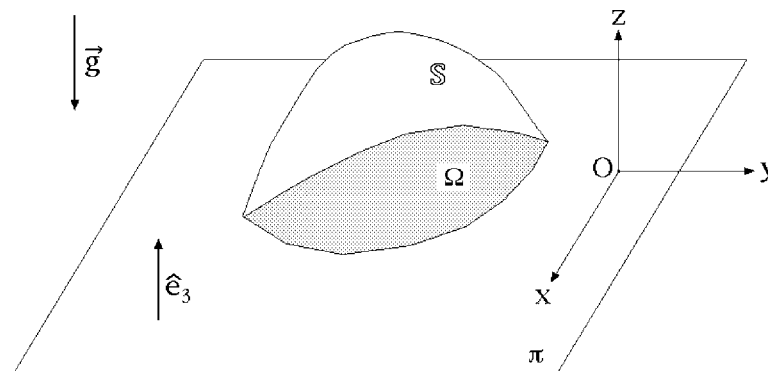


# Corpi rigidi appoggiati

Dispense per il corso di Meccanica Razionale 2  
di Stefano Siboni

## 1. Corpo rigido pesante appoggiato su un piano orizzontale rigido e privo di attrito

Un sistema rigido pesante  $\mathbb{S}$  è vincolato a restare nel semispazio posto al di sopra di un piano orizzontale rigido  $\pi$ , con il quale i punti del corpo rigido possono giungere a contatto, ma senza la possibilità di attraversarlo —  $\pi$  è impenetrabile al moto. Il piano orizzontale è privo di attrito, intendendosi con ciò che la reazione vincolare esercitata dal piano rigido su un qualsiasi punto materiale  $P$ , proveniente dal semispazio superiore, che giunga a contatto con esso risulta necessariamente ortogonale a  $\pi$  e orientata verso l'alto — la reazione opposta dal piano orizzontale tende ad ostacolare qualsiasi tentativo di transito di  $P$  attraverso il piano stesso.



Nella trattazione che segue il versore  $\hat{e}_3$  è diretto secondo la verticale ascendente e risulta quindi ortogonale al piano orizzontale  $\pi$ , mentre  $O$  è un qualsiasi punto assegnato di  $\pi$ .  $\pi$  si identifica con il piano coordinato  $Oxy$  di una terna di riferimento cartesiana ortogonale  $Oxyz$  di origine  $O$  e versori  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ .

Si assumerà, per semplicità, che il corpo rigido sia costituito da un numero finito  $N$  di punti materiali  $P_i$ , di masse rispettive  $m_i$ . In particolare finito sarà, nella configurazione  $P_0$  considerata, l'insieme dei punti di contatto del corpo con il piano orizzontale — la **base d'appoggio**  $\Omega$  del corpo sul piano. Si conviene inoltre di descrivere il sistema con un modello a reazioni vincolari concentrate in cui, per ogni generico punto  $P_i$ , la reazione vincolare  $\vec{\Phi}_i$  consiste di un contributo interno, imputabile all'interazione fra punti costituenti il corpo rigido, e di un contributo esterno, dovuto all'interazione dei punti del

corpo con il piano di appoggio:

$$\vec{\Phi}_i = \vec{\Phi}_i^{\text{int}} + \vec{\Phi}_i^{\text{est}} \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (1.1)$$

Come per un generico corpo rigido libero a vincoli ideali, si conviene che sia esplicabile dai vincoli qualsiasi sistema di reazioni vincolari interne di risultante e momento risultante nulli:

$$\vec{\Phi}_i^{\text{int}} \in \mathbb{R}^3 \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad \sum_{i=1}^N \vec{\Phi}_i^{\text{int}} = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge \vec{\Phi}_i^{\text{int}} = 0, \quad (1.2)$$

conformemente dunque al solo requisito minimo imposto dal principio di azione e reazione. Per contro, le reazioni vincolari esterne esercitabili dai vincoli sono tutte e soltanto quelle del tipo:

$$\vec{\Phi}_i^{\text{est}} = \begin{cases} \mu_i \hat{e}_3, & \mu_i \geq 0, \quad \text{se } P_i \in \Omega \\ 0 & \text{se } P_i \notin \Omega. \end{cases} \quad (1.3)$$

In altri termini, si postula — e molto ragionevolmente — che le reazioni vincolari esterne siano dovute esclusivamente al contatto fra il corpo rigido ed il piano orizzontale  $\pi$  e che quindi esse possano esercitarsi soltanto in corrispondenza dei punti appartenenti alla base d'appoggio  $\Omega$  del sistema nella configurazione assegnata. In ogni punto  $P_i$  della base d'appoggio, inoltre, la reazione vincolare esterna può essere un qualsiasi vettore diretto verticalmente verso l'alto, con componente  $\mu_i \geq 0$  lungo  $\hat{e}_3$ . L'annullarsi della componente tangenziale a  $\pi$  equivale all'assenza di attrito radente fra corpo rigido e piano d'appoggio. L'esclusione di componenti  $\mu_i$  negative esprime il fatto che il corpo deve intendersi **appoggiato** sul piano  $\pi$  e non a questo **adeso**: il piano è in grado di esercitare soltanto un'azione repulsiva sul corpo, mentre sono escluse azioni di tipo attrattivo. La condizione verrebbe certamente meno qualora la superficie di  $\pi$  fosse in tutto o in parte cosparsa di un materiale adesivo, nel qual caso la reazione vincolare esterna  $\vec{\Phi}_i^{\text{est}}$  agente sul punto  $P_i$  della base d'appoggio potrebbe risultare diretta verso il basso.

## 2. Configurazioni di equilibrio

Per definizione, la configurazione  $P_0$  si dice di equilibrio per il sistema se la quiete in  $P_0$  costituisce un moto naturale dello stesso. Se cioè lo stato di quiete in  $P_0$  può essere realizzato applicando a tutti i punti del sistema reazioni vincolari del tipo effettivamente esplicabile dai vincoli. Nella fattispecie le reazioni vincolari che i vincoli possono esercitare sono tutte e soltanto quelle conformi alle condizioni (1.1), (1.2) e (1.3).

Si vuole determinare una condizione necessaria e sufficiente perché la configurazione  $P_0$  in esame sia un equilibrio.

### 3. Condizione necessaria per l'equilibrio

Sia  $P_0$  una configurazione di equilibrio. Ciò significa che la quiete in  $P_0$  costituisce un moto naturale del sistema e che quindi le reazioni vincolari necessarie a mantenere i punti del sistema in quiete nelle loro posizioni rispettive devono essere esplicabili dai vincoli. Il postulato delle reazioni vincolari consente di scrivere per ogni punto  $P_i$  l'equazione formale

$$m_i \ddot{P}_i = -m_i g \hat{e}_3 + \vec{\Phi}_i^{\text{int}} + \vec{\Phi}_i^{\text{est}} \quad i = 1, \dots, N$$

che nello stato di quiete diventa

$$0 = -m_i g \hat{e}_3 + \vec{\Phi}_i^{\text{int}} + \vec{\Phi}_i^{\text{est}} \quad i = 1, \dots, N$$

e porge quindi

$$\vec{\Phi}_i^{\text{int}} + \vec{\Phi}_i^{\text{est}} = m_i g \hat{e}_3 \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.1)$$

Sommando membro a membro le (3.1) su tutti i punti del sistema  $\mathbb{S}$  si ottiene l'equazione

$$\sum_{i=1}^N \vec{\Phi}_i^{\text{int}} + \sum_{i=1}^N \vec{\Phi}_i^{\text{est}} = \sum_{i=1}^N m_i g \hat{e}_3$$

che in virtù delle condizioni sulle reazioni vincolari interne si riduce a

$$\sum_{i=1}^N \vec{\Phi}_i^{\text{est}} = \sum_{i=1}^N m_i g \hat{e}_3. \quad (3.2)$$

Il risultante delle reazioni esterne vale

$$\sum_{i=1}^N \vec{\Phi}_i^{\text{est}} = \sum_{P_i \in \Omega} \vec{\Phi}_i^{\text{est}} + \sum_{P_i \notin \Omega} \vec{\Phi}_i^{\text{est}} = \sum_{P_i \in \Omega} \mu_i \hat{e}_3$$

con  $\mu_i \geq 0 \forall P_i \in \Omega$ . Indicata con  $m$  la massa totale del sistema, la (3.2) porge pertanto

$$\sum_{P_i \in \Omega} \mu_i = mg \quad , \quad \mu_i \geq 0 \quad \forall P_i \in \Omega,$$

relazione dalla quale si deduce che almeno per uno dei punti della base d'appoggio deve risultare  $\mu_i > 0$ . Come è ovvio, nella configurazione di equilibrio il corpo rigido deve essere effettivamente a contatto con il piano  $\pi$ , e il risultante delle reazioni vincolari esterne deve bilanciare esattamente il peso complessivo del corpo appoggiato. In modo analogo, se si moltiplica vettorialmente a sinistra la (3.1) per  $P_i - O$  e si somma su tutti i punti di  $\mathbb{S}$ , si perviene all'equazione

$$\sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge \vec{\Phi}_i^{\text{int}} + \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge \vec{\Phi}_i^{\text{est}} = \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge m_i g \hat{e}_3$$

che, eliminato il momento risultante delle  $\vec{\Phi}_i^{\text{int}}$ , assume la forma equivalente

$$\sum_{P_i \in \Omega} \mu_i (P_i - O) \wedge \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \wedge g \hat{e}_3$$

ovvero

$$\left[ \sum_{P_i \in \Omega} \frac{\mu_i}{mg} (P_i - O) - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \right] \wedge mg \hat{e}_3 = 0. \quad (3.3)$$

Nel secondo termine entro la parentesi quadra della (3.3) è immediato riconoscere il vettore posizione rispetto ad  $O$  del baricentro  $G$  di  $\mathbb{S}$

$$G - O = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O).$$

Il primo termine è invece una **combinazione lineare convessa** dei punti  $P_i \in \Omega$ , di pesi

$$w_i = \frac{\mu_i}{mg} = \frac{\mu_i}{\sum_{P_j \in \Omega} \mu_j} \geq 0 \quad \forall P_i \in \Omega, \quad \sum_{P_i \in \Omega} w_i = \sum_{P_i \in \Omega} \frac{\mu_i}{\sum_{P_j \in \Omega} \mu_j} = 1$$

e rappresenta perciò un punto  $C$  dell'involuppo convesso  $\text{conv}(\Omega) \subset \pi$  della base d'appoggio:

$$\sum_{P_i \in \Omega} \frac{\mu_i}{mg} (P_i - O) = C - O, \quad C \in \text{conv}(\Omega).$$

La condizione (3.3) si riduce così a

$$[(C - O) - (G - O)] \wedge mg \hat{e}_3 = (C - G) \wedge mg \hat{e}_3 = 0$$

ed è interpretabile come la richiesta che la proiezione ortogonale del baricentro  $G$  del corpo sul piano d'appoggio si identifichi con un appropriato punto  $C$  di  $\text{conv}(\Omega)$ . In altre parole, i punti  $G$  e  $C$  devono risultare allineati secondo una retta verticale, ortogonale al piano  $\pi$ . Conviene introdurre le definizioni seguenti.

### 3.1 Definizione. Poligono d'appoggio

Si definisce poligono d'appoggio l'involuppo convesso  $\text{conv}(\Omega)$  della base d'appoggio  $\Omega$ .

La denominazione è giustificata dal fatto che l'involuppo convesso della base d'appoggio  $\Omega$  deve essere ubicato nel piano di giacitura  $\pi$  e, data la cardinalità finita di  $\Omega$ , consiste sempre in un poligono chiuso e convesso i cui vertici appartengono ad  $\Omega$ .

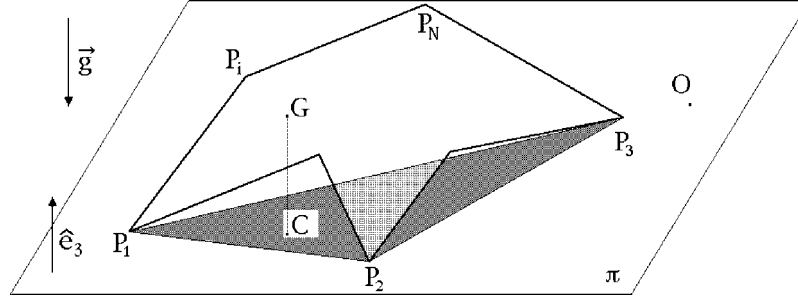
### 3.2 Definizione. Centro di pressione

Si dice centro di pressione la proiezione ortogonale del baricentro sul piano di appoggio.

