

# Sistemi continui

Dispense per il corso di Meccanica Razionale 2

di Stefano Siboni

## 1. Sistemi continui (deformabili)

Per sistema (meccanico) continuo si intende un sistema i cui punti in un dato istante  $t = 0$  possono essere posti in corrispondenza biunivoca con i punti geometrici di un insieme di  $\mathbb{R}^3$ , munito di convenienti proprietà — la regione “occupata” dal sistema nello spazio tridimensionale all’istante considerato. Per esempio si può richiedere che l’insieme in questione sia la chiusura di un aperto connesso di  $\mathbb{R}^3$ . L’idea fisica, intuitiva, è che un sistema continuo sia costituito da una infinità non numerabile di punti materiali, e che lo si possa interpretare come sistema con un numero infinito di gradi di libertà. È fatto salvo il caso dei sistemi continui *rigidi*, per i quali il numero di gradi di libertà risulta comunque finito a causa della indeformabilità del sistema. I punti del continuo non saranno individuati da un indice intero, capace di assumere un numero finito di valori, come accade per i sistemi composti da un numero finito di punti materiali; verranno piuttosto contrassegnati da una variabile continua suscettibile di assumere qualsiasi valore in un appropriato insieme di  $\mathbb{R}^3$ .

## 2. Coordinate materiali $X$

I punti di un continuo possono essere individuati mediante le coordinate  $X$  che questi presentano ad un istante di riferimento  $t = 0$  rispetto ad una terna cartesiana ortogonale  $OX_1X_2X_3$ . Questa terna viene introdotta al solo scopo di denominare i punti del sistema, e non è in generale la terna alla quale sono riferiti i moti del sistema continuo. Se  $\Omega$  è la regione di  $\mathbb{R}^3$  occupata dal sistema continuo all’istante  $t = 0$ , le **coordinate materiali**  $X = (X_1, X_2, X_3)$  potranno assumere qualsiasi valore in  $\Omega$ :

$$X \in \Omega .$$

Le coordinate materiali individuano i singoli punti del sistema, nel senso che ogni punto viene “etichettato” con una particolare terna di valori di  $(X_1, X_2, X_3)$ ; ciò giustifica la denominazione riservata a questo sistema di coordinate. La label  $X \in \Omega$  rappresenta l’analogo dell’indice intero  $i$  in un sistema costituito da un numero finito  $N$  di punti materiali  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Nelle note che seguono, secondo le necessità, si indicherà con  $\Omega$  l’insieme di definizione delle coordinate materiali dell’intero sistema, o di una parte di esso.

## 3. Moto di un continuo. Coordinate spaziali $x$

Il moto del sistema continuo viene descritto rispetto ad una terna di riferimento cartesiana ortogonale  $Ox_1x_2x_3$ ; le coordinate di un generico punto del sistema ad un dato istante si indicano con  $x_1, x_2, x_3$  e sono note come **coordinate spaziali**. *Geometricamente*, la terna  $Ox_1x_2x_3$  può coincidere — e sovente coincide — con la terna materiale

$OX_1X_2X_3$ ; quest'ultima, tuttavia, ha un significato geometrico preciso soltanto all'istante  $t = 0$ , quando le coordinate materiali rappresentano effettivamente le posizioni dei punti. Un **moto del sistema continuo** si intende assegnato quando è nota la posizione occupata rispetto ad  $Ox_1x_2x_3$  da ogni punto  $X \in \Omega$  in un certo intervallo di tempo  $I$ , che dovrà beninteso comprendere l'istante zero. Tale moto si può esprimere nella forma:

$$x = x(t, X) \quad \forall X \in \Omega, \forall t \in I$$

o in quella equivalente:

$$x = \Phi_t(X) \quad \forall X \in \Omega, \forall t \in I.$$

Per ogni  $t \in I$ , l'applicazione  $\Phi_t$  specifica le coordinate spaziali  $x$  di un generico punto  $X \in \Omega$  all'istante  $t$  e quindi fornisce l'evoluzione nel tempo del sistema continuo o di una qualsiasi parte di esso:

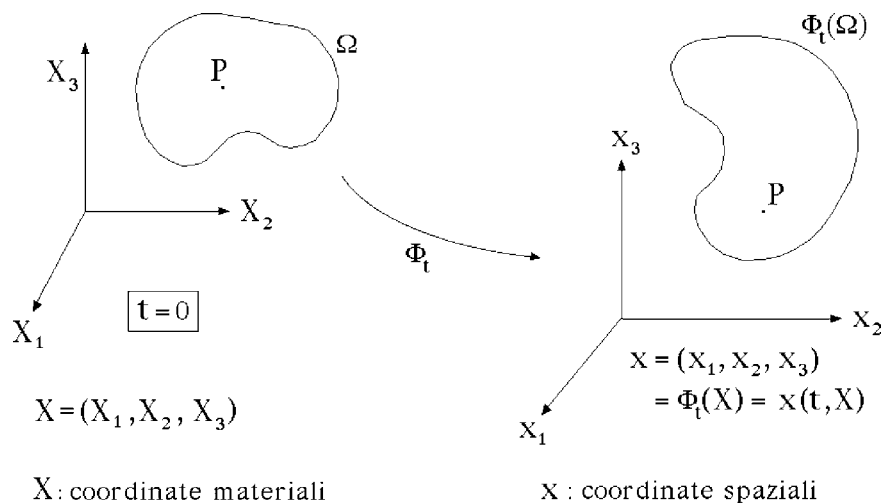
$$\Phi_t : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \Phi_t(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Il moto di un generico punto  $X \in \Omega$  è quindi dato da:

$$x = \Phi_t(X), \quad t \in I,$$

esprimibile anche come:

$$x = x(t, X), \quad t \in I.$$



## 4. Condizioni sul moto di un continuo

Il moto di un sistema continuo deve soddisfare ad alcune condizioni generali, di carattere fisico e matematico. Si illustrano di seguito quelle fondamentali.

### 4.1 Incompenetrabilità della materia

Per ragioni fisiche ci si aspetta che la materia non sia compenetrabile e che, durante il moto, punti distinti del sistema continuo non possano collassare in un unico punto. Questa condizione si traduce nel richiedere che per ogni  $t \in I$  la funzione  $\Phi_t$  sia iniettiva nel proprio dominio di definizione  $\Omega$  e che quindi definisca una biiezione di  $\Omega$  in  $\Phi_t(\Omega)$ :

$$\Phi_t : X \in \Omega \xrightarrow[\text{su}]{1-1} \Phi_t(X) \in \Phi_t(\Omega).$$

Ne segue che  $\forall t \in I$  è definita la funzione inversa  $\Phi_t^{-1}$ :

$$\Phi_t^{-1} : x \in \Phi_t(\Omega) \xrightarrow[\text{su}]{1-1} \Phi_t^{-1}(x) = X \in \Omega$$

che alla coordinata spaziale  $x$  al tempo  $t$  fa corrispondere la relativa coordinata materiale  $X = \Phi_t^{-1}(x)$ .

### 4.2 Condizioni di regolarità

Per evitare problemi nello sviluppo della teoria, si assume che  $\forall t \in I$  le funzioni  $\Phi_t$  e  $\Phi_t^{-1}$  siano di classe  $C^2$  nei rispettivi domini di definizione:

$$\Phi_t : \Omega \xrightarrow[\text{su}]{1-1} \Phi_t(\Omega) \quad \Phi_t \in C^2(\Omega, \Phi_t(\Omega))$$

$$\Phi_t^{-1} : \Phi_t(\Omega) \xrightarrow[\text{su}]{1-1} \Omega \quad \Phi_t^{-1} \in C^2(\Phi_t(\Omega), \Omega).$$

Si richiede inoltre che l'applicazione:

$$(t, X) \in I \times \Omega \longrightarrow \Phi_t(X) = x(t, X) \in \Phi_t(\Omega)$$

sia di classe  $C^2$  nel dominio  $I \times \Omega$ ; <sup>(1)</sup> ciò assicura, in particolare, la regolarità del moto di ogni singolo punto in quanto:

$$t \in I \longrightarrow \Phi_t(X) = x(t, X) \in \mathbb{R}^3$$

risulta funzione di classe  $C^2$  su  $I$  per ogni  $X \in \Omega$  assegnato.

---

<sup>(1)</sup> Si osservi che la condizione implica la precedente richiesta che per ogni  $t \in I$  fissato la funzione  $\Phi_t$  appartenga alla classe  $C^2$  sul proprio dominio di definizione  $\Omega$ .

### 4.3 Condizione sul volume

L'esperienza insegna che una porzione di materia, di volume finito e positivo, non può collassare fino a concentrarsi in una regione di volume nullo o, viceversa, espandersi fino ad occupare una regione dello spazio di volume infinito, per effetto del proprio moto. Ci si limiterà a considerare, pertanto, i soli moti del continuo per i quali tale condizione sia soddisfatta. A questo scopo, si osserva preliminarmente che il segmento di estremi  $X$  e  $X + dX_i \hat{e}_i$ , con  $dX_i$  infinitesimo e  $i = 1, 2, 3$  comunque assegnato, all'istante  $t \in I$  si trasforma nel segmento di estremi  $\Phi_t(X)$  e  $\Phi_t(X + dX_i \hat{e}_i)$ , e lunghezza:

$$\Phi_t(X + dX_i \hat{e}_i) - \Phi_t(X) = \frac{\partial}{\partial X_i} \Phi_t(X) dX_i = \frac{\partial x}{\partial X_i}(t, X) dX_i.$$

Il parallelepipedo che al tempo  $t = 0$  ha vertici

$$X, \quad X + dX_1 \hat{e}_1, \quad X + dX_2 \hat{e}_2, \quad X + dX_3 \hat{e}_3$$

viene quindi trasformato all'istante  $t$  in un parallelepipedo — in generale non rettangolo — i cui spigoli sono individuati dai vettori:

$$\frac{\partial x}{\partial X_i}(t, X) dX_i \quad i = 1, 2, 3$$

ed il cui volume vale quindi:

$$\begin{aligned} dV' &= \left| \frac{\partial x}{\partial X_1}(t, X) dX_1 \cdot \frac{\partial x}{\partial X_2}(t, X) dX_2 \wedge \frac{\partial x}{\partial X_3}(t, X) dX_3 \right| = \\ &= \left| \frac{\partial x}{\partial X_1}(t, X) \cdot \frac{\partial x}{\partial X_2}(t, X) \wedge \frac{\partial x}{\partial X_3}(t, X) \right| dX_1 dX_2 dX_3 \end{aligned}$$

a fronte di un volume iniziale dato da:

$$dV = dX_1 dX_2 dX_3.$$

Richiedere che il volume finale  $dV'$  sia finito e positivo per un assegnato volume iniziale positivo  $dV$  equivale perciò ad assumere:

$$\frac{dV'}{dV} = \left| \frac{\partial x}{\partial X_1}(t, X) \cdot \frac{\partial x}{\partial X_2}(t, X) \wedge \frac{\partial x}{\partial X_3}(t, X) \right| \neq 0 \quad \forall (t, X) \in I \times \Omega.$$

La condizione può porsi in una forma più semplice ricordando che il prodotto misto di tre vettori rispetto ad una terna cartesiana ortogonale destra è esprimibile come determinante delle righe delle componenti:

$$\frac{dV'}{dV} = \left| \frac{\partial x}{\partial X_1}(t, X) \cdot \frac{\partial x}{\partial X_2}(t, X) \wedge \frac{\partial x}{\partial X_3}(t, X) \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial X_3} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} \right|$$

e nella fattispecie, trasponendo la matrice, si identifica con il determinante jacobiano in  $(t, X) \in I \times \Omega$  delle coordinate spaziali rispetto a quelle materiali

$$\frac{dV'}{dV} = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} \right| = |\det J(t, X)|.$$

Si richiede pertanto che lungo il moto valga

$$\det J(t, X) \neq 0 \quad \forall (t, X) \in I \times \Omega. \tag{4.1}$$

#### 4.4 Osservazione. La funzione $\det J$ ha segno costante

È opportuno sottolineare come l'essere  $x(t, X)$  una funzione di classe  $C^2$  in  $I \times \Omega$  implichi che le derivate parziali prime

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j}(t, X), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

siano funzioni di classe  $C^1$  sullo stesso dominio, e che dunque anche il determinante costituisca una funzione di pari regolarità sullo stesso dominio. *Nell'ipotesi di dominio aperto e connesso* il teorema di Bolzano assicura allora che il segno del determinante jacobiano sia lo stesso per ogni  $(t, X) \in I \times \Omega$ :

$$\det J(t, X) > 0 \quad \forall (t, X) \in I \times \Omega \quad \text{oppure} \quad \det J(t, X) < 0 \quad \forall (t, X) \in I \times \Omega.$$

In caso contrario, infatti, dovrebbero esistere  $(t', X')$  e  $(t'', X'')$  distinti e tali che:

$$\det J(t', X') < 0 \quad \det J(t'', X'') > 0$$

e poiché l'essere  $I$  un intervallo e  $\Omega$  connesso implica che anche  $I \times \Omega$  sia connesso in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , l'immagine di  $I \times \Omega$  attraverso la funzione continua  $\det J$ :

$$\{\det J(t, X) : (t, X) \in I \times \Omega\} \subseteq \mathbb{R}$$

dovrebbe risultare a propria volta connessa in  $\mathbb{R}$  per il teorema di Bolzano — l'immagine continua di un connesso è connessa. Ma gli insiemi connessi in  $\mathbb{R}$  sono gli intervalli, dunque l'intero intervallo  $[\det J(t', X'), \det J(t'', X'')]$  dovrebbe appartenere all'immagine di  $\det J$ , alla quale perciò risulterebbe appartenere anche lo zero. Ne seguirebbe l'esistenza di almeno un  $(t''', X''') \in I \times \Omega$  tale che

$$\det J(t''', X''') = 0$$

circostanza espressamente esclusa dalla condizione (4.1).

## 4.5 Osservazione. La condizione 4.2 implica la 4.3

La condizione espressa da (4.1) è in realtà una conseguenza dei requisiti di regolarità 4.2. Dalla definizione di inversa si ha infatti,  $\forall t \in I$ :

$$\Phi_t^{-1} \circ \Phi_t = \mathbb{I}$$

e poiché tanto  $\Phi_t$  quanto  $\Phi_t^{-1}$  sono per ipotesi di classe  $C^2$  sui rispettivi domini, ne segue che sono entrambe differenziabili e che il prodotto delle rispettive matrici jacobiane è uguale alla matrice jacobiana della funzione identità  $\mathbb{I}$ , ossia alla matrice unità:

$$\frac{\partial \Phi_t^{-1}}{\partial x}(\Phi_t(X)) \frac{\partial \Phi_t}{\partial X}(X) = \mathbb{1} \quad \forall (t, X) \in I \times \Omega$$

per cui entrambe le matrici jacobiane sono invertibili. In particolare vale allora:

$$\det J(t, X) = \det \frac{\partial \Phi_t}{\partial X}(X) \neq 0 \quad \forall (t, X) \in I \times \Omega$$

e la dimostrazione è completa.

## 5. Rappresentazione lagrangiana ed euleriana

Al sistema continuo si attribuiscono appropriate grandezze meccaniche — o termodinamiche — che possono essere scalari, vettoriali o di altra natura. Tali grandezze hanno, di regola, carattere **locale**, o **puntuale**, nel senso che sono date come funzioni dei punti del sistema: ad ogni punto è assegnato un valore della grandezza considerata. Le grandezze locali sono tuttavia suscettibili di due diverse rappresentazioni: quella materiale o **lagrangiana** e quella locale o **euleriana**.

Nel primo caso il valore della grandezza  $g$  viene assegnato come funzione del tempo e delle *coordinate materiali*:

$$g = G(t, X), \quad \forall (t, X) \in I \times \Omega$$

mentre nel secondo la stessa grandezza viene espressa in termini del tempo e delle *coordinate spaziali*:

$$g = g(t, x), \quad \forall t \in I, x \in \Phi_t(\Omega).$$

In **rappresentazione lagrangiana** il valore di  $g$  viene specificato per il punto di coordinate materiali  $X \in \Omega$ , al tempo  $t \in I$ . Si descrive quindi, al variar del tempo, il valore della grandezza  $g$  per un assegnato punto materiale del sistema, la cui posizione, rispetto al riferimento spaziale, cambia in  $t$  secondo la legge del moto:

$$x = \Phi_t(X) = x(t, X).$$

È questo il punto di vista di un osservatore dinamico e volenteroso che decide di seguire il moto di ogni singolo punto materiale del sistema, prendendo nota delle variazioni subite nel tempo dalla grandezza  $g$  su quel punto.

Nella **rappresentazione euleriana**, il valore della grandezza  $g$  viene determinato al tempo  $t$  in una posizione assegnata  $x$  dello spazio, dunque in coordinate spaziali. La posizione in cui si descrive il comportamento di  $g$  è dunque fissata, ma il punto materiale che occupa tale posizione varia nel tempo secondo la relazione:

$$X = \Phi_t^{-1}(x).$$

È la rappresentazione preferita dall'osservatore pigro che, non volendo prendersi la briga di seguire puntualmente il moto di ogni singolo punto materiale, si limita a considerare una posizione fissata  $x$  dello spazio e ad esaminare il comportamento nel tempo della grandezza  $g$  in tale posizione, senza preoccuparsi di quale punto materiale occupi effettivamente la posizione  $x$  all'istante dato.

In altre parole, la descrizione lagrangiana fissa l'attenzione sul punto materiale, precisando come la grandezza varia nel tempo in corrispondenza di quel punto ma pagando il prezzo di un continuo cambiamento della posizione di questo nello spazio; viceversa, la descrizione euleriana si concentra sulla posizione nello spazio, specificando come nel tempo la grandezza varia in quella posizione, ma ignorando il continuo avvicendamento dei punti materiali del sistema in quella data posizione.

Per convenzione, si usa indicare le grandezze espresse in forma lagrangiana per mezzo di *lettere maiuscole*, mentre si riservano le corrispondenti *lettere minuscole* alle stesse grandezze rappresentate in forma euleriana.

## 6. Relazione fra le rappresentazioni

Nota che sia la rappresentazione lagrangiana  $G(t, X)$  di una grandezza  $g$ , è immediato ricavare la relativa rappresentazione euleriana  $g(t, x)$  sostituendo alle coordinate materiali  $X$  le corrispondenti espressioni  $\Phi_t^{-1}(x)$  in termini del tempo e delle coordinate spaziali  $x$ :

$$g(t, x) = G(t, \Phi_t^{-1}(x)).$$

Viceversa, dalla forma euleriana  $g(t, x)$  si perviene alla corrispondente espressione lagrangiana  $G(t, X)$  con la sostituzione  $x = \Phi_t(X)$ :

$$G(t, X) = g(t, \Phi_t(X)) = g(t, x(t, X)).$$

## 7. Velocità lagrangiana ed euleriana

In rappresentazione lagrangiana la velocità di un generico punto  $X \in \Omega$  del sistema continuo all'istante  $t \in I$  viene identificata in modo naturale con la derivata prima del moto rispetto al tempo:

$$V(t, X) = \frac{\partial x}{\partial t}(t, X) \quad \forall (t, X) \in I \times \Omega$$

che rappresenta perciò il campo delle velocità istantanee in forma lagrangiana. La corrispondente descrizione euleriana del campo di velocità si ottiene esprimendo la coordinata

materiale  $X$  in termini del tempo  $t$  e della coordinata spaziale  $x$ , per mezzo della relazione  $X = \Phi_t^{-1}(x)$ :

$$v(t, x) = V(t, \Phi_t^{-1}(x)) = \frac{\partial x}{\partial t}(t, \Phi_t^{-1}(x)) \quad \forall t \in I, \quad x \in \Phi_t(\Omega).$$

## 8. Derivata materiale (rispetto al tempo)

La derivata materiale di una grandezza  $g$  esprime la rapidità di variazione della grandezza, nel tempo, su un punto materiale *prefissato* del sistema continuo.

In *rappresentazione lagrangiana* la derivata materiale di  $g$  si riduce ad una semplice derivata parziale rispetto al tempo:

$$\frac{Dg}{Dt}(t, X) = \frac{\partial G}{\partial t}(t, X).$$

Nella descrizione euleriana, la stessa derivata deve essere espressa in coordinate spaziali, per cui risulta:

$$\frac{Dg}{Dt}(t, X) = \frac{\partial}{\partial t}G(t, X) = \frac{\partial}{\partial t}g(t, x(t, X))$$

ed applicando il teorema per la derivata di funzione composta si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{Dg}{Dt}(t, X) &= \frac{\partial g}{\partial t}(t, x(t, X)) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g}{\partial x_i}(t, x(t, X)) \frac{\partial x_i}{\partial t}(t, X) = \\ &= \frac{\partial g}{\partial t}(t, x(t, X)) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g}{\partial x_i}(t, x(t, X)) V_i(t, X) \end{aligned}$$

in quanto  $\partial x/\partial t = V$ . Basta allora passare alle coordinate spaziali a mezzo della solita trasformazione  $X = \Phi_t^{-1}(x)$  per concludere che:

$$\begin{aligned} \frac{Dg}{Dt}(t, X) \Big|_{X=\Phi_t^{-1}(x)} &= \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g}{\partial x_i}(t, x) V_i(t, X) \Big|_{X=\Phi_t^{-1}(x)} = \\ &= \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g}{\partial x_i}(t, x) v_i(t, x) \end{aligned}$$

essendo:

$$v_i(t, x) = V_i(t, X) \Big|_{X=\Phi_t^{-1}(x)} \quad i = 1, 2, 3$$

il campo delle velocità istantanee in rappresentazione euleriana. Una notazione frequentemente utilizzata per la derivata materiale in rappresentazione euleriana è la seguente:

$$\frac{dg}{dt}(t, x) = \frac{Dg}{Dt}(t, X) \Big|_{X=\Phi_t^{-1}(x)} = \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g}{\partial x_i}(t, x) v_i(t, x),$$

che non può essere confusa con una derivata ordinaria in  $t$  in quanto applicata ad una funzione di  $(t, x)$ .

Si nota che la derivata materiale in forma euleriana *non coincide* con la semplice derivata parziale rispetto al tempo, conosciuta anche come *derivata locale* di  $g$ :

$$\frac{dg}{dt}(t, x) \neq \frac{\partial g}{\partial t}(t, x)$$

e ciò a causa del cosiddetto **termine di convezione**

$$\sum_{i=1}^3 v_i(t, x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(t, x) \quad (8.1)$$

che descrive il contributo alla derivata materiale imputabile all'avvicinamento dei punti materiali del sistema nella posizione  $x$ .

## 9. Convenzione di somma (o di Einstein)

Nello studio dei sistemi continui è molto vantaggioso introdurre la cosiddetta **convenzione di somma sugli indici ripetuti**, o di Einstein. Tale convenzione prescrive che ogniqualvolta in un monomio si incontra una coppia di indici ripetuti (ossia di uguale nome), si debba intendere eseguita una somma su quell'indice e per tutti i valori dell'indice. Così, ad esempio, il termine di convezione (8.1) della derivata materiale si può rendere nella forma:

$$\sum_{i=1}^3 v_i(t, x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(t, x) = v_i(t, x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(t, x)$$

rimuovendo la sommatoria esplicita e lasciandola sottintesa per via dell'indice ripetuto  $i$ , suscettibile di assumere i soliti valori 1, 2, 3. La convenzione è molto comoda perchè consente di omettere le sommatorie esplicite e dunque di presentare le espressioni in forma più compatta e facilmente leggibile.

## 10. Densità volumica di massa

Nello studio dinamico dei sistemi continui si postula che in ogni punto del sistema e a tutti i tempi in cui se ne considera il moto, sia definita una funzione **densità (volumica) di massa**, di solito indicata con  $\rho$ , non negativa e di classe  $C^1$  nel suo dominio. Scopo della funzione densità è quello di specificare la massa del sistema continuo o di ogni sua parte, ad un istante arbitrario.

