddot{P}_i = \frac{d\vec{K}_{C_j}^{\Omega_j}}{dt} + \dot{C}_j \wedge \vec{Q}^{\Omega_j}.$$

Le (10.2) si riducono allora a:

$$\vec{v}_j \cdot \left(\frac{d\vec{Q}^{\Omega_j}}{dt} - \vec{R}^{a,\Omega_j}(t, P, \dot{P}) \right) + \vec{\omega}_j \cdot \left(\frac{d\vec{K}_{C_j}^{a,\Omega_j}}{dt} + \dot{C}_j \wedge \vec{Q}^{\Omega_j} - \vec{M}_{C_j}^{a,\Omega_j}(t, P, \dot{P}) \right).$$

In definitiva, $P(t)$, $t \in I$, è un moto naturale se e soltanto se:

(i) $P(t)$ costituisce un moto possibile in I ;

(ii) $\forall t \in I$ vale (10.3)

$$\sum_{j=1}^M \left[\vec{v}_j \cdot \left(\frac{d\vec{Q}^{\Omega_j}}{dt} - \vec{R}^{a,\Omega_j}(t, P, \dot{P}) \right) + \vec{\omega}_j \cdot \left(\frac{d\vec{K}_{C_j}^{a,\Omega_j}}{dt} + \dot{C}_j \wedge \vec{Q}^{\Omega_j} - \vec{M}_{C_j}^{a,\Omega_j}(t, P, \dot{P}) \right) \right] \geq 0$$

$\forall \vec{v}_1, \vec{\omega}_1, \dots, \vec{v}_M, \vec{\omega}_M \in \mathbb{R}^3$ che individuano un atto di moto virtuale relativo a $(t, P(t))$.

Per vincoli olonomi e moti che coinvolgano soltanto configurazioni ordinarie del sistema, tutti gli atti di moto virtuali sono certamente invertibili e alla precedente relazione simbolica della dinamica può sostituirsi la corrispondente **equazione simbolica della dinamica**.

11. Equazioni cardinali della dinamica per le parti rigide

Per ogni parte rigida Ω_j del sistema le equazioni cardinali della dinamica sono date da

$$\begin{cases} \frac{d\vec{Q}^{\Omega_j}}{dt} = \vec{R}^{a,\Omega_j}(t, P, \dot{P}) + \vec{R}^{\phi,\Omega_j} \\ \frac{d\vec{K}_{C_j}^{\Omega_j}}{dt} = -\dot{C}_j \wedge \vec{Q}^{\Omega_j} + \vec{M}_{C_j}^{a,\Omega_j}(t, P, \dot{P}) + \vec{M}_{C_j}^{\phi,\Omega_j} \end{cases} \quad (11.1)$$

dove si sono usate le stesse notazioni già introdotte nei paragrafi precedenti. Per un sistema a vincoli ideali un moto $P(t)$, definito su un intervallo di tempo I , si dirà soluzione delle equazioni cardinali della dinamica per tutte le parti rigide se:

(i) $P(t)$ definisce un moto possibile del sistema nell'intervallo I ;

(ii) le equazioni cardinali della dinamica sono verificate $\forall t \in I$ con risultanti \vec{R}^{Ω_j} e momenti risultanti $\vec{M}_{C_j}^{\Omega_j}$ delle reazioni vincolari **effettivamente esplicabili** dai vincoli ideali — ossia compatibili con il principio delle reazioni vincolari (2.1).

La condizione è certamente verificata quando $P(t)$ rappresenta un moto naturale del sistema. In tal caso infatti $P(t)$, $t \in I$, è un moto possibile che soddisfa $\forall t \in I$ la relazione simbolica (10.3). Lo stesso moto potrà verificare le equazioni cardinali dinamiche per tutte le parti rigide a patto di richiedere che risultanti e momenti risultanti delle relative reazioni vincolari siano dati da:

$$\begin{cases} \vec{R}^{\phi, \Omega_j} = \frac{d\vec{Q}^{\Omega_j}}{dt} - \vec{R}^{a, \Omega_j}(t, P, \dot{P}) \\ \vec{M}_{C_j}^{\phi, \Omega_j} = \frac{d\vec{K}_{C_j}^{\Omega_j}}{dt} + \dot{C}_j \wedge \vec{Q}^{\Omega_j} - \vec{M}_{C_j}^{a, \Omega_j}(t, P, \dot{P}) \end{cases} \quad \forall j = 1, \dots, M, \quad \forall t \in I.$$

D'altra parte, è evidente che ad un qualsiasi istante $t \in I$ la potenza virtuale di queste reazioni vincolari soddisfa la relazione