### 3.3 Condizione necessaria

Facendo uso di queste definizioni è dunque dato affermare che

*Condizione necessaria affinché la configurazione sia di equilibrio è che il centro di pressione del corpo appartenga al poligono d'appoggio.*



## 4. Condizione sufficiente per l'equilibrio

Si supponga che il centro di pressione  $C$  appartenga al poligono d'appoggio. Ne segue che

$$C - O = \sum_{P_i \in \Omega} w_i (P_i - O) \quad (4.1)$$

per una appropriata scelta — in generale non univoca — dei pesi  $w_i$  soddisfacenti le condizioni:

$$w_i \geq 0 \quad \forall P_i \in \Omega \quad \text{e} \quad \sum_{P_i \in \Omega} w_i = 1 .$$

Si vuole dimostrare che la quiete nella configurazione  $P_0$  assegnata costituisce un moto naturale. In tale stato di quiete il postulato delle reazioni vincolari porge le relazioni

$$\vec{\Phi}_i^{\text{int}} + \vec{\Phi}_i^{\text{est}} - m_i g \hat{e}_3 = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N .$$

Un set di reazioni vincolari esterne esplicabili si scrive nella forma

$$\vec{\Phi}_i^{\text{est}} = \begin{cases} w_i m g \hat{e}_3 & \text{se } P_i \in \Omega \\ 0 & \text{se } P_i \notin \Omega \end{cases} \quad (4.2)$$

in forza della non-negatività dei pesi  $w_i$ . Le corrispondenti reazioni vincolari interne valgono perciò

$$\vec{\Phi}_i^{\text{int}} = -\vec{\Phi}_i^{\text{est}} + m_i g \hat{e}_3 \quad \forall i = 1, \dots, N$$

e si dimostrano esplicabili dai vincoli in quanto di risultante nullo

$$\sum_{i=1}^N \vec{\Phi}_i^{\text{int}} = -\sum_{i=1}^N \vec{\Phi}_i^{\text{est}} + \sum_{i=1}^N m_i g \hat{e}_3 = -\sum_{P_i \in \Omega} w_i m g \hat{e}_3 + m g \hat{e}_3 = -m g \hat{e}_3 + m g \hat{e}_3 = 0$$

e momento risultante nullo

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge \vec{\Phi}_i^{\text{int}} &= -\sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge \vec{\Phi}_i^{\text{est}} + \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge m_i g \hat{e}_3 = \\
 &= -\sum_{P_i \in \Omega} (P_i - O) \wedge w_i m g \hat{e}_3 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \wedge m g \hat{e}_3 = \\
 &= -\sum_{P_i \in \Omega} w_i (P_i - O) \wedge m g \hat{e}_3 + (G - O) \wedge m g \hat{e}_3 = \\
 &= -(C - O) \wedge m g \hat{e}_3 + (G - O) \wedge m g \hat{e}_3 = (G - C) \wedge m g \hat{e}_3 = 0.
 \end{aligned}$$

In definitiva:

*Condizione sufficiente perché la configurazione del corpo rigido appoggiato sia di equilibrio è che il centro di pressione appartenga al poligono d'appoggio.*

È importante sottolineare come l'insieme delle reazioni vincolari esplicabili che rendono possibile la quiete nella configurazione di equilibrio in generale non sia determinato univocamente. Lo si rileva, se non altro, dal fatto che uno stesso centro di pressione  $C$  può essere individuato tramite la combinazione lineare convessa (4.1) secondo molte diverse possibili scelte dei pesi  $w_i$ , ad ognuna delle quali corrisponde un diverso sistema di reazioni vincolari esterne. Come si verificherà nel seguito, la sola eccezione di un qualche interesse è il caso in cui la base di appoggio risulta costituita da **tre soli punti**, poiché in tale circostanza pesi e reazioni vincolari esterne (e interne) sono fissate in modo univoco assegnata che sia la posizione del centro di pressione. In generale, quindi, il problema dell'equilibrio del corpo rigido appoggiato è **staticamente indeterminato**.

## 5. Caratterizzazione completa dell'equilibrio

I risultati delle due sezioni precedenti consentono di individuare una completa caratterizzazione delle configurazioni di equilibrio del corpo rigido appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito.

*Condizione necessaria e sufficiente affinché la configurazione del corpo appoggiato sia di equilibrio è l'appartenenza del centro di pressione al poligono d'appoggio.*

## 6. Caratterizzazione dell'inviluppo convesso di un insieme finito di punti in un piano

In questa sezione si prova che i punti dell'inviluppo convesso di un insieme finito sono tutti e soltanto quelli individuati da una combinazione lineare convessa dei punti dello stesso insieme. Si prova altresì che, nel caso di un insieme costituito da 3 punti non allineati, tale combinazione lineare convessa è univocamente determinata.

Si consideri un insieme  $\Omega$  costituito da un numero finito di punti  $P_i, i = 1, \dots, n$ , del piano  $\pi \subset \mathbb{E}^3$ :

$$\Omega := \{P_i \in \pi, \quad i = 1, \dots, n\} \subset \pi$$

e si voglia caratterizzare l'involuppo convesso  $\text{conv}(\Omega)$  di tale insieme che, per definizione è dato dalla intersezione di tutti i semipiani chiusi in  $\pi$  contenenti  $\Omega$ . È immediato verificare il seguente

### 6.1 Lemma 1. Combinazioni lineari convesse.

Sia  $O$  un qualsiasi punto assegnato di  $\pi \subset \mathbb{E}^3$ . Allora, per ogni scelta degli scalari  $w_i, i = 1, \dots, n$ , verificanti le condizioni:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad w_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

il punto  $Q$  individuato dal vettore posizione rispetto ad  $O$ :

$$Q - O = \sum_{i=1}^n w_i (P_i - O) \tag{6.1}$$

appartiene all'involuppo convesso  $\text{conv}(\Omega)$  dell'insieme  $\Omega$ . L'espressione (6.1) si dice **combinazione lineare convessa** dei vettori  $P_i - O$ , di pesi  $w_i$ .

#### Dimostrazione

Ogni semipiano chiuso in  $\pi$  può essere espresso nella forma:

$$\{P \in \pi : (P - O) \cdot \hat{n} \geq \delta\}$$

per una scelta appropriata del versore  $\hat{n}$ , tangente a  $\pi$ , e dello scalare  $\delta$ . Preso allora un qualsiasi semipiano chiuso contenente  $\Omega$ , dovrà aversi:

$$(P_i - O) \cdot \hat{n} \geq \delta \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

da cui si deduce, moltiplicando membro a membro per i fattori non negativi  $w_i$ :

$$w_i (P_i - O) \cdot \hat{n} \geq w_i \delta \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

e quindi, sommando sull'indice  $i$  e sfruttando la condizione di normalizzazione:

$$\sum_{i=1}^n w_i (P_i - O) \cdot \hat{n} \geq \sum_{i=1}^n w_i \delta = \delta,$$

per cui

$$(Q - O) \cdot \hat{n} \geq \delta.$$

Il punto  $Q$  appartiene pertanto ad ogni semipiano chiuso che contenga  $\Omega$  e quindi anche alla intersezione di tali semipiani, cioè a  $\text{conv}(\Omega)$ .  $\square$

Il precedente lemma 1 può essere invertito, fornendo così una completa caratterizzazione dell'involuppo convesso  $\text{conv}(\Omega)$ . A questo scopo si rendono però necessari alcuni ulteriori risultati preliminari.

## 6.2 Lemma 2. Rappresentazione dei punti del triangolo chiuso.

Siano  $A, B, C$  tre punti non allineati del piano  $\pi$  e  $O$  un punto assegnato a piacere di  $\mathbb{E}^3$ . Allora un qualsiasi punto  $P$  del triangolo chiuso  $ABC$  può sempre individuarsi, ed in un solo modo, per mezzo dell'espressione:

$$P - O = w_1(A - O) + w_2(B - O) + w_3(C - O) \quad (6.2)$$

con pesi  $w_1, w_2, w_3 \in [0, 1]$  tali che

$$1 = w_1 + w_2 + w_3 \quad (6.3)$$

e indipendenti dalla scelta del punto  $O$ .

### Dimostrazione

Se il punto  $P$  viene scelto sulla frontiera del triangolo  $ABC$ , allora  $P$  appartiene ad uno dei lati ed il suo vettore posizione rispetto ad  $O$  si scrive immediatamente nella forma (6.2), con uno dei pesi uguale a zero. Come caso estremo, se  $P$  coincide con uno dei vertici, i tre pesi sono tutti nulli salvo uno. Qualora  $P$  sia un punto interno al triangolo, la retta  $AP$  interseca il lato  $BC$  in un punto  $Q$  e si avranno quindi le relazioni

$$P - O = (1 - t)(A - O) + t(Q - O), \quad \text{con } t = |P - A|/|Q - A|,$$

e

$$Q - O = (1 - s)(B - O) + s(C - O), \quad \text{con } s = |Q - B|/|C - B|,$$

dalle quali si ricava

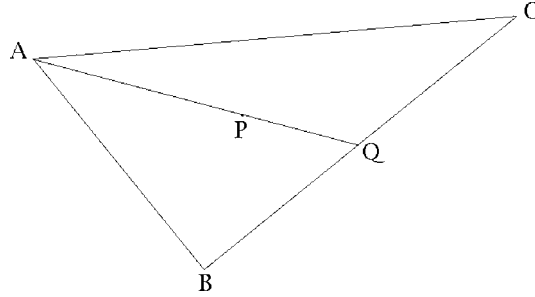
$$\begin{aligned} P - O &= (1 - t)(A - O) + t[(1 - s)(B - O) + s(C - O)] = \\ &= (1 - t)(A - O) + t(1 - s)(B - O) + ts(C - O) \end{aligned} \quad (6.4)$$

che è una espressione della forma (6.2). I pesi:

$$w_1 = 1 - t \quad w_2 = t(1 - s) \quad w_3 = ts$$

sono non negativi e di somma unitaria:

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1 - t + t(1 - s) + ts = 1 .$$



L'unicità dei pesi si verifica per assurdo, supponendo che esista una ulteriore terna di parametri  $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3$  non negativi per i quali si abbia:

$$\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 + \tilde{w}_3 = 1 \quad \text{e} \quad P - O = \tilde{w}_1(A - O) + \tilde{w}_2(B - O) + \tilde{w}_3(C - O) .$$

Se da questa relazione viene sottratta membro a membro la (6.2), si deduce che:

$$0 = (\tilde{w}_1 - w_1)(A - O) + (\tilde{w}_2 - w_2)(B - O) + (\tilde{w}_3 - w_3)(C - O)$$

e quindi — essendo  $\tilde{w}_1 - w_1 + \tilde{w}_2 - w_2 + \tilde{w}_3 - w_3 = 1 - 1 = 0$  —

$$0 = (\tilde{w}_1 - w_1)(A - O) + (\tilde{w}_2 - w_2)(B - O) + (\tilde{w}_3 - w_3)(C - O) - (\tilde{w}_1 - w_1 + \tilde{w}_2 - w_2 + \tilde{w}_3 - w_3)(C - O) \tag{6.5}$$

ovvero, equivalentemente:

$$0 = (\tilde{w}_1 - w_1)(A - C) + (\tilde{w}_2 - w_2)(B - C)$$

relazione che per la lineare indipendenza dei vettori  $A - C$  e  $B - C$  implica:

$$\tilde{w}_1 - w_1 = 0 \quad \tilde{w}_2 - w_2 = 0 .$$

In modo analogo, sostituendo il termine nullo  $(\tilde{w}_1 - w_1 + \tilde{w}_2 - w_2 + \tilde{w}_3 - w_3)(C - O)$  nella (6.5) con  $(\tilde{w}_1 - w_1 + \tilde{w}_2 - w_2 + \tilde{w}_3 - w_3)(B - O)$ , si dimostra che

$$\tilde{w}_1 - w_1 = 0 \quad \tilde{w}_3 - w_3 = 0$$

ed in conclusione

$$\tilde{w}_1 = w_1 \quad \tilde{w}_2 = w_2 \quad \tilde{w}_3 = w_3$$

per cui la decomposizione (6.2) è effettivamente unica.  $\square$

**Dimostrazione alternativa (più diretta)**

Lo stesso risultato può stabilirsi, in modo più costruttivo, con l'argomento seguente. Moltiplicando per  $A - O$  la condizione di normalizzazione (6.3) dei pesi  $w_i$  si ottiene l'equazione vettoriale

$$A - O = w_1(A - O) + w_2(A - O) + w_3(A - O)$$

che, sottratta alla (6.2), porge l'equazione

$$P - A = w_2(B - A) + w_3(C - A)$$

nelle variabili scalari residue  $w_2$  e  $w_3$ . Si elimina l'incognita  $w_3$  moltiplicando vettorialmente membro a membro per  $C - A$

$$(P - A) \wedge (C - A) = [w_2(B - A) + w_3(C - A)] \wedge (C - A) = w_2(B - A) \wedge (C - A)$$

ma, indicato con  $\hat{e}_3$  il versore normale al piano  $ABC$ , dalla definizione di prodotto vettoriale si ha chiaramente che

$$\begin{aligned} (P - A) \wedge (C - A) &= |(P - A) \wedge (C - A)| \hat{e}_3 = 2 \text{area}(\triangle APC) \hat{e}_3 \\ (B - A) \wedge (C - A) &= |(B - A) \wedge (C - A)| \hat{e}_3 = 2 \text{area}(\triangle ABC) \hat{e}_3 \end{aligned}$$

per cui il coefficiente  $w_2$  deve potersi esprimere come rapporto di aree di triangoli

$$w_2 = \frac{\text{area}(\triangle APC)}{\text{area}(\triangle ABC)}$$

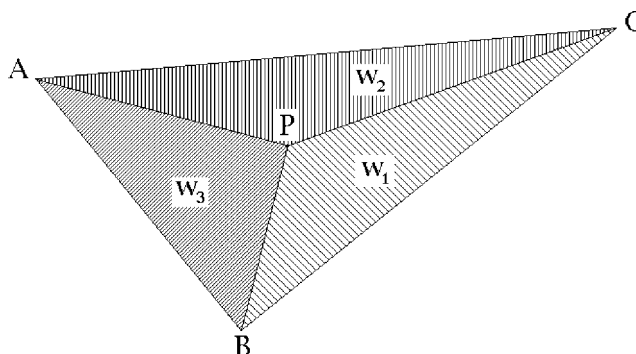
dal quale appare peraltro ovvia la condizione  $w_2 \geq 0$ . In modo analogo si ricavano gli altri coefficienti non negativi:

$$w_1 = \frac{\text{area}(\triangle PBC)}{\text{area}(\triangle ABC)} \quad w_3 = \frac{\text{area}(\triangle ABP)}{\text{area}(\triangle ABC)}$$

dai quali è immediato verificare la proprietà di normalizzazione

$$w_1 + w_2 + w_3 = \frac{\text{area}(\triangle PBC) + \text{area}(\triangle APC) + \text{area}(\triangle ABP)}{\text{area}(\triangle ABC)} = \frac{\text{area}(\triangle ABC)}{\text{area}(\triangle ABC)} = 1.$$

La figura seguente illustra il significato geometrico del risultato ottenuto. I triangoli evidenziati con i diversi tratteggi, e che hanno comune vertice in  $P$ , sono in diretta relazione con i pesi  $w_1, w_2, w_3$ , che infatti si identificano con le relative aree rapportate all'area totale del triangolo  $ABC$ . Si osservi che detti pesi si riferiscono, nell'ordine, ai vertici  $A, B$  e  $C$ .