In rappresentazione euleriana, tale densità si indica con:

$$\rho = \rho(t, x), \quad t \in I, \quad x \in \Phi_t(\Omega)$$

e soddisfa pertanto le condizioni:

$$\rho(t, x) \geq 0 \quad \forall t \in I, \quad x \in \Phi_t(\Omega) \quad \text{e} \quad \rho \in C^1(I \times \Omega, \mathbb{R}).$$

Essa consente di definire la massa  $m[\Phi_t(\Omega)]$  di una porzione  $\Phi_t(\Omega)$  del sistema continuo, all'istante  $t \in I$ , per mezzo dell'integrale di volume:

$$m[\Phi_t(\Omega)] = \int_{\Phi_t(\Omega)} \rho(t, x) dx_1 dx_2 dx_3 .$$

Si intende che è possibile esprimere la stessa massa in rappresentazione lagrangiana, per mezzo del solito cambiamento di coordinate  $x = \Phi_t(X) = x(t, X)$ , che pone l'integrale precedente nella forma:

$$\begin{aligned} m[\Phi_t(\Omega)] &= \int_{\Omega} \rho(t, x(t, X)) |\det J(t, X)| dX_1 dX_2 dX_3 = \\ &= \int_{\Omega} P(t, X) |\det J(t, X)| dX_1 dX_2 dX_3 \end{aligned}$$

in virtù del teorema di cambiamento di variabili negli integrali multipli. Nell'integrando la funzione  $P(t, X)$  sta ad indicare, beninteso, la densità volumica di massa in rappresentazione lagrangiana:

$$P(t, X) = \rho(t, \Phi_t(X)) = \rho(t, x(t, X)).$$

## 11. Conservazione della massa

All'istante  $t \in I$  la porzione di sistema continuo individuata da  $X \in \Omega$  ha una massa esprimibile come:

$$m[\Phi_t(\Omega)] = \int_{\Phi_t(\Omega)} \rho(t, x) dx_1 dx_2 dx_3 \quad \forall t \in I .$$

Al trascorrere del tempo la porzione del sistema rimane sempre la stessa, sia pure riposizionata e deformata, per cui la sua massa non può subire variazioni. Il *principio di conservazione della massa* impone pertanto che la massa si mantenga costante lungo il moto:

$$m[\Phi_t(\Omega)] = \text{costante} \quad \forall t \in I \quad \iff \quad \frac{dm}{dt}[\Phi_t(\Omega)] = 0 \quad \forall t \in I .$$

Non è conveniente calcolare direttamente la derivata in  $t$  dell'integrale della massa:

$$\frac{dm}{dt}[\Phi_t(\Omega)] = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Phi_t(\Omega)} \rho(t, x) dx_1 dx_2 dx_3$$

dal momento che il dominio di integrazione  $\Phi_t(\Omega)$  dipende esplicitamente dal tempo. Si introduce piuttosto il cambiamento di coordinate  $x = \Phi_t(X) = x(t, X)$  per ottenere l'espressione

$$\frac{dm}{dt}[\Phi_t(\Omega)] = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho(t, x(t, X)) |\det J| dX_1 dX_2 dX_3$$

che, usando la densità in forma lagrangiana  $P(t, X)$  assume la forma equivalente:

$$\frac{dm}{dt}[\Phi_t(\Omega)] = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} P(t, X) |\det J| dX_1 dX_2 dX_3 .$$

Il dominio di integrazione è ora diventato indipendente dal tempo, per cui la derivata viene portata dentro il segno di integrale:

$$\frac{dm}{dt}[\Phi_t(\Omega)] = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} [P(t, X) |\det J|] dX_1 dX_2 dX_3$$

e quindi, eseguendo la derivata del prodotto:

$$\frac{dm}{dt}[\Phi_t(\Omega)] = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial P}{\partial t}(t, X) |\det J| + P(t, X) \frac{\partial}{\partial t} |\det J| \right] dX_1 dX_2 dX_3 .$$

Il teorema di Eulero (si veda il paragrafo 14) per la derivata dello jacobiano stabilisce la relazione:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\det J(t, X)| = |\det J(t, X)| \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(t, x) \quad x = \Phi_t(X)$$

che sostituita nell'equazione precedente e raccolto il fattore comune  $|\det J|$  porge:

$$\frac{dm}{dt}[\Phi_t(\Omega)] = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial P}{\partial t}(t, X) + P(t, X) \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(t, x) \right] |\det J| dX_1 dX_2 dX_3 = 0 . \quad (11.1)$$

Questa relazione integrale deve essere verificata a tutti i tempi  $t \in I$  e su qualsiasi porzione  $\Omega$  del sistema continuo. Tale arbitrarietà, assieme alla continuità della funzione integranda, assicura l'annullarsi di questa  $\forall (t, X) \in I \times \Omega$ . Se infatti, per assurdo, fosse possibile determinare un  $(t^*, X^*) \in I \times \Omega$  tale che:

$$\left[ \frac{\partial P}{\partial t}(t^*, X^*) + P(t^*, X^*) \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(t^*, \Phi_{t^*}(X^*)) \right] |\det J(t^*, X^*)| > 0$$

allora per il teorema di permanenza del segno dovrebbe esistere un intorno di  $X^*$  in  $\mathbb{R}^3$ :

$$B(X^*, \varepsilon) = \{X \in \mathbb{R}^3 : |X - X^*| < \varepsilon\} \quad , \quad \varepsilon > 0 \text{ opportuno} ,$$

sul quale la funzione integranda a  $t = t^*$  risulti dello stesso stesso segno:

$$\left[ \frac{\partial P}{\partial t}(t^*, X) + P(t^*, X) \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(t^*, x) \right] |\det J(t^*, X)| > 0 \quad \forall X \in B(X^*, \varepsilon)$$

e quindi, scegliendo  $\Omega = B(X^*, \varepsilon)$ :

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial P}{\partial t}(t^*, X) + P(t^*, X) \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(t^*, \Phi_{t^*}(X^*)) \right] |\det J(t^*, X)| dX_1 dX_2 dX_3 > 0$$

in contrasto con la condizione generale (11.1). Se a ciò si aggiunge che per ipotesi il determinante jacobiano non può annullarsi in nessun punto, si conclude che:

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t, X) + P(t, X) \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(t, x) = 0 \quad \forall t \in I, \quad \forall X \in \Omega$$

ovvero, tornando alle coordinate spaziali con la trasformazione inversa  $X = \Phi_t^{-1}(x)$ :

$$\left. \frac{\partial P}{\partial t}(t, X) \right|_{X=\Phi_t^{-1}(x)} + P(t, \Phi_t^{-1}(x)) \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(t, x) = 0.$$

Basta infine ricordare la definizione di derivata materiale in rappresentazione euleriana per ottenere:

$$\frac{d\rho}{dt}(t, x) + \rho(t, x) \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(t, x) = 0 \quad \forall t \in I, \quad \forall x \in \Phi_t(\Omega) \quad (11.2)$$

che è la cosiddetta **equazione di continuità** del sistema.

## 12. Varie forme dell'equazione di continuità

Omettendo gli argomenti delle funzioni densità e velocità, in forma euleriana, l'equazione di continuità (11.2) si scrive:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (12.1)$$

e sostituendo la definizione della derivata materiale diventa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

ossia:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (12.2)$$

Le due espressioni equivalenti (12.1) e (12.2) dell'equazione di continuità possono anche rappresentarsi in notazione vettoriale:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v = 0 \quad \iff \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0$$

o per tramite dell'operatore differenziale vettoriale nabla

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot v = 0 \quad \iff \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0.$$

### 13. Deduzione alternativa dell'equazione di continuità

Nel ricavare l'equazione di continuità si è applicato il principio di conservazione della massa ad una porzione  $\{X \in \Omega\}$  del sistema di cui si segue l'evoluzione nell'intervallo di tempo  $I$  su cui è definito il moto. La strategia adottata per ottenere il risultato è quindi di tipo lagrangiano.

Alla stessa conclusione si può pervenire applicando il punto di vista euleriano. Basta fissare una regione  $D$  dello spazio — in coordinate spaziali — che sia occupata dal continuo all'istante  $t \in I$  e munirne la superficie di contorno  $\partial D$  dell'orientamento standard — il versore normale in ogni punto della superficie  $\partial D^+$  si intende orientato verso l'esterno del dominio  $D$ . La massa racchiusa nella regione  $D$  all'istante  $t$  è data dall'integrale di volume:

$$\int_D \rho(t, x) dx_1 dx_2 dx_3$$

ma poiché il dominio  $D$  è fissato nello spazio, il mezzo continuo potrà fluire liberamente attraverso la sua superficie e la massa in  $D$  non si manterrà costante nel tempo. La conservazione della massa richiederà allora che la variazione nel tempo della massa compresa in  $D$ :

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho(t, x) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_D \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) dx_1 dx_2 dx_3$$

debba coincidere con il flusso di massa attraverso la superficie  $\partial D^+$  *cambiato di segno* — poiché i versori normali sono orientati verso l'esterno, un valore positivo del flusso di massa corrisponde a *massa uscente* e quindi ad una *diminuzione* della massa ricompresa in  $D$ . Detto flusso si ottiene integrando sulla superficie chiusa  $\partial D^+$  la densità di flusso della massa  $\rho v$ :

$$\int_{\partial D^+} \rho v \cdot \hat{n} dS$$

in modo che l'equazione di conservazione della massa diventa:

$$\int_D \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) dx_1 dx_2 dx_3 = - \int_{\partial D^+} \rho v \cdot \hat{n} dS. \quad (13.1)$$

Essendo  $\rho v$  per ipotesi una funzione di classe  $C^1$ , l'integrale di superficie può essere espresso come integrale di volume per mezzo del teorema della divergenza:

$$\int_{\partial D^+} \rho v \cdot \hat{n} dS = \int_{\partial D^+} \rho v_i n_i dS = \int_D \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) dx_1 dx_2 dx_3$$

e di conseguenza l'equazione (13.1) si riduce a:

$$\int_D \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) \right] dx_1 dx_2 dx_3 = 0.$$

L'arbitrarietà nella scelta del dominio di integrazione  $D$  e la continuità dell'integrando conducono all'equazione di continuità (12.2).

## 14. Teorema di Eulero

Il teorema di Eulero fornisce una relazione per la derivata in  $t$  del determinante jacobiano delle coordinate spaziali rispetto a quelle materiali. *Con le notazioni introdotte nei paragrafi precedenti l'enunciato del teorema è il seguente:*

$$\frac{\partial}{\partial t} |\det J(t, X)| = |\det J(t, X)| \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(t, x), \quad \text{essendo } x = \Phi_t(X). \quad (14.1)$$

### Dimostrazione

Conviene articolare la dimostrazione in più punti.

- (i) Il valore assoluto nella (14.1) è irrilevante in quanto il determinante jacobiano è una funzione continua del tempo e delle coordinate materiali e per ipotesi non può annullarsi in alcun punto ad alcun istante. Il determinante non può assumere segno opposto in due punti, poiché ciò implicherebbe l'esistenza di almeno un punto in cui lo stesso determinante si annullerebbe, circostanza che è stata espressamente esclusa. Deve aversi perciò:

$$|\det J(t, X)| = +\det J(t, X) \quad \forall (t, X) \in I \times \Omega$$

ovvero:

$$|\det J(t, X)| = -\det J(t, X) \quad \forall (t, X) \in I \times \Omega.$$

Ci si può dunque limitare a considerare la derivata di  $\det J$ .

- (ii) Il determinante di una qualsiasi matrice  $3 \times 3$ :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

può sempre scriversi nella forma:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

dove il **simbolo di Ricci**  $\varepsilon_{ijk}$  è definito dalle seguenti condizioni:

- $\varepsilon_{ijk}$  è nullo ogniqualvolta almeno due degli indici  $i, j, k$  assumono lo stesso valore, corrispondentemente al fatto che in un determinante i soli termini che compaiono sono i prodotti di elementi di matrice appartenenti a righe e colonne diverse. Così, ad esempio,

$$\varepsilon_{112} = 0 \quad \varepsilon_{111} = 0;$$

- i soli elementi non nulli sono pertanto quelli in cui gli indici  $i, j, k$  costituiscono una permutazione dei tre valori interi 1, 2, 3:

$$\varepsilon_{123} \quad \varepsilon_{132} \quad \varepsilon_{231} \quad \varepsilon_{312} \quad \varepsilon_{213} \quad \varepsilon_{321} ;$$

- per definizione di determinante, gli elementi  $\varepsilon_{ijk}$  sono uguali a +1 per  $(i, j, k) = (1, 2, 3)$  e per tutte le **permutazioni pari** degli indici rispetto alla stringa (1, 2, 3), ottenute da questa scambiando coppie di indici un numero pari di volte. Valgono -1 per tutte le **permutazioni dispari** degli indici, ottenute dalla stringa di riferimento (1, 2, 3) scambiando coppie di indici un numero dispari di volte:

$$\begin{array}{ccc} (1, 2, 3) & & (3, 1, 2) & & (2, 3, 1) & \text{permutazioni pari} \\ \downarrow \nearrow & & \downarrow \nearrow & & \downarrow & \\ (1, 3, 2) & & (3, 2, 1) & & (2, 1, 3) & \text{permutazioni dispari} \end{array}$$

Perciò:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123} &= \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = +1 \\ \varepsilon_{132} &= \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1. \end{aligned}$$

Si osservi che le permutazioni pari possono essere ottenute da (1, 2, 3) eseguendo successivamente due permutazioni circolari degli indici; lo stesso vale per le permutazioni dispari, ottenibili allo stesso modo a partire dalla permutazione (1, 3, 2).

- (iii) Il determinante jacobiano delle coordinate spaziali al tempo  $t \in I$  rispetto alle coordinate materiali si esprime nel modo seguente, in termini del simbolo di Ricci:

$$\det J = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k}$$

quale determinante di una matrice le cui righe sono i gradienti delle coordinate spaziali  $x_1, x_2, x_3$  rispetto alle coordinate materiali  $X_1, X_2, X_3$ :

$$\det J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}.$$

- (iv) La derivata in  $t$  del determinante jacobiano si calcola facilmente usando il simbolo di Ricci, i cui elementi sono costanti e dunque trasparenti alla derivata  $\partial/\partial t$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \det J = \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} \right) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} \right).$$

La derivazione del prodotto conduce ad una somma di tre termini:

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \right) \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \right) \frac{\partial x_3}{\partial X_k} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x_3}{\partial X_k} \right)$$

in cui è lecito scambiare l'ordine delle derivate parziali seconde miste, grazie al teorema di Schwarz che è certamente applicabile per l'aver richiesto  $x(t, X)$  sia di classe  $C^2$ :

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial X_i} \left( \frac{\partial x_1}{\partial t} \right) \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{\partial x_2}{\partial t} \right) \frac{\partial x_3}{\partial X_k} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial}{\partial X_k} \left( \frac{\partial x_3}{\partial t} \right)$$

e basta infine applicare la definizione di velocità istantanea in forma lagrangiana

$$V(t, X) = \frac{\partial x}{\partial t}(t, X)$$

per concludere che:

$$\frac{\partial}{\partial t} \det J = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial V_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial V_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial V_3}{\partial X_k}. \quad (14.2)$$

(v) La derivata parziale  $\partial V_1 / \partial X_i$  si può riesprimere in termini della velocità euleriana  $v$ , ricordando che:

$$V_1(t, X) = v_1(t, x(t, X))$$

per cui, in virtù del teorema di derivazione delle funzioni composte, deve aversi:

$$\frac{\partial V_1}{\partial X_i}(t, X) = \frac{\partial}{\partial X_i} v_1(t, x(t, X)) = \frac{\partial v_1}{\partial x_q}(t, x) \frac{\partial x_q}{\partial X_i}(t, X). \quad (14.3)$$

(vi) Sostituendo la relazione (14.3) nel primo termine a secondo membro della (14.2) si ottiene:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_1}{\partial x_q}(t, x) \frac{\partial x_q}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} = \frac{\partial v_1}{\partial x_q}(t, x) \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_q}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} = \\ & = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_2}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_3}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k}. \end{aligned}$$

Ma:

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \det J$$

mentre gli altri due termini sono nulli in quanto determinanti di matrici con due righe uguali, la prima e la seconda:

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_2}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = 0$$

ovvero la prima e la terza:

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_3}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = 0.$$

Di conseguenza il primo termine della somma a secondo membro in (14.2) diventa:

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial V_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \det J + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} 0 + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} 0 = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \det J.$$

In modo analogo si ottengono le espressioni seguenti per il secondo e terzo termine a destra nella (14.2):

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial V_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \det J$$

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial V_3}{\partial X_k} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \det J$$

dalle quali segue l'asserto:

$$\frac{\partial}{\partial t} \det J = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \det J + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \det J + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \det J = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \det J$$

ovvero:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\det J| = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} |\det J|,$$

in cui  $\partial v_i / \partial x_i(t, x)$  si intende calcolata per  $x = \Phi_t(X)$ .

## 15. Teorema del trasporto (o di Reynolds)

Il procedimento seguito nella dimostrazione dell'equazione di continuità (11.2), per il calcolo della derivata in  $t$  dell'integrale di massa, rimane valido se in luogo della densità volumica di massa  $\rho$  si considera una qualsiasi grandezza in rappresentazione euleriana  $g(t, x)$ . Si stabilisce in tal modo il cosiddetto **teorema del trasporto**, o **di Reynolds**:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(\Omega)} g(t, x) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Phi_t(\Omega)} \left[ \frac{dg}{dt}(t, x) + g(t, x) \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(t, x) \right] dx_1 dx_2 dx_3, \quad (15.1)$$

di fondamentale importanza nella formulazione di tutte le equazioni di bilancio — equazioni cardinali della dinamica ed equazione dell'energia.

## 15.1 Forma particolare del teorema del trasporto

Il teorema del trasporto assume una forma particolarmente interessante e compatta nel caso in cui la grandezza su cui viene calcolato l'integrale di volume sia del tipo

$$\rho(t, x) g(t, x) \quad (15.2)$$

essendo al solito  $\rho(t, x)$  la densità volumica di massa del sistema in rappresentazione euleriana. In tal caso la funzione  $g(t, x)$  assume il significato fisico di una *grandezza specifica*, ossia riferita *all'unità di massa*. L'interesse a considerare grandezze della forma (15.2) è dovuto al fatto che, come si vedrà nel seguito, molte grandezze meccaniche importanti nello studio dinamico dei continui presentano proprio questo genere di struttura. Il teorema del trasporto diventa allora

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(\Omega)} \rho(t, x) g(t, x) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Phi_t(\Omega)} \left[ \frac{d(\rho g)}{dt}(t, x) + \rho(t, x) g(t, x) \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(t, x) \right] dx_1 dx_2 dx_3.$$

È però facile verificare che la derivata materiale del prodotto  $\rho g$  si calcola applicando la familiare regola di Leibnitz, come per le derivate in senso ordinario o parziali. Si ha infatti, omettendo l'indicazione esplicita dalle variabili indipendenti  $(t, x)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho g) &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho g) + v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho g) = \frac{\partial \rho}{\partial t} g + \rho \frac{\partial g}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} g + v_i \rho \frac{\partial g}{\partial x_i} = \\ &= \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right) g + \rho \left( \frac{\partial g}{\partial t} + v_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) = \frac{d\rho}{dt} g + \rho \frac{dg}{dt}. \end{aligned}$$

Il teorema del trasporto assume così la forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(\Omega)} \rho g dx_1 dx_2 dx_3 &= \int_{\Phi_t(\Omega)} \left( \rho \frac{dg}{dt} + \frac{d\rho}{dt} g + \rho g \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = \\ &= \int_{\Phi_t(\Omega)} \left[ \rho \frac{dg}{dt} + \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) g \right] dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

e per l'equazione di continuità (11.2) si riduce a

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(\Omega)} \rho g dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Phi_t(\Omega)} \rho \frac{dg}{dt} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (15.3)$$

espressione la cui estrema semplicità è del tutto evidente.

## 16. Continui incomprimitibili

Nei continui incomprimitibili il volume è una grandezza conservata. Ciò significa che considerata una porzione  $\Omega$  del sistema continuo, il suo volume all'istante  $t \in I$  risulta indipendente dal tempo:

$$\int_{\Phi_t(\Omega)} dx_1 dx_2 dx_3 = \text{costante} \quad \forall t \in I$$

per cui, equivalentemente:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(\Omega)} 1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0 \quad \forall t \in I.$$

Il teorema del trasporto consente di riformulare la condizione precedente come:

$$\int_{\Phi_t(\Omega)} \left[ \frac{d1}{dt} + 1 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right] dx_1 dx_2 dx_3 = 0 \quad \forall t \in I$$

e poiché

$$\frac{d1}{dt} = \frac{\partial 1}{\partial t} + v_i \frac{\partial 1}{\partial x_i} = 0$$

si perviene alla relazione:

$$\int_{\Phi_t(\Omega)} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

che causa l'arbitrarietà di  $\Omega$  conduce alla proprietà caratteristica dei moti incomprimitibili:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i}(t, x) = 0 \quad \forall t \in I, \quad x \in \Phi_t(\Omega).$$

Il moto di un continuo incomprimitibile è dunque caratterizzato dalla solenoidalità del campo euleriano delle velocità, ad ogni tempo e in ogni punto —  $\text{div} v = 0$ .

Alla stessa condizione si può attribuire una forma alternativa, del tutto equivalente, ricordando l'equazione di continuità, che ha validità generale in quanto ottenuta dalla conservazione della massa. L'equazione di continuità per un campo di velocità solenoidale diventa infatti:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad \iff \quad \frac{d\rho}{dt} = 0$$

in modo che la condizione del moto incomprimitibile è l'identico annullarsi della derivata materiale della densità volumica:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \tag{16.1}$$

In coordinate materiali quest'ultima relazione si riduce a

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t, X) = 0$$

ed equivale perciò alla richiesta che la densità del continuo, espressa in coordinate materiali, sia indipendente dal tempo

$$P(t, X) = P(X) \quad , \quad X \in \Omega. \quad (16.2)$$

Si noti che l'incomprimibilità potrebbe anche non essere una proprietà intrinseca del sistema continuo, ma soltanto caratterizzare alcuni moti particolari del continuo in presenza delle appropriate sollecitazioni. I moti che conservano il volume sono detti **isocori**, cioè a volume costante. Un continuo incomprimibile può dunque definirsi come un sistema in grado di eseguire soltanto moti isocori; la condizione di incomprimibilità si interpreta come un **vincolo interno** del continuo. La relazione fra moto isocoro e sistema incomprimibile è la stessa che intercorre fra moto rigido e sistema rigido, una particolare tipologia di moto il primo ed un sistema capace di eseguire soltanto moti rigidi il secondo.

## 16.1 Osservazione.

### Fluidi incomprimibili e di densità costante

È opportuno sottolineare che la condizione (16.1) per il moto incomprimibile **non equivale** ad assumere la densità  $\rho$  costante per tutto il sistema a tutti i tempi ed in tutti i punti dello spazio. Si pensi ad esempio al sistema costituito da due liquidi omogenei 1 e 2, di diversa densità e non miscibili — potrebbe trattarsi di olio e acqua —: all'istante iniziale  $t = 0$  il dominio di definizione del sistema sarà una partizione in regioni occupate dal liquido 1 e regioni riempite del liquido 2. In ciascuna regione la densità del continuo sarà quella del liquido corrispondente, dunque non costante sull'intero sistema. Nondimeno, poiché i liquidi sono pressoché incomprimibili, ogni porzione di liquido si muove senza alterare nel tempo il proprio volume e il moto del sistema risulta incomprimibile.

Per contro, ci si convince facilmente che se all'istante iniziale la densità del sistema è costante, lungo qualsiasi moto incomprimibile essa si mantiene costante nel tempo e in ogni posizione. In tal caso infatti secondo la condizione (16.2) si ha  $P(X) = \text{costante}$ .

## 17. Quantità di moto

L'impulso di un sistema continuo viene definito per mezzo di una densità volumica di quantità di moto, esprimibile in termini della densità e della velocità euleriana:

$$q_i = \rho v_i \quad , \quad i = 1, 2, 3.$$

L'introduzione di questa densità di impulso è giustificabile dal punto di vista fisico, considerando che per un piccolo volume  $\delta V$ , di massa  $\delta m$  e baricentro  $G$ , del mezzo continuo la quantità del moto si può esprimere tramite da velocità del baricentro:

$$\delta m \dot{G}$$

con una media volumica data da:

$$\frac{\delta m}{\delta V} \dot{G}.$$

Si immagini di prendere in esame una porzione di materiale  $\delta\Omega$  via via più piccola a ridosso di un punto fissato  $C$  di coordinate spaziali  $x$ ; il volume  $\delta V$  e la massa  $\delta m$  tendono a zero, mentre il baricentro  $G$  si approssima al punto  $C$  e di conseguenza la velocità  $\dot{G}$  tende per continuità alla velocità  $v$  di  $C$ . Si postula, al solito, che il quoziente  $\delta m/\delta V$  tenda corrispondentemente alla densità volumica di massa in  $x$ , per cui:

$$\lim_{\delta\Omega \rightarrow C} \frac{\delta m}{\delta V} \dot{G} = \rho v$$

come ipotizzato. La quantità di moto di una porzione  $\Phi_t(\Omega)$  del continuo si ricava pertanto integrando la densità volumica di impulso:

$$Q_i = \int_{\Phi_t(\Omega)} \rho v_i \, dx_1 dx_2 dx_3 \quad , \quad i = 1, 2, 3.$$

## 18. Momento angolare

Anche per il momento angolare rispetto all'origine  $O$  si introduce una densità volumica, che in generale può essere scritta nella forma vettoriale:

$$k_O = x \wedge \rho v + h$$

espressione nella quale  $x \wedge \rho v$  rappresenta la densità del momento angolare orbitale e  $h$  quella del momento angolare intrinseco. Dal punto di vista fisico questo assioma viene giustificato in modo analogo a quanto visto per la quantità di moto. Un piccolo intorno  $\delta\Omega$  di un punto  $C$  del sistema continuo all'istante  $t \in I$  avrà massa  $\delta m$ , volume  $\delta V$  e baricentro  $G$  prossimo a  $C$ . Il suo momento angolare rispetto all'origine  $O$  è dato dal teorema di König, come somma di un termine "baricentrale"  $(G - O) \wedge \delta m \dot{G}$  e di uno relativo al moto attorno al baricentro  $\delta K_G$ :

$$\delta K_O = (G - O) \wedge \delta m \dot{G} + \delta K_G.$$

Le relative medie volumiche risultano perciò:

$$\frac{\delta K_O}{\delta V} = (G - O) \wedge \frac{\delta m}{\delta V} \dot{G} + \frac{\delta K_G}{\delta V}.$$

Di questa relazione si scrive il limite formale per  $\delta\Omega \rightarrow C$ :

$$\lim_{\delta\Omega \rightarrow C} \frac{\delta K_O}{\delta V} = \lim_{\delta\Omega \rightarrow C} (G - O) \wedge \frac{\delta m}{\delta V} \dot{G} + \lim_{\delta\Omega \rightarrow C} \frac{\delta K_G}{\delta V}$$

in cui si assume che:

$$\lim_{\delta\Omega \rightarrow C} \frac{\delta m}{\delta V} = \rho(t, x) \quad \lim_{\delta\Omega \rightarrow C} G - O = C - O = x$$

$$\lim_{\delta\Omega \rightarrow C} \dot{G} = \dot{C} = v(t, x) \qquad \lim_{\delta\Omega \rightarrow C} \frac{\delta K_G}{\delta V} = h(t, x)$$

essendo  $C - O = x$ . Di conseguenza deve intendersi anche definito il limite:

$$\lim_{\delta\Omega \rightarrow C} \frac{\delta K_O}{\delta V} = x \wedge \rho(t, x)v(t, x) + h(t, x)$$

che fornisce la densità volumica di momento angolare richiesta. Si osservi che la stessa espressione può essere scritta per componenti facendo uso del simbolo di Ricci e della convenzione di somma sugli indici ripetuti:

$$(k_O)_i = \varepsilon_{ijk}x_j\rho v_k + h_i \qquad i = 1, 2, 3.$$

Va anche sottolineato che di regola la densità di momento angolare intrinseco  $h$  può ritenersi nulla o trascurabile, per cui la densità di momento angolare si riduce al solo contributo “orbitale”:

$$(k_O)_i = \varepsilon_{ijk}x_j\rho v_k \qquad i = 1, 2, 3$$

ed è a questa ipotesi che ci si limiterà nel seguito (si parla di **continui di Cauchy**).