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^M \left[\vec{v}_j \cdot \vec{R}^{\phi, \Omega_j} + \vec{\omega}_j \cdot \vec{M}_{C_j}^{\phi, \Omega_j} \right] = \\ & = \sum_{j=1}^M \left[\vec{v}_j \cdot \left(\frac{d\vec{Q}^{\Omega_j}}{dt} - \vec{R}^{a, \Omega_j}(t, P, \dot{P}) \right) + \vec{\omega}_j \cdot \left(\frac{d\vec{K}_{C_j}^{a, \Omega_j}}{dt} + \dot{C}_j \wedge \vec{Q}^{\Omega_j} - \vec{M}_{C_j}^{a, \Omega_j}(t, P, \dot{P}) \right) \right] \end{aligned}$$

e risulta quindi non negativa per ogni insieme di vettori $\vec{v}_1, \vec{\omega}_1, \dots, \vec{v}_M, \vec{\omega}_M \in \mathbb{R}^3$ che specifica un atto di moto virtuale relativo alla coppia $(t, P(t))$. Ciò basta ad affermare che le reazioni vincolari richieste sono esplicabili dai vincoli ideali del sistema, per cui **i moti naturali sono tutti soluzioni delle equazioni cardinali della dinamica**.

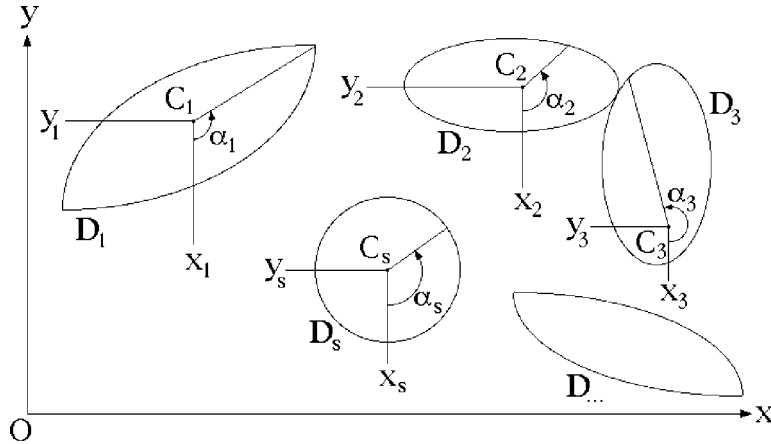
Viceversa, se $P(t)$ è soluzione nell'intervallo I delle equazioni cardinali della dinamica, si può dedurre che $P(t)$, $t \in I$, definisce un moto possibile del sistema e che inoltre i risultanti e momenti risultanti delle reazioni vincolari sono compatibili con la relazione simbolica (2.1). Ne segue allora la relazione (10.3), per cui il moto è naturale. In definitiva:

condizione necessaria e sufficiente affinché il moto $P(t)$, $t \in I$, di un sistema sia naturale è che lo stesso moto risolva le equazioni cardinali della dinamica per tutte le parti rigide componenti — equazioni (11.1).

12. Sistemi olonomi piani di parti rigide

In una terna di riferimento cartesiana e ortogonale $Oxyz$ si consideri un sistema olonomo composto da un numero finito di parti rigide vincolate a muoversi di moto piano, con un piano fisso comune $\pi = Oxy$. Le parti rigide costituenti siano indicate con $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \dots, \mathbb{D}_s$. Ognuna di esse costituisce un sistema a 3 gradi di libertà la cui configurazione può essere individuata assegnando le coordinate cartesiane di un punto assegnato sul corpo e un angolo di rotazione; in particolare, la configurazione del sistema rigido \mathbb{D}_μ , $\mu = 1, \dots, s$, si intenderà individuata dalle coordinate cartesiane (x_μ, y_μ) di un punto C_μ assegnato in \mathbb{D}_μ — o nello spazio ad esso solidale — e dall'angolo α_μ compreso fra una direzione assegnata sul corpo \mathbb{D}_μ e una direzione fissa rispetto alla terna di riferimento $Oxyz$ — ad esempio

quella dell'asse condotto da C_μ ed antiparallelo ad Oy .



Gli s corpi rigidi potranno essere sottoposti ad ulteriori vincoli olonomi e definiranno un sistema olonomo a $n \leq 3s$ gradi di libertà, descritto dai parametri lagrangiani q_h , $h = 1, \dots, n$. Esso si supporrà soggetto a sollecitazioni attive di natura arbitraria. Si assumerà inoltre che siano definite le espressioni:

$$x_\mu = x_\mu(q) \quad y_\mu = y_\mu(q) \quad \alpha_\mu = \alpha_\mu(q) \quad \mu = 1, \dots, s$$

come funzioni almeno di classe C^1 di $q \in \mathbb{R}^n$. Scopo della presente discussione è quello di mettere a punto una procedura generale per il calcolo delle componenti lagrangiane di tali sollecitazioni, facendo uso delle coordinate lagrangiane q_h , $h = 1, \dots, n$.