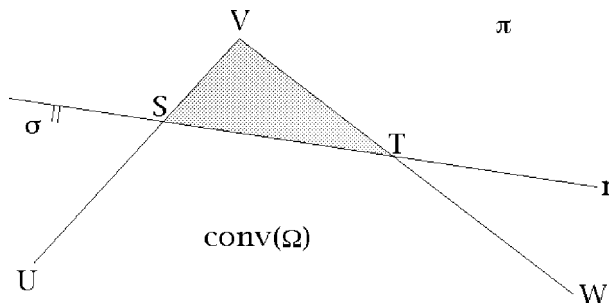


### 6.3 Lemma 3. Involuppo convesso di un insieme finito

L'involuppo convesso di un insieme finito  $\Omega$  è un poligono chiuso e convesso i cui vertici coincidono con opportuni punti di  $\Omega$ .

#### Dimostrazione

Escluso il caso poco interessante di insiemi  $\Omega$  costituiti da un solo punto, per i quali la cardinalità dell'insieme risulta  $\#(\Omega) = 1$ , nella determinazione dell'involuppo convesso di  $\Omega$  ci si può limitare a considerare i semipiani chiusi in  $\pi$  che, oltre a includere  $\Omega$ , presentano almeno due punti di  $\Omega$  sulla loro frontiera — la retta che definisce il semipiano in  $\pi$ . Questi semipiani sono chiaramente in numero finito, per cui la loro intersezione definisce un poligono — chiuso e convesso. Si tratta di verificare che i vertici di questo poligono devono necessariamente essere punti di  $\Omega$ . Sia  $UVW$  un qualsiasi angolo del poligono  $\text{conv}(\Omega)$ . Comunque si tracci una retta  $r$  che intersechi i lati  $VU$  e  $WV$  in due punti  $S$  e  $T$  rispettivamente, il semipiano chiuso  $\sigma$  individuato da  $r$  e non contenente  $V$  **non può** includere tutti i punti di  $\Omega$ , poiché in caso contrario il triangolo  $VST$  non apparterebbe all'involuppo  $\text{conv}(\Omega)$ .



Deve allora esistere un punto  $P \in \Omega$  non appartenente a  $\sigma$ ; d'altra parte è certamente

$P \in \text{conv}(\Omega)$  e quindi:

$$P \in \text{conv}(\Omega) \cap \sigma' \subset \Delta(SVT)$$

essendosi indicato con  $\sigma'$  il semipiano aperto complementare di  $\sigma$  in  $\pi$  e con  $\Delta(SVT)$  il triangolo chiuso di vertici  $S, V, T$ . La retta  $r$  può essere scelta a piacere, in modo che i punti del triangolo  $\Delta(SVT)$  siano arbitrariamente vicini al vertice fisso  $V$ . Nell'ipotesi che  $V \notin \Omega$  ciò costituisce un evidente assurdo, dal momento che non risulterebbe possibile individuare alcun punto  $P \in \Delta(SVT) \cap \Omega$ .  $\square$

All'insieme finito  $\Omega$  di punti del piano  $\pi$  è possibile associare l'insieme  $\text{Triang}(\Omega)$ , definito come l'unione di tutti i triangoli chiusi — propri o degeneri, qualora si riducano ad un segmento — aventi come vertici tre punti di  $\Omega$ :

$$\text{Triang}(\Omega) := \bigcup_{A,B,C \in \Omega} \{P \in \mathbb{E}^3 : P - O = w_1(A - O) + w_2(B - O) + w_3(C - O), \\ w_1, w_2, w_3 \geq 0, w_1 + w_2 + w_3 = 1, O \in \mathbb{E}^3\}.$$

Che  $\text{Triang}(\Omega)$  sia un sottoinsieme di  $\pi$  è un'ovvia conseguenza del fatto che tutti i triangoli chiusi  $ABC$  con  $A, B, C \in \pi$  sono completamente inclusi nello stesso piano  $\pi$ . Le terne di punti di  $\Omega$  sono inoltre in numero finito, sicché  $\text{Triang}(\Omega)$  risulta chiuso in quanto unione di un numero finito di insiemi chiusi.

Dal lemma 3 si ricava il seguente:

### 6.4 Lemma 4. Inclusione di $\text{conv}(\Omega)$ nell'unione dei triangoli $\text{Triang}(\Omega)$ .

L'involuppo convesso dell'insieme finito  $\Omega \subset \pi$  è sempre incluso nell'unione  $\text{Triang}(\Omega)$  dei triangoli di  $\Omega$ .

#### Dimostrazione

Basta osservare che per il lemma 3 l'involuppo  $\text{conv}(\Omega)$  è un poligono i cui vertici appartengono ad  $\Omega$ , e può dunque scriversi come unione di triangoli chiusi aventi come vertici i vertici del poligono  $\text{conv}(\Omega)$ . Tale unione risulta evidentemente inclusa, per definizione, nell'insieme  $\text{Triang}(\Omega)$ .  $\square$

Si può ora dimostrare il lemma di inversione del lemma 1:

### 6.5 Lemma 5. Caratterizzazione dell'involuppo convesso in termini di combinazioni lineari convesse

Sia  $O$  un qualsiasi punto assegnato di  $\mathbb{E}^3$  ed  $\Omega \subset \pi$  un sottoinsieme finito del piano  $\pi$ . Per un qualunque punto  $Q \in \text{conv}(\Omega)$  è allora sempre possibile individuare — in generale non univocamente — un insieme di pesi  $w_i$  tali che:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad w_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

per i quali si abbia:

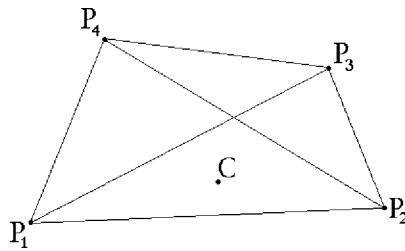
$$Q - O = \sum_{i=1}^n w_i (P_i - O) . \tag{6.6}$$

**Dimostrazione**

Poiché  $Q \in \text{conv}(\Omega) \subseteq \text{Triang}(\Omega)$ , esisterà almeno una terna di punti  $A, B, C \in \Omega$  tale che  $Q$  appartenga al triangolo — eventualmente degenerare —  $ABC$ . Una rappresentazione della forma (6.6), con tutti i pesi nulli salvo quelli relativi ai punti  $A, B, C$ , segue allora dal lemma 2.  $\square$

**6.6 Non univocità della rappresentazione dei punti di  $\text{conv}(\Omega)$  mediante combinazioni lineari convesse**

È facile convincersi che in generale la rappresentazione di un punto  $Q \in \text{conv}(\Omega)$  come combinazione lineare convessa dei punti di  $\Omega$  non risulta unica. Tale è il caso, ad esempio, del punto  $C$  per la base d'appoggio quadrangolare  $P_1, P_2, P_3, P_4$  illustrata nella figura seguente.



Poiché infatti  $C$  appartiene tanto all'interno del triangolo  $P_1P_2P_3$  quanto all'interno del triangolo  $P_1P_2P_4$ , l'equazione (6.4) autorizza a concludere che per appropriate scelte dei pesi  $w_1, w_2, w_3 > 0, w_4 = 0$  e  $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_4 > 0, \tilde{w}_3 = 0$  debbano valere le relazioni lineari

$$C - O = \sum_{i=1}^4 w_i (P_i - O) \quad C - O = \sum_{i=1}^4 \tilde{w}_i (P_i - O) .$$

Ne segue che esistono almeno due diverse combinazioni lineari convesse dei punti d'appoggio  $P_1, P_2, P_3, P_4$  che individuano lo stesso centro  $C$ , dal momento che i vettori

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) \quad (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3, \tilde{w}_4)$$

differiscono certamente per le ultime due componenti.

In conclusione, i lemmi 1 e 5 consentono di caratterizzare l'involuppo convesso  $\text{conv}(\Omega)$  dell'insieme finito  $\Omega$  come l'insieme di tutte le possibili combinazioni convesse dei punti dello stesso insieme  $\Omega$ . L'estensione del teorema a insiemi finiti di  $\mathbb{R}^3$  — cioè dello spazio anziché del piano — è immediata.

## 7. Estensione a corpi con un numero infinito di punti

La caratterizzazione fornita alla sezione 5 per l'equilibrio di un corpo rigido pesante costituito da un numero finito di punti materiali ed appoggiato ad un piano orizzontale può essere estesa ad includere anche il caso di un corpo rigido continuo o composto da una infinità di punti materiali.

In tal caso infatti, nell'assunto che la posizione del baricentro sia comunque definibile, e con esso anche il relativo centro di pressione, la base d'appoggio del corpo sul piano  $\pi$  potrà consistere in un generico sottoinsieme chiuso<sup>(1)</sup>  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , non necessariamente finito, di cui si dovrà considerare il relativo inviluppo convesso  $\text{conv}(\Omega)$ . Questo, essendo riferito ad un insieme infinito, **non potrà più essere identificato con un poligono**, ma l'appartenenza ad esso del centro di pressione costituirà comunque un'ovvia condizione necessaria per l'equilibrio del sistema, come nel caso di un numero finito di punti. La sufficienza della condizione segue invece dal seguente teorema di C. Carathéodory, applicato al sottoinsieme  $\text{conv}(\Omega) \subset \mathbb{R}^2$ , teorema che permette di applicare anche nel caso di un  $\text{conv}(\Omega)$  infinito lo stesso argomento già illustrato nella sezione 4 — basta applicare l'equazione (4.1) ad un **appropriato triangolo di punti della base d'appoggio**  $\Omega$ , che contenga il centro di pressione  $C$  —

### Teorema di Carathéodory dell'inviluppo convesso

Per  $d \in \mathbb{N}$  assegnato si considerino un qualsiasi sottoinsieme chiuso<sup>(1)</sup>  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ed il relativo inviluppo convesso  $\text{conv}(\Omega) \subset \mathbb{R}^d$ . Allora  $\forall C \in \text{conv}(\Omega)$  esiste un sottoinsieme

$$\Omega_C \subset \Omega$$

costituito da non più di  $d+1$  punti, tale che  $C$  appartiene all'inviluppo convesso  $\text{conv}(\Omega_C)$  di  $\Omega_C$ .

È allora evidente che nel caso di  $d = 2$ , se il centro di pressione  $C$  giace nell'inviluppo convesso  $\text{conv}(\Omega)$  della base d'appoggio  $\Omega$ , allora  $C$  appartiene sempre all'inviluppo convesso di  $2 + 1 = 3$  punti appropriati  $P_1, P_2, P_3$  di  $\Omega$ , e dunque al triangolo che ha tali punti come vertici. Risulta perciò possibile esprimere il vettore posizione di  $C$  per mezzo di una combinazione lineare convessa del tipo (4.1), sia pure a tre soli elementi

$$C - O = w_1(P_1 - O) + w_2(P_2 - O) + w_3(P_3 - O).$$

Ciò basta a ripetere l'argomento di cui alla sezione 4 ed a provare, perciò, il risultato.

---

<sup>(1)</sup> La richiesta di considerare insiemi  $\Omega$  chiusi segue dalla particolare definizione che si è introdotta per l'inviluppo convesso, come intersezione di tutti i semispazi chiusi contenenti l'insieme stesso. Qualora si definisse  $\text{conv}(\Omega)$  come il più piccolo insieme convesso contenente  $\Omega$ , la necessità di tale richiesta verrebbe meno.

## 8. Condizione dei vincoli ideali per un corpo rigido appoggiato

Vale la pena di sottolineare come tutta la discussione relativa all'equilibrio del corpo rigido appoggiato sia stata condotta assumendo che le reazioni vincolari esplicabili dai vincoli siano tutte e sole quelle compatibili con le condizioni (1.1), (1.2) e (1.3). In nessun caso si è fatto riferimento al concetto di idealità dei vincoli, né a maggior ragione ci si è preoccupati di accertare se le reazioni vincolari del tipo (1.1), (1.2), (1.3) siano in una qualche relazione con la condizione dei vincoli ideali. In effetti si dimostra che

*il corpo rigido appoggiato sul piano orizzontale  $\pi$ , qualora le reazioni vincolari esplicabili siano tutte e soltanto quelle date da (1.1), (1.2) e (1.3), costituisce di fatto un sistema a vincoli ideali.*

La verifica di questo asserto, tuttavia, risulta tutt'altro che banale.