## 19. Forze agenti su un continuo

Le forze agenti su un sistema continuo, o su una parte regolare  $\Phi_t(\Omega)$  di questo, si sogliono distinguere in **forze di volume** e **forze di superficie** — o di contatto, o intime.

Le **forze di volume** si esercitano in tutta la regione  $\Phi_t(\Omega)$  dello spazio che la porzione di sistema occupa all’istante considerato e vengono di regola rappresentate per mezzo di una appropriata **densità volumica di forza**, di componenti:

$$\rho f_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

in modo che il risultante delle forze di volume è dato dall’integrale:

$$\int_{\Phi_t(\Omega)} \rho f_i \, dx_1 dx_2 dx_3 \qquad i = 1, 2, 3.$$

Le  $f_i$  possono intepretarsi come le componenti di una densità di forza **per unità di massa** e sono in generale funzioni del tempo, della posizione  $x$  e della velocità istantanea  $v$ .

Le **forze di superficie** sono dovute al contatto della porzione  $\Phi_t(\Omega)$  del continuo con il mezzo circostante — o eventualmente, in tutto o in parte, con una parete o contorno che delimita il continuo. Esse si esercitano perciò lungo la superficie di  $\Phi_t(\Omega)$ , che si assumerà regolare ed orientata positivamente — ossia con il versore normale diretto verso l’esterno:

$$\partial\Phi_t(\Omega)^+$$

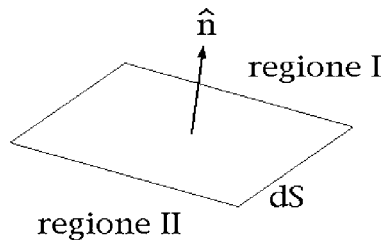
e vengono espresse per mezzo di una opportuna **densità di forza per unità di superficie** o **sforzo** — **principio degli sforzi di Cauchy**:

$$T_i, \quad i = 1, 2, 3$$

che consente di esprimerne il risultante per mezzo di un integrale di superficie:

$$\int_{\partial\Phi_t(\Omega)^+} T_i dS.$$

Le componenti  $T_i$  degli sforzi sono funzioni di  $t, x, v$  — nonché in alcuni casi delle derivate parziali prime  $\partial v/\partial x$  — e in generale dipendono anche dall'orientamento della superficie su cui si esercitano. Se l'orientamento di una superficie di piccola area  $dS$  è specificato dal versore normale  $\hat{n}$ , si conviene di indicare con  $T(\hat{n})$  lo sforzo che su quella superficie esercita il mezzo continuo posto dalla parte del versore normale contro la porzione di continuo che si colloca dalla parte opposta — rispettivamente le regioni I e II illustrate in figura:



È importante rilevare che per definizione  $T(-\hat{n})$  rappresenta lo sforzo esercitato sulla medesima superficie  $dS$  dalla regione II del mezzo sulla regione I, sforzo che in virtù del principio di azione e reazione deve risultare opposto al precedente:

$$T(-\hat{n}) = -T(\hat{n}) \quad \forall \hat{n} \in \mathbb{R}^3, |\hat{n}| = 1.$$

## 20. Equazione cardinale dell'impulso

L'equazione fondamentale del moto di un sistema continuo qualsiasi è l'equazione cardinale della quantità di moto, che si ottiene identificando la derivata in  $t$  dell'impulso con il risultante di tutte le forze applicate ad una porzione  $\Phi_t(\Omega)$  del sistema:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(\Omega)} \rho v_i dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Phi_t(\Omega)} \rho f_i dx_1 dx_2 dx_3 + \int_{\partial\Phi_t(\Omega)^+} T_i dS, \quad i = 1, 2, 3.$$

La derivata rispetto al tempo della quantità di moto si scrive come integrale di volume mediante il teorema del trasporto nella forma (15.3):

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(\Omega)} \rho v_i dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Phi_t(\Omega)} \rho \frac{dv_i}{dt} dx_1 dx_2 dx_3.$$

Di conseguenza l'equazione cardinale dell'impulso si riduce a:

$$\int_{\Phi_t(\Omega)} \rho \frac{dv_i}{dt} dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Phi_t(\Omega)} \rho f_i dx_1 dx_2 dx_3 + \int_{\partial\Phi_t(\Omega)^+} T_i dS \quad (20.1)$$

e raggruppando gli integrali di volume diventa infine:

$$\int_{\Phi_t(\Omega)} \left( \rho \frac{dv_i}{dt} - \rho f_i \right) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\partial\Phi_t(\Omega)^+} T_i dS. \quad (20.2)$$

## 21. Teorema degli sforzi di Cauchy

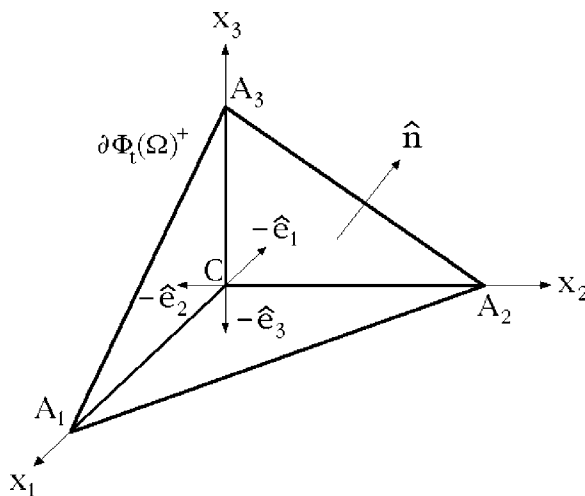
L'equazione cardinale della quantità di moto conduce ad una relazione fondamentale che lega fra loro gli sforzi esercitati su una superficie di orientamento arbitrario e gli sforzi esercitati nelle stesse condizioni su superfici i cui versori normali siano diretti secondo gli assi coordinati. Si tratta del cosiddetto **teorema degli sforzi** di Cauchy, che stabilisce quanto segue:

*Sia  $\hat{n} = n_i \hat{e}_i$  un versore di componenti  $n_1, n_2, n_3$  rispetto alla base  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  dei versori associati alla terna spaziale  $Ox_1x_2x_3$ . Per lo sforzo  $T(\hat{n})$  vale allora la relazione:*

$$T(\hat{n}) = n_i T(\hat{e}_i).$$

### Dimostrazione

Per dimostrare il teorema di Cauchy in una generica posizione  $x \in \Phi_t(\Omega)$  all'istante  $t \in I$ , si introduce una terna di riferimento  $Cx_1x_2x_3$  con origine nel punto  $C$  di coordinate spaziali  $x$  e gli assi rispettivamente diretti secondo gli assi coordinati della terna spaziale. Lungo tali assi si considerano tre punti  $A_1, A_2, A_3$ , che assieme a  $C$  individuano un tetraedro  $CA_1A_2A_3$ , di facce  $CA_2A_3, CA_3A_1, CA_1A_2, A_1A_2A_3$ .



faccia	area	normale
$CA_2A_3$	$S n_1$	$-\hat{e}_1$
$CA_3A_1$	$S n_2$	$-\hat{e}_2$
$CA_1A_2$	$S n_3$	$-\hat{e}_3$
$A_1A_2A_3$	$S$	$\hat{n}$

Questo tetraedro viene identificato con il dominio di integrazione  $\Phi_t(\Omega)$  a primo membro della (20.2). Il vantaggio di scegliere  $CA_1A_2A_3$  come dominio di integrazione è rappresentato dal fatto che lungo ogni faccia il versore normale esterno si mantiene costante e coincide o con  $\hat{n}$  o con uno dei versori coordinati cambiati di segno — vedi figura. Se poi si indica con  $S$  l'area della faccia “sghemba”, le aree delle facce parallele ai piani coordinati si scrivono:

$$\text{area}(CA_2A_3) = Sn_1 \quad \text{area}(CA_3A_1) = Sn_2 \quad \text{area}(CA_1A_2) = Sn_3, \quad (21.1)$$

come è immediato verificare considerando l'equazione cartesiana del piano passante per i punti  $A_1, A_2, A_3$ . Ciò premesso, l'equazione (20.2) si può riesprimere separando i contributi delle singole facce all'integrale di superficie a secondo membro:

$$\begin{aligned} \int_{\Phi_t(\Omega)} \left( \rho \frac{dv_i}{dt} - \rho f_i \right) (x) dx_1 dx_2 dx_3 &= \int_{CA_2A_3} T_i(x, -\hat{e}_1) dS + \int_{CA_3A_1} T_i(x, -\hat{e}_2) dS + \\ &+ \int_{CA_1A_2} T_i(x, -\hat{e}_3) dS + \int_{A_1A_2A_3} T_i(x, -\hat{n}) dS. \end{aligned}$$

Si noti che in tutti gli integrali sono state evidenziate le variabili dalle quali dipendono gli integrandi e che sono rilevanti ai fini dei calcoli successivi, mentre si sono ignorati completamente gli argomenti non essenziali — quali il tempo e la velocità  $v$ , dalle quali densità delle forze di volume e sforzi potrebbero in generale dipendere. Siccome gli integrandi sono per ipotesi delle funzioni continue, è lecito stimare tutti gli integrali dell'equazione precedente per mezzo del teorema della media. Sarà così definito un punto  $x^{(0)} \in \Phi_t(\Omega)$  tale che:

$$\int_{\Phi_t(\Omega)} \left( \rho \frac{dv_i}{dt} - \rho f_i \right) (x) dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{hS}{3} \left( \rho \frac{dv_i}{dt} - \rho f_i \right) (x^{(0)})$$

essendosi indicati con  $h$  l'altezza del tetraedro  $CA_1A_2A_3$  relativa alla base  $A_1A_2A_3$  e dunque con  $hS/3$  il volume del tetraedro stesso. In modo analogo, per l'integrale di superficie su  $CA_2A_3$  si potrà determinare su punto  $x^{(1)} \in CA_2A_3$  in modo che si abbia:

$$\int_{CA_2A_3} T_i(x, -\hat{e}_1) dS = Sn_1 T_i(x^{(1)}, -\hat{e}_1).$$

Stessa affermazione vale per l'integrale su  $CA_3A_1$ :

$$\int_{CA_3A_1} T_i(x, -\hat{e}_2) dS = Sn_2 T_i(x^{(2)}, -\hat{e}_2),$$

per quello su  $CA_1A_2$ :

$$\int_{CA_1A_2} T_i(x, -\hat{e}_3) dS = Sn_3 T_i(x^{(3)}, -\hat{e}_3)$$

e per quello su  $A_1A_2A_3$ :

$$\int_{A_1A_2A_3} T_i(x, -\hat{n}) dS = S T_i(x^{(4)}, \hat{n})$$

con  $x^{(2)} \in CA_3A_1$ ,  $x^{(3)} \in CA_1A_2$  e  $x^{(4)} \in A_1A_2A_3$  opportuni. L'equazione (20.2) diventa pertanto:

$$\begin{aligned} & \frac{hS}{3} \left( \rho \frac{dv_i}{dt} - \rho f_i \right) (x^{(0)}) = \\ & = Sn_1 T_i(x^{(1)}, -\hat{e}_1) + Sn_2 T_i(x^{(2)}, -\hat{e}_2) + Sn_3 T_i(x^{(3)}, -\hat{e}_3) + S T_i(x^{(4)}, \hat{n}) \end{aligned}$$

e semplificata l'area  $S$  assume la forma equivalente:

$$\begin{aligned} & \frac{h}{3} \left( \rho \frac{dv_i}{dt} - \rho f_i \right) (x^{(0)}) = \\ & = n_1 T_i(x^{(1)}, -\hat{e}_1) + n_2 T_i(x^{(2)}, -\hat{e}_2) + n_3 T_i(x^{(3)}, -\hat{e}_3) + T_i(x^{(4)}, \hat{n}). \end{aligned} \quad (21.2)$$

Si supponga ora di far tendere a  $C$  i tre punti  $A_1, A_2, A_3$ , in modo che il triangolo  $A_1A_2A_3$  non modifichi la propria orientazione; ciò significa che le lunghezze  $|A_1 - C|$ ,  $|A_2 - C|$  e  $|A_3 - C|$  vengono mandate a zero mantenendo costanti i loro reciproci rapporti, ovvero che la faccia  $A_1A_2A_3$  conserva inalterata la propria orientazione rispetto alla terna assoluta, o ancora che il versore normale  $\hat{n}$  rimane costante. In queste condizioni si ha evidentemente:

$$h \rightarrow 0 \quad x^{(0)} \rightarrow x \quad x^{(1)} \rightarrow x \quad x^{(2)} \rightarrow x \quad x^{(3)} \rightarrow x \quad x^{(4)} \rightarrow x$$

sicché nel limite la (21.2) conduce alla relazione:

$$0 = n_1 T_i(x, -\hat{e}_1) + n_2 T_i(x, -\hat{e}_2) + n_3 T_i(x, -\hat{e}_3) + T_i(x, \hat{n})$$

che in virtù del principio di azione e reazione si riesprime come:

$$0 = -n_1 T_i(x, \hat{e}_1) - n_2 T_i(x, \hat{e}_2) - n_3 T_i(x, \hat{e}_3) + T_i(x, \hat{n})$$

e completa la dimostrazione:

$$T_i(x, \hat{n}) = n_1 T_i(x, \hat{e}_1) + n_2 T_i(x, \hat{e}_2) + n_3 T_i(x, \hat{e}_3) = n_j T_i(x, \hat{e}_j). \quad (21.3)$$

Per scrupolo, è opportuno ricavare esplicitamente le relazioni geometriche (21.1). A questo scopo basta notare che, per definizione di prodotto vettore, vale

$$2S \hat{n} = (A_2 - A_1) \wedge (A_3 - A_1) = [(A_2 - C) - (A_1 - C)] \wedge [(A_3 - C) - (A_1 - C)]$$

sicché applicando la proprietà distributiva si ottiene

$$\begin{aligned} 2S \hat{n} &= (A_2 - C) \wedge (A_3 - C) - (A_2 - C) \wedge (A_1 - C) - (A_1 - C) \wedge (A_3 - C) = \\ &= (A_2 - C) \wedge (A_3 - C) + (A_1 - C) \wedge (A_2 - C) + (A_3 - C) \wedge (A_1 - C) \end{aligned}$$

ed infine, sempre dalla definizione di prodotto vettoriale,

$$2S \hat{n} = 2\text{area}(CA_2A_3) \hat{e}_1 + 2\text{area}(CA_1A_2) \hat{e}_3 + 2\text{area}(CA_3A_1) \hat{e}_2$$

per cui

$$\hat{n} = \frac{\text{area}(CA_2A_3)}{S} \hat{e}_1 + \frac{\text{area}(CA_3A_1)}{S} \hat{e}_2 + \frac{\text{area}(CA_1A_2)}{S} \hat{e}_3.$$

## 22. Tensore degli sforzi di Cauchy

Il teorema di Cauchy mette in evidenza che il calcolo degli sforzi su una superficie di orientamento  $\hat{n}$  è riconducibile a quello degli sforzi su tre superfici rispettivamente orientate secondo gli assi coordinati. La componente  $i$ -esima dello sforzo agente sulla superficie di normale  $\hat{e}_j$  viene indicato con il simbolo:

$$\tau_{ij} = T_i(\hat{e}_j), \quad i, j = 1, 2, 3$$

ed è nota come componente  $i, j$  del **tensore degli sforzi di Cauchy** del sistema. In termini del tensore degli sforzi il teorema di Cauchy si esprime nella forma:

$$T_i(\hat{n}) = \tau_{ij}n_j. \quad (22.1)$$

## 23. Equazione cardinale dell'impulso in forma locale

Facendo uso della precedente relazione (22.1), l'equazione cardinale dell'impulso (20.1) diventa:

$$\int_{\Phi_t(\Omega)} \rho \frac{dv_i}{dt} dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Phi_t(\Omega)} \rho f_i dx_1 dx_2 dx_3 + \int_{\partial\Phi_t(\Omega)^+} \tau_{ij} n_j dS$$

e poiché l'ultimo integrale di superficie presenta la struttura di un integrale di flusso, lo si può riesprimere per mezzo del teorema della divergenza:

$$\int_{\Phi_t(\Omega)} \rho \frac{dv_i}{dt} dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Phi_t(\Omega)} \rho f_i dx_1 dx_2 dx_3 + \int_{\Phi_t(\Omega)} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dx_1 dx_2 dx_3.$$

Si possono allora raccogliere tutti gli integrali di volume in uno solo:

$$\int_{\Phi_t(\Omega)} \left[ \rho \frac{dv_i}{dt} - \rho f_i - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right] dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

e sfruttare l'arbitrarietà del dominio di integrazione, con il solito argomento, per concludere che:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} - \rho f_i - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

ossia:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}. \quad (23.1)$$

È questa l'**equazione cardinale dell'impulso in forma differenziale**, o locale.

## 24. Equazione cardinale del momento angolare

L'equazione cardinale del momento angolare prevede che per un elemento  $\Phi_t(\Omega)$  del continuo la derivata rispetto al tempo del momento angolare, relativamente al polo fisso  $O$ , debba identificarsi con il momento risultante in  $O$  di tutte le forze agenti su quell'elemento:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(\Omega)} \varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k \, dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Phi_t(\Omega)} \varepsilon_{ijk} x_j \rho f_k \, dx_1 dx_2 dx_3 + \int_{\partial\Phi_t(\Omega)^+} \varepsilon_{ijk} x_j T_k \, dS. \quad (24.1)$$

La derivata in  $t$  del momento angolare si valuta con il teorema del trasporto (15.3):

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(\Omega)} \varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k \, dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Phi_t(\Omega)} \rho \frac{d}{dt} (\varepsilon_{ijk} x_j v_k) \, dx_1 dx_2 dx_3 \quad (24.2)$$

e nell'espressione ottenuta l'integrando si semplifica calcolando la derivata materiale:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\varepsilon_{ijk} x_j v_k) &= \varepsilon_{ijk} \frac{d}{dt} (x_j v_k) = \varepsilon_{ijk} \left( \frac{dx_j}{dt} v_k + x_j \frac{dv_k}{dt} \right) = \varepsilon_{ijk} \left( v_j v_k + x_j \frac{dv_k}{dt} \right) = \\ &= \varepsilon_{ijk} v_j v_k + \varepsilon_{ijk} x_j \frac{dv_k}{dt}. \end{aligned}$$

Il primo termine è nullo grazie all'antisimmetria del simbolo di Ricci:

$$\varepsilon_{ijk} v_j v_k = \varepsilon_{ikj} v_k v_j = -\varepsilon_{ijk} v_k v_j = -\varepsilon_{ijk} v_j v_k = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3,$$

per cui, tenuto conto dell'equazione dell'impulso (23.1), si ottiene:

$$\rho \frac{d}{dt} (\varepsilon_{ijk} x_j v_k) = \varepsilon_{ijk} x_j \rho \frac{dv_k}{dt} = \varepsilon_{ijk} x_j \left( \rho f_k + \frac{\partial \tau_{kl}}{\partial x_l} \right) = \varepsilon_{ijk} x_j \rho f_k + \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \tau_{kl}}{\partial x_l}$$

e la (24.2) diventa:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(\Omega)} \varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k \, dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Phi_t(\Omega)} \left( \varepsilon_{ijk} x_j \rho f_k + \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \tau_{kl}}{\partial x_l} \right) dx_1 dx_2 dx_3.$$

Vale inoltre:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Phi_t(\Omega)^+} \varepsilon_{ijk} x_j T_k \, dS &= \int_{\partial\Phi_t(\Omega)^+} \varepsilon_{ijk} x_j \tau_{kl} n_l \, dS = \int_{\Phi_t(\Omega)} \frac{\partial}{\partial x_l} (\varepsilon_{ijk} x_j \tau_{kl}) \, dx_1 dx_2 dx_3 = \\ &= \int_{\Phi_t(\Omega)} \left( \varepsilon_{ijk} \delta_{jl} \tau_{kl} + \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \tau_{kl}}{\partial x_l} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Phi_t(\Omega)} \left( \varepsilon_{ijk} \tau_{kj} + \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \tau_{kl}}{\partial x_l} \right) dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

e quindi sostituendo nella (24.1) si perviene alla relazione:

$$\int_{\Phi_t(\Omega)} \left( \varepsilon_{ijk} x_j \rho f_k + \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \tau_{kl}}{\partial x_l} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Phi_t(\Omega)} \varepsilon_{ijk} x_j \rho f_k dx_1 dx_2 dx_3 +$$

$$+ \int_{\Phi_t(\Omega)} \left( \varepsilon_{ijk} \tau_{kj} + \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \tau_{kl}}{\partial x_l} \right) dx_1 dx_2 dx_3$$

che semplificata porge:

$$\int_{\Phi_t(\Omega)} \varepsilon_{ijk} \tau_{kj} dx_1 dx_2 dx_3 = 0.$$

L'arbitrarietà del dominio di integrazione e la postulata continuità dell'integrando a tutti i tempi e in tutte le posizioni assicurano al solito l'annullarsi della funzione integranda:

$$\varepsilon_{ijk} \tau_{kj} = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

ovvero le tre relazioni indipendenti:

$$\tau_{12} - \tau_{21} = 0 \quad \tau_{23} - \tau_{32} = 0 \quad \tau_{31} - \tau_{13} = 0$$

che impongono la **simmetria del tensore degli sforzi** di Cauchy:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3.$$

L'equazione cardinale del momento angolare si limita perciò a imporre la condizione di simmetria sul tensore degli sforzi di Cauchy.

## 25. Equazione di bilancio dell'energia

La densità volumica di energia cinetica del sistema può essere rappresentata nella forma:

$$\frac{1}{2} \rho |v|^2 = \frac{1}{2} \rho v_i v_i$$

per cui l'energia cinetica di una porzione  $\Phi_t(\Omega)$  del mezzo continuo risulterà:

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Phi_t(\Omega)} \rho v_i v_i dx_1 dx_2 dx_3.$$

Il bilancio dell'energia si basa sull'idea, squisitamente meccanica, che il lavoro eseguito dalle forze di volume e di superficie nell'unità di tempo si traduca in una variazione di energia cinetica. Si vedrà che questa condizione non può essere soddisfatta, in generale.