12.1 Sistema rigido in moto piano arbitrario

Un corpo rigido \mathbb{D} vincolato a muoversi di moto piano, con piano fisso Oxy , può essere descritto per mezzo delle coordinate cartesiane (x_C, y_C) di un suo punto assegnato e l'angolo di rotazione α che una direzione fissa rispetto al corpo forma con una direzione fissata rispetto alla terna di riferimento. La velocità angolare istantanea di \mathbb{D} rispetto alla stessa terna risulta perciò $\dot{\alpha} \hat{e}_3$ e per un generico punto $P \in \mathbb{D}$ si potrà scrivere:

$$\dot{P} = \dot{C} + \dot{\alpha} \hat{e}_3 \wedge (P - C) = \dot{x}_C \hat{e}_1 + \dot{y}_C \hat{e}_2 + \dot{\alpha} \hat{e}_3 \wedge (P - C) . \tag{12.1}$$

D'altra parte, poiché $P = P(x_C, y_C, \alpha)$, per il teorema di derivazione delle funzioni composte deve anche aversi:

$$\dot{P} = \frac{\partial P}{\partial x_C} \dot{x}_C + \frac{\partial P}{\partial y_C} \dot{y}_C + \frac{\partial P}{\partial \alpha} \dot{\alpha}$$

per cui confrontando con la (12.1) e sfruttando l'arbitrarietà di $\dot{x}_C, \dot{y}_C, \dot{\alpha}$ si ricava che:

$$\frac{\partial P}{\partial x_C} = \hat{e}_1 \quad \frac{\partial P}{\partial y_C} = \hat{e}_2 \quad \frac{\partial P}{\partial \alpha} = \hat{e}_3 \wedge (P - C) . \tag{12.2}$$

Di qui, supposto il corpo costituito da un numero finito di punti P ognuno soggetto ad una forza attiva risultante \vec{F}_P , seguono le ovvie relazioni:

$$\begin{aligned}\sum_{P \in \mathbb{D}} \frac{\partial P}{\partial x_C} \cdot \vec{F}_P &= \hat{e}_1 \cdot \sum_{P \in \mathbb{D}} \vec{F}_P = \hat{e}_1 \cdot \vec{R} \\ \sum_{P \in \mathbb{D}} \frac{\partial P}{\partial y_C} \cdot \vec{F}_P &= \hat{e}_2 \cdot \sum_{P \in \mathbb{D}} \vec{F}_P = \hat{e}_2 \cdot \vec{R} \\ \sum_{P \in \mathbb{D}} \frac{\partial P}{\partial \alpha} \cdot \vec{F}_P &= \hat{e}_3 \cdot \sum_{P \in \mathbb{D}} (P - C) \wedge \vec{F}_P = \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_C\end{aligned}$$

in cui si sono indicati con \vec{R} ed \vec{M}_C il risultante ed il momento risultante in C delle sollecitazioni \vec{F}_P applicate al corpo.

12.2 Calcolo delle componenti lagrangiane

Il calcolo delle componenti lagrangiane delle sollecitazioni attive agenti sul sistema si esegue applicando la definizione. La componente relativa al parametro lagrangiano q_h si scrive dunque:

$$Q_h = \sum_{\mu=1}^s \sum_{P \in \mathbb{D}_\mu} \vec{F}_P \cdot \frac{\partial P}{\partial q_h} = \sum_{\mu=1}^s \sum_{P \in \mathbb{D}_\mu} \vec{F}_P \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\mu}{\partial q_h} + \frac{\partial P}{\partial y_\mu} \frac{\partial y_\mu}{\partial q_h} + \frac{\partial P}{\partial \alpha_\mu} \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial q_h} \right)$$

e può anche porsi nella forma equivalente:

$$Q_h = \sum_{\mu=1}^s \left[\frac{\partial x_\mu}{\partial q_h}(q) \sum_{P \in \mathbb{D}_\mu} \vec{F}_P \cdot \frac{\partial P}{\partial x_\mu} + \frac{\partial y_\mu}{\partial q_h}(q) \sum_{P \in \mathbb{D}_\mu} \vec{F}_P \cdot \frac{\partial P}{\partial y_\mu} + \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial q_h}(q) \sum_{P \in \mathbb{D}_\mu} \vec{F}_P \cdot \frac{\partial P}{\partial \alpha_\mu} \right]$$

da cui, sostituendo le (12.2), si deduce:

$$\begin{aligned}Q_h &= \sum_{\mu=1}^s \left[\frac{\partial x_\mu}{\partial q_h}(q) \sum_{P \in \mathbb{D}_\mu} \vec{F}_P \cdot \hat{e}_1 + \frac{\partial y_\mu}{\partial q_h}(q) \sum_{P \in \mathbb{D}_\mu} \vec{F}_P \cdot \hat{e}_2 + \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial q_h}(q) \sum_{P \in \mathbb{D}_\mu} \vec{F}_P \cdot \hat{e}_3 \wedge (P - C_\mu) \right] \\ &= \sum_{\mu=1}^s \left[\frac{\partial x_\mu}{\partial q_h}(q) \hat{e}_1 \cdot \sum_{P \in \mathbb{D}_\mu} \vec{F}_P + \frac{\partial y_\mu}{\partial q_h}(q) \hat{e}_2 \cdot \sum_{P \in \mathbb{D}_\mu} \vec{F}_P + \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial q_h}(q) \hat{e}_3 \cdot \sum_{P \in \mathbb{D}_\mu} (P - C_\mu) \wedge \vec{F}_P \right].\end{aligned}$$

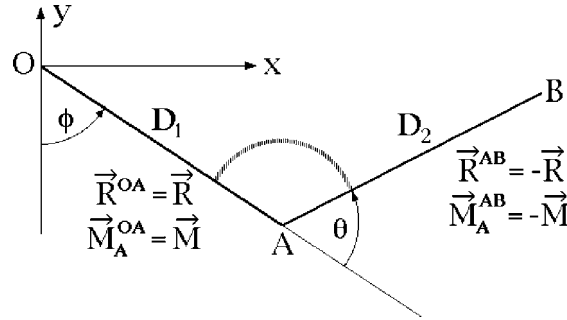
Perciò:

$$Q_h = \sum_{\mu=1}^s \left[\frac{\partial x_\mu}{\partial q_h}(q) \hat{e}_1 \cdot \vec{R}^\mu + \frac{\partial y_\mu}{\partial q_h}(q) \hat{e}_2 \cdot \vec{R}^\mu + \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial q_h}(q) \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_{C_\mu}^\mu \right] \quad \forall h = 1, \dots, n. \quad (12.3)$$

Noti il risultante \vec{R}^μ ed il momento risultante in C_μ , $\vec{M}_{C_\mu}^\mu$, delle sollecitazioni agenti su \mathbb{D}_μ , $\forall \mu = 1, \dots, n$, e note le funzioni $x_\mu(q)$, $y_\mu(q)$, $\alpha_\mu(q)$, tutte le componenti lagrangiane delle sollecitazioni applicate sono determinate dalla (12.3).

12.3 Primo esempio

Si consideri un sistema piano costituito da due aste rigide rettilinee OA e AB vincolate a restare nel piano coordinato Oxy di una terna di riferimento cartesiana ortogonale $Oxyz$. L'estremità O è fissata nell'origine e le due aste sono incernierate l'una all'altra in A . Le due aste interagiscono fra loro — ad esempio mediante una molla, come illustrato in figura — in modo che il sistema di forze applicato da AB su OA abbia risultante $\vec{R}^{OA} = \vec{R}$ e momento risultante in A $\vec{M}_A^{OA} = \vec{M}$; per il principio di azione e reazione, il sistema di forze che viceversa l'asta OA esercita su AB avrà risultante $\vec{R}^{AB} = -\vec{R}$ e momento risultante rispetto allo stesso polo $\vec{M}_A^{AB} = -\vec{M}$.



Determinare le componenti lagrangiane delle sollecitazioni attive interne, facendo uso degli angoli ϕ e θ indicati in figura come coordinate generalizzate.

Soluzione

Si tratta di applicare le relazioni generali (12.3), osservato che il sistema consta di due parti rigide vincolate a muoversi nel piano fisso Oxy , le aste $OA = \mathbb{D}_1$ e $AB = \mathbb{D}_2$. Introducendo le stesse notazioni che sono state utilizzate nella stesura delle equazioni (12.3), conviene scegliere i punti C_1 e C_2 , rispettivamente fissati sull'asta \mathbb{D}_1 e sull'asta \mathbb{D}_2 , coincidenti con il comune estremo A rispetto al quale sono peraltro noti i momenti risultanti delle sollecitazioni interne applicate. Si avrà allora:

$$\begin{array}{lll} \vec{R}^1 = \vec{R} & C_1 = A & \vec{M}_{C_1}^1 = \vec{M} \\ \vec{R}^2 = -\vec{R} & C_2 = A & \vec{M}_{C_2}^2 = -\vec{M} \end{array}$$

e le configurazioni delle due aste saranno individuate dalle relazioni:

$$\begin{array}{lll} x_1 = L \sin \phi & y_1 = -L \cos \phi & \alpha_1 = \phi \\ x_2 = L \sin \phi & y_2 = -L \cos \phi & \alpha_2 = \phi + \theta \end{array}$$

per \mathbb{D}_1 e \mathbb{D}_2 rispettivamente. Non rimane che fare uso della (12.3) per ottenere:

$$\begin{aligned} Q_\phi &= \frac{\partial x_1}{\partial \phi} \hat{e}_1 \cdot \vec{R} + \frac{\partial y_1}{\partial \phi} \hat{e}_2 \cdot \vec{R} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \phi} \hat{e}_3 \cdot \vec{M} + \frac{\partial x_2}{\partial \phi} \hat{e}_1 \cdot (-\vec{R}) + \frac{\partial y_2}{\partial \phi} \hat{e}_2 \cdot (-\vec{R}) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \phi} \hat{e}_3 \cdot (-\vec{M}) = \\ &= L \cos \phi \hat{e}_1 \cdot \vec{R} + L \sin \phi \hat{e}_2 \cdot \vec{R} + \hat{e}_3 \cdot \vec{M} - L \cos \phi \hat{e}_1 \cdot \vec{R} - L \sin \phi \hat{e}_2 \cdot \vec{R} - \hat{e}_3 \cdot \vec{M} = 0 \end{aligned}$$

mentre:

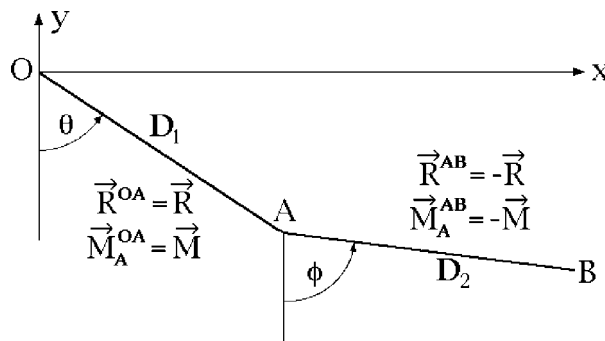
$$\begin{aligned}
 Q_\theta &= \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \hat{e}_1 \cdot \vec{R} + \frac{\partial y_1}{\partial \theta} \hat{e}_2 \cdot \vec{R} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta} \hat{e}_3 \cdot \vec{M} + \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \hat{e}_1 \cdot (-\vec{R}) + \frac{\partial y_2}{\partial \theta} \hat{e}_2 \cdot (-\vec{R}) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \theta} \hat{e}_3 \cdot (-\vec{M}) = \\
 &= \frac{\partial \alpha_2}{\partial \theta} \hat{e}_3 \cdot (-\vec{M}) = -\vec{M} \cdot \hat{e}_3 .
 \end{aligned}$$

Dunque:

$$(Q_\phi, Q_\theta) = (0, -\vec{M} \cdot \hat{e}_3) = (0, \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_A^{AB}) .$$

12.4 Secondo esempio

Si consideri un sistema piano costituito da due aste rigide rettilinee OA e AB vincolate a restare nel piano coordinato Oxy di una terna di riferimento cartesiana ortogonale $Oxyz$. L'estremità O è fissata nell'origine e le due aste sono incernierate l'una all'altra in A . Le due aste interagiscono l'una con l'altra in modo che il sistema di forze applicato da AB su OA abbia risultante $\vec{R}^{OA} = \vec{R}$ e momento risultante in A $\vec{M}_A^{OA} = \vec{M}$; per il principio di azione e reazione, il sistema di forze che viceversa l'asta OA esercita su AB avrà risultante $\vec{R}^{AB} = -\vec{R}$ e momento risultante rispetto allo stesso polo $\vec{M}_A^{AB} = -\vec{M}$.



Determinare le componenti lagrangiane delle sollecitazioni attive interne, utilizzando come parametri lagrangiani gli angoli θ e ϕ indicati in figura.

Soluzione

Si possono considerare separatamente i contributi delle due aste.

Asta OA

La posizione di un generico punto P dell'asta OA viene individuata per mezzo di una relazione della forma:

$$\tilde{P}(\theta) = P(x_A(\theta), y_A(\theta), \theta) ,$$

essendosi indicate con (x_A, y_A) le coordinate cartesiane in $Oxyz$ dell'estremo A , entrambe funzioni del solo parametro lagrangiano θ , che individua anche l'inclinazione dell'asta rispetto all'asse Ox . Una derivazione rispetto a θ porge allora:

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \theta} = \frac{\partial P}{\partial x_A} \frac{\partial x_A}{\partial \theta} + \frac{\partial P}{\partial y_A} \frac{\partial y_A}{\partial \theta} + \frac{\partial P}{\partial \theta} = \hat{e}_1 \frac{\partial x_A}{\partial \theta} + \hat{e}_2 \frac{\partial y_A}{\partial \theta} + \hat{e}_3 \wedge (P - A)$$

e di conseguenza il contributo di OA alla componente lagrangiana in θ del sistema di sollecitazioni interne:

$$Q_{\theta}^{OA} = \sum_{P \in OA} \vec{F}_P \cdot \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \theta} = \vec{R} \cdot \hat{e}_1 \frac{\partial x_A}{\partial \theta} + \vec{R} \cdot \hat{e}_2 \frac{\partial y_A}{\partial \theta} + \hat{e}_3 \cdot \vec{M} \quad (12.4)$$

dove per le sollecitazioni interne \vec{F}_P , $P \in OA$, applicate da AB su OA si è fatto ricorso alle ovvie relazioni:

$$\sum_{P \in OA} \vec{F}_P = \vec{R} \quad \sum_{P \in OA} (P - A) \wedge \vec{F}_P = \vec{M}_A^{OA} = \vec{M} .$$

Analogamente, constatato che:

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \phi} = 0 ,$$

si deduce che nullo è il contributo di OA alla componente lagrangiana in ϕ delle sollecitazioni interne:

$$Q_{\phi}^{OA} = 0 . \quad (12.5)$$

Asta AB

Per i punti P dell'asta AB vale un'espressione del tutto simile a quella già stabilita per OA :

$$\tilde{P} = P(x_A(\theta), y_A(\theta), \phi)$$

con l'unica differenza che in questo caso l'inclinazione dell'asta è specificata dall'angolo ϕ e non più da θ come in precedenza. La derivata parziale rispetto a θ si scrive:

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \theta} = \frac{\partial P}{\partial x_A} \frac{\partial x_A}{\partial \theta} + \frac{\partial P}{\partial y_A} \frac{\partial y_A}{\partial \theta}$$

e conduce al seguente contributo di AB alla componente lagrangiana in θ del sistema di sollecitazioni interne:

$$Q_{\theta}^{AB} = -\vec{R} \cdot \hat{e}_1 \frac{\partial x_A}{\partial \theta} - \vec{R} \cdot \hat{e}_2 \frac{\partial y_A}{\partial \theta} . \quad (12.6)$$

Quanto alla derivata parziale rispetto a ϕ , questa risulta:

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \phi} = \frac{\partial P}{\partial x_A} \frac{\partial x_A}{\partial \phi} + \frac{\partial P}{\partial y_A} \frac{\partial y_A}{\partial \phi} + \frac{\partial P}{\partial \phi} = \frac{\partial P}{\partial \phi}$$

e porge:

$$Q_{\phi}^{AB} = -\hat{e}_3 \cdot \vec{M} . \quad (12.7)$$

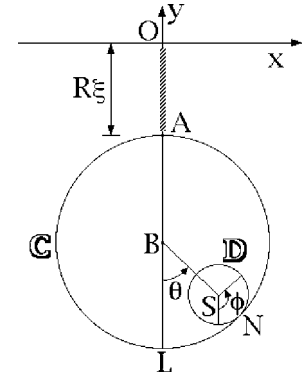
Pertanto, sommando la (12.4) con la (12.6) e la (12.5) con la (12.7), rispettivamente, si ottiene:

$$Q_{\theta} = \hat{e}_3 \cdot \vec{M} \quad Q_{\phi} = -\hat{e}_3 \cdot \vec{M}$$

che sono le componenti lagrangiane cercate.

12.5 Terzo esempio

Una guida circolare rigida \mathbb{C} di raggio R e centro B è vincolata a muoversi nel piano Oxy di una terna di riferimento cartesiana ortogonale $Oxyz$, in modo che un suo diametro assegnato AL si mantenga posizionato lungo l'asse Oy . Un disco circolare rigido \mathbb{D} di centro S e raggio $r < R$ è inoltre posto a contatto con la parte interna della guida \mathbb{C} — vedi figura — lungo la quale può rotolare liberamente senza strisciare. L'estremo A del diametro è infine collegato all'origine fissa O della terna di riferimento per mezzo di una molla.



Si introduca il parametro lagrangiano adimensionale ξ definito da $A - O = R\xi \hat{e}_2$ e si faccia uso dell'angolo θ illustrato in figura come ulteriore coordinata generalizzata. Sia inoltre N il punto di contatto istantaneo fra guida e disco. Indicati con $\vec{R}^{\mathbb{C}}$, $\vec{M}_N^{\mathbb{C}}$ e $\vec{R}^{\mathbb{D}}$, $\vec{M}_N^{\mathbb{D}}$, rispettivamente il risultante ed il momento risultante in N delle sollecitazioni attive applicate alla guida e al disco, determinare le espressioni per le componenti lagrangiane Q_ξ e Q_θ di dette sollecitazioni attive.

Soluzione

Anche per questo tipo di problema conviene calcolare separatamente il contributo delle singole parti rigide \mathbb{C} e \mathbb{D} alle componenti lagrangiane delle sollecitazioni agenti sul sistema.