### 8.1 Condizione dei vincoli ideali

Se  $\Omega \subset \pi$  indica la base d'appoggio nella configurazione considerata e si identifica  $O$  con un punto di  $\Omega$  o dell'intersezione fra lo spazio solidale a  $\mathbb{S}$  e il piano d'appoggio  $\pi$ , la velocità virtuale del generico punto  $P_i \in \mathbb{S}$  è data dall'espressione generale dell'atto di moto rigido

$$\vec{v}_i = \vec{v} + \vec{\omega} \wedge (P_i - O)$$

per ogni scelta dei vettori  $\vec{v}, \vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$  che individuino una componente verticale positiva o nulla del vettore velocità istantanea relativo a tutti i punti della base d'appoggio:

$$\forall \vec{v}, \vec{\omega} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad [\vec{v} + \vec{\omega} \wedge (P_i - O)] \cdot \hat{e}_3 \geq 0 \quad \forall P_i \in \Omega.$$

Per definizione, il sistema si dirà a vincoli ideali se le reazioni vincolari  $\vec{\Phi}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , esplicabili dai vincoli nella configurazione assegnata  $P_0$ , con base d'appoggio  $\Omega$ , sono tutte e soltanto quelle la cui potenza virtuale risulta non negativa per qualsiasi atto di moto virtuale relativo alla stessa configurazione, ossia:

$$\sum_{i=1}^N [\vec{v} + \vec{\omega} \wedge (P_i - O)] \cdot \vec{\Phi}_i \geq 0 \tag{8.1}$$

$$\forall \vec{v}, \vec{\omega} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad [\vec{v} + \vec{\omega} \wedge (P_i - O)] \cdot \hat{e}_3 \geq 0 \quad \forall P_i \in \Omega.$$

Per via delle ovvie identità

$$\sum_{i=1}^N \vec{v} \cdot \vec{\Phi}_i = \vec{v} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{\Phi}_i = \vec{v} \cdot \vec{R}^\phi$$

$$\sum_{i=1}^N \vec{\omega} \wedge (P_i - O) \cdot \vec{\Phi}_i = \sum_{i=1}^N \vec{\omega} \cdot (P_i - O) \wedge \vec{\Phi}_i = \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge \vec{\Phi}_i = \vec{\omega} \cdot \vec{M}_O^\phi,$$

la condizione di idealità (8.1) si esprime in termini del solo risultante  $\vec{R}^\phi$  e momento risultante  $\vec{M}_O^\phi$  in  $O$  delle reazioni vincolari esplicabili, assumendo la forma:

$$\vec{v} \cdot \vec{R}^\phi + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_O^\phi \geq 0 \quad \forall \vec{v}, \vec{\omega} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad [\vec{v} + \vec{\omega} \wedge (P_i - O)] \cdot \hat{e}_3 \geq 0 \quad \forall P_i \in \Omega. \tag{8.2}$$

## 8.2 Forma semplificata della condizione dei vincoli ideali

La condizione (8.2) dei vincoli ideali si può semplificare scegliendo convenientemente i vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{\omega}$ . Vettori che soddisfano la prescrizione

$$[\vec{v} + \vec{\omega} \wedge (P_i - O)] \cdot \hat{e}_3 \geq 0 \quad \forall P_i \in \Omega$$

sono infatti certamente:

$$\vec{v} = v_1 \hat{e}_1 + v_2 \hat{e}_2 \quad \text{e} \quad \vec{\omega} = \omega_3 \hat{e}_3 \quad \forall v_1, v_2, \omega_3 \in \mathbb{R}$$

in modo che per i risultanti  $\vec{R}^\phi$  e  $\vec{M}_O^\phi$  deve valere

$$v_1 \hat{e}_1 \cdot \vec{R}^\phi + v_2 \hat{e}_2 \cdot \vec{R}^\phi + \omega_3 \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_O^\phi \geq 0 \quad v_1, v_2, \omega_3 \in \mathbb{R}$$

e dunque, come è immediato verificare ragionando per assurdo,

$$\hat{e}_1 \cdot \vec{R}^\phi = \hat{e}_2 \cdot \vec{R}^\phi = \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_O^\phi = 0.$$

La condizione dei vincoli ideali si riduce perciò a richiedere che

$$\hat{e}_1 \cdot \vec{R}^\phi = \hat{e}_2 \cdot \vec{R}^\phi = \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_O^\phi = 0 \quad (8.3)$$

e che

$$v_3 \hat{e}_3 \cdot \vec{R}^\phi + \omega_1 \hat{e}_1 \cdot \vec{M}_O^\phi + \omega_2 \hat{e}_2 \cdot \vec{M}_O^\phi \geq 0$$

$$\forall v_3, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R} \quad : \quad [v_3 \hat{e}_3 + (\omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2) \wedge (P_i - O)] \cdot \hat{e}_3 \geq 0 \quad \forall P_i \in \Omega,$$

la specifica delle componenti  $v_1$ ,  $v_2$  ed  $\omega_3$  in  $\mathbb{R}$  non essendo più necessaria.

## 8.3 Condizione semplificata dei vincoli ideali espressa mediante il prodotto scalare

Si osservi che il primo membro dell'ultima disequazione si può riscrivere nella forma equivalente

$$\begin{aligned} [v_3 \hat{e}_3 + (\omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2) \wedge (P_i - O)] \cdot \hat{e}_3 &= v_3 + (\omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2) \wedge (P_i - O) \cdot \hat{e}_3 = \\ &= v_3 + (\omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2) \cdot (P_i - O) \wedge \hat{e}_3 = \\ &= (\omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2) \cdot (P_i - O) \wedge \hat{e}_3 + v_3 \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3 = \\ &= (\omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + v_3 \hat{e}_3) \cdot [(P_i - O) \wedge \hat{e}_3 + \hat{e}_3] \end{aligned}$$

e che in modo analogo si perviene all'identità

$$\begin{aligned} v_3 \hat{e}_3 \cdot \vec{R}^\phi + \omega_1 \hat{e}_1 \cdot \vec{M}_O^\phi + \omega_2 \hat{e}_2 \cdot \vec{M}_O^\phi &= \\ = \omega_1 \hat{e}_1 \cdot \vec{M}_O^\phi + \omega_2 \hat{e}_2 \cdot \vec{M}_O^\phi + v_3 \hat{e}_3 \cdot \vec{R}^\phi &= \\ = (\omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + v_3 \hat{e}_3) \cdot [\hat{e}_1 \cdot \vec{M}_O^\phi \hat{e}_1 + \hat{e}_2 \cdot \vec{M}_O^\phi \hat{e}_2 + \hat{e}_3 \cdot \vec{R}^\phi \hat{e}_3]. \end{aligned}$$

Introdotti allora i vettori di  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}\vec{\mu} &= \hat{e}_1 \cdot \vec{M}_O^\phi \hat{e}_1 + \hat{e}_2 \cdot \vec{M}_O^\phi \hat{e}_2 + \hat{e}_3 \cdot \vec{R}^\phi \hat{e}_3 \\ \vec{V} &= \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3 \\ \vec{K}_i &= (P_i - O) \wedge \hat{e}_3 + \hat{e}_3 \quad \forall P_i \in \Omega,\end{aligned}$$

la condizione dei vincoli ideali per i risultanti ed i momenti risultanti esplicabili dal sistema si esprime nella forma sintetica:

$$\vec{\mu} \text{ esplicabile} \quad \iff \quad \vec{\mu} \cdot \vec{V} \geq 0 \quad \forall \vec{V} \in \mathbb{R}^3 \text{ tale che } \vec{K}_i \cdot \vec{V} \geq 0 \quad \forall P_i \in \Omega \quad (8.4)$$

unitamente alla (8.3).

## 8.4 Risultanti e momenti risultanti delle reazioni esplicabili per i vincoli ideali

È dato fornire una caratterizzazione completa ed esplicita dei risultanti e momenti risultanti che le reazioni vincolari agenti sul sistema possono produrre. I vettori  $\vec{\mu}$  che soddisfano la condizione (8.4) possono infatti essere scritti in forma esplicita, facendo uso del seguente

### Lemma

Per ogni famiglia finita di vettori  $\vec{K}_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, p$ , l'insieme

$$\mathcal{C} = \{ \vec{\mu} \in \mathbb{R}^n : \vec{\mu} \cdot \vec{V} \geq 0 \quad \forall \vec{V} \in \mathbb{R}^n : \vec{V} \cdot \vec{K}_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p \}$$

è un cono convesso chiuso di  $\mathbb{R}^n$  e si identifica con l'insieme delle combinazioni lineari a coefficienti non negativi degli stessi vettori  $\vec{K}_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ :

$$\mathcal{C} = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{K}_i, \quad \lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p \right\}.$$

### Cenno della dimostrazione

Che  $\mathcal{C}$  sia un insieme chiuso in  $\mathbb{R}^n$  è evidente dalla continuità del prodotto scalare. Se infatti  $\vec{\mu}^*$  è un punto della chiusura di  $\mathcal{C}$  esiste per definizione una successione  $(\vec{\mu}_h)_{h \in \mathbb{N}}$  di punti di  $\mathcal{C}$  tale che

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \vec{\mu}_h = \vec{\mu}^*$$

ma poichè  $\vec{\mu}_h \in \mathcal{C} \quad \forall h \in \mathbb{N}$  deve aversi altresì

$$\vec{\mu}_h \cdot \vec{V} \geq 0 \quad \forall \vec{V} \in \mathbb{R}^n : \vec{V} \cdot \vec{K}_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p$$

e quindi, passando al limite,

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \vec{\mu}_h \cdot \vec{V} \geq 0 \quad \forall \vec{V} \in \mathbb{R}^n : \vec{V} \cdot \vec{K}_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p$$

ossia

$$\vec{\mu}^* \cdot \vec{V} \geq 0 \quad \forall \vec{V} \in \mathbb{R}^n : \vec{V} \cdot \vec{K}_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p$$

dal che si riconosce che  $\vec{\mu}^* \in \mathcal{C}$ , per cui  $\mathcal{C}$  si identifica con la propria chiusura, come affermato.

D'altra parte, è immediato convincersi che il sottoinsieme  $\mathcal{C}$  costituisce un *cono convesso* di  $\mathbb{R}^n$ , essendo invariante per combinazioni lineari a coefficienti non negativi:

$$\begin{aligned} & \vec{\mu}, \vec{\nu} \in \mathcal{C} \\ & \Downarrow \\ & \vec{\mu} \cdot \vec{V} \geq 0, \quad \vec{\nu} \cdot \vec{V} \geq 0 \quad \forall \vec{V} \in \mathbb{R}^n : \vec{V} \cdot \vec{K}_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p \\ & \Downarrow \\ & \alpha \vec{\mu} \cdot \vec{V} + \beta \vec{\nu} \cdot \vec{V} \geq 0, \quad \forall \vec{V} \in \mathbb{R}^n : \vec{V} \cdot \vec{K}_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p \quad \forall \alpha, \beta \geq 0 \\ & \Downarrow \\ & (\alpha \vec{\mu} + \beta \vec{\nu}) \cdot \vec{V} \geq 0, \quad \forall \vec{V} \in \mathbb{R}^n : \vec{V} \cdot \vec{K}_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p \quad \forall \alpha, \beta \geq 0 \\ & \Downarrow \\ & \alpha \vec{\mu} + \beta \vec{\nu} \in \mathcal{C} \quad \forall \alpha, \beta \geq 0. \end{aligned}$$

Infine, i vettori  $\vec{V} \in \mathbb{R}^n$  che soddisfano la condizione

$$\vec{V} \cdot \vec{K}_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p$$

verificano anche le singole disequazioni  $\vec{V} \cdot \vec{K}_i \geq 0$  per ogni  $i = 1, \dots, p$  assegnato, ed è perciò evidente che tutti i vettori  $\vec{K}_i$  appartengono all'insieme  $\mathcal{C}$ :

$$\vec{K}_i \in \mathcal{C} \quad \forall i = 1, \dots, p.$$

Combinando le affermazioni precedenti, si conclude che  $\mathcal{C}$  deve comprendere tutte le combinazioni lineari a coefficienti non negativi dei vettori  $\vec{K}_i$ :

$$\left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{K}_i, \quad \lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p \right\} \subseteq \mathcal{C}.$$

Un argomento più complesso consente di provare l'inclusione inversa.

Posto infatti

$$\mathcal{C}_{\vec{K}_1 \dots \vec{K}_p} = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{K}_i, \quad \lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p \right\}$$

è immediato verificare, con gli stessi argomenti di prima, che questo sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  è un cono convesso chiuso, noto in analisi convessa come *cono poliedrico generato dai vettori*  $\vec{K}_1, \dots, \vec{K}_p$ . Si può allora definire il cosiddetto *cono duale* di  $\mathcal{C}_{\vec{K}_1 \dots \vec{K}_p}$ :

$$\mathcal{C}_{\vec{K}_1 \dots \vec{K}_p}^* = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n : \vec{v} \cdot \vec{x} \leq 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{C}_{\vec{K}_1 \dots \vec{K}_p} \right\}$$

che si esprime nella forma equivalente

$$\mathcal{C}_{\vec{K}_1 \dots \vec{K}_p}^* = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n : \vec{v} \cdot \vec{K}_i \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p \right\}. \quad (8.5)$$

Per convincersi dell'equivalenza basta osservare che se

$$\vec{v} \cdot \vec{x} \leq 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{C}_{\vec{K}_1 \dots \vec{K}_p}$$

deve allora aversi, in particolare,

$$\vec{v} \cdot \vec{K}_i \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p;$$

se per contro

$$\vec{v} \cdot \vec{K}_i \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p,$$

risulta allora

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{v} \cdot \vec{K}_i \leq 0 \quad \forall \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, p,$$

e quindi

$$\vec{v} \cdot \vec{x} \leq 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{C}_{\vec{K}_1 \dots \vec{K}_p}.$$

Dalla forma (8.5) è facile verificare, con gli argomenti già visti, che *il cono duale è un cono convesso chiuso* in  $\mathbb{R}^n$ .