La derivata rispetto al tempo dell'energia cinetica si determina con il teorema del trasporto:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(\Omega)} \frac{1}{2} \rho v_i v_i dx_1 dx_2 dx_3 = \\ &= \int_{\Phi_t(\Omega)} \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v_i v_i \right) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Phi_t(\Omega)} \rho \frac{dv_i}{dt} v_i dx_1 dx_2 dx_3.\end{aligned}$$

Se si sostituisce l'equazione cardinale dell'impulso in forma differenziale si perviene così all'espressione:

$$\frac{dT}{dt} = \int_{\Phi_t(\Omega)} \left( \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) v_i dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Phi_t(\Omega)} \left( \rho f_i v_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} v_i \right) dx_1 dx_2 dx_3.$$

La potenza  $\pi$  delle forze applicate, di volume e di superficie, vale invece:

$$\pi = \int_{\Phi_t(\Omega)} \rho f_i v_i dx_1 dx_2 dx_3 + \int_{\partial \Phi_t(\Omega)^+} T_i v_i dS$$

dove l'integrale di superficie può essere ricondotto ad un integrale di volume sul dominio  $\Phi_t(\Omega)$  per mezzo del tensore degli sforzi e del teorema della divergenza:

$$\int_{\partial \Phi_t(\Omega)^+} T_i v_i d\sigma = \int_{\partial \Phi_t(\Omega)^+} v_i \tau_{ij} n_j d\sigma = \int_{\Phi_t(\Omega)} \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} v_i) dx_1 dx_2 dx_3$$

e dunque

$$\begin{aligned}\pi &= \int_{\Phi_t(\Omega)} \rho f_i v_i dx_1 dx_2 dx_3 + \int_{\Phi_t(\Omega)} \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} v_i) dx_1 dx_2 dx_3 = \\ &= \int_{\Phi_t(\Omega)} \left[ \rho f_i v_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} v_i) \right] dx_1 dx_2 dx_3.\end{aligned}$$

Si osserva che in generale:

$$\pi - \frac{dT}{dt} \neq 0; \quad (25.1)$$

le forze agenti possono eseguire lavoro sull'elemento  $\Phi_t(\Omega)$  del sistema, senza che questo lavoro si traduca in un eguale incremento di energia cinetica e, viceversa, una diminuzione di energia cinetica può non accompagnarsi a lavoro eseguito contro le forze applicate. Si noti che, di regola, le forze di volume e di superficie sono sollecitazioni **esterne** all'elemento di continuo  $\Phi_t(\Omega)$ , per cui  $\pi = \pi^{\text{est}}$  e la conclusione (25.1) non appare di per sè in contrasto con il teorema dell'energia cinetica, che imporrebbe l'uguaglianza fra  $dT/dt$  e la

potenza di *tutte* le forze applicate, *interne ed esterne*; la differenza può infatti interpretarsi meccanicamente come potenza delle sollecitazioni interne

$$\frac{dT}{dt} - \pi^{\text{est}} = \pi^{\text{int}} \neq 0.$$

È però più conveniente intenderla termodinamicamente come la derivata in  $t$ , cambiata di segno, dell'energia interna  $U$  di  $\Phi_t(\Omega)$ . Questa osservazione *esprime la natura essenzialmente termodinamica dei sistemi continui*, nei quali è dato assistere a trasformazioni di lavoro meccanico in energia interna e di energia interna in lavoro meccanico. Una descrizione appropriata di un mezzo continuo non può prescindere dall'aspetto termodinamico, per cui in luogo di *meccanica dei continui* sarebbe più corretto parlare di *termomeccanica dei continui*. In modo del tutto naturale, questa interpretazione si presta anche alla trattazione di sistemi continui in cui abbiano luogo scambi di calore, facendo uso del *primo principio della termodinamica*:

$$\delta L = dU + \delta Q$$

dove, intendendosi per **sistema** la porzione  $\Phi_t(\Omega)$  del continuo:

$\delta Q$  è la quantità di calore ceduto dal sistema al mezzo circostante;

$dU$  è la variazione di energia interna  $U$  del sistema;

$\delta L$  è il lavoro meccanico eseguito sul sistema dall'ambiente circostante.

Più specificatamente,  $\delta L$  deve interpretarsi come il lavoro meccanico eseguito dall'ambiente sul sistema **esclusa la parte convertita in energia cinetica**. Si ha pertanto:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} + \frac{\delta Q}{dt} &= \frac{\delta L}{dt} = \pi - \frac{dT}{dt} = \\ &= \int_{\Phi_t(\Omega)} \left[ \rho f_i v_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} v_i + \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \rho f_i v_i - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} v_i \right] dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Phi_t(\Omega)} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

essendo:

- $dU/dt$  la variazione di energia interna del sistema per unità di tempo;
- $\delta Q/dt$  il flusso di calore (uscente se positivo).

Nell'ipotesi che gli effetti di tensione superficiale siano trascurabili — contributo nullo della superficie all'energia interna — l'energia interna del sistema, in quanto funzione di stato, può essere espressa per mezzo di una appropriata densità volumica:

$$\rho u$$

in modo che l'energia interna di un elemento  $\Phi_t(\Omega)$  del continuo si otterrà integrando sull'intero dominio:

$$U = \int_{\Phi_t(\Omega)} \rho u dx_1 dx_2 dx_3.$$

La funzione  $u$ , rappresentando il rapporto fra la densità volumica di energia interna e la densità volumica di massa, deve interpretarsi come **energia interna specifica** — energia interna riferita all'unità di massa.

Il flusso di calore si può assumere che nella maggior parte dei casi sia dovuto principalmente alla conduzione attraverso la superficie  $\partial\Phi_t(\Omega)^+$  che delimita l'elemento  $\Phi_t(\Omega)$  del mezzo continuo. Lo si potrà rappresentare perciò mediante un vettore **densità di flusso di calore**, di componenti:

$$J_i, \quad i = 1, 2, 3$$

e il flusso complessivo di calore per unità di tempo si potrà descrivere per mezzo dell'integrale di superficie:

$$\frac{\delta Q}{dt} = \int_{\partial\Phi_t(\Omega)^+} J_i n_i dS$$

in cui il segno positivo a secondo membro si giustifica pensando che ad un integrale positivo deve giustappunto corrispondere ad un flusso totale **uscente** dall'elemento di continuo, quale  $\delta Q/dt$  deve effettivamente rappresentare.

La derivata rispetto al tempo dell'energia interna risulta allora, dal teorema del trasporto:

$$\frac{dU}{dt} = \int_{\Phi_t(\Omega)} \left[ \frac{d(\rho u)}{dt} + \rho u \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right] dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Phi_t(\Omega)} \left[ u \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) + \rho \frac{du}{dt} \right] dx_1 dx_2 dx_3$$

e per l'equazione di continuità si riduce alla semplice espressione:

$$\frac{dU}{dt} = \int_{\Phi_t(\Omega)} \rho \frac{du}{dt} dx_1 dx_2 dx_3.$$

Il flusso di calore si rappresenta come integrale di volume mediante il teorema della divergenza:

$$\frac{\delta Q}{dt} = \int_{\partial\Phi_t(\Omega)^+} J_i n_i dS = \int_{\Phi_t(\Omega)} \frac{\partial J_i}{\partial x_i} dx_1 dx_2 dx_3.$$

L'**equazione di bilancio dell'energia**, che esprime il primo principio della termodinamica per la generica porzione  $\Phi_t(\Omega)$  del continuo, diventa allora:

$$\int_{\Phi_t(\Omega)} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Phi_t(\Omega)} \rho \frac{du}{dt} dx_1 dx_2 dx_3 + \int_{\Phi_t(\Omega)} \frac{\partial J_i}{\partial x_i} dx_1 dx_2 dx_3$$

e per l'arbitrarietà di  $\Phi_t(\Omega)$  — e la postulata continuità degli integrandi — corrisponde all'equazione locale:

$$\tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial J_i}{\partial x_i}, \quad (25.2)$$

nella quale, localmente:

- $\tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  specifica il lavoro eseguito dall'ambiente sul sistema e non convertito in energia cinetica, per unità di tempo e di volume;
- $\rho \frac{du}{dt}$  è la variazione di energia interna per unità di volume e di tempo;
- $\frac{\partial J_i}{\partial x_i}$  rappresenta il calore ceduto dal sistema al mezzo circostante, sempre per unità di volume e nell'unità di tempo.

## 25.1 Esempio. Fluido non viscoso

In un fluido non viscoso il vettore degli sforzi è opposto al versore normale della superficie su cui si esercita:

$$T = -P \hat{n}$$

secondo una fattore di proporzionalità  $-P$ , di segno negativo, che è l'opposto della pressione  $P$ .<sup>(1)</sup> La componente  $i$ -esima dello sforzo si scrive pertanto:

$$T_i = -P n_i$$

ma deve anche coincidere con l'espressione fornita dal teorema di Cauchy in termini del tensore degli sforzi:

$$T_i = \tau_{ij} n_j.$$

Eguagliando le due espressioni si ottiene:

$$-P n_i = \tau_{ij} n_j$$

e quindi:

$$(P \delta_{ij} + \tau_{ij}) n_j = 0$$

che per l'arbitrarietà del versore normale  $\hat{n}$  implica:

$$\tau_{ij} = -P \delta_{ij}.$$

Il tensore degli sforzi di Cauchy è simmetrico, come imposto dall'equazione cardinale del momento angolare. Il lavoro per unità di tempo e volume che l'ambiente circostante esegue sul sistema si scrive allora:

$$\tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = (-P \delta_{ij}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -P \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

---

<sup>(1)</sup> Di regola la pressione  $P$  ha segno positivo, tuttavia esistono situazioni particolari in cui un liquido può manifestare pressioni negative, rappresentative di uno stato di tensione del liquido e non di compressione. Queste situazioni sono tipicamente instabili e di difficile realizzazione, per cui di solito possono essere ignorate. La pressione si intende quindi sempre positiva o, alla peggio, nulla.

Ricordando che per via del teorema del trasporto:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(\Omega)} 1 \, dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Phi_t(\Omega)} \left( \frac{d1}{dt} + 1 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Phi_t(\Omega)} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx_1 dx_2 dx_3$$

la divergenza del campo euleriano di velocità rappresenta il tasso di variazione del volume nel tempo, si ricava che:

- (i) se  $\partial v_i / \partial x_i > 0$  il volume dell'elemento aumenta, l'elemento si espande ed il lavoro risulta di segno negativo in quanto il sistema esegue lavoro **contro** le forze esterne di pressione;
- (ii) se  $\partial v_i / \partial x_i < 0$  il volume dell'elemento diminuisce e quindi l'elemento viene compresso. Il lavoro è di segno positivo, poiché l'ambiente esegue lavoro **sul** sistema a seguito della compressione.

## 26. Fluidi perfetti (o non viscosi)

Un fluido perfetto è caratterizzato dalla seguente forma del tensore degli sforzi di Cauchy:

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3$$

essendo  $P \geq 0$  la pressione del fluido. L'equazione cardinale dell'impulso in forma locale diventa allora:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (-P\delta_{ij}) = \rho f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i}$$

ossia:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i}. \tag{26.1}$$

Le (26.1) sono note come **equazioni di Eulero** del moto del fluido perfetto e ad esse va affiancata l'equazione di continuità. Le equazioni del moto del sistema sono quindi:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} & i = 1, 2, 3 \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \end{cases}$$

per un totale di 4 equazioni scalari nelle 5 funzioni incognite:

$$\rho \quad P \quad v_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Il problema del numero insufficiente di equazioni in rapporto al numero di variabili dipendenti deve essere risolto introducendo una appropriata equazione ausiliaria. Lo scopo può essere raggiunto fondamentalmente in due modi, o assumendo il **fluido incompressibile**, oppure introducendo l'ipotesi del **fluido barotropico**.

## 26.1 Fluido incomprimitibile

Se si richiede che il fluido sia incomprimitibile, tutti i moti sono isocori e vale quindi la condizione di incomprimitibilità:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

che costituisce la quinta equazione cercata e consente, tra l'altro, di semplificare la stessa equazione di continuità. Il moto del sistema è governato perciò dalle 5 equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} & i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{d\rho}{dt} = 0 \end{cases}$$

nelle 5 funzioni incognite  $\rho, P, v_1, v_2, v_3$ . Si ricorda che rientra in questa tipologia di fluidi il caso dei fluidi di densità costante preassegnata  $\rho = \rho_0$ , per i quali l'equazione di continuità è automaticamente soddisfatta per campi euleriani di velocità solenoidali:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho_0}{\partial x_i} = 0$$

con le equazioni del moto che si riducono a:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} & i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \end{cases}$$

nelle 4 funzioni incognite  $P, v_i, i = 1, 2, 3$ .

Il modello del fluido incomprimitibile trova grande applicazione nella pratica: in condizioni normali, ad esempio, quasi tutti i liquidi possono essere bene approssimati come continui incomprimitibili.

## 26.2 Fluido barotropico

Nei fluidi barotropici si postula che la pressione si possa esprimere come funzione, convenientemente regolare, della densità. Vale perciò la relazione barotropica — o equazione di stato:

$$P = P(\rho).$$

Le equazioni del moto del sistema sono quindi quelle di Eulero e di continuità:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P(\rho)}{\partial x_i} & i = 1, 2, 3 \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \end{cases}$$

nelle 4 funzioni incognite  $\rho, v_i, i = 1, 2, 3$ . Una volta risolto il sistema rispetto a queste variabili, la pressione viene ricavata per mezzo dell'equazione di stato. Si osservi che, introdotta la funzione ausiliaria — nota come entalpia specifica:

$$H(\rho) = \int \frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho}(\rho) d\rho \quad (26.2)$$

si ha:

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{dH}{d\rho}(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho}(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i}$$

in modo che le equazioni del moto assumono la forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{\partial H(\rho)}{\partial x_i} & i = 1, 2, 3 \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \end{cases}$$

I fluidi barotropici trovano importanti applicazioni pratiche. Tale è il caso, in particolare, dei gas perfetti in condizioni adiabatiche — gas perfetto nel quale siano trascurabili gli effetti di conduzione del calore. Nella fattispecie la relazione barotropica è della forma:

$$P(\rho) = \alpha \rho^\gamma$$

con  $\alpha$  costante positiva e  $\gamma = c_P/c_V > 1$ , rapporto fra i calori specifici a pressione ed a volume costante. Si tratta di una buona approssimazione, visto che i gas presentano una conducibilità termica molto bassa.

### 26.3 Soluzioni statiche e configurazioni di equilibrio

Le soluzioni statiche del continuo sono caratterizzate dal fatto che le coordinate spaziali di ogni punto materiale del sistema si mantengono costanti nel tempo:

$$x = x(t, X) = x(0, X) = X \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall X \in \Omega.$$

Equivalentemente, ciò significa che le velocità lagrangiane sono identicamente nulle:

$$V(t, X) = \frac{\partial x}{\partial t}(t, X) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall X \in \Omega$$

ovvero che risultano costantemente nulle le relative velocità euleriane:

$$v(t, x) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad x \in \Phi_t(\Omega).$$

Le equazioni che caratterizzano le soluzioni stazionarie si ottengono imponendo  $v(t, x) = 0$  identicamente nelle equazioni del moto. L'equazione cardinale della quantità di moto in forma locale si scrive pertanto:

$$0 = f_i(x) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, 3$$

dove si conviene di indicare con  $f(x)$  il campo delle forze di volume  $f$  calcolate a velocità nulla — di regola si assume che il campo  $f$  non dipenda esplicitamente dal tempo. Le configurazioni corrispondenti costituiscono gli **equilibri** del sistema.

## 26.4 Soluzioni statiche per il fluido incomprimibile

Nel caso di fluido incomprimibile le equazioni dei moti stazionari si riducono alle seguenti:

$$\begin{cases} 0 = f_i(x) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} & i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

L'ultima equazione assicura che la densità  $\rho$  può dipendere soltanto dalle coordinate spaziali  $x = X \in \Omega$  e non anche dal tempo:

$$\rho = \rho(x),$$

con  $\rho(x)$  che è determinata dalle condizioni iniziali. Di conseguenza, le equazioni residue assumono la forma:

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \rho(x) f_i(x) \quad i = 1, 2, 3$$

Rimane così stabilito che *condizione necessaria e sufficiente perché esista una soluzione stazionaria è il carattere posizionale e conservativo della densità delle forze di volume:*

$$\rho(x) f_i(x) = \frac{\partial U}{\partial x_i}(x) \quad i = 1, 2, 3,$$

per un opportuno potenziale  $U$ . Se il dominio  $\Omega$  occupato dal fluido è aperto e connesso, il campo di pressione  $P$  e il potenziale  $U$  coincidono a meno di una costante additiva:

$$P(x) = U(x) + \text{costante} \quad \forall x \in \Omega$$

per cui le superfici di equal pressione — isobare — si identificano tutte e soltanto con le superfici di equal potenziale — o equipotenziali.

## 26.5 Soluzioni statiche per il fluido barotropico

Per un fluido barotropico le equazioni dei moti stazionari sono:

$$\begin{cases} 0 = f_i(x) - \frac{\partial H}{\partial x_i} & i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (26.3)$$

Le equazioni di Eulero garantiscono che *condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di soluzioni statiche è la natura posizionale e conservativa delle forze di volume per unità di massa:*

$$f_i(x) = \frac{\partial U}{\partial x_i}(x) \quad i = 1, 2, 3.$$

Per un dominio spaziale  $\Omega$  aperto e connesso, il potenziale  $U$  e l'entalpia specifica  $H$  coincidono a meno di una costante additiva:

$$H(x) = U(x) + \text{costante} \quad \forall x \in \Omega.$$

La stessa relazione consente di esprimere la densità di equilibrio  $\rho$  in funzione del potenziale e quindi di ricavare il campo delle densità  $\rho(x)$ , la cui indipendenza dal tempo segue dall'ultima delle (26.3).

## 27. Esempio. Liquido pesante di densità costante

Si consideri un fluido perfetto di densità costante  $\rho$  contenuto in un dominio aperto e connesso  $\Omega$  e soggetto alla forza peso. Introdotta una terna di riferimento cartesiana ortogonale  $Ox_1x_2x_3$ , con l'asse verticale  $Ox_3$  orientato verso l'alto, la densità delle forze di volume — le forze peso — si scrive nella forma:

$$\rho f_i = \begin{cases} -\rho g & \text{per } i = 3 \\ 0 & \text{per } i = 1, 2 \end{cases}$$

per cui le equazioni di Eulero in condizioni statiche diventano:

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_1} \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_2} \\ 0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_3} \end{cases}$$

ossia:

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial x_3} = -\rho g.$$

L'essere  $\Omega$  aperto e connesso e le equazioni precedenti implicano che debba aversi, per opportune funzioni  $\alpha(x_2, x_3)$ ,  $\beta(x_1, x_3)$ ,  $\gamma(x_1, x_2)$ ,

$$P = \alpha(x_2, x_3) \quad P = \beta(x_1, x_3) \quad P = -\rho g x_3 + \gamma(x_1, x_2)$$

e quindi:

$$P = -\rho g x_3 + P_0, \quad P_0 \text{ costante}, \quad (27.1)$$

con la costante  $P_0$  che deve essere determinata in base alle condizioni al contorno. Il risultato ottenuto costituisce l'equazione fondamentale dell'equilibrio idrostatico. Si osservi che la relazione è in accordo con quanto osservato circa le condizioni di esistenza dell'equilibrio di un fluido: il campo delle forze di volume è costante, dunque posizionale e conservativo, con potenziale  $U = -g\rho x_3$ ; le superfici isobare coincidono inoltre con quelle equipotenziali, che sono i piani orizzontali  $x_3 = \text{costante}$ .

### 27.1 Seconda legge di Stevin

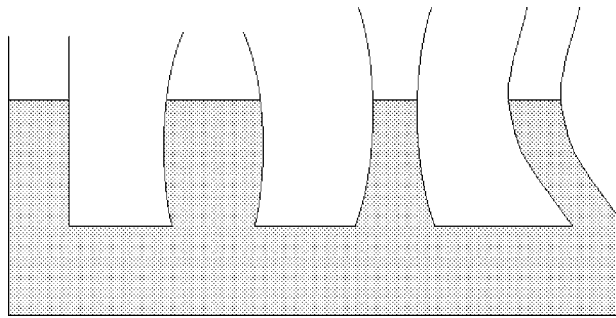
Se un corpo di liquido di densità costante è collocato in quiete in un recipiente, sotto l'azione della gravità e in presenza dell'aria, la pressione del liquido all'interfaccia con l'atmosfera coincide con quella atmosferica  $P_{\text{aria}}$ . Il pelo libero del liquido costituisce quindi una superficie isobara, che per quanto precedentemente dimostrato deve anche essere (contenuta in) un piano orizzontale, identificabile con il piano coordinato  $Ox_1x_2$ . Il campo delle pressioni entro il liquido è allora individuato dall'espressione:

$$P = -\rho g x_3 + P_{\text{aria}}$$

e la pressione del liquido aumenta linearmente con la profondità  $-x_3$ , proporzionalmente al prodotto  $\rho g$ . È questa la cosiddetta **seconda legge di Stevin** dell'idrostatica.

## 27.2 Principio dei vasi comunicanti

Un caso particolare del precedente risultato è quello in cui il dominio accessibile al fluido sia costituito da un sistema di regioni di varia forma e connesse fra loro — vasi comunicanti. Poiché all'equilibrio l'interfaccia liquido-aria deve essere una superficie isobara e quindi un piano orizzontale, il pelo libero del liquido nei diversi vasi deve risultare lo stesso — **principio dei vasi comunicanti**. Si intende che per la validità dell'affermazione si rende necessario assumere l'ipotesi del dominio aperto e connesso, visto che in caso contrario il campo di pressione non è descritto da un'unica funzione della forma (27.1), ma da più funzioni dello stesso tipo con costanti  $P_0$  diverse per ogni singola parte connessa del dominio occupato dal liquido.



È bene ricordare che i vasi non devono essere tubi troppo sottili — capillari — giacché in tal caso il livello di equilibrio del liquido viene influenzato dagli effetti di tensione superficiale e può in generale dipendere dal diametro e, secondariamente, dalla forma della sezione del capillare.

## 27.3 Principio di Pascal

Nel caso che il liquido occupi una regione connessa di  $\mathbb{R}^3$  e che gli effetti gravitazionali siano trascurabili, l'equazione (27.1) comporta che all'equilibrio il campo delle pressioni sia costante:

$$P(x) = -g\rho x_3 + P_0 = P_0, \quad \text{costante} \quad \forall x \in \Omega$$

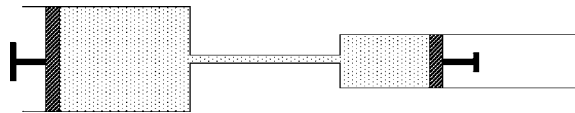
conformemente all'essere  $g = 0$ . Ciò significa che la pressione applicata in un punto del liquido, all'equilibrio, si trasmette inalterata a tutti gli altri punti del mezzo. L'effetto viene ampiamente sfruttato nelle macchine idrauliche, come il **martinetto idraulico**: due stantuffi di diversa sezione fra loro comunicanti mediante un condotto, vengono riempiti con un liquido — acqua o olio, ad esempio. Qualsiasi pressione venga esercitata sul pistone di uno dei due stantuffi, si trasmette all'intero corpo di liquido e, attraverso il condotto di comunicazione, anche al secondo pistone. Giocando sulla diversa sezione dei due pistoni è possibile modificare il rapporto delle sollecitazioni a questi applicabili in condizioni di equilibrio.

Se infatti si indicano con  $S_1$  e  $S_2$  le aree delle sezioni dei due pistoni e con  $F_1, F_2$  rispettivamente i moduli delle forze a questi applicate, l'eguaglianza delle pressioni agenti sul liquido all'equilibrio comporta la relazione:

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

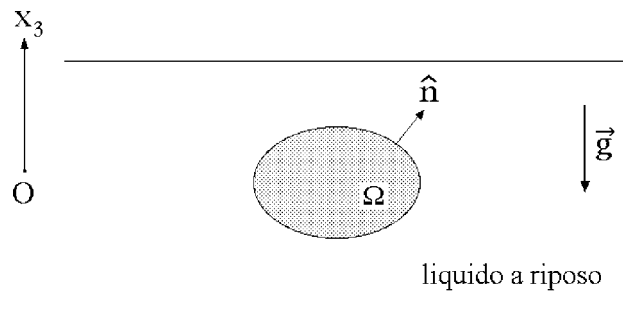
e dunque la ben nota condizione di equilibrio per le sollecitazioni:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2}.$$



### 27.4 Principio di Archimede

Un corpo viene immerso in un liquido di massa  $\rho$ , a riposo in un recipiente sotto l'azione della gravità. Per effetto della pressione idrostatica, il liquido esercita una sollecitazione sul corpo — spinta idrostatica o di Archimede. Si vuole determinare il risultante di tale sollecitazione.



La forza applicata dal liquido su un elemento infinitesimo  $dS$  di superficie del corpo immerso, di normale esterna  $\hat{n} = n_i \hat{e}_i$  è data da:

$$-P \hat{n} dS$$

per cui il risultante di queste sollecitazioni si ricava mediante l'integrale di superficie:

$$\vec{F} = \int_{\partial\Omega^+} (-P \hat{n}) dS = - \int_{\partial\Omega^+} P n_i dS \hat{e}_i.$$

La componente lungo  $\hat{e}_i$ , per  $i = 1, 2, 3$  fissato, di tale risultante si scrive perciò:

$$\hat{e}_i \cdot \vec{F} = - \int_{\partial\Omega^+} P n_i dS \quad i = 1, 2, 3.$$

Di qui è molto facile ricavare i valori delle componenti, facendo uso del teorema della divergenza e ricordando le equazioni di Eulero per il liquido all'equilibrio. Si ha così per la componente lungo  $\hat{e}_1$ :

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot \hat{e}_1 &= - \int_{\partial\Omega^+} P n_1 dS = - \int_{\partial\Omega^+} (P n_1 + 0 n_2 + 0 n_3) dS = \\ &= - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial 0}{\partial x_2} + \frac{\partial 0}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = - \int_{\Omega} (0 + 0 + 0) dx_1 dx_2 dx_3 = 0\end{aligned}$$

ed un calcolo analogo conduce allo stesso risultato per la componente lungo  $\hat{e}_2$ :

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot \hat{e}_2 &= - \int_{\partial\Omega^+} P n_2 dS = - \int_{\partial\Omega^+} (0 n_1 + P n_2 + 0 n_3) dS = \\ &= - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial 0}{\partial x_1} + \frac{\partial P}{\partial x_2} + \frac{\partial 0}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = - \int_{\Omega} (0 + 0 + 0) dx_1 dx_2 dx_3 = 0.\end{aligned}$$

La componente verticale è invece data da:

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot \hat{e}_3 &= - \int_{\partial\Omega^+} P n_3 dS = - \int_{\partial\Omega^+} (0 n_1 + 0 n_2 + P n_3) dS = \\ &= - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial 0}{\partial x_1} + \frac{\partial 0}{\partial x_2} + \frac{\partial P}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = - \int_{\Omega} (0 + 0 - \rho g) dx_1 dx_2 dx_3 = \\ &= \rho g \int_{\Omega} dx_1 dx_2 dx_3 = \rho g \text{vol}(\Omega),\end{aligned}$$

dove  $\text{vol}(\Omega)$  indica ovviamente il volume del dominio  $\Omega$  occupato dal corpo. Il risultato delle forze di pressione:

$$\vec{F} = \rho g \text{vol}(\Omega) \hat{e}_3$$

è dunque una forza diretta verticalmente verso l'alto, proporzionale al volume del corpo, alla costante di accelerazione gravitazionale  $g$  e alla densità del liquido. Siccome poi  $\text{vol}(\Omega)$  rappresenta anche il volume di liquido spostato dal corpo immerso e  $\rho g$  costituisce il peso specifico del liquido, il risultato si interpreta come il ben noto enunciato del **principio di Archimede** che *un corpo immerso in un liquido — a riposo — riceve una spinta diretta dal basso verso l'alto di intensità pari al peso del liquido spostato*.