Circonferenza \mathbb{C}

Per rappresentare i punti della circonferenza si può fare uso delle coordinate cartesiane (x_A, y_A) del punto fissato A ; in virtù dei vincoli, che limitano i moti di \mathbb{C} a delle pure traslazioni secondo la direzione Oy , ciò basta a specificare le coordinate cartesiane di tutti i punti della guida, l'angolo di rotazione α della guida stessa essendo fissato ad un valore costante — si può porre ad esempio che sia $\alpha = 0$. Considerato che per definizione $A - O = R\xi \hat{e}_2$, per un generico punto $P \in \mathbb{C}$ vale una relazione del tipo:

$$\tilde{P} = P(x_A(\xi), y_A(\xi), \alpha(\xi))$$

con:

$$x_A(\xi) = 0 \quad y_A(\xi) = R\xi \quad \alpha(\xi) = 0 .$$

Di qui segue l'espressione per la derivata parziale prima rispetto alla coordinata ξ :

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \xi} = \frac{\partial P}{\partial x_A} \frac{\partial x_A}{\partial \xi} + \frac{\partial P}{\partial y_A} \frac{\partial y_A}{\partial \xi} + \frac{\partial P}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = \frac{\partial P}{\partial y_A} R$$

che implica il seguente contributo alla componente lagrangiana Q_ξ del sistema \vec{F}_P , $P \in \mathbb{C}$, di sollecitazioni attive:

$$Q_\xi^{\mathbb{C}} = \sum_{P \in \mathbb{C}} \vec{F}_P \cdot \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \xi} = \sum_{P \in \mathbb{C}} \vec{F}_P \cdot \frac{\partial P}{\partial y_A} R = \sum_{P \in \mathbb{C}} \vec{F}_P \cdot \hat{e}_2 R = R \hat{e}_2 \cdot \vec{R}^{\mathbb{C}} \quad (12.8)$$

mentre per la derivata parziale di P rispetto alla variabile lagrangiana θ risulta

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \theta} = \frac{\partial P}{\partial x_A} \frac{\partial x_A}{\partial \theta} + \frac{\partial P}{\partial y_A} \frac{\partial y_A}{\partial \theta} + \frac{\partial P}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} = 0$$

con il relativo contributo a Q_θ :

$$Q_\theta^{\mathbb{C}} = 0 . \quad (12.9)$$

Disco \mathbb{D}

I contributi del disco \mathbb{D} alle componenti lagrangiane delle sollecitazioni si ricavano in maniera del tutto analoga, scegliendo come punto assegnato su \mathbb{D} il centro S :

$$S - O = B - O + S - B = R\xi \hat{e}_2 - R\hat{e}_2 - (R - r) \cos \theta \hat{e}_2 + (R - r) \sin \theta \hat{e}_1$$

di coordinate cartesiane:

$$x_S = (R - r) \sin \theta \quad y_S = R\xi - R - (R - r) \cos \theta \quad (12.10)$$

e introducendo, per esprimere l'inclinazione del disco rispetto ad una direzione fissata in $Oxyz$, l'angolo:

$$\alpha = \phi = -\left(\frac{R}{r} - 1\right)\theta + \text{costante} , \quad (12.11)$$

in modo che la posizione di un qualsiasi punto $P \in \mathbb{D}$ sarà data da un'espressione della forma:

$$\tilde{P} = P(x_S(\theta), y_S(\xi, \theta), \phi(\theta)) .$$

In forza delle (12.10) e (12.11) la derivata parziale di $P \in \mathbb{D}$ rispetto a ξ diventa allora

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \xi} = \frac{\partial P}{\partial x_S} \frac{\partial x_S}{\partial \xi} + \frac{\partial P}{\partial y_S} \frac{\partial y_S}{\partial \xi} + \frac{\partial P}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = \frac{\partial P}{\partial y_S} R = \hat{e}_2 R ,$$

cui corrisponde il termine di componente generalizzata delle sollecitazioni attive \vec{F}_P , $P \in \mathbb{D}$:

$$Q_\xi^{\mathbb{D}} = \sum_{P \in \mathbb{D}} \vec{F}_P \cdot \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \xi} = \sum_{P \in \mathbb{D}} \vec{F}_P \cdot \hat{e}_2 R = R \hat{e}_2 \cdot \vec{R}^{\mathbb{D}} . \quad (12.12)$$

La derivata parziale in θ risulta invece:

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \theta} = \frac{\partial P}{\partial x_S} (R - r) \cos \theta + \frac{\partial P}{\partial y_S} (R - r) \sin \theta + \frac{\partial P}{\partial \alpha} \left(1 - \frac{R}{r}\right)$$

e ad essa è associato il seguente termine di componente lagrangiana generalizzata delle sollecitazioni attive:

$$Q_\theta^{\mathbb{D}} = \hat{e}_1 \cdot \vec{R}^{\mathbb{D}} (R - r) \cos \theta + \hat{e}_2 \cdot \vec{R}^{\mathbb{D}} (R - r) \sin \theta + \hat{e}_3 \cdot \vec{M}^{\mathbb{D}} \left(1 - \frac{R}{r}\right) . \quad (12.13)$$