Non rimane che considerare il *duale del cono duale*  $\mathcal{C}_{\vec{K}_1 \dots \vec{K}_p}^*$ :

$$\left( \mathcal{C}_{\vec{K}_1 \dots \vec{K}_p}^* \right)^* = \left\{ \vec{\mu} \in \mathbb{R}^n : \vec{\mu} \cdot \vec{v} \leq 0 \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{C}_{\vec{K}_1 \dots \vec{K}_p}^* \right\}$$

ossia, sostituendo la (8.5),

$$\left( \mathcal{C}_{\vec{K}_1 \dots \vec{K}_p}^* \right)^* = \left\{ \vec{\mu} \in \mathbb{R}^n : \vec{\mu} \cdot \vec{v} \leq 0 \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n : \vec{v} \cdot \vec{K}_i \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p \right\}$$

insieme che equivale a

$$\left( \mathcal{C}_{\vec{K}_1 \dots \vec{K}_p}^* \right)^* = \left\{ \vec{\mu} \in \mathbb{R}^n : -\vec{\mu} \cdot \vec{v} \geq 0 \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n : -\vec{v} \cdot \vec{K}_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p \right\}$$

e mediante la sostituzione  $-\vec{v} = \vec{V}$  si identifica con il cono  $\mathcal{C}$

$$\left( \mathcal{C}_{\vec{K}_1 \dots \vec{K}_p}^* \right)^* = \left\{ \vec{\mu} \in \mathbb{R}^n : \vec{\mu} \cdot \vec{V} \geq 0 \quad \forall \vec{V} \in \mathbb{R}^n : \vec{V} \cdot \vec{K}_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p \right\} = \mathcal{C}.$$

Un teorema fondamentale dell'analisi convessa, noto come *principio di dualità*, afferma tuttavia che *un cono convesso chiuso di  $\mathbb{R}^n$  coincide con il duale del proprio duale*, per cui

$$\left( \mathcal{C}_{\vec{K}_1 \dots \vec{K}_p}^* \right)^* = \mathcal{C}_{\vec{K}_1 \dots \vec{K}_p}$$

e di conseguenza  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\vec{K}_1 \dots \vec{K}_p}$ , come richiesto.  $\square$

Il precedente lemma, applicato alla condizione (8.4), individua così le componenti non banali di risultante e momento risultante delle reazioni vincolari

$$\hat{e}_1 \cdot \vec{M}_O^\phi \hat{e}_1 + \hat{e}_2 \cdot \vec{M}_O^\phi \hat{e}_2 + \hat{e}_3 \cdot \vec{R}^\phi \hat{e}_3 = \vec{\mu} = \sum_{P_i \in \Omega} \lambda_i \vec{K}_i = \sum_{P_i \in \Omega} \lambda_i [(P_i - O) \wedge \hat{e}_3 + \hat{e}_3]$$

per qualsiasi scelta dei coefficienti  $\lambda_i \geq 0$ , uno per ogni punto d'appoggio  $P_i$ . Basta infine proiettare lungo i versori di base, e ricordare le (8.3) per ottenere la completa caratterizzazione delle componenti richieste:

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 \cdot \vec{M}_O^\phi &= \hat{e}_1 \cdot \sum_{P_i \in \Omega} (P_i - O) \wedge \lambda_i \hat{e}_3 \\ \hat{e}_2 \cdot \vec{M}_O^\phi &= \hat{e}_2 \cdot \sum_{P_i \in \Omega} (P_i - O) \wedge \lambda_i \hat{e}_3 \\ \hat{e}_3 \cdot \vec{R}^\phi &= \sum_{P_i \in \Omega} \lambda_i && \forall \lambda_i \geq 0 \\ \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_O^\phi &= 0 \\ \hat{e}_1 \cdot \vec{R}^\phi &= 0 \\ \hat{e}_2 \cdot \vec{R}^\phi &= 0. \end{aligned}$$

Risultante e momento risultante delle reazioni vincolari esplicabili sono pertanto tutti e soltanto i vettori della forma

$$\vec{R}^\phi = \sum_{P_i \in \Omega} \lambda_i \hat{e}_3 \quad \vec{M}_O^\phi = \sum_{P_i \in \Omega} (P_i - O) \wedge \lambda_i \hat{e}_3 \quad \forall \lambda_i \geq 0.$$

## 8.5 Equivalenza con il modello del piano orizzontale rigido

La conclusione precedente assicura che risultante e momento risultante delle reazioni vincolari esplicabili, nell'ipotesi dei vincoli ideali, sono esattamente gli stessi del modello del piano orizzontale rigido. Infatti, mentre le reazioni vincolari interne non danno alcun contributo, le reazioni vincolari esterne sono applicate ai soli punti  $P_i$  della base d'appoggio  $\Omega$  e dirette verticalmente verso l'alto

$$\mu_i \hat{e}_3 \quad \mu_i \geq 0 \quad \forall P_i \in \Omega,$$

per cui i risultanti ed i momenti risultanti delle reazioni vincolari sono

$$\vec{R}^\phi = \sum_{P_i \in \Omega} \mu_i \hat{e}_3 \quad \vec{M}_O^\phi = \sum_{P_i \in \Omega} (P_i - O) \wedge \mu_i \hat{e}_3 \quad \forall \mu_i \geq 0.$$

## 9. Modello del suolo debolmente cedevole

Si è visto, al termine della sezione 3, che il problema dell'equilibrio del corpo rigido appoggiato risulta in generale staticamente indeterminato. Ciò è conseguenza della supposta indeformabilità del corpo e del relativo piano d'appoggio, una condizione che non può considerarsi troppo verosimile. Nella realtà si deve ritenere che la gravità induca piccole deformazioni tanto nel corpo quanto principalmente nel piano d'appoggio. Una approssimazione più ragionevole, che vada al di là del semplice modello rigido, si può allora formulare nei termini seguenti:

- (i) si assume che in ogni punto d'appoggio  $P_i$  il piano orizzontale subisca un piccolo "cedimento" verticale e che la reazione vincolare esterna  $\vec{\Phi}_i^{\text{est}}$  corrispondente abbia intensità proporzionale all'entità di tale deformazione. La reazione viene dunque interpretata come una sollecitazione di tipo elastico. Convenendo che il piano d'appoggio sia omogeneo e che quindi le sue proprietà elastiche siano le stesse in ogni suo punto, la reazione vincolare si esprime come

$$\vec{\Phi}_i^{\text{est}} = -kz_i \hat{e}_3$$

dove  $z_i \leq 0$  indica la quota del punto d'appoggio e  $k$  una sorta di costante elastica del piano d'appoggio — la stessa per tutti i punti. Si noti che soltanto quote negative o nulle, corrispondenti ad uno "sprofondamento" del punto d'appoggio rispetto al piano orizzontale  $Oxy$  e quindi ad una reazione vincolare diretta verso l'alto, hanno significato;

- (ii) si ammette che i punti della base di appoggio  $\Omega$  si mantengano comunque allineati su un piano lievemente inclinato rispetto a  $Oxy$ , di equazione

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma$$

con  $\alpha, \beta, \gamma$  costanti opportune. Per tutti i punti  $P_i$  della base d'appoggio  $\Omega$ , di coordinate rispettive  $(x_i, y_i, z_i)$ , dovrà risultare

$$z_i = \alpha x_i + \beta y_i + \gamma \leq 0$$

in modo che le reazioni vincolari esplicabili si riducono a

$$\vec{\Phi}_i^{\text{est}} = -k(\alpha x_i + \beta y_i + \gamma) \hat{e}_3 \quad P_i \in \Omega;$$

- (iii) per le reazioni vincolari interne si lascia inalterata l'ipotesi che vuole esplicabile dai vincoli qualsiasi sistema di reazioni agenti sui punti del corpo rigido i cui risultante e momento risultante siano nulli.

L'ipotesi di omogeneità del piano d'appoggio permette così di caratterizzare il sistema delle reazioni vincolari esterne per mezzo di tre sole costanti reali  $(a, b, c) = -k(\alpha, \beta, \gamma)$ , dette **coefficienti di struttura** del modello:

$$\vec{\Phi}_i^{\text{est}} = (ax_i + by_i + c) \hat{e}_3 \quad \forall P_i \in \Omega \quad (9.1)$$

con la condizione supplementare che si abbia

$$ax_i + by_i + c \geq 0 \quad \forall P_i \in \Omega.$$

In definitiva, il modello di piccola cedevolezza del piano orizzontale  $Oxy$  costituisce un caso particolare del modello a piano rigido considerato nelle sezioni precedenti: il sistema delle reazioni vincolari esterne non è più individuato dalle  $\#\Omega$  componenti verticali arbitrarie  $\mu_i \geq 0$ , ma dai tre soli coefficienti di struttura  $a, b, c$ . È questa drastica riduzione del numero di incognite che rende possibile la determinazione di tutte le reazioni vincolari agenti, all'equilibrio, sul corpo rigido e riduce il problema ad una forma **staticamente determinata**.

## 9.1 Condizione necessaria per l'equilibrio

Si supponga che la configurazione  $P_0$  del sistema sia di equilibrio, cioè che sia possibile realizzare la quiete in  $P_0$  applicando soltanto reazioni vincolari consentite dai vincoli (la quiete in  $P_0$  è un moto naturale del sistema). Il centro di pressione deve allora soddisfare una precisa condizione, che risulta un poco più complessa rispetto a quella considerata per il modello del piano d'appoggio perfettamente rigido.

### 9.1.1 Coefficienti di struttura all'equilibrio

Per la quiete in  $P_0$  il postulato delle reazioni vincolari impone che  $\forall i = 1, \dots, N$  si abbia

$$\vec{\Phi}_i^{\text{int}} + \vec{\Phi}_i^{\text{est}} - m_i g \hat{e}_3 = 0$$

sicché il moto risulta naturale se e soltanto se le reazioni vincolari esterne sono del tipo

$$\vec{\Phi}_i^{\text{est}} = \begin{cases} (ax_i + by_i + c) \hat{e}_3, & ax_i + by_i + c \geq 0, \quad \text{se } P_i \in \Omega \\ 0 & \text{se } P_i \notin \Omega \end{cases}$$

mentre quelle interne hanno risultante e momento risultante nulli. Nella fattispecie, si ha

$$\vec{\Phi}_i^{\text{int}} = m_i g \hat{e}_3 - \vec{\Phi}_i^{\text{est}}$$

in modo che la condizione di risultante nullo si traduce nell'equazione vettoriale

$$0 = \sum_{i=1}^N \vec{\Phi}_i^{\text{int}} = mg \hat{e}_3 - \sum_{P_i \in \Omega} (ax_i + by_i + c) \hat{e}_3$$

la cui unica componente non banale è quella lungo l'asse verticale

$$mg - \sum_{P_i \in \Omega} (ax_i + by_i + c) = 0$$

mentre le componenti lungo  $\hat{e}_1$  ed  $\hat{e}_2$  si riducono ad inutili identità  $0 = 0$ . Analogamente, la condizione di momento risultante nullo si scrive

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge \vec{\Phi}_i^{\text{int}} = \\
 &= \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge m_i g \hat{e}_3 - \sum_{P_i \in \Omega} (x_i \hat{e}_1 + y_i \hat{e}_2 + z_i \hat{e}_3) \wedge (ax_i + by_i + c) \hat{e}_3 = \\
 &= mg(G - O) \wedge \hat{e}_3 - \sum_{P_i \in \Omega} (x_i \hat{e}_1 + y_i \hat{e}_2) \wedge \hat{e}_3 (ax_i + by_i + c) = \\
 &= mg(y_G \hat{e}_1 - x_G \hat{e}_2) - \sum_{P_i \in \Omega} (y_i \hat{e}_1 - x_i \hat{e}_2) (ax_i + by_i + c)
 \end{aligned}$$

in termini dell'ascissa  $x_G$  e dell'ordinata  $y_G$  del centro di pressione — ovvero del baricentro. Le proiezioni lungo  $\hat{e}_1$  e lungo  $\hat{e}_2$  sono le sole relazioni scalari significative corrispondenti a tale equazione vettoriale. Se la configurazione  $P_0$  è di equilibrio, il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases}
 a \sum_{P_i \in \Omega} x_i^2 + b \sum_{P_i \in \Omega} x_i y_i + c \sum_{P_i \in \Omega} x_i = mg x_G \\
 a \sum_{P_i \in \Omega} x_i y_i + b \sum_{P_i \in \Omega} y_i^2 + c \sum_{P_i \in \Omega} y_i = mg y_G \\
 a \sum_{P_i \in \Omega} x_i + b \sum_{P_i \in \Omega} y_i + c \# \Omega = mg
 \end{cases} \quad (9.2)$$

deve dunque ammettere una soluzione  $(a, b, c)$  tale che

$$ax_i + by_i + c \geq 0 \quad \forall P_i \in \Omega,$$

in modo che non soltanto quelle interne ma *anche le reazioni vincolari esterne sono esplicabili dai vincoli*.

### 9.1.2 Calcolo dei coefficienti di struttura

Si verifica facilmente che, *qualora i punti della base d'appoggio  $\Omega$  non siano allineati, la soluzione del sistema (9.2) esiste sempre ed è unica*. Il caso alternativo, del corpo rigido appoggiato su un “coltello” di punti allineati, non è fisicamente rilevante.

A questo scopo, basta riscrivere l'equazione (9.2) nella forma matriciale

$$S \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = mg \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9.3)$$

introducendo la matrice  $S$  definita da

$$S = \begin{pmatrix} \sum_{P_i \in \Omega} x_i^2 & \sum_{P_i \in \Omega} x_i y_i & \sum_{P_i \in \Omega} x_i \\ \sum_{P_i \in \Omega} x_i y_i & \sum_{P_i \in \Omega} y_i^2 & \sum_{P_i \in \Omega} y_i \\ \sum_{P_i \in \Omega} x_i & \sum_{P_i \in \Omega} y_i & \sum_{P_i \in \Omega} 1 \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

e mostrando che questa risulta sempre invertibile per punti d'appoggio non allineati. La matrice  $S$  appare chiaramente simmetrica; basta dimostrare che è anche definita positiva.  $\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$  si calcola perciò la forma quadratica associata

$$\begin{aligned} (\alpha \ \beta \ \gamma) S \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} &= \sum_{P_i \in \Omega} (\alpha^2 x_i^2 + \beta^2 y_i^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta x_i y_i + 2\alpha\gamma x_i + 2\beta\gamma y_i) = \\ &= \sum_{P_i \in \Omega} (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

che chiaramente assume sempre valori non negativi e si annulla unicamente per

$$\alpha x_i + \beta y_i + \gamma = 0 \quad \forall P_i \in \Omega. \quad (9.5)$$

Se (9.5) fosse soddisfatta con coefficienti  $\alpha, \beta, \gamma$  non tutti nulli, allora o  $\alpha$  o  $\beta$  sarebbe necessariamente diverso da zero e tutti i punti  $P_i \in \Omega$  dovrebbero allinearsi lungo la retta di equazione

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

il che è stato espressamente escluso. La forma quadratica associata a  $S$  si annulla perciò **soltanto** per  $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$  e la matrice è definita positiva, come affermato.

Verificata l'invertibilità di  $S$ , la (9.3) porge infine

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = mgS^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9.6)$$

che esprime formalmente l'unica soluzione del sistema (9.2) in termini dell'inversa  $S^{-1}$ .

### 9.1.3 Condizione necessaria per l'equilibrio

La condizione necessaria per l'equilibrio è che i coefficienti  $(a, b, c)$  forniti dalla (9.6) soddisfino il set di disequazioni lineari

$$ax_i + by_i + c \geq 0 \quad \forall P_i \in \Omega, \quad (9.7)$$

in modo che *tutte le reazioni vincolari esterne applicate alla base d'appoggio risultino dirette verticalmente verso l'alto o, al limite, nulle*. Il sistema di disequazioni (9.7) equivale a

$$(x_i \ y_i \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \forall P_i \in \Omega \quad (9.8)$$

e si traduce in una *condizione sulle coordinate  $x_G, y_G$  del centro di pressione*. La condizione necessaria per l'equilibrio è dunque che il centro di pressione appartenga all'insieme definito dalle disequazioni lineari (9.8). Detto insieme è non vuoto e si identifica con la chiusura del cosiddetto **poligono di completo appoggio**.