Si può verificare facilmente che anche il momento risultante rispetto all'origine  $O$  delle forze di pressione coincide con il momento cambiato di segno, rispetto allo stesso polo, delle forze peso del corpo di liquido che occuperebbe la regione  $\Omega$ . Tale momento vale infatti:

$$\vec{M}_O = \int_{\partial\Omega^+} x \wedge (-P \hat{n}) dS = - \int_{\partial\Omega^+} x \wedge \hat{n} P dS$$

in modo che la sua componente lungo  $\hat{e}_i$  risulta:

$$\vec{M}_O \cdot \hat{e}_i = - \int_{\partial\Omega^+} \hat{e}_i \cdot x \wedge \hat{n} P \, dS$$

e per mezzo del simbolo di Ricci può scriversi nella forma equivalente:

$$\vec{M}_O \cdot \hat{e}_i = - \int_{\partial\Omega^+} \varepsilon_{ijk} x_j P n_k \, dS.$$

Basta applicare a quest'ultima il teorema della divergenza per ottenere la relazione:

$$\vec{M}_O \cdot \hat{e}_i = - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} (\varepsilon_{ijk} x_j P) \, dx_1 dx_2 dx_3 = - \int_{\Omega} \left( \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial P}{\partial x_k} + \varepsilon_{ijk} \delta_{jk} P \right) dx_1 dx_2 dx_3$$

che per via dell'antisimmetria del commutatore di Ricci si semplifica in:

$$\vec{M}_O \cdot \hat{e}_i = - \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial P}{\partial x_k} \, dx_1 dx_2 dx_3.$$

Per il momento risultante si ha perciò l'espressione finale:

$$\vec{M}_O \cdot \hat{e}_i = - \int_{\Omega} x \wedge \nabla P \, dx_1 dx_2 dx_3 = - \int_{\Omega} x \wedge (-\rho g \hat{e}_3) \, dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Omega} x \wedge \rho g \hat{e}_3 \, dx_1 dx_2 dx_3$$

interpretabile come il momento risultante in  $O$ , cambiato di segno, del sistema delle forze peso agenti sulla porzione di liquido spostata dal corpo immerso — liquido di densità  $\rho$  che occupi la stessa regione  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ .

## 28. Esempio. Secchio di Newton

Come esempio illustrativo delle condizioni di equilibrio per un fluido perfetto incomprimibile, si considera il cosiddetto esperimento del **secchio di Newton**. Sia dato un sistema di riferimento  $Ox_1x_2x_3$  che, in presenza della gravità, sia posto in rotazione attorno all'asse verticale  $Ox_3$  con velocità angolare costante  $\omega$ . In tale riferimento si consideri un corpo liquido incomprimibile, di densità costante  $\rho$ , a riposo in un recipiente — si suppone al solito che la regione occupata dal liquido sia connessa in  $\mathbb{R}^3$ . Le forze di volume agenti sul liquido sono il peso e la forza centrifuga:

$$\rho f = \rho(-g\hat{e}_3) + \rho\omega^2(x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2)$$

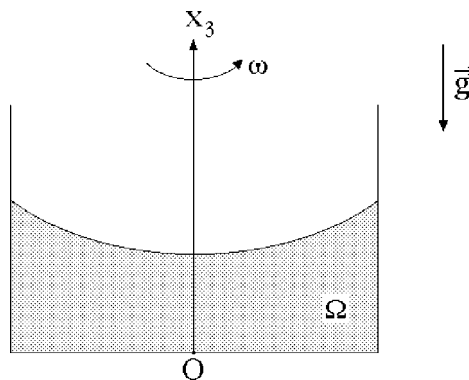
mentre nullo è l'effetto delle forze di Coriolis che in condizioni statiche hanno intensità eguale a zero. Le forze di volume costituiscono un campo posizionale e conservativo di potenziale:

$$U(x_1, x_2, x_3) = \frac{\rho\omega^2}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \rho gx_3 + \text{costante}$$

per cui sono effettivamente definiti stati di quiete e configurazioni di equilibrio del fluido. All'equilibrio, le superfici isobare coincidono con quelle equipotenziali. Ciò vale in particolare per la superficie libera del liquido, all'interfaccia con l'aria, laddove la pressione del liquido coincide con quella atmosferica. La superficie libera del liquido si dovrà collocare allora su una superficie di equazione:

$$x_3 = \frac{\omega^2}{2g}(x_1^2 + x_2^2) + \text{costante}$$

che rappresenta un paraboloide di rivoluzione con asse  $Ox_3$  e concavità rivolta verso l'alto.



## 29. Fluidi viscosi

In un fluido reale gli sforzi non sono semplici compressioni normali alle superfici su cui si esercitano, ma accanto agli sforzi di pressione si manifestano anche particolari sollecitazioni **di taglio**, tangenti alle superfici considerate. Questi sforzi si manifestano, di regola, in virtù dello scorrimento relativo di porzioni di fluido rispetto alle porzioni adiacenti e sono perciò legati ai **gradienti delle velocità**:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Nelle componenti dei gradienti di velocità conviene separare la parte simmetrica e quella antisimmetrica:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \Omega_{ij} + D_{ij} \tag{29.1}$$

con

$$\Omega_{ji} = -\Omega_{ij} \quad \text{e} \quad D_{ji} = D_{ij} \quad \forall i, j = 1, 2, 3.$$

La forma esplicita dei termini simmetrico ed antisimmetrico è determinata univocamente e si ricava scrivendo l'espressione con gli indici scambiati:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \Omega_{ji} + D_{ji} = -\Omega_{ij} + D_{ij}$$

che sommata membro a membro con la (29.1) porge il cosiddetto **tensore velocità di deformazione**:

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3$$

mentre se sottratta membro a membro dalla stessa equazione conduce al **tensore di vorticità**:

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Il carattere antisimmetrico e la tridimensionalità —  $i, j = 1, 2, 3$  — consentono di scrivere il tensore di vorticità nella forma:

$$\Omega_{ij} = \varepsilon_{ikj} \omega_k \quad i, j = 1, 2, 3$$

in cui i coefficienti  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  sono dati da:

$$\omega_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{kij} \Omega_{ij} \quad k = 1, 2, 3$$

e costituiscono le componenti del **vettore vorticità**:

$$\vec{\omega}(x) = \frac{1}{2} \nabla \wedge v(x) = \text{rot}v(x).$$

Fatte queste premesse, si consideri il campo delle velocità euleriane in due punti vicini  $x$  e  $x + \delta x$  del fluido ad un dato istante  $t$ . La velocità del fluido nel punto  $x + \delta x$  può essere ottenuta per mezzo di una approssimazione di Taylor al primo ordine:

$$v_i(x + \delta x) = v_i(x) + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) \delta x_j + o(|\delta x|) \quad (29.2)$$

che rappresenta il campo delle velocità euleriane e dunque l'**atto di moto** del fluido nell'intorno del punto  $x$  all'istante  $t$ . Si noti che è stata omessa la dipendenza esplicita dal tempo, che nella discussione dell'atto di moto è totalmente irrilevante. Con l'introduzione del tensore velocità di deformazione e del tensore di vorticità, la precedente relazione (29.2) assume la forma equivalente:

$$\begin{aligned} v_i(x + \delta x) &= v_i(x) + \Omega_{ij}(x) \delta x_j + D_{ij}(x) \delta x_j + o(|\delta x|) = \\ &= v_i(x) + \varepsilon_{ikj} \omega_k(x) \delta x_j + D_{ij}(x) \delta x_j + o(|\delta x|) \end{aligned} \quad (29.3)$$

che è suscettibile di una notevole interpretazione dal punto di vista cinematico. I primi due termini a secondo membro porgono:

$$v_i(x) + \varepsilon_{ikj} \omega_k(x) \delta x_j = [v(x) + \omega(x) \wedge \delta x]_i$$

espressione nella quale si riconosce la forma generale dell'**atto di moto rigido**, con componente traslatorio  $v(x)$  e velocità angolare istantanea  $\omega(x)$ . Quanto all'ulteriore termine

$D_{ij}\delta x_j$ , è noto dalla geometria che qualsiasi matrice reale e simmetrica  $D_{ij}$  ammette una base di autovettori ortonormali  $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$ , rispetto alla quale la matrice si diagonalizza, riducendosi alla forma:

$$D' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

nella quale compaiono gli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ . Se si introduce una terna di riferimento con origine in  $x$  e gli assi diretti secondo la base ortonormale di autovettori di  $D(x)$ , le componenti di  $\delta x$  rispetto a tale terna saranno  $\delta x'_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  e il relativo termine di velocità diventerà:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x'_1 \\ \delta x'_2 \\ \delta x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \delta x'_1 \\ \lambda_2 \delta x'_2 \\ \lambda_3 \delta x'_3 \end{pmatrix}. \quad (29.4)$$

L'atto di moto (29.4) è caratterizzato dal fatto che la velocità di un punto del fluido è proporzionale alla sua distanza dall'origine  $x$ , secondo costanti di proporzionalità che dipendono dalle tre direzioni principali, quelle degli autovettori ortonormali di  $D(x)$ . In particolare, un generico punto  $P$  posto sull'asse  $x\hat{e}'_i$  avrà velocità diretta secondo lo stesso asse e proporzionale a  $\lambda_i$  e alla distanza da  $x$ ; l'atto di moto che ne risulta è quello di una espansione o **dilatazione uniforme** per  $\lambda_i > 0$ , ovvero di una contrazione o **compressione uniforme** qualora sia  $\lambda_i < 0$ . L'atto di moto completo è una sovrapposizione di questi tre atti di moto di espansione o contrazione lungo gli assi principali. Si osservi, in particolare, che la velocità di variazione del volume è espressa da:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{tr}(D') = \text{tr}(D) = D_{ii}(x) = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x) = \text{div } v(x).$$

In virtù di (29.3) il generico atto di moto del fluido nell'intorno di un suo punto  $x$  si può sempre esprimere come la sovrapposizione di un atto di moto rigido e di un atto di moto di dilatazione/contrazione lungo direzioni ortogonali. Di questi, il primo descrive la porzione di fluido nell'intorno di  $x$  come un blocco rigido che rototrasla nello spazio senza dare luogo ad alcuno scorrimento relativo degli elementi adiacenti di fluido e non può quindi essere considerato responsabile degli sforzi viscosi.  $\omega(x)$  è la velocità angolare istantanea di questo moto, e ciò giustifica la denominazione di **vettore vorticità** che viene riservata a  $\omega(x)$ . Soltanto il secondo si traduce in una vera e propria deformazione dell'elemento di fluido e da esso devono dipendere gli effetti di viscosità. Come prima approssimazione si può assumere che la parte dipendente dalla velocità del tensore degli sforzi di Cauchy sia lineare in  $D_{ij}$ . Si può allora dimostrare che, sotto l'ulteriore assunto dell'isotropia, la forma generale dell'equazione costitutiva deve essere la seguente:

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij} + \lambda D_{kk}\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad (29.5)$$

dove  $P$  indica al solito la pressione, mentre  $\mu > 0$  e  $\lambda$  sono rispettivamente il **primo e il secondo coefficiente di viscosità**.  $\lambda$  è anche noto come coefficiente di viscosità di

dilatazione o di bulk, mentre  $\mu$  si definisce semplicemente come coefficiente di viscosità — tout court. In molti casi i coefficienti  $\lambda$  e  $\mu$  sono legati dalla condizione di Stokes:

$$\lambda = -\frac{\mu}{3}.$$

Si osservi che:

$$D_{kk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \nabla \cdot v;$$

di conseguenza, nel caso di fluido incomprimibile il tensore degli sforzi si riduce a:

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$

cui corrisponde la seguente forma locale dell'equazione cardinale della quantità di moto:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad i = 1, 2, 3.$$

Le equazioni così ottenute sono note come **equazioni di Navier-Stokes**, da considerare unitamente all'equazione di continuità. Le funzioni incognite sono, al solito, il campo della pressione  $P$ , la densità  $\rho$  e le componenti euleriane della velocità  $v_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Anche in questo caso il numero delle funzioni incognite eccede quello delle equazioni scalari disponibili, per cui si rende necessaria qualche ipotesi supplementare che consente l'introduzione di una ulteriore equazione ovvero l'eliminazione di una incognita. A ciò si provvede:

- (i) assumendo il **fluido incomprimibile** e quindi introducendo la condizione di solenoidalità del campo euleriano di velocità come ulteriore — quinta — equazione nelle 5 incognite  $P$ ,  $\rho$ ,  $v_i$ ;
- (ii) oppure sposando l'ipotesi del **fluido barotropico**, con la definizione di una funzione  $P = P(\rho)$  che consente di risolvere il sistema delle equazioni di Navier-Stokes e di continuità rispetto alle sole variabili residue  $\rho$  e  $v_i$ .

Da notare che **i termini di stress viscoso si annullano a velocità euleriane costantemente nulle**, per cui **gli equilibri del fluido viscoso non differiscono da quelli ottenuti nel caso di fluido perfetto**, supponendo trascurabili gli effetti di viscosità. Le equazioni dell'equilibrio rimangono le stesse del caso non viscoso.

## 30. Fluidi viscosi termicamente conduttivi

Nel caso generale che anche gli scambi di calore all'interno del fluido siano rilevanti, le sole equazioni cardinali dell'impulso in forma locale e di continuità non sono più sufficienti a descrivere il comportamento del mezzo. Le funzioni incognite diventano infatti la pressione  $P$ , la densità  $\rho$ , le componenti di velocità  $v_i$  e la **temperatura**  $T$ , in modo che il loro numero complessivo sale a 6.

Si introduce allora, come ulteriore equazione del sistema, quella dell'energia (25.2):

$$-\frac{\partial J_i}{\partial x_i} + \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho \frac{du}{dt}$$

dove la densità del flusso di calore  $J$  viene messa in relazione con il gradiente di temperatura tramite una legge tipo quella di Fourier:

$$J_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (30.1)$$

essendo  $k > 0$  il coefficiente di conducibilità termica del fluido. L'equazione addizionale sarebbe quindi:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho \frac{du}{dt}$$

con le ulteriori variabili  $u$  e  $T$ . Il numero eccessivo di funzioni incognite — 7 — si riduce imponendo condizioni fisicamente ragionevoli, quali la dipendenza della pressione  $P$  e della densità di energia interna  $u$  dalle sole densità e temperatura:

$$P = P(\rho, T) \quad u = u(\rho, T) \quad (30.2)$$

che seguono direttamente dall'equazione di stato del fluido — equazione dei gas perfetti, per esempio. Le equazioni (30.2) sono note rispettivamente come **equazione di stato termica** ed **equazione di stato calorica** del fluido. Anche i coefficienti di viscosità e il coefficiente di conducibilità termica possono essere funzioni assegnate delle stesse variabili:

$$\lambda = \lambda(\rho, T) \quad \mu = \mu(\rho, T) \quad k = k(\rho, T).$$

In queste ipotesi, le funzioni incognite si riducono a cinque soltanto:

$$\rho \quad T \quad v_i, \quad i = 1, 2, 3$$

e le 5 equazioni del moto sono le tre scalari corrispondenti all'equazione cardinale dell'impulso in forma locale, quella di continuità e quella dell'energia — con l'inserimento dell'equazione di Fourier.

## 31. Relazioni termodinamiche per il gas perfetto

Nel caso di fluidi termicamente conduttivi si è postulato che la pressione e la densità volumica di energia interna siano funzioni note della densità volumica di massa  $\rho$  e della temperatura  $T$  — relazioni (30.2). Questa ipotesi può essere verificata esplicitamente qualora il fluido sia approssimabile come un gas perfetto.

Per una massa  $m$  di  $n$  moli di gas perfetto, che occupi un volume  $V$  alla pressione  $P$  e alla temperatura termodinamica assoluta  $T$ , vale all'equilibrio l'equazione di stato

$$PV = nRT \quad (31.1)$$

dove  $R$  indica la costante dei gas perfetti —  $8.314 \text{ JK}^{-1}\text{mol}^{-1}$ . La densità del gas è definita come densità media dalla relazione

$$\rho = \frac{m}{V}$$

che permette di esprimere il rapporto  $n/V$  nella forma

$$\frac{n}{V} = \frac{n}{m} \frac{m}{V} = \frac{n}{m} \rho = \frac{1}{m/n} \rho \quad (31.2)$$

in cui il **peso molecolare medio**  $m/n$  deve intendersi costante per una data composizione del gas<sup>(1)</sup>. La pressione del gas perfetto, all'equilibrio, risulta allora

$$P = \frac{n}{V} RT = \frac{1}{m/n} \rho RT = \frac{R}{m/n} \rho T \quad (31.3)$$

e si riconosce essere perciò una funzione nota di densità volumica  $\rho$  e temperatura assoluta  $T$ . Si assume che nel continuo termomeccanico la condizione (31.3) sia localmente soddisfatta, punto per punto e ad ogni istante — **ipotesi dell'equilibrio locale**.

Risultato analogo vale per l'energia interna specifica  $u$ . A questo proposito, si ricorda che la funzione di stato entropia  $S$  ha differenziale

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV$$

essendo  $U$  l'energia interna del sistema. Usando  $T$  e  $V$  come variabili indipendenti la stessa relazione differenziale diventa

$$dS = \frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial T}(T, V) dT + \frac{1}{T} \left[ \frac{\partial U}{\partial V}(T, V) + P(T, V) \right] dV$$

e la condizione di esattezza<sup>(2)</sup> della forma differenziale a secondo membro porge

$$\frac{\partial}{\partial V} \left[ \frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial T}(T, V) \right] = \frac{\partial}{\partial T} \left[ \frac{1}{T} \left( \frac{\partial U}{\partial V}(T, V) + P(T, V) \right) \right].$$

Basta allora calcolare le derivate parziali

$$\frac{1}{T} \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T}(T, V) = -\frac{1}{T^2} \left[ \frac{\partial U}{\partial V}(T, V) + P(T, V) \right] + \frac{1}{T} \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V}(T, V) + \frac{\partial P}{\partial T}(T, V) \right]$$

---

(1) il peso molecolare medio coincide con il peso molecolare per un gas puro. Nel caso di una miscela di diverse componenti gassose il peso molecolare medio dipende dalla composizione della miscela. Lo studio di miscele gassose di composizione variabile richiederebbe l'introduzione di appropriate equazioni di evoluzione per la composizione e va oltre gli scopi di queste note.

(2) ovvero di chiusura, visto che il dominio di definizione delle variabili  $T, V$  è  $\mathbb{R}_+^2$ , convesso di  $\mathbb{R}^2$ .

e sfruttare il lemma di Schwarz, nell'ipotesi che l'energia interna  $U$  sia una funzione  $C^2$  dei propri argomenti  $T, V$ , per ottenere

$$\frac{1}{T^2} \left[ \frac{\partial U}{\partial V}(T, V) + P(T, V) \right] = \frac{1}{T} \frac{\partial P}{\partial T}(T, V)$$

e ricavare infine la seguente espressione notevole per la derivata parziale di  $U$  rispetto al volume  $V$ :

$$\frac{\partial U}{\partial V}(T, V) = T \frac{\partial P}{\partial T}(T, V) - P(T, V). \quad (31.4)$$

Nel caso di un gas perfetto si deve sostituire l'equazione di stato (31.1), cosicché

$$\frac{\partial U}{\partial V}(T, V) = T \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{nRT}{V} \right) - \frac{nRT}{V} = 0$$

e l'energia interna risulta funzione della sola temperatura:

$$U(T, V) = g(T).$$

L'interpretazione fisica della funzione  $g(T)$  è molto semplice. È infatti sufficiente introdurre il **calore specifico molare a volume costante**  $c_V > 0$  mediante la relazione

$$nc_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T}(T, V) \right|_{V=\text{cost}} = \frac{dg}{dT}(T)$$

per concludere che, a meno di una costante additiva arbitraria,

$$U(T, V) = n \int_0^T c_V(\tau) d\tau$$

per cui l'energia interna specifica si riduce a

$$u = \frac{1}{m} U(T, V) = \frac{1}{m/n} \frac{1}{n} U(T, V) = \frac{1}{m/n} \int_0^T c_V(\tau) d\tau.$$

Si tratta, nella fattispecie, di una funzione della sola temperatura  $T$ , e non anche della densità volumica di massa  $\rho$ .

## 32. Relazioni termodinamiche per il gas reale

Un buon modello di gas reale è quello di van-der-Waals, per il quale l'equazione di stato si scrive

$$\left( P + a \frac{n^2}{V^2} \right) (V - nb) = nRT,$$

essendo  $a$  e  $b$  due costanti positive caratteristiche del gas, da determinare sperimentalmente. La pressione  $P$  risulta allora

$$P = -a \frac{n^2}{V^2} + \frac{nRT}{V - nb}$$

e, sostituendo l'equazione (31.2) per il quoziente  $n/V$ , diventa

$$P = -\frac{a}{(m/n)^2} \rho^2 + \frac{\frac{\rho}{m/n} RT}{1 - \frac{b}{m/n} \rho} = -\frac{a}{(m/n)^2} \rho^2 + \frac{R}{m/n} \frac{\rho T}{1 - \frac{b}{m/n} \rho}$$

che come prima deve intendersi soddisfatta localmente in ogni punto del continuo e ad ogni istante — ipotesi dell'equilibrio locale.

Per quanto riguarda l'energia interna, la relazione precedente (31.4) è ancora valida e porge in questo caso:

$$\frac{\partial U}{\partial V}(T, V) = T \frac{\partial}{\partial T} \left( -a \frac{n^2}{V^2} + \frac{nRT}{V - nb} \right) + a \frac{n^2}{V^2} - \frac{nRT}{V - nb} = a \frac{n^2}{V^2}$$

in modo che l'energia interna deve assumere la forma generale

$$U(T, V) = -a \frac{n^2}{V} + f(T).$$

La funzione incognita  $f(T)$  può ancora interpretarsi termodinamicamente facendo uso della definizione di calore specifico molare a volume costante  $c_V > 0$

$$nc_V = \frac{\partial U}{\partial T}(T, V) = \frac{df}{dT}(T)$$

sicché, a meno di una costante additiva arbitraria,

$$f(T) = n \int_0^T c_V(\tau) d\tau$$

e quindi

$$U(T, V) = -a \frac{n^2}{V} + n \int_0^T c_V(\tau) d\tau.$$

Per l'energia interna specifica si ha perciò l'espressione

$$u = \frac{1}{m} U(T, V) = \frac{n}{m} \left[ -a \frac{n}{V} + \int_0^T c_V(\tau) d\tau \right]$$

che è chiaramente una funzione nota di densità e temperatura:

$$u = \frac{1}{m/n} \left[ -\frac{a}{m/n} \rho + \int_0^T c_V(\tau) d\tau \right].$$

### 33. Gas perfetto in condizioni adiabatiche

Si può verificare che **un gas perfetto in condizioni adiabatiche si comporta come un fluido barotropico**. Per un elemento di fluido costituito da  $n$  moli di gas racchiuse in un dominio di volume  $V$  e alla temperatura assoluta  $T$ , all'equilibrio termodinamico vale l'equazione di stato

$$PV = nRT \quad (33.1)$$

in cui  $R$  indica la costante dei gas perfetti. La stessa equazione di stato caratterizza qualsiasi trasformazione del sistema che sia sufficientemente lenta da non alterare sensibilmente lo stato di equilibrio — trasformazione quasistatica o reversibile. In tale approssimazione, calcolando il logaritmo naturale di ambo i membri e differenziando la (33.1) si ricava la relazione differenziale:

$$\frac{1}{V}dV + \frac{1}{P}dP = \frac{1}{T}dT. \quad (33.2)$$

Negli scambi di calore  $\delta Q$  e di lavoro meccanico  $\delta L = PdV$  con l'ambiente (o il mezzo) circostante deve valere il primo principio della termodinamica e poiché è noto che per un gas perfetto l'energia interna  $U$  dipende soltanto dalla temperatura assoluta e dal calore specifico molare a volume costante  $c_V$ , si può affermare che:

$$\delta Q = dU + PdV = nc_VdT + PdV.$$

In condizioni adiabatiche lo scambio di calore con l'ambiente è nullo, per cui  $\delta Q = 0$ . Nell'equazione precedente basta allora inserire l'equazione di stato (33.1) per ottenere:

$$0 = nc_VdT + PdV = nc_VdT + \frac{nRT}{V}dV$$

che divisa membro a membro per  $T > 0$  e previo inserimento della (33.2) diventa:

$$nc_V \frac{dV}{V} + nc_V \frac{dP}{P} + nR \frac{dV}{V} = 0$$

ossia:

$$(c_V + R) \frac{dV}{V} + c_V \frac{dP}{P} = 0$$

dove si è pure cancellato il comune fattore positivo  $n$ . Alla stessa relazione si può dare una veste più compatta ricordando che in un gas perfetto la somma fra calore specifico molare a volume costante  $c_V$  e costante dei gas perfetti  $R$  coincide con il calore specifico molare a pressione costante  $c_P$ :

$$c_V + R = c_P$$

in modo che risulta:

$$c_P \frac{dV}{V} + c_V \frac{dP}{P} = 0$$

ovvero:

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0$$

a condizione di dividere ambo i membri per  $c_V$  e porre  $\gamma = c_P/c_V > 1$ . L'equazione così ottenuta si può scrivere in termini di un differenziale esatto:

$$d[\gamma \ln V + \ln P] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad d[\ln(V^\gamma P)] = 0$$

ed integrata porge:

$$\ln(V^\gamma P) = \ln(V_0^\gamma P_0)$$

ossia:

$$\frac{V^\gamma P}{V_0^\gamma P_0} = 1$$

essendo  $P_0$  e  $V_0$  rispettivamente la pressione ed il volume dell'elemento di gas in uno stato termodinamico di riferimento prefissato a piacere. Ne deriva che per una trasformazione adiabatica reversibile la pressione è funzione nota del volume:

$$P = P_0 V_0^\gamma V^{-\gamma}.$$

Basta infine osservare che se  $\rho_0$  è la densità del gas nello stato di riferimento, deve aversi  $\rho V = \rho_0 V_0$  e quindi:

$$P = P_0 V_0^\gamma V^{-\gamma} = P_0 \rho_0^{-\gamma} \rho^\gamma = \alpha \rho^\gamma$$

con  $\alpha > \text{costante}$ . Ciò prova che *un gas perfetto che vada incontro a trasformazioni adiabatiche reversibili è un fluido barotropico*.