Basta sommare le equazioni (12.8), (12.12) e (12.9), (12.13), per ricavare rispettivamente le componenti lagrangiane Q_ξ e Q_θ delle sollecitazioni attive:

$$\begin{aligned} Q_\xi &= R \hat{e}_2 \cdot (\vec{R}^C + \vec{R}^D) \\ Q_\theta &= \vec{R}^D \cdot (\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2)(R - r) + \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_S^D \left(1 - \frac{R}{r}\right). \end{aligned} \quad (12.14)$$

Mentre l'espressione di Q_ξ si presenta già nella forma desiderata, altrettanto non può dirsi per quella di Q_θ , visto che in essa compare il momento risultante in S delle sollecitazioni agenti sul disco, e non il momento in N — \vec{M}_N^D . Si rende dunque necessaria una ulteriore manipolazione algebrica della seconda relazione. A questo scopo, riscrivendo convenientemente il primo termine a secondo membro si ottiene:

$$\begin{aligned} Q_\theta &= \vec{R}^D \cdot (\cos \theta \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3 - \sin \theta \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3)(R - r) + \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_S^D \left(1 - \frac{R}{r}\right) = \\ &= -\vec{R}^D \cdot (-\cos \theta \hat{e}_2 + \sin \theta \hat{e}_1) \wedge \hat{e}_3 (R - r) - \frac{R - r}{r} \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_S^D \end{aligned}$$

e poiché $(-\cos \theta \hat{e}_2 + \sin \theta \hat{e}_1)(R - r) = S - B$:

$$Q_\theta = -\vec{R}^D \cdot (S - B) \wedge \hat{e}_3 - \frac{R - r}{r} \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_S^D.$$

Si commuta poi il prodotto misto e si raccoglie a fattore comune per ricavare:

$$Q_\theta = \hat{e}_3 \cdot \left[-\vec{R}^D \wedge (S - B) - \frac{R - r}{r} \vec{M}_S^D \right] = \frac{R - r}{r} \hat{e}_3 \cdot \left[\frac{r}{R - r} (S - B) \wedge \vec{R}^D - \vec{M}_S^D \right]$$

da cui segue infine:

$$Q_\theta = \frac{R - r}{r} \hat{e}_3 \cdot \left[(N - S) \wedge \vec{R}^D - \vec{M}_S^D \right] = -\frac{R - r}{r} \hat{e}_3 \cdot \left[(S - N) \wedge \vec{R}^D + \vec{M}_S^D \right] = -\frac{R - r}{r} \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_N^D.$$

In conclusione, le (12.14) assumono la forma definitiva:

$$\begin{aligned} Q_\xi &= R \hat{e}_2 \cdot (\vec{R}^C + \vec{R}^D) \\ Q_\theta &= -\frac{R - r}{r} \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_N^D. \end{aligned}$$

Indice degli argomenti

1. Sistemi costituiti da un numero finito di parti rigide	1
2. Condizione dei vincoli ideali	1
3. Equilibri	3
4. Teorema dei lavori virtuali	3
5. Equazioni cardinali della statica	4
5.1 Necessità delle equazioni cardinali statiche per l'equilibrio	5
5.2 Sufficienza delle equazioni cardinali statiche per l'equilibrio	5
5.3 Necessità e sufficienza delle equazioni cardinali statiche per l'equilibrio	5
6. Equivalenza fra equazioni cardinali statiche e teorema dei lavori virtuali	6
6.1 Approccio pratico alla statica dei sistemi	6
7. Sistemi ideali a reazioni vincolari concentrate	7
7.1 Sistemi a reazioni vincolari concentrate	7
7.2 Limiti del modello a reazioni concentrate	8
7.3 Calcolo delle reazioni vincolari	9
7.4 Sistemi staticamente determinati e indeterminati	10
7.5 Vincoli ideali	10
7.6 Vincoli non ideali	10
8. Esempio di sistema a reazioni vincolari esterne concentrate e a vincoli ideali	12
9. Esempio di sistema a reazioni vincolari concentrate e non a vincoli ideali	14
10. Relazione simbolica della dinamica per i moti naturali	17
11. Equazioni cardinali della dinamica per le parti rigide	19
12. Sistemi olonomi piani di parti rigide	20
12.1 Sistema rigido in moto piano arbitrario	21
12.2 Calcolo delle componenti lagrangiane	22
12.3 Primo esempio	23
12.4 Secondo esempio	24
12.5 Terzo esempio	26