#### 9.1.4 Poligono (o superficie) di completo appoggio

Il poligono (o superficie) di completo appoggio è l'insieme  $\mathcal{A}$  del piano  $Oxy$  definito da

$$\mathcal{A} = \left\{ (x_G, y_G) \in \mathbb{R}^2 : (x_i \ y_i \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} > 0 \quad \forall P_i \in \Omega \right\}.$$

Esso è caratterizzato dal fatto che  $\forall C \in \mathcal{A}$  le reazioni vincolari esterne applicate su tutti i punti della base d'appoggio  $\Omega$  hanno componente verticale strettamente positiva — sono cioè dirette verticalmente verso l'alto e non nulle.

#### 9.1.5 Terna “centrale d'inerzia” per la base d'appoggio

Per verificare che il poligono di completo appoggio effettivamente esista non vuoto, e meglio comprenderne la struttura, conviene introdurre una terna di riferimento speciale rispetto alla quale scrivere la matrice  $S$  ed eseguire tutti i calcoli. La terna è scelta nel modo seguente. Si consideri il sistema fittizio di punti materiali ottenuto attribuendo massa unitaria a tutti i punti della base d'appoggio. Per tale sistema di potrà allora definire una *terna centrale d'inerzia*  $B\xi\eta\zeta$  che, causa l'evidente piano di simmetria  $\pi = Oxy$ , avrà:

- o origine nel “baricentro”  $B \in Oxy$  (o centroide) della base d'appoggio individuato da

$$B - O = \frac{1}{\#\Omega} \sum_{P_i \in \Omega} 1(P_i - O) = \frac{1}{\#\Omega} \sum_{P_i \in \Omega} (P_i - O),$$

- o piano coordinato  $B\xi\eta$  coincidente con  $Oxy$ ,
- o asse  $B\zeta$  parallelo e concorde con l'asse verticale  $Oz$ .

Indicate con  $\xi_i, \eta_i, 0$  le coordinate del generico punto  $P_i \in \Omega$  rispetto alla nuova terna, è evidente che le coordinate del baricentro  $B$  devono annullarsi

$$\xi_B = \frac{1}{\#\Omega} \sum_{P_i \in \Omega} 1 \xi_i = \frac{1}{\#\Omega} \sum_{P_i \in \Omega} \xi_i = 0 \quad \eta_B = \frac{1}{\#\Omega} \sum_{P_i \in \Omega} 1 \eta_i = \frac{1}{\#\Omega} \sum_{P_i \in \Omega} \eta_i = 0$$

come pure nullo deve risultare il prodotto d'inerzia

$$L_{\xi\eta} = - \sum_{P_i \in \Omega} 1 \xi_i \eta_i = - \sum_{P_i \in \Omega} \xi_i \eta_i = 0$$

mentre i momenti — centrali — d'inerzia relativi agli assi  $B\xi$  e  $B\eta$  assumono la forma

$$L_{\xi\xi} = \sum_{P_i \in \Omega} 1 \eta_i^2 = \sum_{P_i \in \Omega} \eta_i^2 \quad L_{\eta\eta} = \sum_{P_i \in \Omega} 1 \xi_i^2 = \sum_{P_i \in \Omega} \xi_i^2. \quad (9.9)$$

Se  $\xi_G, \eta_G$  sono le coordinate del baricentro  $G$  del corpo rigido sul piano  $B\xi\eta$  — e quindi anche del centro di pressione  $C$  — le equazioni cardinali (9.2) si riducono a

$$\begin{cases} L_{\eta\eta} a = mg \xi_G \\ L_{\xi\xi} b = mg \eta_G \\ \#\Omega c = mg \end{cases}$$

e la relativa soluzione esiste unica

$$a = \frac{1}{L_{\eta\eta}} mg \xi_G \quad b = \frac{1}{L_{\xi\xi}} mg \eta_G \quad c = \frac{1}{\#\Omega} mg \quad (9.10)$$

se e soltanto se i momenti  $L_{\xi\xi}, L_{\eta\eta}$  sono strettamente positivi. Condizione necessaria e sufficiente affinché ricorra quest'ultima circostanza è che i punti di  $\Omega$  non siano allineati: se infatti fosse  $L_{\xi\xi} = 0$  o  $L_{\eta\eta} = 0$  i punti della base d'appoggio dovrebbero collocarsi lungo l'asse  $B\xi$  o  $B\eta$  rispettivamente; per contro, se i punti di  $\Omega$  fossero tutti allineati lungo una retta  $r$ , allora per simmetria  $r$  dovrebbe essere un asse centrale d'inerzia e nullo risulterebbe il relativo momento d'inerzia. Questo a conferma di quanto già provato eseguendo i calcoli nella terna  $Oxyz$ .

Non rimane che calcolare le reazioni vincolari esterne nei punti della base d'appoggio:

$$\vec{\Phi}_i^{\text{est}} = (a\xi_i + b\eta_i + c) \hat{e}_3 = mg \left( \frac{1}{L_{\eta\eta}} \xi_G \xi_i + \frac{1}{L_{\xi\xi}} \eta_G \eta_i + \frac{1}{\#\Omega} \right) \hat{e}_3 \quad \forall P_i \in \Omega \quad (9.11)$$

e il poligono di completo appoggio

$$\mathcal{A} = \left\{ (\xi_G, \eta_G) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{L_{\eta\eta}} \xi_G \xi_i + \frac{1}{L_{\xi\xi}} \eta_G \eta_i + \frac{1}{\#\Omega} > 0 \quad \forall P_i \in \Omega \right\}. \quad (9.12)$$

### 9.1.6 Struttura del poligono di completo appoggio

Dalla definizione (9.12) per il poligono di completo appoggio si deducono facilmente alcune notevoli proprietà:

- (i) il poligono di completo appoggio è certamente non vuoto, in quanto comprende almeno il centroide  $B$  della base d'appoggio, come è immediato desumere ponendo  $(\xi_G, \eta_G) = (0, 0)$  in (9.12)

$$\frac{\xi_i}{L_{\eta\eta}} \xi_G + \frac{\eta_i}{L_{\xi\xi}} \eta_G + \frac{1}{\#\Omega} = \frac{1}{\#\Omega} > 0 \quad \forall P_i \in \Omega.$$

Si osservi che se il centro di pressione coincide con il centroide  $B$  le reazioni vincolari esterne assumono lo stesso valore

$$\vec{\Phi}_i^{\text{est}} = \frac{mg}{\#\Omega} \hat{e}_3;$$

- (ii) il poligono di completo appoggio è quindi l'intersezione non vuota dei  $\#\Omega$  semipiani aperti definiti per ogni  $P_i \in \Omega$  dalle disequazioni

$$\frac{\xi_i}{L_{\eta\eta}} \xi_G + \frac{\eta_i}{L_{\xi\xi}} \eta_G + \frac{1}{\#\Omega} > 0. \quad (9.13)$$

Si tratta dunque di un poligono aperto, in quanto intersezione di semipiani aperti non disgiunti;

- (iii) il poligono di completo appoggio è sempre convesso, dal momento che risulta dalla intersezione non vuota di insiemi convessi — i semipiani (9.13);
- (iv) il poligono di completo appoggio è incluso nel poligono di appoggio  $\text{conv}(\Omega)$ . Se infatti il centro di pressione appartiene al poligono di completo appoggio, allora la quiete nella configurazione considerata rappresenta un moto naturale con tutte le reazioni vincolari esterne dirette verso l'alto. *La configurazione è perciò un equilibrio anche secondo il modello del piano d'appoggio perfettamente rigido.* Ne segue che il centro di pressione deve appartenere altresì al poligono d'appoggio, come affermato.

### 9.1.7 Forma finale della condizione necessaria per l'equilibrio

La condizione necessaria per l'equilibrio è che il centro di pressione  $C$  appartenga alla regione del piano  $Oxy$  definita dalle disequazioni (9.8)

$$\left\{ (x_G, y_G) \in \mathbb{R}^2 : (x_i \ y_i \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \forall P_i \in \Omega \right\} \quad (9.14)$$

che è chiaramente un insieme chiuso. Lo si ottiene aggiungendo al poligono di completo appoggio  $\mathcal{A}$  il relativo perimetro — per via dei  $\geq$  in luogo dei  $>$  che compaiono nella

definizione. L'insieme (9.14) è perciò interpretabile come la *chiusura*  $\overline{\mathcal{A}}$  del poligono di completo appoggio.

## 9.2 Condizione sufficiente per l'equilibrio

*L'appartenenza del centro di pressione alla chiusura del poligono di completo appoggio è anche condizione sufficiente per l'equilibrio del sistema.*

Ci si convince di ciò notando che se il centro di pressione appartiene a  $\overline{\mathcal{A}}$ , allora la soluzione in  $(a, b, c)$  del sistema lineare (9.3) soddisfa tutte le disequazioni (9.7). In tal modo tutte le reazioni vincolari esterne definite da (9.1) nei punti di appoggio e nulle in tutti gli altri punti del sistema *sono consentite dai vincoli*. Non rimane che fare uso del postulato delle reazioni vincolari per verificare che con questa scelta delle reazioni vincolari esterne le reazioni interne costituiscono un sistema di vettori applicati con risultante e momento risultante nulli, dunque anch'esso esplicabile dai vincoli del sistema. La prova è analoga a quella già considerata al paragrafo 4 per il caso del piano d'appoggio perfettamente rigido.

## 9.3 Casi critici. Modello esteso

Il modello del piano d'appoggio debolmente cedevole prevede che una configurazione sia di equilibrio se e soltanto se il centro di pressione  $C$  è ubicato nella chiusura  $\overline{\mathcal{A}}$  del poligono di completo appoggio  $\mathcal{A}$ . *Ma cosa succede se  $C \in \text{conv}(\Omega) \setminus \overline{\mathcal{A}}$ , ossia il centro di pressione cade entro il poligono d'appoggio ma non nella chiusura della superficie di completo appoggio?* In tal caso almeno una delle reazioni vincolari esterne sui punti della base d'appoggio  $\Omega$  risulta diretta verso il basso, in modo che il sistema di reazioni vincolari non è compatibile con il modello adottato: *la quiete nella configurazione in esame non costituisce un moto naturale del sistema e la configurazione non rappresenta un equilibrio.*

Nel caso sia  $C \in \text{conv}(\Omega) \setminus \overline{\mathcal{A}}$ , i punti della base d'appoggio dove la reazione vincolare risulta diretta verso il basso si può ritenere abbiano subito un processo di *sollevamento* rispetto al piano di riferimento  $Oxy$ , conformemente all'espressione generale

$$\vec{\Phi}_i^{\text{est}} = -k(\alpha x_i + \beta y_i + \gamma) \hat{e}_3$$

nella quale deve aversi  $z_i = \alpha x_i + \beta y_i + \gamma > 0$ . Questi punti, dunque, non sono in reale contatto con il piano d'appoggio e l'intuizione fisica suggerisce che essi debbano essere esclusi dal calcolo dei coefficienti di struttura e delle corrispondenti reazioni vincolari: la *base di appoggio effettiva* potrebbe risultare più ristretta rispetto a quella originariamente ipotizzata — *base d'appoggio apparente o geometrica*.

Si può allora estendere il modello assumendo che per  $C \in \text{conv}(\Omega) \setminus \overline{\mathcal{A}}$  i punti nei quali la reazione vincolare esterna risultasse diretta verso il basso vengano esclusi dalla base d'appoggio effettiva, per poi ripetere il calcolo dei coefficienti di struttura sul più ristretto insieme di punti d'appoggio così ottenuto. Può essere necessario ripetere la procedura più volte, dando luogo ad una progressiva **deflazione** dei punti costituenti la base d'appoggio effettiva, fino ad individuare una base d'appoggio sui cui punti tutte le reazioni vincolari

esterne siano non nulle e dirette verso l'alto. Il numero finito di punti costituenti la base d'appoggio apparente  $\Omega$  assicura la convergenza della procedura in un numero finito di passi.

Per il modello così adattato è evidente che *l'appartenenza del centro di pressione  $C$  al poligono d'appoggio  $\text{conv}(\Omega)$  costituisce ancora una condizione necessaria per l'equilibrio*. Basta osservare infatti che se la configurazione è di equilibrio secondo il nuovo modello, tutte le reazioni vincolari esterne agli appoggi risultano nulle o dirette verticalmente verso l'alto, mentre quelle interne possono essere qualsiasi, salvo che per l'annullarsi di risultante e momento risultante. La stessa configurazione è dunque di equilibrio anche per il modello del piano d'appoggio perfettamente rigido, sicchè  $C \in \text{conv}(\Omega)$ , come affermato.

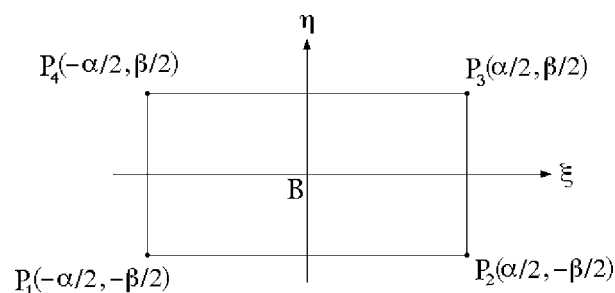
Con questa estensione del modello, si dimostra che per il corpo rigido appoggiato ad un piano orizzontale debolmente cedevole *l'appartenenza del centro di pressione al poligono d'appoggio è anche condizione sufficiente all'equilibrio*, come nel caso del piano d'appoggio rigido. Va sottolineato, tuttavia, che può rendersi necessario escludere dal calcolo alcuni dei punti della base d'appoggio  $\Omega$ , nei quali la reazione vincolare esterna risultasse diretta verso il basso.

Di regola conviene scartare anche i punti dove la reazione vincolare si annulla, dal momento che questa non può considerarsi indicativa di un vero e proprio "appoggio" del corpo sul piano, ma soltanto di un mero contatto geometrico.