Può essere interessante calcolare anche l'entalpia specifica dello stesso sistema, per poi confrontarla con l'espressione (26.2) e constatare l'identità dei risultati. Per definizione, l'entalpia dell'elemento di fluido è data da:

$$U + PV = n c_V T + PV = \frac{c_V}{R} n R T + PV = \left( \frac{c_V}{R + 1} \right) PV = \frac{c_P}{R} PV$$

e ricordando la definizione del fattore  $\gamma$  diventa:

$$U + PV = \frac{c_P}{c_P - c_V} PV = \frac{\gamma}{\gamma - 1} PV.$$

Di qui è sufficiente sostituire le espressioni di  $P$  e di  $V$  in funzione di  $\rho$  per dedurre il risultato richiesto:

$$U + PV = \frac{\gamma}{\gamma - 1} P_0 \rho_0^{-\gamma} \rho^\gamma \rho_0 V_0 \rho^{-1} = \rho_0 V_0 \frac{\gamma}{\gamma - 1} P_0 \rho_0^{-\gamma} \rho^{\gamma-1}$$

e siccome  $\rho_0 V_0$  rappresenta evidentemente la massa totale del gas nell'elemento considerato si conclude che l'entalpia specifica — ossia per unità di massa — vale:

$$\frac{U + PV}{\rho_0 V_0} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} P_0 \rho_0^{-\gamma} \rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_0}{\rho_0^\gamma} \rho^{\gamma-1}.$$

Dalla definizione (26.2) di  $H(\rho)$  si ha peraltro:

$$H(\rho) = \int \frac{1}{\rho} P'(\rho) d\rho = \int \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (P_0 \rho_0^{-\gamma} \rho^\gamma) d\rho = \int \gamma P_0 \rho_0^{-\gamma} \rho^{\gamma-2} d\rho = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_0}{\rho_0^\gamma} \rho^{\gamma-1}$$

che coincide con il risultato precedente a meno di una costante additiva irrilevante.

### 34. Bilancio dell'energia per un fluido viscoso

Il tensore degli sforzi per un fluido viscoso è dato dall'espressione generale (29.5)

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} + \lambda\delta_{ij}D_{kk} \quad , \quad i, j = 1, 2, 3,$$

in termini del tensore velocità di deformazione  $D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$ . Si ha pertanto

$$\tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -P\delta_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + 2\mu D_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \lambda\delta_{ij}D_{kk} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = (-P + \lambda D_{kk}) \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + 2\mu D_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

Basta poi notare che, per la simmetria di  $D_{ij}$ , vale l'identità

$$2\mu D_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(2\mu D_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + 2\mu D_{ji} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = 2\mu D_{ij} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = 2\mu D_{ij} D_{ij}$$

per ottenere

$$\tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = (-P + \lambda D_{kk}) \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + 2\mu D_{ij} D_{ij}.$$

In particolare, lungo un **moto isocoro** il campo euleriano di velocità è solenoidale e l'espressione precedente si riduce a

$$\tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 2\mu D_{ij} D_{ij}$$

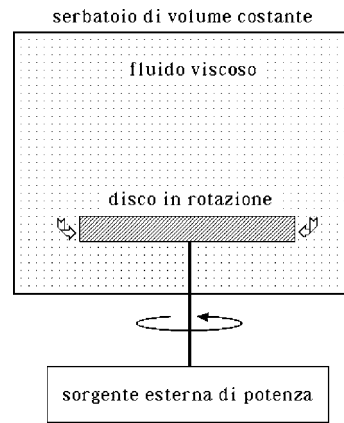
in cui il primo coefficiente di viscosità  $\mu$  assume segno positivo e

$$D_{ij} D_{ij} = D_{ij} D_{ji} = (D^2)_{ii} = \text{tr}(D^2) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 \geq 0.$$

È perciò evidente che in presenza di viscosità anche i moti isocori si accompagnano a dissipazione di energia meccanica e, dunque, a variazioni di energia interna e a flussi di calore:

$$\pi - \frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \int_{\Phi_t(\Omega)} \mu \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 = \frac{dU}{dt} + \frac{dQ}{dt}.$$

Gli sforzi viscosi permettono di eseguire lavoro meccanico su una porzione di mezzo continuo **senza alterarne il volume**, lavoro che quindi non è interpretabile come dovuto alle forze di pressione: si pensi ad un fluido che viene sollecitato mediante un mulinello — o persino un semplice un disco — posto in rotazione al suo interno (vedi figura).



## 35. Solidi elastici

Nel caso dei solidi le proprietà rilevanti agli effetti delle relazioni costitutive non sono i gradienti delle velocità euleriane, ma le **deformazioni**. Un modo naturale di introdurre il concetto di deformazione è quello di utilizzare la nozione di vettore spostamento. Se  $X$  è la coordinata — materiale — che specifica la posizione di un particolare punto del sistema all'istante 0, la posizione del medesimo punto ad un istante  $t > 0$  sarà specificata da  $x = x(t, X) = \Phi_t(X)$ . Ignorando il dettaglio del moto fra l'istante 0 l'istante  $t$ , si definirà lo **spostamento** del punto per mezzo del vettore:

$$u(t, X) = x(t, X) - X.$$

Omessa per brevità la dipendenza esplicita dal tempo, si avrà perciò:

$$x = X + u(X).$$

Ciò premesso, si considerino due punti del continuo individuati da valori infinitamente vicini delle coordinate materiali:

$$X \quad \text{e} \quad X + dX;$$

allora le posizioni di questi stessi punti all'istante  $t$  saranno individuate dai vettori

$$X + u(X) \quad \text{e} \quad X + dX + u(X + dX).$$

È evidente che per effetto dello spostamento il vettore posizione del secondo punto rispetto al primo si è modificato dal valore iniziale  $dX$  a quello finale:

$$X + dX + u(X + dX) - [X + u(X)] = dX + u(X + dX) - u(X) = dX + \frac{\partial u}{\partial X_i}(X) dX_i.$$

L'effetto dello spostamento è anche quello di modificare la distanza fra i punti assegnati, la quale dal valore iniziale

$$dl^2 = dX_i dX_i$$

passa al valore finale:

$$dl'^2 = \left( dX_i + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} dX_j \right) \left( dX_i + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} dX_k \right).$$

Questa relazione si può scrivere in una forma più esplicita eseguendo i prodotti:

$$dl'^2 = dX_i dX_i + dX_i \frac{\partial u_i}{\partial X_k} dX_k + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} dX_j dX_i + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} dX_j \frac{\partial u_i}{\partial X_k} dX_k$$

e cambiando gli indici muti  $i$  nel secondo e terzo termine rispettivamente in  $j$  e  $k$ :

$$dl'^2 = dX_i dX_i + \frac{\partial u_j}{\partial X_k} dX_j dX_k + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} dX_j dX_k + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \frac{\partial u_i}{\partial X_k} dX_j dX_k$$

in modo che si può raccogliere il fattore comune  $dX_j dX_k$ :

$$dl'^2 = dl^2 + \left( \frac{\partial u_j}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) dX_j dX_k.$$

Questa relazione viene generalmente espressa come:

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{jk} dX_j dX_k$$

per mezzo del **tensore di deformazione**:

$$u_{jk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) \quad j, k = 1, 2, 3,$$

che è un tensore simmetrico tridimensionale —  $u_{jk} = u_{kj} \forall j, k = 1, 2, 3$ . Si parla di **piccoli spostamenti** quando i vettori spostamento  $u(X)$  sono di piccolo modulo in ogni punto del solido. Parliamo invece di **piccole deformazioni** nell'ipotesi che piccole in modulo siano le derivate parziali prime dei vettori spostamento:

$$\frac{\partial u}{\partial X}(X).$$

Sovente la condizione di piccoli spostamenti comporta quella di piccole deformazioni, specie quanto si ha a che fare con sistemi solidi tridimensionali nei quali nessuna delle dimensioni sia prevalente sulle altre. La condizione delle piccole deformazioni può tuttavia sussistere anche in presenza di grandi spostamenti, allorquando in particolare una o due dimensioni siano trascurabili — lamine e aste sottili.

Nell'ipotesi di piccole deformazioni i termini prodotto nel tensore di deformazione possono essere trascurati con buona approssimazione per condurre al cosiddetto **tensore di deformazione lineare**:

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad j, k = 1, 2, 3$$

anch'esso simmetrico e tridimensionale.

Nei **solidi elastici lineari** si assume una relazione lineare fra il tensore degli sforzi e il tensore di deformazione in regime lineare. Nella forma più generale tale relazione assume la forma:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad i, j = 1, 2, 3$$

in cui le  $C_{ijkl}$  sono le componenti del **tensore di elasticità**. Queste componenti soddisfano ad alcune condizioni di simmetria, che riducono sensibilmente il numero di componenti indipendenti. In particolare, la simmetria del tensore di deformazione consente di scrivere l'identità:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = C_{ijlk} \varepsilon_{kl} = C_{ijlk} \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + C_{ijlk} \varepsilon_{kl}) = \frac{1}{2} (C_{ijkl} + C_{ijlk}) \varepsilon_{kl}$$

e quindi di introdurre l'identificazione:

$$C_{ijkl} \longrightarrow \frac{1}{2}(C_{ijkl} + C_{ijlk})$$

che assicura la simmetria del tensore di elasticità rispetto agli ultimi due suoi indici:

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad \forall i, j, k, l = 1, 2, 3.$$

In modo analogo si introduce la simmetria sui **primi** due indici:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad \forall i, j, k, l = 1, 2, 3$$

corrispondente alla simmetria del tensore degli sforzi. Queste proprietà di simmetria fanno sì che il numero di componenti indipendenti del tensore di elasticità si riduca dalle complessive  $3^4 = 81$  a  $6 \times 6 = 36$  soltanto, corrispondenti a tutte le possibili combinazioni con ripetizione 2 a 2 degli indici:

$$(ij), (kl) \in \{11, 12, 13, 22, 23, 33\}.$$

Gli elementi del tensore si possono così inquadrare in una matrice  $6 \times 6$  simmetrica:

$$[C] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1111} & \varepsilon_{1112} & \varepsilon_{1113} & \varepsilon_{1122} & \varepsilon_{1123} & \varepsilon_{1133} \\ \varepsilon_{1211} & \varepsilon_{1212} & \varepsilon_{1213} & \varepsilon_{1222} & \varepsilon_{1223} & \varepsilon_{1233} \\ \varepsilon_{1311} & \varepsilon_{1312} & \varepsilon_{1313} & \varepsilon_{1322} & \varepsilon_{1323} & \varepsilon_{1333} \\ \varepsilon_{2211} & \varepsilon_{2212} & \varepsilon_{2213} & \varepsilon_{2222} & \varepsilon_{2223} & \varepsilon_{2233} \\ \varepsilon_{2311} & \varepsilon_{2312} & \varepsilon_{2313} & \varepsilon_{2322} & \varepsilon_{2323} & \varepsilon_{2333} \\ \varepsilon_{3311} & \varepsilon_{3312} & \varepsilon_{3313} & \varepsilon_{3322} & \varepsilon_{3323} & \varepsilon_{3333} \end{pmatrix}.$$

Dalla conservazione dell'energia viene una ulteriore proprietà di simmetria, quella per lo scambio della prima coppia di indici con l'ultima coppia:

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad \forall i, j, k, l = 1, 2, 3$$

che impone la simmetria della matrice  $[C]$  e dunque la riduzione del numero massimo di componenti indipendenti del tensore di elasticità da 36 a  $6 + (36 - 6)/2 = 21$  — le 6 diagonali e le 15 poste sopra la diagonale principale:

$$[C] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1111} & \varepsilon_{1112} & \varepsilon_{1113} & \varepsilon_{1122} & \varepsilon_{1123} & \varepsilon_{1133} \\ & \varepsilon_{1212} & \varepsilon_{1213} & \varepsilon_{1222} & \varepsilon_{1223} & \varepsilon_{1233} \\ & & \varepsilon_{1313} & \varepsilon_{1322} & \varepsilon_{1323} & \varepsilon_{1333} \\ & & & \varepsilon_{2222} & \varepsilon_{2223} & \varepsilon_{2233} \\ & & & & \varepsilon_{2323} & \varepsilon_{2333} \\ & & & & & \varepsilon_{3333} \end{pmatrix}.$$

Si conclude pertanto che *in un solido elastico le componenti indipendenti del tensore dell'elasticità sono al più 21.*

La presenza di **simmetrie puntuali**, per esempio nel caso di solidi cristallini, può comportare una ulteriore riduzione del numero di componenti indipendenti del tensore di elasticità. Un caso limite è quello del **solido isotropo**, le cui proprietà elastiche sono indipendenti dalla direzione di osservazione: il tensore dell'elasticità presenta esattamente le stesse componenti rispetto a qualsiasi terna di riferimento cartesiana ortogonale in cui lo si esprima. Si può allora dimostrare che le componenti del tensore possono scriversi nella forma:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu [\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}],$$

in cui  $\lambda$  e  $\mu$  sono due coefficienti numerici caratteristici del mezzo nella posizione considerata, noti come **primo e secondo parametro di Lamé** — si intende che tali parametri possono essere o meno indipendenti dalla posizione, secondo che il solido elastico sia omogeneo oppure no.

### 35.1 Equazioni del moto per il solido elastico lineare omogeneo e isotropo

Nella teoria del solido elastico lineare si fa l'ipotesi che gli spostamenti e i gradienti degli spostamenti siano abbastanza piccoli perché non si renda necessario distinguere fra la descrizione lagrangiana e quella euleriana. Le coordinate materiali  $X$  e quelle spaziali  $x$  possono essere identificate e l'equazione dell'impulso diventa:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl} \varepsilon_{kl}]$$

ossia, nel caso di solido elastico omogeneo e isotropo:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho f_i + \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x_j} + \mu [\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}] \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x_j}$$

e quindi:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho f_i + \lambda \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial x_i} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j}.$$

Basta poi sostituire l'espressione del tensore di deformazione lineare:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

per ottenere:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial x_i} &= \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} \\ \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} &= \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) \end{aligned}$$

e di conseguenza:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho f_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}.$$

Le equazioni del moto si riducono perciò alle seguenti:

$$\begin{cases} \rho \frac{dv_i}{dt} = \rho f_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{du_i}{dt} = v_i \end{cases}$$

e costituiscono un sistema di 7 equazioni nei 7 campi incogniti  $u_i, v_i, \rho$ .

### 36. Deformazioni omogenee di un mezzo elastico omogeneo e isotropo

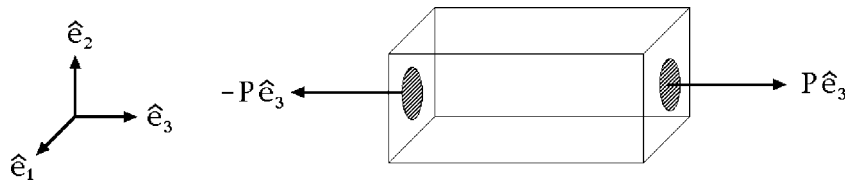
Nelle deformazioni omogenee si ha che il tensore degli sforzi  $\tau$  e il tensore di deformazione  $\varepsilon$  sono costanti:

$$\varepsilon_{ij} = \text{costante} \quad \tau_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \text{costante}$$

con il tensore degli sforzi che per un solido elastico isotropo ed omogeneo può esprimersi per mezzo delle costanti di Lamé, risultando perciò:

$$\tau_{ij} = [\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})] \varepsilon_{kl} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + \mu (\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji}) = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} .$$

Si consideri allora un solido elastico avente la forma di un parallelepipedo rettangolo e i cui spigoli siano diretti parallelamente agli assi di una terna di riferimento cartesiana ortogonale  $Ox_1x_2x_3$ , e si supponga che le due facce opposte ortogonali all'asse  $Ox_3$  siano sottoposte ad uno sforzo di trazione  $P > 0$ .



Sulla faccia che ha il versore  $\hat{e}_3$  come normale esterna lo sforzo sarà quindi dato dall'espressione:

$$\vec{T}(\hat{e}_3) = P \hat{e}_3$$

mentre per quella opposta si avrà, conformemente al principio di azione e reazione:

$$\vec{T}(-\hat{e}_3) = -P \hat{e}_3 .$$

Su ogni altra faccia, che non è minimamente sollecitata, gli sforzi devono risultare identicamente nulli. La forma del tensore degli sforzi — uniforme su tutto il continuo — viene determinata esaminando le sollecitazioni applicate a ciascuna delle superfici del parallelepipedo.

La faccia ortogonale all'asse  $Ox_3$ , avente il versore  $\hat{e}_3$  come normale esterna, è soggetta allo sforzo:

$$\vec{T}(\hat{e}_3) = P \hat{e}_3$$

ossia:

$$\tau_{i3} = \begin{cases} 0 & \text{per } i = 1, 2 \\ P & \text{per } i = 3 \end{cases}$$

mentre la faccia ortogonale a  $Ox_1$  e di normale esterna  $\hat{e}_1$  non risente di alcuno sforzo:

$$\vec{T}(\hat{e}_1) = 0$$

e quindi:

$$\tau_{i1} = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

al pari della faccia ortogonale a  $Ox_2$  di normale esterna  $\hat{e}_2$ :

$$\vec{T}(\hat{e}_2) = 0$$

per la quale si ha analogamente:

$$\tau_{i2} = 0 \quad i = 1, 2, 3.$$

Per ogni  $i, j = 1, 2, 3$ , con  $i \neq j$ , vale perciò:

$$0 = \tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} \quad \Longleftrightarrow \quad \varepsilon_{ij} = 0$$

e per i termini diagonali del tensore degli sforzi risulta:

$$\begin{cases} 0 = \tau_{11} = \lambda\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{11} \\ 0 = \tau_{22} = \lambda\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{22} \\ P = \tau_{33} = \lambda\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{33}. \end{cases} \quad (36.1)$$

Di qui, sottraendo membro a membro le equazioni precedenti, si deducono le relazioni:

$$2\mu(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{11} \quad (36.2)$$

$$2\mu(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11}) = P \quad \Longleftrightarrow \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_{11} + \frac{P}{2\mu} \quad (36.3)$$

per cui la prima delle equazioni (36.1) diventa:

$$\lambda\left(3\varepsilon_{11} + \frac{P}{2\mu}\right) + 2\mu\varepsilon_{11} = 0$$

ovvero:

$$(3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} = -\frac{\lambda}{2\mu} P$$

e quindi:

$$\varepsilon_{11} = -\frac{\lambda}{2\mu} \frac{1}{3\lambda + 2\mu} P. \quad (36.4)$$

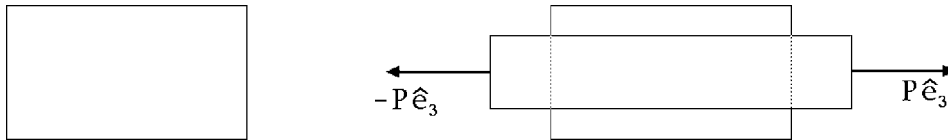
Di conseguenza le (36.2) e (36.3) porgono:

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\lambda}{2\mu} \frac{1}{3\lambda + 2\mu} P \quad (36.5)$$

e

$$\varepsilon_{33} = \frac{P}{2\mu} \left(1 - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\right) = P \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} = \tau_{33} \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}. \quad (36.6)$$

Le equazioni (36.4), (36.5) e (36.6) forniscono gli elementi diagonali del tensore di deformazione lineare — i soli diversi da zero — in funzione della sollecitazione applicata  $P$ , ossia dello sforzo  $\tau_{33}$ .



Per definizione il modulo di Young  $E$  soddisfa la **legge di Hooke**:

$$\tau_{33} = E\varepsilon_{33}$$

e dalla (36.6) può quindi essere espresso in termini dei parametri di Lamé:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}.$$

Il modulo di Poisson è invece definito dalla relazione:

$$\varepsilon_{11} = -\sigma \varepsilon_{33} \quad \Longleftrightarrow \quad \varepsilon_{22} = -\sigma \varepsilon_{33}$$

e per le (36.4)-(36.5) vale pertanto:

$$\sigma = -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}} = \frac{\lambda}{2\mu} \frac{1}{3\lambda + 2\mu} P \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{P(\lambda + \mu)} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Poiché il modulo di Young e quello di Poisson sono determinabili sperimentalmente, si ha così un metodo per calcolare i parametri di Lamé del materiale.