La prova della sufficienza è tutt'altro che banale e non verrà discussa in queste note.

## 10. Esempio illustrativo

Si consideri un tavolo rigido i cui piedi poggino ai quattro vertici  $P_1, P_2, P_3, P_4$  di un rettangolo di lati  $\alpha$  e  $\beta$ . Si vogliono determinare il poligono d'appoggio, l'area di completo appoggio e le reazioni vincolari esterne in funzione delle coordinate del centro di pressione  $C$ . Come già osservato, conviene eseguire i calcoli rispetto alla terna centrale d'inerzia del sistema ottenuto attribuendo masse unitarie ai punti della base d'appoggio. È evidente che gli assi del rettangolo  $P_1P_2P_3P_4$  sono assi di simmetria e dunque si identificano con due assi centrali d'inerzia ortogonali, mentre la loro intersezione coincide con il baricentro del sistema. Il terzo asse centrale sarà ortogonale ai precedenti. La terna centrale d'inerzia avrà quindi l'aspetto illustrato nella figura seguente



dove si è anche evidenziato il poligono d'appoggio, che coincide ovviamente con il rettangolo

$P_1P_2P_3P_4$ . Rispetto a tale terna il momento centrale d'inerzia relativo all'asse  $B\xi$  si calcola per mezzo della (9.9)

$$L_{\xi\xi} = \left(-\frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 = \beta^2$$

e analogo risultato vale per il momento d'inerzia relativo a  $B\xi$

$$L_{\eta\eta} = \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \alpha^2.$$

Una volta calcolati i coefficienti di struttura  $a, b, c$  tramite le (9.10), le reazioni vincolari esterne sono quindi date da (9.11)

$$\vec{\Phi}_i^{\text{est}} = mg \left( \frac{1}{\alpha^2} \xi_i \xi_G + \frac{1}{\beta^2} \eta_i \eta_G + \frac{1}{4} \right) \hat{e}_3 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4$$

in funzione delle coordinate  $(\xi_G, \eta_G)$  del centro di pressione. L'area di completo appoggio sarà il luogo dei punti  $(\xi_G, \eta_G)$  del piano d'appoggio dove sono simultaneamente soddisfatte le disequazioni

$$mg \left( \frac{1}{\alpha^2} \xi_i \xi_G + \frac{1}{\beta^2} \eta_i \eta_G + \frac{1}{4} \right) > 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4$$

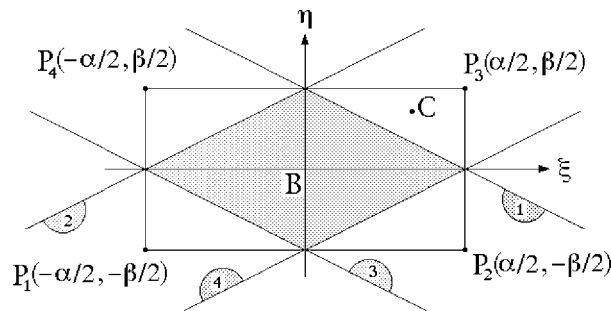
che possono scriversi esplicitamente sostituendo le coordinate dei punti d'appoggio:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2\alpha} \xi_G - \frac{1}{2\beta} \eta_G + \frac{1}{4} > 0 \\ \frac{1}{2\alpha} \xi_G - \frac{1}{2\beta} \eta_G + \frac{1}{4} > 0 \\ \frac{1}{2\alpha} \xi_G + \frac{1}{2\beta} \eta_G + \frac{1}{4} > 0 \\ -\frac{1}{2\alpha} \xi_G + \frac{1}{2\beta} \eta_G + \frac{1}{4} > 0 \end{array} \right.$$

ed equivalgono al sistema di disequazioni lineari

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_G < \frac{\beta}{\alpha} \left( -\xi_G + \frac{\alpha}{2} \right) \\ \eta_G < \frac{\beta}{\alpha} \left( \xi_G + \frac{\alpha}{2} \right) \\ \eta_G > \frac{\beta}{\alpha} \left( -\xi_G - \frac{\alpha}{2} \right) \\ \eta_G > \frac{\beta}{\alpha} \left( \xi_G - \frac{\alpha}{2} \right). \end{array} \right. \quad (10.1)$$

La relativa soluzione è rappresentata dalla regione di forma romboidale evidenziata con il tratteggio nella figura seguente



dove le rette condotte per i punti medi dei lati ed i semicerchi tratteggiati lungo di esse specificano i semipiani corrispondenti a ciascuna delle quattro disequazioni. In questo semplice esempio il comportamento del sistema quando il centro di pressione cade nel poligono d'appoggio ma al di fuori dell'area di completo appoggio è evidente. Se così il centro di pressione occupa la posizione  $C$  mostrata in figura, ci si convince immediatamente che tutte le disequazioni del sistema (10.1) sono soddisfatte salvo la prima, in modo che la reazione vincolare associata al punto  $P_1$  risulta diretta verso il basso: il punto  $P_1$  non costituisce un vero punto di appoggio all'equilibrio e le reazioni vincolari devono essere ricalcolate assumendo l'appoggio sui soli punti  $P_2, P_3, P_4$ . Si osservi che  $C$  appartiene all'involuppo convesso di  $P_2, P_3, P_4$ , per cui le reazioni vincolari  $\vec{\Phi}_2^{est}$ ,  $\vec{\Phi}_3^{est}$ ,  $\vec{\Phi}_4^{est}$  sono univocamente determinate.

## 11. Complemento. Equivalenza dei modelli a piano rigido e a piano debolmente cedevole nel caso di tre punti d'appoggio

Nel caso che la base d'appoggio  $\Omega$  sia costituita da tre soli punti non allineati  $P_1, P_2, P_3$  si è già stabilito che il problema dell'equilibrio sul piano orizzontale rigido è staticamente determinato. Esso può quindi essere posto a confronto con il modello del piano debolmente cedevole. Si verifica che i due modelli sono equivalenti, nel senso che conducono alla stessa previsione circa le reazioni vincolari esterne applicate. Se il centro di pressione  $C$  è un punto della base d'appoggio — il triangolo  $P_1P_2P_3$  — esso può infatti rappresentarsi univocamente per mezzo della combinazione lineare convessa

$$C - O = w_1(P_1 - O) + w_2(P_2 - O) + w_3(P_3 - O) \tag{11.1}$$

in termini dei pesi  $w_1, w_2, w_3 \geq 0, w_1 + w_2 + w_3 = 1$ . Le reazioni vincolari esterne per il

modello del piano rigido sono date dalla (4.2)

$$\vec{\Phi}_i^{\text{est}} = \begin{cases} w_i mg \hat{e}_3 & \text{per } i = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{in ogni altro punto del corpo rigido.} \end{cases}$$

Per il modello del piano d'appoggio debolmente cedevole le reazioni vincolari esterne si ricavano per mezzo della relazione generale

$$\vec{\Phi}_i^{\text{est}} = (a x_i + b y_i + c) \hat{e}_3 \quad i = 1, 2, 3 \quad (11.2)$$

nella quale i coefficienti  $a, b, c$  sono l'unica soluzione del sistema (9.2), che nella fattispecie assume la forma matriciale

$$\begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 & x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 & y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 & y_1 + y_2 + y_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 & y_1 + y_2 + y_3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = mg \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix}$$

e in virtù di (11.1) può scriversi equivalentemente come

$$\begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 & x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 & y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 & y_1 + y_2 + y_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 & y_1 + y_2 + y_3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = mg \sum_{i=1}^3 w_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per ottenere la soluzione in  $a, b, c$  è sufficiente risolvere, per  $i = 1, 2, 3$ , i tre sistemi ridotti

$$\begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 & x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 & y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 & y_1 + y_2 + y_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 & y_1 + y_2 + y_3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (11.3)$$

in effetti basta risolvere uno solo dei predetti sistemi, ad esempio quello per  $i = 1$ , in quanto alle soluzioni degli altri due si perviene mediante permutazione circolare degli indici — detta permutazione non ha effetto sulla matrice incompleta a primo membro, mentre produce un avvicendamento circolare dei valori 1, 2, 3 dell'indice  $i$  nel vettore colonna a secondo membro.

**Determinante della matrice incompleta**

Il determinante della matrice incompleta del sistema (11.3) risulta essere

$$\det \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 & x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 & y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 & y_1 + y_2 + y_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 & y_1 + y_2 + y_3 & 3 \end{pmatrix} = 4 [\text{area}(P_1P_2P_3)]^2$$

dove si è indicato con  $\text{area}(P_1P_2P_3)$  l'area del triangolo di vertici  $P_1, P_2, P_3$ . Trova così conferma l'esistenza ed unicità della soluzione nell'ipotesi che i punti  $P_1, P_2, P_3$  non siano allineati —  $\text{area}(P_1P_2P_3) > 0$ .

**Soluzione a del sistema ridotto (11.3) per  $i = 1$** 

Un calcolo diretto dimostra che

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 & x_1 + x_2 + x_3 \\ y_1 & y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 & y_1 + y_2 + y_3 \\ 1 & y_1 + y_2 + y_3 & 3 \end{pmatrix} = -2(y_3 - y_2) \text{area}(P_1P_2P_3)$$

sicché il teorema di Cramer porge

$$a = -\frac{2(y_3 - y_2) \text{area}(P_1P_2P_3)}{4 [\text{area}(P_1P_2P_3)]^2} = -\frac{y_3 - y_2}{2 \text{area}(P_1P_2P_3)}.$$

**Soluzione b del sistema ridotto (11.3) per  $i = 1$** 

In modo analogo si verifica che

$$\det \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & x_1 & x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 & y_1 & y_1 + y_2 + y_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2(x_3 - x_2) \text{area}(P_1P_2P_3)$$

in modo che dal teorema di Cramer segue

$$b = \frac{2(x_3 - x_2)}{4 [\text{area}(P_1P_2P_3)]^2} = \frac{x_3 - x_2}{2 \text{area}(P_1P_2P_3)}.$$

**Soluzione c del sistema ridotto (11.3) per  $i = 1$** 

Risulta, in questo caso,

$$\det \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 & x_1 \\ x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 & y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 & y_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 & y_1 + y_2 + y_3 & 1 \end{pmatrix} = 2(x_2y_3 - x_3y_2) \text{area}(P_1P_2P_3)$$

per cui dalla regola di Cramer si deduce

$$c = \frac{2(x_2y_3 - x_3y_2)\text{area}(P_1P_2P_3)}{4[\text{area}(P_1P_2P_3)]^2} = \frac{x_2y_3 - x_3y_2}{2\text{area}(P_1P_2P_3)}.$$

### Soluzione generale delle equazioni cardinali statiche

Le soluzioni in  $a, b, c$  del sistema ridotto (11.3) per  $i = 2$  e  $i = 3$  si ricavano dalla precedente per permutazione circolare degli indici. Per linearità, la soluzione generale in  $a, b, c$  delle equazioni cardinali statiche risulta pertanto

$$a = -[w_1(y_3 - y_2) + w_2(y_1 - y_3) + w_3(y_2 - y_1)] \frac{mg}{2\text{area}(P_1P_2P_3)}$$

$$b = [w_1(x_3 - x_2) + w_2(x_1 - x_3) + w_3(x_2 - x_1)] \frac{mg}{2\text{area}(P_1P_2P_3)}$$

$$c = [w_1(x_2y_3 - x_3y_2) + w_2(x_3y_1 - x_1y_3) + w_3(x_1y_2 - x_2y_1)] \frac{mg}{2\text{area}(P_1P_2P_3)}.$$

### Reazioni vincolari esterne

A questo punto si hanno tutti i coefficienti di struttura  $a, b, c$  necessari al calcolo delle reazioni vincolari esterne (11.2). Per la componente della reazione agente su  $P_1$  si ha

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + c &= \frac{mg}{2\text{area}(P_1P_2P_3)} \left[ - [w_1(y_3 - y_2) + w_2(y_1 - y_3) + w_3(y_2 - y_1)] x_1 + \right. \\ &\quad \left. + [w_1(x_3 - x_2) + w_2(x_1 - x_3) + w_3(x_2 - x_1)] y_1 + \right. \\ &\quad \left. + w_1(x_2y_3 - x_3y_2) + w_2(x_3y_1 - x_1y_3) + w_3(x_1y_2 - x_2y_1) \right] = \\ &= \frac{mg}{2\text{area}(P_1P_2P_3)} w_1 [(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)] = \\ &= \frac{mg}{2\text{area}(P_1P_2P_3)} w_1 2\text{area}(P_1P_2P_3) = mgw_1 \end{aligned}$$

e relazioni analoghe valgono per gli altri due punti della base d'appoggio

$$ax_2 + by_2 + c = mgw_2 \quad ax_3 + by_3 + c = mgw_3.$$

Come era lecito attendersi sulla base delle equazioni cardinali statiche, nel caso che la base d'appoggio consista di tre soli punti non allineati il modello del piano rigido e il modello del piano debolmente cedevole *conducono allo stesso risultato*.

## 12. Complemento. Superficie di completo appoggio e nocciolo centrale d'inerzia

### 12.1 Centro relativo di un sistema piano di punti $\Omega$ rispetto ad una retta

Dato un sistema piano finito  $\Omega \subset Oxy$  costituito dai punti non allineati  $P_i$  di coordinate  $(x_i, y_i)$ , si definisce **centro relativo** rispetto alla retta di equazione  $ax + by + c = 0$  in  $Oxy$ , non passante per il centroide di  $\Omega$ , il punto  $C$  le cui coordinate  $(x_G, y_G)$  sono individuate dall'equazione

$$\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \frac{1}{S_x a + S_y b + \#\Omega c} \quad (12.1)$$

dove il fattore di normalizzazione a secondo membro è certamente diverso da zero nell'ipotesi che il centroide non appartenga alla retta

$$S_x a + S_y b + \#\Omega c = 0 \quad \iff \quad \frac{1}{\#\Omega} S_x a + \frac{1}{\#\Omega} S_y b + c = 0$$

e riduce la terza delle equazioni (12.1) ad una identità ( $1 = 1$ ).