## 37. Complemento. Propagazione del suono in un fluido perfetto barotropico

Si consideri una regione connessa  $\Omega$  dello spazio permeata da un fluido perfetto barotropico. Come già osservato, le equazioni del moto per un tale fluido sono date da:

$$\begin{cases} \rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho f_i & i = 1, 2, 3 \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \\ P = P(\rho) \end{cases}$$

ossia, esplicitando le derivate materiali rispetto al tempo:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho f_i & i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \\ P = P(\rho), \end{cases} \quad (37.1)$$

dove  $P(\rho)$  rappresenta la relazione barotropica che esprime la pressione  $P$  del fluido in funzione della relativa densità volumica  $\rho$ , mentre  $\rho f_i$  sono le componenti cartesiane delle forze di volume. In termini dell'entalpia specifica:

$$H(\rho) = \int \frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho}(\rho) d\rho,$$

che è una funzione positiva e monotona crescente della densità volumica, le prime tre equazioni del moto assumono la forma:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial H(\rho)}{\partial x_i} + f_i \quad i = 1, 2, 3$$

e per forze di volume posizionali conservative, del tipo  $f_i = \partial U / \partial x_i$ , si riducono a:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial H(\rho)}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, 3.$$

Nel caso statico si deve richiedere che valga:

$$\rho = \rho(x) \quad v_i = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

e le equazioni del moto diventano:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_i} [U(x) - H[\rho(x)]] \quad i = 1, 2, 3$$

essendo l'equazione di continuità banalmente verificata. L'ipotesi di  $\Omega$  connesso permette quindi di concludere che per una costante  $c$  appropriata si abbia:

$$U(x) - H[\rho(x)] = c \quad \forall x \in \Omega$$

e che, grazie all'invertibilità di  $H(\rho)$  possa scriversi:

$$\rho(x) = H^{-1}[U(x) - c] := \rho_o(x) \quad \forall x \in \Omega$$

in modo che il campo di pressione all'equilibrio risulta:

$$P(x) = P[\rho_o(x)] := P_o(x) \quad x \in \Omega.$$

### 37.1 Equazioni di propagazione del suono

Per “suono” deve intendersi qualsiasi piccolo disturbo del campo di pressione, densità volumica e velocità, rispetto alla configurazione di equilibrio descritta da:

$$P(t, x) = P_o(x) \quad \rho(t, x) = \rho_o(x) \quad v_i(t, x) = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega.$$

Questo piccolo disturbo dei vari campi può esprimersi nella forma:

$$\begin{aligned} \rho(t, x) &= \rho_o(x) + \varepsilon \rho_1(t, x) \\ P(t, x) &= P_o(x) + \varepsilon P_1(t, x) \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega \\ v_i(t, x) &= \varepsilon w_i(t, x) \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (37.2)$$

in termini di un “parametro piccolo”  $\varepsilon$ , che specifica l'entità della perturbazione, e dei campi ausiliari  $\rho_1(t, x)$ ,  $P_1(t, x)$  e  $w_i(t, x)$  variabili nel tempo. Sostituendo i campi perturbati (37.2) nelle equazioni (37.1) e tenendo soltanto i termini fino al primo ordine in  $\varepsilon$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \rho_o(x) \varepsilon \frac{\partial w_i}{\partial t}(t, x) &= -\frac{\partial P_o}{\partial x_i}(x) - \varepsilon \frac{\partial P_1}{\partial x_i}(t, x) + \rho_o(x) \frac{\partial U}{\partial x_i}(x) + \varepsilon \rho_1(t, x) \frac{\partial U}{\partial x_i}(x) \quad i = 1, 2, 3 \\ \varepsilon \frac{\partial \rho_1}{\partial t}(t, x) + \varepsilon w_i(t, x) \frac{\partial \rho_o}{\partial x_i}(t, x) + \rho_o(x) \varepsilon \frac{\partial w_i}{\partial x_i}(t, x) &= 0 \\ P_o(x) + \varepsilon P_1(t, x) &= P[\rho_o(x)] + \frac{dP}{d\rho}[\rho_o(x)] \varepsilon \rho_1(t, x) \end{aligned}$$

e le equazioni di equilibrio conducono pertanto alle equazioni dinamiche che governano l'evoluzione della perturbazione al primo ordine in  $\varepsilon$ :

$$\rho_o(x) \frac{\partial w_i}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial x_i}(x) \rho_1 \quad i = 1, 2, 3 \quad (37.3a)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + w_i \frac{\partial \rho_o}{\partial x_i}(x) + \rho_o(x) \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0 \quad (37.3b)$$

$$P_1 = \frac{dP}{d\rho}[\rho_o(x)] \rho_1 \quad (37.3c)$$

in cui i fattori:

$$\rho_o(x) \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial x_i}(x) \quad , \quad \frac{\partial \rho_o}{\partial x_i}(x) \quad , \quad \frac{dP}{d\rho}[\rho_o(x)]$$

sono funzioni assegnate della posizione  $x \in \Omega$ . Le prime due equazioni (37.3) si esprimono nella forma equivalente:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_o(x)w_i] = -\frac{\partial P_1}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial x_i}(x) \rho_1 \quad i = 1, 2, 3 \quad (37.4a)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [\rho_o(x)w_i] = 0. \quad (37.4b)$$

Una derivazione parziale rispetto ad  $x_i$  della prima porge, sommando su  $i = 1, 2, 3$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial t} [\rho_o(x)w_i] = -\frac{\partial^2 P_1}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial U}{\partial x_i}(x) \rho_1 \right]$$

mentre la derivando in  $t$  la seconda si ricava:

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial x_i} [\rho_o(x)w_i] = -\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2}.$$

Non rimane che sottrarre membro a membro le due equazioni per ottenere, nell'ipotesi che  $w_i(t, x)$  sia funzione  $C^2$  in  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega$ , la relazione scalare:

$$0 = -\frac{\partial^2 P_1}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial U}{\partial x_i}(x) \rho_1 \right] + \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2}$$

che eliminando  $\rho_1$  a favore di  $P_1$  per mezzo della (37.3c):

$$\rho_1(t, x) = \frac{1}{\frac{dP}{d\rho}[\rho_o(x)]} P_1(t, x)$$

diventa in equazione di evoluzione per la sola perturbazione sulla pressione:

$$\frac{1}{\frac{dP}{d\rho}[\rho_o(x)]} \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\frac{\partial U}{\partial x_i}(x)}{\frac{dP}{d\rho}[\rho_o(x)]} P_1 \right]. \quad (37.5)$$

Con la stessa trasformazione (37.3c) anche le equazioni (37.4) si esprimono in termini dei soli campi incogniti  $P_1$  e  $w_i$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_o(x) \frac{\partial w_i}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x_i} + \frac{\frac{\partial U}{\partial x_i}(x)}{\frac{dP}{d\rho}[\rho_o(x)]} P_1 \quad i = 1, 2, 3 \\ \frac{1}{\frac{dP}{d\rho}[\rho_o(x)]} \frac{\partial P_1}{\partial t} + \rho_o(x) \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0 \end{array} \right. \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega. \quad (37.6)$$

Da notare che l'ultimo termine della (37.5) può rendersi in una forma più compatta notando che in condizioni statiche deve aversi:

$$0 = -\frac{dP}{d\rho}[\rho_o(x)] \frac{\partial \rho_o}{\partial x_i}(x) + \rho_o(x) \frac{\partial U}{\partial x_i}(x)$$

per cui risulta:

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_i}(x)}{\frac{dP}{d\rho}[\rho_o(x)]} = \frac{\frac{\partial \rho_o}{\partial x_i}(x)}{\rho_o(x)} = \frac{\partial}{\partial x_i} \ln \rho_o(x)$$

e l'equazione (37.5) diventa:

$$\frac{1}{\frac{dP}{d\rho}[\rho_o(x)]} \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ P_1 \frac{\partial}{\partial x_i} \ln \rho_o(x) \right]. \quad (37.7)$$

Allo stesso modo, anche le equazioni (37.6) possono ridursi a:

$$\begin{cases} \rho_o(x) \frac{\partial w_i}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x_i} + P_1 \frac{\partial}{\partial x_i} \ln \rho_o(x) & i = 1, 2, 3 \\ \frac{1}{\frac{dP}{d\rho}[\rho_o(x)]} \frac{\partial P_1}{\partial t} + \rho_o(x) \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0 \end{cases} \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega. \quad (37.8)$$

Oltre alle condizioni iniziali, l'equazione (37.7) richiede la specifica delle appropriate condizioni al contorno lungo la frontiera  $\partial\Omega$  del dominio  $\Omega$ , che si suppone regolare. Si possono distinguere due casi di interesse. Il primo ricorre lungo le porzioni di  $\partial\Omega$  dove il fluido è confinato da una *parete rigida*. In tal caso, infatti, la velocità del fluido (non viscoso) in un generico punto  $x \in \partial\Omega$  deve avere componente nulla lungo la normale  $\hat{n}$  a  $\partial\Omega$  in  $x$ , e a tutti i tempi  $t \in \mathbb{R}$ . La prima delle (37.8) porge allora la condizione al contorno di Robin omogenea:

$$0 = -\frac{\partial P_1}{\partial \hat{n}}(t, x) + P_1(t, x) \frac{\partial}{\partial \hat{n}} \ln \rho_o(x) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (37.9)$$

essendosi introdotte le derivate normali:

$$\frac{\partial P_1}{\partial \hat{n}} = \frac{\partial P_1}{\partial x} \cdot \hat{n} = \frac{\partial P_1}{\partial x_i} n_i \quad \text{e} \quad \frac{\partial \ln \rho_o}{\partial \hat{n}} = \frac{\partial \ln \rho_o}{\partial x} \cdot \hat{n} = \frac{\partial \ln \rho_o}{\partial x_i} n_i.$$

Un secondo caso interessante si ha quando piccole porzioni della frontiera  $\partial\Omega$  si “aprono” su una regione esterna ad  $\Omega$  occupata dallo stesso tipo di fluido e che possa assumersi rimanga sostanzialmente in condizioni statiche, alla pressione di equilibrio  $P_o(x)$ . Per ogni punto  $x \in \partial\Omega$  appartenente ad una tale porzione della frontiera, si dovrà dunque richiedere che:

$$P_1(t, x) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (37.10)$$

La condizione al contorno di Dirichlet (37.9) costituisce una evidente approssimazione, in quanto le eventuali oscillazioni del fluido nella regione  $\Omega$  tenderanno certamente a propagarsi anche al mezzo circostante attraverso la porzione di frontiera libera. Si assume che questa propagazione sia estremamente contenuta, mantenendosi localizzata nell'intorno della porzione di  $\partial\Omega$  considerata.

### 37.2 Caso delle forze di volume nulle

Nel caso che il potenziale delle forze specifiche di volume sia costante, la densità di equilibrio  $\rho_o$  risulta indipendente dalla posizione e le equazioni (37.8) diventano:

$$\begin{cases} \rho_o \frac{\partial w_i}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x_i} & i = 1, 2, 3 \\ \frac{1}{\frac{dP}{d\rho}(\rho_o)} \frac{\partial P_1}{\partial t} + \rho_o \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0 \end{cases} \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega \quad (37.11)$$

e di conseguenza la (37.7) si riduce alla forma:

$$\frac{1}{\frac{dP}{d\rho}(\rho_o)} \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_i \partial x_i} \quad (37.12)$$

nella quale è immediato riconoscere la classica *equazione delle onde*, o di D'Alembert, con velocità costante:

$$c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}(\rho_o)}. \quad (37.13)$$

La condizione al contorno (37.9) sui tratti rigidi della frontiera  $\partial\Omega$  diventa ora una semplice condizione di Neumann:

$$0 = -\frac{\partial P_1}{\partial \hat{n}}(t, x) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (37.14)$$

in tutti i punti  $x$  della frontiera rigida, mentre rimane inalterata la condizione di Dirichlet (37.10) sulla frontiera libera, entro gli stessi limiti di approssimazione già discussi nel caso generale.

### 37.3 Forze di volume nulle: onde stazionarie 1D in un tubo

Si supponga che il fluido barotropico ideale sia confinato entro un tubo cilindrico chiuso di raggio trascurabile e disposto lungo l'asse  $Ox$  della terna  $Oxyz$ . Le basi del cilindro siano collocato nell'origine  $x = 0$  e nella posizione  $x = L$ , essendo  $L$  la lunghezza complessiva del tubo. Trascurando le eventuali variazioni di pressione lungo  $y$  e  $z$ , la variazione di pressione rispetto alla pressione di equilibrio è descritta da una funzione del tipo  $P_1(t, x)$  e soddisfa l'equazione delle onde 1D:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}, \quad (37.15)$$

essendo  $c$  la velocità di propagazione (costante) delle onde definita da (37.13). Il modo più diretto per ricavare soluzioni di tipo oscillatorio dell'equazione di evoluzione consiste nel cosiddetto *metodo di separazione delle variabili*. Si cerca una soluzione nella forma fattorizzata:

$$P_1(t, x) = T(t) X(x) \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in [0, L], \quad (37.16)$$

dove  $T(t)$  e  $X(x)$  sono funzioni incognite del solo tempo  $t$  e della sola ascissa  $x$ , rispettivamente. Sostituendo la (37.16) in (37.15) si ottiene l'equazione differenziale alle derivate ordinarie:

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 T}{dt^2}(t) X(x) = T(t) \frac{d^2 X}{dx^2}(x)$$

che per  $T(t)X(x) \neq 0$  diventa:

$$\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T}{dt^2}(t) = c^2 \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2}(x)$$

e porta a concludere che il primo ed il secondo membro debbono risultare *separatamente costanti*, in quanto funzioni delle sole variabili *indipendenti*  $t$  ed  $x$  rispettivamente:

$$\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T}{dt^2}(t) = -\omega^2 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad c^2 \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2}(x) = -\omega^2 \quad \forall x \in [0, L], \quad (37.17)$$

con  $\omega$  costante positiva. Le equazioni che definiscono i fattori  $T(t)$  e  $X(x)$  sono pertanto:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T}{dt^2}(t) + \omega^2 T(t) &= 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \frac{d^2 X}{dx^2}(x) + \frac{\omega^2}{c^2} X(x) &= 0 \quad \forall x \in [0, L] \end{aligned} \quad (37.18)$$

e per un tubo chiuso ad entrambe le estremità vanno risolte con le condizioni al contorno di Neumann (37.14) in  $x = 0$  e in  $x = L$ :

$$\frac{\partial P_1}{\partial x}(t, 0) = 0 \quad \frac{\partial P_1}{\partial x}(t, L) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (37.19)$$

La prima delle equazioni (37.18) ammette una soluzione generale di tipo oscillatorio, come richiesto:

$$T(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

con  $c_1$  e  $c_2$  costanti reali arbitrarie (non entrambe nulle). Questo risultato giustifica la scelta fatta nelle (37.17) di assumere *negativa* la comune costante a secondo membro, giacchè in caso contrario la soluzione  $T(t)$  sarebbe risultata lineare, o peggio, esponenziale nel tempo e non avrebbe potuto rappresentare un processo di tipo oscillatorio. La seconda delle equazioni (37.18), tenuto conto delle condizioni (37.19), conduce al problema a valori al contorno:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2}(x) + \frac{\omega^2}{c^2} X(x) &= 0 \quad \forall x \in [0, L] \\ \frac{dX}{dx}(0) &= 0 \quad \frac{dX}{dx}(L) = 0. \end{aligned} \quad (37.20)$$

L'equazione porge la soluzione generale:

$$X(x) = k_1 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + k_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \quad \forall x \in [0, L] \quad (37.21)$$

in termini delle costanti arbitrarie  $k_1, k_2$ , che però devono risultare non entrambe nulle ed essere determinate in modo da soddisfare le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dx}(0) &= -k_1 \frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) + k_2 \frac{\omega}{c} \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) \Big|_{x=0} = k_2 \frac{\omega}{c} = 0 \\ \frac{dX}{dx}(L) &= -k_1 \frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) + k_2 \frac{\omega}{c} \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) \Big|_{x=L} = -k_1 \frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{\omega}{c}L\right) + k_2 \frac{\omega}{c} \cos\left(\frac{\omega}{c}L\right) = 0. \end{aligned}$$

Ne deriva che:

$$k_2 = 0 \quad \sin\left(\frac{\omega}{c}L\right) = 0$$

per cui  $\omega L/c = \pi n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , e la soluzione generale diventa:

$$X(x) = k_1 \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad \forall x \in [0, L]$$

con  $n = 1, 2, 3, \dots$  e  $k_1 \neq 0$  assegnati a piacere. Si è così verificato che le oscillazioni stazionarie del sistema ricorrono soltanto per particolari valori della pulsazione  $\omega$ :

$$\omega = \frac{\pi c}{L}n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (37.22)$$

e sono della forma:

$$P_1(t, x) = \left[ a \sin\left(\frac{\pi c}{L}nt\right) + b \cos\left(\frac{\pi c}{L}nt\right) \right] \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad (37.23)$$

in termini delle costanti  $a$  e  $b$ , non entrambe nulle. Ricordando che per definizione la lunghezza d'onda di una perturbazione ondulatoria è espressa in termini della velocità  $c$  e della frequenza  $\nu = \omega/2\pi$  per mezzo della relazione:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega},$$

la condizione (37.22) può scriversi:

$$L = \frac{\lambda}{2}n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

ed interpretarsi affermando che *in condizioni di oscillazione stazionaria il tubo di lunghezza  $L$  deve contenere un numero intero  $n = 1, 2, 3, \dots$  di semilunghezze d'onda  $\lambda/2$ .*

L'accelerazione delle particelle di fluido si calcola per mezzo della prima equazione (37.11):

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t, x) = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P_1}{\partial x}(t, x) = \frac{\pi n}{L\rho_o} \left[ a \sin\left(\frac{\pi c}{L}nt\right) + b \cos\left(\frac{\pi c}{L}nt\right) \right] \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

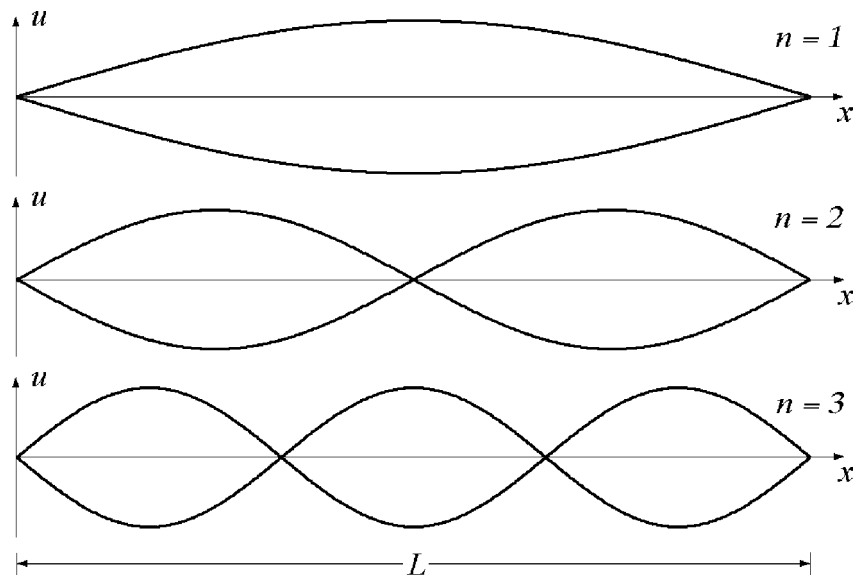
e integrata due volte in  $t$  fornisce il vettore spostamento  $u(t, x)$  di ciascuna particella di fluido rispetto alla configurazione di equilibrio:

$$u(t, x) = -\frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{L}{\pi n} \left[ a \sin\left(\frac{\pi c}{L} n t\right) + b \cos\left(\frac{\pi c}{L} n t\right) \right] \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right).$$

I punti nei quali le particelle di fluido si mantengono costantemente in quiete, individuati dalla relazione:

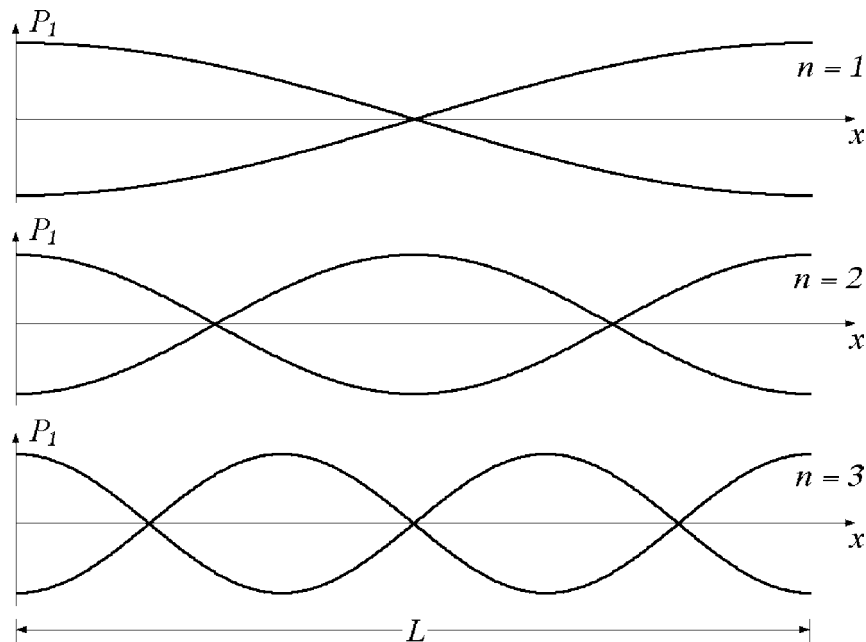
$$\sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{L}{n} k, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

sono detti *nodi* del sistema. A metà strada fra due nodi consecutivi si collocano i punti dove l'ampiezza di oscillazione del vettore spostamento  $u$  risulta massima, noti come *ventri* o *anti-nodi* del sistema. È evidente che per un tubo chiuso alle due estremità queste costituiscono altrettanti nodi, e che la distanza fra due nodi consecutivi si identifica con la semilunghezza d'onda  $\lambda/2$  dell'oscillazione. Ne deriva una semplice interpretazione fisica dello stato di oscillazione stazionaria: il tubo deve presentare due nodi agli estremi e la sua lunghezza  $L$  deve contenere un numero intero di semilunghezze d'onda, associate agli eventuali nodi intermedi. La figura seguente illustra il risultato, mostrando per  $n = 1, 2, 3$  e per ogni  $x \in [0, L]$  l'elongazione minima e massima delle particelle di fluido:



Per quel che riguarda la perturbazione sulla pressione, equazione (37.23), si osserva che l'ampiezza massima di oscillazione della pressione si verifica proprio in corrispondenza dei nodi, comprese le estremità del tubo, mentre risulta nulla agli anti-nodi.

Rappresentando le ampiezze minima e massima di oscillazione della pressione si ottengono pertanto i grafici sotto illustrati:



Un modo alternativo, ma del tutto equivalente, di guardare al risultato ottenuto consiste nel considerare che il problema a valori al contorno (37.20) *non ammette soluzioni non identicamente nulle per qualsiasi valore della costante  $\omega^2$* , ma soltanto per opportuni valori caratteristici. Detti valori caratteristici sono anche noti come *autovalori* del problema e una qualsiasi soluzione non banale corrispondente  $X(x)$  costituisce un'*autofunzione* associata all'autovalore. La determinazione delle soluzioni stazionarie dell'equazione delle onde per assegnate condizioni al contorno viene quindi ricondotta ad un *problema agli autovalori*. È possibile dimostrare che *qualsiasi soluzione* regolare dell'equazione delle onde (37.15) munita delle condizioni al contorno (37.19) risulta da una generica combinazione lineare delle soluzioni (37.23):

$$P_1(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \sin\left(\frac{\pi c}{L} n t\right) + b_n \cos\left(\frac{\pi c}{L} n t\right) \right] \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad x \in [0, L],$$

per una qualsivoglia scelta dei coefficienti costanti  $a_n, b_n, n = 1, 2, \dots$  — si suole dire che le soluzioni (37.23) ottenute per separazione di variabili costituiscono un *insieme completo* di soluzioni linearmente indipendenti.

Nel caso che il tubo sia *chiuso all'estremo  $x = 0$  ma aperto all'estremo  $x = L$*  le condizioni al contorno da considerare in luogo delle (37.19) sono le seguenti:

$$\frac{\partial P_1}{\partial x}(t, 0) = 0 \quad P_1(t, L) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e procedendo sempre per separazione di variabili portano al problema a valori al contorno:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2}(x) + \frac{\omega^2}{c^2} X(x) &= 0 \quad \forall x \in [0, L] \\ \frac{dX}{dx}(0) &= 0 \quad X(L) = 0. \end{aligned}$$

Dalla soluzione generale (37.21) si ha allora:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dx}(0) &= -k_1 \frac{\omega}{c} \sin\left(\frac{\omega}{c} x\right) + k_2 \frac{\omega}{c} \cos\left(\frac{\omega}{c} x\right) \Big|_{x=0} = k_2 \frac{\omega}{c} = 0 \\ X(L) &= k_1 \cos\left(\frac{\omega}{c} x\right) + k_2 \sin\left(\frac{\omega}{c} x\right) \Big|_{x=L} = k_1 \cos\left(\frac{\omega}{c} L\right) + k_2 \sin\left(\frac{\omega}{c} L\right) = 0 \end{aligned}$$

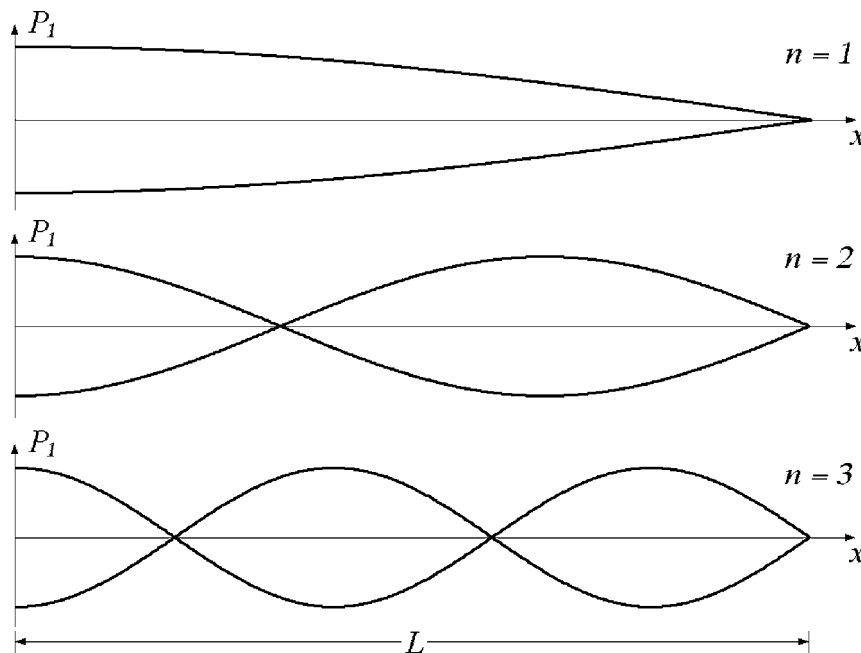
e quindi, dovendo essere  $(k_1, k_2) \neq (0, 0)$ :

$$\cos\left(\frac{\omega}{c} L\right) = 0 \quad \iff \quad \frac{\omega}{c} L = \frac{\pi}{2} (2n - 1), \quad n = 1, 2, \dots \quad (37.24)$$

La soluzione per separazione di variabili diventa così:

$$P_1(t, x) = \left[ a \cos\left(\frac{\pi c}{L} \frac{2n - 1}{2} t\right) + b \sin\left(\frac{\pi c}{L} \frac{2n - 1}{2} t\right) \right] \cos\left(\frac{\pi}{L} \frac{2n - 1}{2} x\right)$$

e presenta un anti-nodo nell'estremo chiuso  $x = 0$  e un nodo in corrispondenza dell'estremo aperto  $x = L$ , come mostrato nella figura seguente:



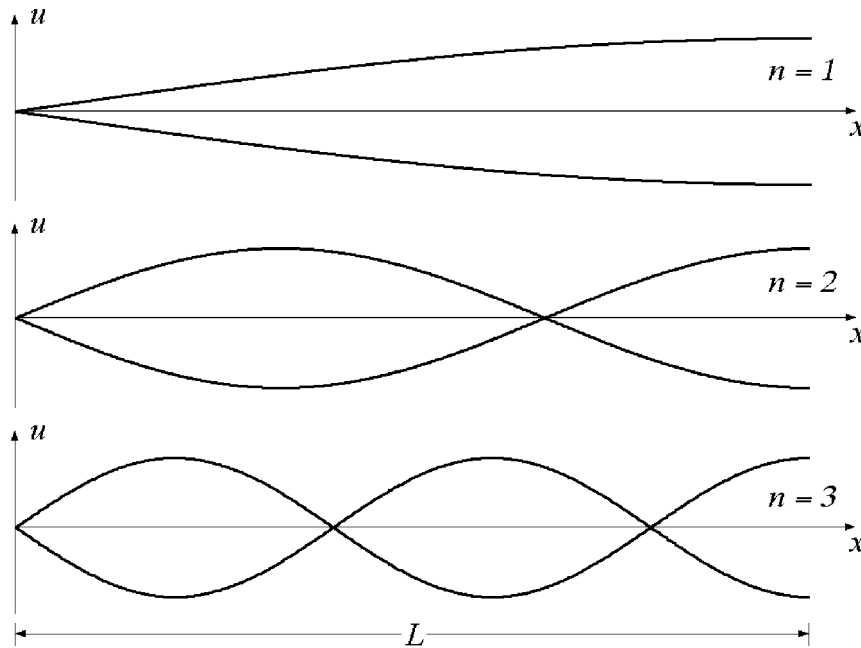
La distribuzione e variazione nel tempo dell'accelerazione delle particelle si ricava in modo analogo a quanto già visto per il tubo chiuso:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t}(t, x) &= -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P_1}{\partial x}(t, x) = \\ &= \frac{\pi}{L\rho_o} \frac{2n-1}{2} \left[ a \cos\left(\frac{\pi c}{L} \frac{2n-1}{2} t\right) + b \sin\left(\frac{\pi c}{L} \frac{2n-1}{2} t\right) \right] \sin\left(\frac{\pi}{L} \frac{2n-1}{2} x\right) \end{aligned}$$

e con una doppia integrazione in  $t$  permette di ricavare l'evoluzione del vettore spostamento  $u(t, x)$  di ciascuna particella rispetto alla propria posizione di equilibrio:

$$u(t, x) = -\frac{1}{\rho_o c^2} \frac{L}{\pi} \frac{2n-1}{2} \left[ a \cos\left(\frac{\pi c}{L} \frac{2n-1}{2} t\right) + b \sin\left(\frac{\pi c}{L} \frac{2n-1}{2} t\right) \right] \sin\left(\frac{\pi}{L} \frac{2n-1}{2} x\right).$$

L'ampiezza di oscillazione delle particelle è nulla all'estremità chiusa del tubo —  $x = 0$  — mentre risulta massima all'estremità aperta  $x = L$ . L'andamento dei modi stazionari di oscillazione è illustrato in figura:



Ricordando che la lunghezza d'onda  $\lambda$  della perturbazione è legata alla pulsazione  $\omega$  e alla velocità di propagazione  $c$  dalla relazione  $c/\omega = \lambda/2\pi$ , la condizione (37.24) si scrive:

$$L = \frac{\lambda}{2} \frac{2n-1}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

e può interpretarsi affermando che nella lunghezza  $L$  del tubo deve essere compreso un numero semiintero  $(2n-1)/2$  di semilunghezze d'onda  $\lambda/2$ .

## 38. Complemento. Forma generale del teorema del trasporto

Per quanto non se ne faccia uso in queste note, è interessante introdurre una forma più generale del teorema del trasporto (o di Reynolds), già considerato nella sezione 15 e di seguito richiamato:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(\Omega)} g(t, x) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Phi_t(\Omega)} \left[ \frac{dg}{dt}(t, x) + g(t, x) \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(t, x) \right] dx_1 dx_2 dx_3$$

Il teorema di Eulero e quello del trasporto, che ne è la diretta conseguenza, sono stati ricavati assumendo che il dominio di riferimento  $\Phi_t(\Omega)$  fosse in moto di conserva con il sistema continuo: il campo euleriano di velocità considerato per il calcolo della derivata materiale:

$$\frac{dg}{dt}(t, x) = \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) + v_i(t, x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(t, x)$$

e della divergenza nel termine correttivo:

$$g(t, x) \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(t, x)$$

è precisamente quello del continuo  $v_i(t, x)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Nella dimostrazione dei due teoremi nulla vieta, tuttavia, di considerare un *dominio di riferimento in moto arbitrario*, puramente fittizio, anche rispetto al continuo. Indicato con  $\Psi_t(\Omega)$  tale dominio, essendo  $\Psi_t$  il flusso del moto fittizio corrispondente, si perviene alla relazione:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Psi_t(\Omega)} g(t, x) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Psi_t(\Omega)} \left[ \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) + u_i(t, x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(t, x) + g(t, x) \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(t, x) \right] dx_1 dx_2 dx_3$$

dove  $u_i(t, x)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sono le componenti euleriane di velocità del moto fittizio considerato:

$$u_i(t, x) = \hat{e}_i \cdot \frac{\partial \Psi_t(X)}{\partial t} \Big|_{X=\Psi_t^{-1}(x)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

La stessa relazione può essere riespressa in una forma più suggestiva, sommando e sottraendo le componenti euleriane della velocità del continuo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Psi_t(\Omega)} g(t, x) dx_1 dx_2 dx_3 &= \int_{\Psi_t(\Omega)} \left[ \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) + v_i(t, x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(t, x) + g(t, x) \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(t, x) \right] dx_1 dx_2 dx_3 + \\ &+ \int_{\Psi_t(\Omega)} \left[ [u_i(t, x) - v_i(t, x)] \frac{\partial g}{\partial x_i}(t, x) + g(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i} [u_i(t, x) - v_i(t, x)] \right] dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

salvo poi reintrodurre la definizione di derivata materiale di  $g$  nel primo integrale:

$$\begin{aligned} & \int_{\Psi_t(\Omega)} \left[ \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) + v_i(t, x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(t, x) + g(t, x) \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(t, x) \right] dx_1 dx_2 dx_3 = \\ & = \int_{\Psi_t(\Omega)} \left[ \frac{dg}{dt}(t, x) + g(t, x) \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(t, x) \right] dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

e scrivere il secondo come integrale di flusso, tramite il teorema della divergenza:

$$\begin{aligned} & \int_{\Psi_t(\Omega)} \left[ [u_i(t, x) - v_i(t, x)] \frac{\partial g}{\partial x_i}(t, x) + g(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i} [u_i(t, x) - v_i(t, x)] \right] dx_1 dx_2 dx_3 = \\ & = \int_{\Psi_t(\Omega)} \frac{\partial}{\partial x_i} [g(t, x) [u_i(t, x) - v_i(t, x)]] dx_1 dx_2 dx_3 = \\ & = \int_{\partial \Psi_t(\Omega)^+} g(t, x) [u_i(t, x) - v_i(t, x)] n_i dS = \int_{\partial \Psi_t(\Omega)^+} g(t, x) [u(t, x) - v(t, x)] \cdot \hat{n} dS, \end{aligned}$$

dove il versore normale  $\hat{n}$  si intende al solito orientato verso l'esterno del dominio di integrazione. La forma generale del teorema del trasporto diventa pertanto:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Psi_t(\Omega)} g(t, x) dx_1 dx_2 dx_3 &= \int_{\Psi_t(\Omega)} \left[ \frac{dg}{dt}(t, x) + g(t, x) \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(t, x) \right] dx_1 dx_2 dx_3 - \\ & - \int_{\partial \Psi_t(\Omega)^+} g(t, x) [v(t, x) - u(t, x)] \cdot \hat{n} dS. \end{aligned} \quad (38.1)$$

Il secondo integrale a secondo membro si può interpretare come il flusso di  $g$  attraverso la superficie di contorno  $\partial \Psi_t(\Omega)^+$  del dominio di riferimento, in quanto la differenza  $v(t, x) - u(t, x)$  rappresenta proprio la velocità relativa del continuo, all'istante  $t$  nella posizione  $x$ , rispetto al punto corrispondente di  $\partial \Psi_t(\Omega)^+$ . *L'integrale esprime quindi la variazione della grandezza nel tempo dovuta allo scambio di materia attraverso il contorno  $\partial \Psi_t(\Omega)^+$ .* Il primo integrale va invece inteso come *il contributo della porzione di continuo contenuta nel dominio di riferimento  $\Psi_t(\Omega)$ .* Da notare infatti che, qualora sia  $\Psi_t = \Phi_t$  e di conseguenza la porzione di continuo racchiusa nel dominio di riferimento sia sempre la stessa, l'integrale di flusso si annulla identicamente e l'equazione (38.1) si riduce alla (15.1).

### 39. Complemento. Integrali di superficie e loro derivata materiale

Il teorema del trasporto (o di Reynolds), che esprime la derivata rispetto al tempo di una densità volumica integrata su un volume in moto di conserva con il continuo, è suscettibile di una estensione agli integrali di superficie. Nelle coordinate materiali  $X$  una superficie  $S$  si rappresenta per mezzo della parametrizzazione:

$$X = X(u, v) , \quad (u, v) \in D ,$$

su un dominio  $D$  di  $\mathbb{R}^2$ . Se  $\Phi_t$  indica il moto del continuo, la corrispondente superficie in moto di conserva con il continuo può essere rappresentata nella forma  $\Phi_t(S)$  e per ogni  $t$  fissato ammette la parametrizzazione:

$$x(t, u, v) = \Phi_t[X(u, v)] , \quad (u, v) \in D .$$

Scopo della presente trattazione è quello di calcolare la derivata:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(S)} n_i ds$$

dove  $n_i, i = 1, 2, 3$ , sono le componenti del versore normale alla superficie  $\Phi_t(S)$  e l'integrale si scrive esplicitamente, in termini della parametrizzazione  $x(t, u, v)$ , come:

$$\int_{\Phi_t(S)} n_i ds = \int_D \hat{e}_i \cdot \frac{\partial x}{\partial u} \wedge \frac{\partial x}{\partial v} dudv = \int_D \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial v} dudv . \quad (39.1)$$

Introducendo le coordinate materiali  $X$  l'integrale (39.1) diventa:

$$\int_{\Phi_t(S)} n_i ds = \int_D \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial X_a} \frac{\partial X_a}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial X_b} \frac{\partial X_b}{\partial v} dudv = \int_D \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial X_a} \frac{\partial x_k}{\partial X_b} \frac{\partial X_a}{\partial u} \frac{\partial X_b}{\partial v} dudv ,$$

per cui occorre riesprimere convenientemente l'integrando:

$$\xi_i := \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial X_a} \frac{\partial x_k}{\partial X_b} \frac{\partial X_a}{\partial u} \frac{\partial X_b}{\partial v} .$$

A questo scopo, ricordando la definizione del determinante jacobiano  $\det J$  della trasformazione  $\Phi_t$  fra le coordinate materiali e quelle spaziali, si osserva che:

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_c} \xi_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial X_c} \frac{\partial x_j}{\partial X_a} \frac{\partial x_k}{\partial X_b} \frac{\partial X_a}{\partial u} \frac{\partial X_b}{\partial v} = \det J \varepsilon_{cab} \frac{\partial X_a}{\partial u} \frac{\partial X_b}{\partial v}$$

in modo che risulta:

$$\xi_q = \frac{\partial X_c}{\partial x_q} \frac{\partial x_i}{\partial X_c} \xi_i = \frac{\partial X_c}{\partial x_q} \det J \varepsilon_{cab} \frac{\partial X_a}{\partial u} \frac{\partial X_b}{\partial v} = \det J \frac{\partial X_c}{\partial x_q} \varepsilon_{cab} \frac{\partial X_a}{\partial u} \frac{\partial X_b}{\partial v}$$

e di conseguenza:

$$n_q ds = \xi_q dudv = \det J \frac{\partial X_c}{\partial x_q} \varepsilon_{cab} \frac{\partial X_a}{\partial u} \frac{\partial X_b}{\partial v} dudv = \det J \frac{\partial X_c}{\partial x_q} N_c dS, \quad (39.2)$$

essendosi indicate con  $N_c$  le componenti del versore normale alla superficie fissata  $S$ , e con  $dS$  l'elemento infinitesimo d'area della stessa superficie. Si ha pertanto la relazione:

$$\int_{\Phi_t(S)} n_i ds = \int_S \det J \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} N_j dS$$

nella quale il secondo membro è un integrale sulla superficie fissata  $S$  — indipendente dal tempo — e si è specificato che le derivate parziali  $\partial X_j(t, x)/\partial x_i$  si intendono riespresse in termini delle coordinate  $X$ . Anche l'orientamento  $N_i$  è costante e la sola dipendenza dal tempo ricade sulla parte residua dell'integrando. Sotto ipotesi generali di regolarità della funzione integranda — per esempio l'appartenenza alla classe  $C^1$  — è dunque lecito portare la derivata dentro l'integrale:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(S)} n_i ds &= \int_S \frac{\partial}{\partial t} \left( \det J \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} \right) N_j dS = \\ &= \int_S \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\det J) \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} + \det J \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} \right) \right] N_j dS \end{aligned}$$

e, usando il teorema di Eulero, riesprimere la derivata parziale in  $t$  dello jacobiano:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(S)} n_i ds = \int_S \left[ \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \Big|_{x=x(t,X)} \det J \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} + \det J \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} \right) \right] N_j dS$$

per ottenere:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(S)} n_i ds = \int_S \left[ \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \Big|_{x=x(t,X)} \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} \right) \right] \det J N_j dS. \quad (39.3)$$

Si osservi che  $\forall i, k = 1, 2, 3$  vale l'identità:

$$\frac{\partial X_j}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} = \delta_{ik}$$

per cui una derivazione parziale membro a membro in  $t$  porge:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} \right) \frac{\partial x_k}{\partial X_j} + \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \right) = 0$$

e scambiato l'ordine delle derivate parziali nell'ultimo termine:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} \right) \frac{\partial x_k}{\partial X_j} + \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{\partial x_k}{\partial t} \right) = 0.$$

Dalla definizione del campo lagrangiano di velocità segue allora:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} \right) \frac{\partial x_k}{\partial X_j} + \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} \frac{\partial V_k}{\partial X_j} = 0$$

e riesprimendo il tutto in termini del campo euleriano di velocità si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} \right) \frac{\partial x_k}{\partial X_j} + \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} \frac{\partial v_k}{\partial x_q} \Big|_{x=x(t,X)} \frac{\partial x_q}{\partial X_j} = 0$$

vale a dire:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} \right) \frac{\partial x_k}{\partial X_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_q} \Big|_{x=x(t,X)} \delta_{iq} = 0$$

ed infine:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} \right) \frac{\partial x_k}{\partial X_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} = 0.$$

Se si moltiplica membro a membro per  $\partial X_r / \partial x_k$ , riespresso in funzione di  $X$ , si perviene poi alla relazione:

$$\frac{\partial X_r}{\partial x_k} \Big|_{x=x(t,X)} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} \right) \frac{\partial x_k}{\partial X_j} + \frac{\partial X_r}{\partial x_k} \Big|_{x=x(t,X)} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} = 0$$

dalla quale si deduce:

$$\delta_{rj} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} \right) + \frac{\partial X_r}{\partial x_k} \Big|_{x=x(t,X)} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} = 0$$

ossia:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial X_r}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} \right) + \frac{\partial X_r}{\partial x_k} \Big|_{x=x(t,X)} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} = 0$$

ed infine, cambiando in  $j$  l'indice  $r$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} \right) = - \frac{\partial X_j}{\partial x_k} \Big|_{x=x(t,X)} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)}. \quad (39.4)$$

Basta così sostituire la relazione (39.4) nella (39.3) per ottenere l'equazione:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(S)} n_i ds &= \int_S \left[ \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \Big|_{x=x(t,X)} \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} - \frac{\partial X_j}{\partial x_k} \Big|_{x=x(t,X)} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} \right] \det J N_j dS = \\ &= \int_S \left[ \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \Big|_{x=x(t,X)} \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} \frac{\partial X_j}{\partial x_k} \Big|_{x=x(t,X)} \right] \det J N_j dS \end{aligned}$$

ed infine, grazie alla (39.2) e ritornando alle coordinate  $x$ , il risultato richiesto:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(S)} n_i ds = \int_{\Phi_t(S)} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_k} n_i - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} n_k \right) ds. \quad (39.5)$$

La relazione ottenuta si estende facilmente ad un generico integrale di flusso sulla superficie orientata  $\Phi_t(S)$ . Per un campo vettoriale  $f_i(t, x)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , con rappresentazione lagrangiana  $F_i(t, X)$ , si ha infatti:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(S)} f_i n_i ds = \frac{d}{dt} \int_S F_i \det J \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} N_j dS$$

e quindi, portando la derivata dentro l'integrale e separando i termini:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(S)} f_i n_i ds = \int_S \frac{\partial F_i}{\partial t} \det J \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} N_j dS + \int_S F_i \frac{\partial}{\partial t} \left( \det J \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \Big|_{x=x(t,X)} \right) N_j dS.$$

Basta così tornare alle coordinate spaziali  $x$  e usare la stessa procedura seguita nello stabilire la (39.5) per ottenere l'equazione:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(S)} f_i n_i ds &= \int_{\Phi_t(S)} \frac{\partial F_i}{\partial t} (t, X) \Big|_{X=X(t,x)} n_i ds + \int_{\Phi_t(S)} f_i \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_k} n_i - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} n_k \right) ds = \\ &= \int_{\Phi_t(S)} \frac{df_i}{dt} n_i ds + \int_{\Phi_t(S)} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} f_i n_i ds - \int_{\Phi_t(S)} f_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i} n_k ds \end{aligned}$$

in cui si è introdotta la derivata materiale  $df_i/dt$  di  $f_i$  in rappresentazione euleriana. L'analogo del teorema del trasporto per gli integrali di flusso su una superficie in moto di conserva con il continuo è pertanto:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(S)} f_i n_i ds = \int_{\Phi_t(S)} \left( \frac{df_i}{dt} + \frac{\partial v_k}{\partial x_k} f_i \right) n_i ds - \int_{\Phi_t(S)} f_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i} n_k ds. \quad (39.6)$$

## 40. Complemento. Integrali di linea e loro derivata materiale

L'estensione del teorema di Reynolds agli integrali di flusso, illustrata nella sezione precedente, è possibile anche per gli integrali curvilinei. Nelle coordinate materiali  $X$  una curva  $\Gamma$  viene rappresentata da una parametrizzazione del tipo:

$$X = X(\lambda) , \quad \lambda \in \Lambda ,$$

definita su un intervallo reale  $\Lambda$ . Indicato con  $\Phi_t$  il moto del continuo, la corrispondente curva in moto di conserva con il continuo può essere rappresentata nella forma  $\Phi_t(\Gamma)$  e per ogni  $t$  fissato parametrizzata come:

$$x(t, \lambda) = \Phi_t[X(\lambda)] , \quad \lambda \in \Lambda .$$

Si vuole quindi ricavare una espressione esplicita per la derivata:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(\Gamma)} dx_i .$$

L'integrale può essere riespresso convenientemente passando alle coordinate materiali:

$$\int_{\Phi_t(\Gamma)} dx_i = \int_{\Lambda} \frac{dx_i}{d\lambda} d\lambda = \int_{\Lambda} \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \frac{dX_j}{d\lambda} d\lambda = \int_{\Gamma} \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j$$

in modo che il dominio di integrazione diventa fisso e la derivata in  $t$  viene applicata direttamente all'integrando:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(\Gamma)} dx_i = \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) dX_j = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) dX_j .$$

Usando la definizione delle componenti lagrangiane della velocità, riesprimendo le stesse componenti in termini di quelle euleriane, e tornando alle coordinate  $x$ , si ottiene così:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(\Gamma)} dx_i = \int_{\Gamma} \frac{\partial V_i}{\partial X_j} dX_j = \int_{\Gamma} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \Big|_{x=x(t,X)} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} dX_j = \int_{\Phi_t(\Gamma)} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dx_k$$

e quindi:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(\Gamma)} dx_i = \int_{\Phi_t(\Gamma)} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dx_k . \tag{40.1}$$

Per l'integrale di linea di un generico campo vettoriale  $f_i(t, x)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , vale invece:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(\Gamma)} f_i dx_i = \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} F_i(t, X) \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial F_i}{\partial t}(t, X) \frac{\partial x_i}{\partial X_j} + F_i \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) \right] dX_j = \\
&= \int_{\Gamma} \frac{\partial F_i}{\partial t}(t, X) \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j + \int_{\Gamma} F_i \frac{\partial v_i}{\partial X_j} dX_j = \\
&= \int_{\Gamma} \frac{\partial F_i}{\partial t}(t, X) \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j + \int_{\Gamma} F_i \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \Big|_{x=x(t, X)} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} dX_j = \\
&= \int_{\Phi_t(\Gamma)} \frac{df_i}{dt} dx_i + \int_{\Phi_t(\Gamma)} f_i \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dx_k,
\end{aligned}$$

essendo  $F_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , le componenti lagrangiane di del campo vettoriale e  $df_i/dt$  la derivata materiale di  $f_i$ . L'estensione agli integrali curvilinei del teorema del trasporto risulta pertanto:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi_t(\Gamma)} f_i dx_i = \int_{\Phi_t(\Gamma)} \frac{df_i}{dt} dx_i + \int_{\Phi_t(\Gamma)} f_i \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dx_k. \quad (40.2)$$

# Indice degli argomenti

1. Sistemi continui (deformabili) .....	1
2. Coordinate materiali $X$ .....	1
3. Moto di un continuo. Coordinate spaziali $x$ .....	1
4. Condizioni sul moto di un continuo .....	3
4.1 Incompenetrabilità della materia .....	3
4.2 Condizioni di regolarità .....	3
4.3 Condizione sul volume .....	4
4.4 Osservazione. La funzione $\det J$ ha segno costante .....	5
4.5 Osservazione. La condizione 4.2 implica la 4.3 .....	6
5. Rappresentazione lagrangiana ed euleriana .....	6
6. Relazione fra le rappresentazioni .....	7
7. Velocità lagrangiana ed euleriana .....	7
8. Derivata materiale (rispetto al tempo) .....	8
9. Convenzione di somma (o di Einstein) .....	9
10. Densità volumica di massa .....	9
11. Conservazione della massa .....	10
12. Varie forme dell'equazione di continuità .....	12
13. Deduzione alternativa dell'equazione di continuità .....	13
14. Teorema di Eulero .....	14
15. Teorema del trasporto (o di Reynolds) .....	17
15.1 Forma particolare del teorema del trasporto .....	18
16. Continui incomprimibili .....	19
16.1 Osservazione. Fluidi incomprimibili e di densità costante .....	20
17. Quantità di moto .....	20
18. Momento angolare .....	21
19. Forze agenti su un continuo .....	22
20. Equazione cardinale dell'impulso .....	23
21. Teorema degli sforzi di Cauchy .....	24
22. Tensore degli sforzi di Cauchy .....	27
23. Equazione cardinale dell'impulso in forma locale .....	27
24. Equazione cardinale del momento angolare .....	28
25. Equazione di bilancio dell'energia .....	29
25.1 Esempio. Fluido non viscoso .....	33
26. Fluidi perfetti (o non viscosi) .....	34
26.1 Fluido incomprimibile .....	35
26.2 Fluido barotropico .....	35
26.3 Soluzioni statiche e configurazioni di equilibrio .....	36
26.4 Soluzioni statiche per il fluido incomprimibile .....	37
26.5 Soluzioni statiche per il fluido barotropico .....	37
27. Esempio. Liquido pesante di densità costante .....	38

27.1	Seconda legge di Stevin .....	38
27.2	Principio dei vasi comunicanti .....	39
27.3	Principio di Pascal .....	39
27.4	Principio di Archimede .....	40
28.	Esempio. Secchio di Newton .....	42
29.	Fluidi viscosi .....	43
30.	Fluidi viscosi termicamente conduttivi .....	46
31.	Relazioni termodinamiche per il gas perfetto .....	47
32.	Relazioni termodinamiche per il gas reale .....	49
33.	Gas perfetto in condizioni adiabatiche .....	51
34.	Bilancio dell'energia per un fluido viscoso .....	53
35.	Solidi elastici .....	54
35.1	Equazioni del moto per il solido elastico lineare omogeneo e isotropo.....	57
36.	Deformazioni omogenee di un mezzo elastico omogeneo e isotropo .....	58
37.	Complemento. Propagazione del suono in un fluido perfetto barotropico .....	61
37.1	Equazioni di propagazione del suono .....	62
37.2	Caso delle forze di volume nulle .....	65
37.3	Forze di volume nulle: onde stazionarie 1D in un tubo.....	65
38.	Complemento. Forma generale del teorema del trasporto .....	72
39.	Complemento. Integrali di superficie e loro derivata materiale .....	74
40.	Complemento. Integrali di linea e loro derivata materiale .....	78