### 12.2 Nocciolo centrale d'inerzia di $\Omega$

Si definisce nocciolo centrale d'inerzia di  $\Omega$  il sottoinsieme  $\mathcal{N}$  del piano  $Oxy$  tale che:

- (a)  $\mathcal{N}$  è connesso;
- (b) il centroide di  $\Omega$  appartiene a  $\mathcal{N}$ ;
- (c) la frontiera  $\partial\mathcal{N}$  di  $\mathcal{N}$  è il luogo dei centri relativi delle rette che intersecano  $\Omega$  e delimitano un semipiano chiuso contenente completamente  $\Omega$ ;

Se  $(x_G, y_G) \in \partial\mathcal{N}$  deve dunque aversi

$$\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \frac{1}{S_x a + S_y b + \#\Omega c}$$

con  $(a, b, c)$  tali che tutti i punti di  $\Omega$  appartengono allo stesso semipiano individuato da  $ax + by + c \geq 0$ :

$$(x_i \ y_i \ 1) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0 \quad \forall P_i \in \Omega \quad (12.2)$$

e almeno uno di tali punti giace sulla retta  $ax + by + c = 0$ :

$$\exists P_i \in \Omega : (x_i \ y_i \ 1) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0,$$

mentre

$$S_x a + S_y b + \#\Omega c > 0$$

non potendo valere il segno di eguaglianza in tutte le (12.2) (si rammenta che  $\Omega$  non è costituito da punti allineati). Ne deriva che  $(x_G, y_G)$  deve soddisfare le relazioni:

$$(x_i \ y_i \ 1)S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \forall P_i \in \Omega$$

per almeno una delle quali deve valere il segno di eguaglianza. Di conseguenza  $(x_G, y_G) \in \partial\mathcal{A}$  e quindi

$$\partial\mathcal{N} \subseteq \partial \left\{ (x_G, y_G) \in \mathbb{R}^2 : (x_i \ y_i \ 1)S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} > 0, \quad \forall P_i \in \Omega \right\} = \partial\mathcal{A}.$$

Se viceversa  $(x_G, y_G) \in \partial\mathcal{A}$ , deve aversi

$$(x_i \ y_i \ 1)S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0, \quad \forall P_i \in \Omega$$

e almeno una delle relazioni deve essere verificata con il segno di eguaglianza; i coefficienti

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix}$$

individuano allora una retta di equazione  $ax + by + c = 0$  che passa per almeno un punto di  $\Omega$  e include per intero la base d'appoggio  $\Omega$ :

$$(x_i \ y_i \ 1) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0 \quad \forall P_i \in \Omega.$$

Con questa scelta dei coefficienti  $a, b, c$  si ha peraltro

$$\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \frac{1}{S_x a + S_y b + \#\Omega c}$$

in quanto  $S_x a + S_y b + \#\Omega c = 1$ , per cui  $(x_G, y_G) \in \partial\mathcal{N}$ . In definitiva:

$$\partial\mathcal{A} = \partial \left\{ (x_G, y_G) \in \mathbb{R}^2 : (x_i \ y_i \ 1)S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} > 0, \quad \forall P_i \in \Omega \right\} \subseteq \partial\mathcal{N}.$$

Si conclude così che *la frontiera di  $\mathcal{N}$  coincide con la frontiera della superficie di completo appoggio  $\mathcal{A}$ :*

$$\partial\mathcal{N} = \partial\mathcal{A}.$$

D'altra parte, è noto che  $\mathcal{A}$  contiene sempre il centroide di  $\Omega$  e che lo stesso  $\mathcal{A}$  risulta connesso, in quanto convesso. Si è così dimostrato che *il nocciolo centrale d'inerzia si identifica con la superficie di completo appoggio:*

$$\mathcal{N} = \mathcal{A}.$$

### 12.3 Caso di base d'appoggio $\Omega$ continua

Nel caso che la base d'appoggio  $\Omega$  non consista di un numero finito di punti materiali ma sia un insieme misurabile del piano  $Oxy$ , l'estensione del modello del suolo debolmente cedevole è pressochè immediata. Basta osservare che sulla base d'appoggio non è applicato un numero finito di reazioni vincolari discrete, ma piuttosto un *campo di reazioni vincolari* descritto mediante un'appropriata *densità di reazione per unità di superficie* o *sforzo*, che deve essere interpretata come uno sforzo di natura elastica. Lo sforzo associato alla deformazione elastica del piano d'appoggio si esprimerà come funzione lineare dei coefficienti di struttura  $a, b, c$ :

$$\vec{T}(x, y) = (ax + by + c) \hat{e}_3 \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

con  $ax + by + c \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega$ . Le equazioni cardinali della statica, necessarie e sufficienti per il sussistere dell'equilibrio, si riducono al sistema lineare

$$S \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = mg \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix}$$

dove la matrice  $S$  ha una struttura analoga a quella del caso discreto, salvo per il fatto che le sommatorie finite sono sostituite da integrali di superficie sull'intero dominio  $\Omega$ :

$$S = \begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_x \\ S_{xy} & S_{yy} & S_y \\ S_x & S_y & S_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\Omega} x^2 dx dy & \int_{\Omega} xy dx dy & \int_{\Omega} x dx dy \\ \int_{\Omega} xy dx dy & \int_{\Omega} y^2 dx dy & \int_{\Omega} y dx dy \\ \int_{\Omega} x dx dy & \int_{\Omega} y dx dy & \int_{\Omega} dx dy \end{pmatrix}. \quad (12.3)$$

Si osservi che l'elemento di matrice  $S_1$  coincide con l'area  $A$  della base d'appoggio:

$$S_1 = \int_{\Omega} dx dy = A.$$

Area di completo appoggio e nocciolo centrale d'inerzia di  $\Omega$  sono quindi definiti da

$$\mathcal{A} = \mathcal{N} = \left\{ (x_G, y_G) \in \mathbb{R}^2 : (x \ y \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} > 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \right\}.$$

L'insieme è sempre *non vuoto* in quanto contiene il centroide  $B$ , di coordinate  $(x_B, y_B) = (S_x/A, S_y/A)$ :

$$\begin{aligned} (x \ y \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ 1 \end{pmatrix} &= (x \ y \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} S_x/A \\ S_y/A \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{A} (x \ y \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{A} (x \ y \ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{A} > 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega. \end{aligned}$$

Si tratta altresì di un *insieme convesso*, quale intersezione non vuota di insiemi convessi (semipiani aperti in  $Oxy$ ); poichè  $\Omega$  è infinito, tuttavia,  $\mathcal{A}$  in generale *non è un poligono*. Si osservi infine che, qualora  $\Omega$  sia compatto in  $Oxy$ ,  $\mathcal{A}$  è certamente un aperto di  $\mathbb{R}^2$ .

### 12.3.1 Per $\Omega$ compatto la superficie di completo appoggio $\mathcal{A}$ è un aperto di $\mathbb{R}^2$

Nel caso che la base d'appoggio sia compatta, la relativa superficie di completo appoggio (o nocciolo centrale d'inerzia) è un aperto di  $\mathbb{R}^2$ . Se  $(x_G, y_G) \in \mathcal{A}$  si ha infatti

$$(x \ y \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} > 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

e quindi

$$\inf_{(x,y) \in \Omega} (x \ y \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0,$$

ma la funzione

$$(x, y) \longrightarrow (x \ y \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix}$$

risulta continua sul compatto  $\Omega$  e per il teorema di Weierstrass deve ammettere minimo; deve quindi aversi

$$\inf_{(x,y) \in \Omega} (x \ y \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} = \min_{(x,y) \in \Omega} (x \ y \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} = (x_o \ y_o \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} > 0$$

con  $(x_o, y_o) \in \Omega$  opportuno. Se viceversa  $(x_G, y_G) \in \mathbb{R}^2$  soddisfa

$$\inf_{(x,y) \in \Omega} (x \ y \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} > 0$$

allora deve risultare

$$(x \ y \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} > 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

in modo che  $(x_G, y_G) \in \mathcal{A}$ . Nel caso di  $\Omega$  compatto, la superficie di completo appoggio ammette perciò la caratterizzazione equivalente:

$$\mathcal{A} = \left\{ (x_G, y_G) \in \mathbb{R}^2 : \inf_{(x,y) \in \Omega} (x \ y \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} > 0 \right\}. \quad (12.4)$$

Per verificare che questo insieme è un aperto di  $\mathbb{R}^2$  si osserva che  $\forall (x_G, y_G), (x'_G, y'_G) \in \mathbb{R}^2$  e  $\forall (x, y) \in \Omega$  vale

$$\left| (x \ y \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} - (x \ y \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x'_G \\ y'_G \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| (x \ y \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x_G - x'_G \\ y_G - y'_G \\ 0 \end{pmatrix} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \left[ S^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \right]^T \begin{pmatrix} x_G - x'_G \\ y_G - y'_G \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \leq \left\| S^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_3 \cdot \left\| \begin{pmatrix} x_G - x'_G \\ y_G - y'_G \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_3 = \\
&= \left\| S^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_3 \cdot \left\| \begin{pmatrix} x_G - x'_G \\ y_G - y'_G \end{pmatrix} \right\|_2 \leq \max_{(x,y) \in \Omega} \left\| S^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_3 \cdot \|(x_G, y_G) - (x'_G, y'_G)\|_2
\end{aligned}$$

in cui si è fatto uso della simmetria di  $S$  e della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, oltre ad essersi indicate con  $\|\cdot\|_2$  e  $\|\cdot\|_3$  le usuali norme euclidee in  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  rispettivamente. L'esistenza del massimo

$$M_\Omega := \max_{(x,y) \in \Omega} \left\| S^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_3 > 0$$

è assicurata dalla continuità sul compatto  $\Omega$  della funzione

$$(x, y) \longrightarrow \left\| S^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_3,$$

composizione di una trasformazione affine e della norma  $\|\cdot\|_3$ , entrambe continue.  $\forall (x, y) \in \Omega$  e  $(x_G, y_G), (x'_G, y'_G) \in \mathbb{R}^2$  si ha così:

$$\left| (x \ y \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} - (x \ y \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x'_G \\ y'_G \\ 1 \end{pmatrix} \right| \leq M_\Omega \|(x_G, y_G) - (x'_G, y'_G)\|_2$$

ossia la doppia disuguaglianza

$$\begin{aligned}
(x \ y \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} - M_\Omega \|(x_G, y_G) - (x'_G, y'_G)\|_2 &\leq (x \ y \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x'_G \\ y'_G \\ 1 \end{pmatrix} \leq \\
&\leq (x \ y \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} + M_\Omega \|(x_G, y_G) - (x'_G, y'_G)\|_2
\end{aligned}$$

da cui segue, prendendo gli estremi inferiori su  $\Omega$  di ogni termine,

$$\begin{aligned}
\inf_{(x,y) \in \Omega} (x \ y \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} - M_\Omega \|(x_G, y_G) - (x'_G, y'_G)\|_2 &\leq \inf_{(x,y) \in \Omega} (x \ y \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x'_G \\ y'_G \\ 1 \end{pmatrix} \leq \\
&\leq \inf_{(x,y) \in \Omega} (x \ y \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} + M_\Omega \|(x_G, y_G) - (x'_G, y'_G)\|_2
\end{aligned}$$

ed infine

$$\left| \inf_{(x,y) \in \Omega} (x \ y \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x'_G \\ y'_G \\ 1 \end{pmatrix} - \inf_{(x,y) \in \Omega} (x \ y \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} \right| \leq M_\Omega \|(x_G, y_G) - (x'_G, y'_G)\|_2. \tag{12.5}$$

D'altra parte, qualora sia  $(x_G, y_G) \in \mathcal{A}$  la relazione (12.4) implica che si abbia

$$\inf_{(x,y) \in \Omega} (x \ y \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} > 0$$

e dalla diseuguaglianza (12.5) segue allora che è pure

$$\inf_{(x,y) \in \Omega} (x \ y \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x'_G \\ y'_G \\ 1 \end{pmatrix} > 0 \iff (x'_G, y'_G) \in \mathcal{A}$$

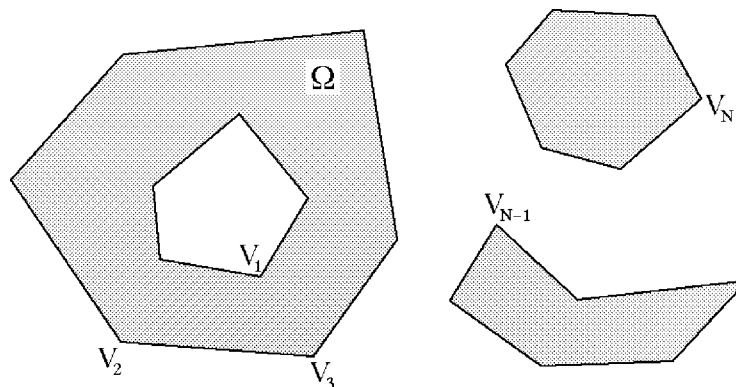
per ogni  $(x'_G, y'_G) \in \mathbb{R}^2$  tale che

$$\|(x_G, y_G) - (x'_G, y'_G)\|_2 < \frac{1}{M_\Omega} \cdot \inf_{(x,y) \in \Omega} (x \ y \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*Ciascun punto di  $\mathcal{A}$  è dunque centro di una sfera aperta contenuta in  $\mathcal{A}$ , il che prova l'asserto.*

**12.3.2 Base d'appoggio  $\Omega$  costituita da una unione finita di poligoni compatti**

Si supponga che la base d'appoggio  $\Omega$  sia costituita da una unione finita di poligoni compatti, eventualmente anche non semplicemente connessi (poligoni con "fori" poligonali praticati al loro interno). I vertici di  $\Omega$  sono quindi in numero finito  $n$  e verranno indicati con  $V_i, i = 1, 2, \dots, n$ , di coordinate  $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ .



In tal caso è possibile fornire una caratterizzazione della superficie di completo appoggio  $\mathcal{A}$ , ovvero del nocciolo centrale d'inerzia  $\mathcal{N}$ , in termini dei soli vertici  $V_i$ .

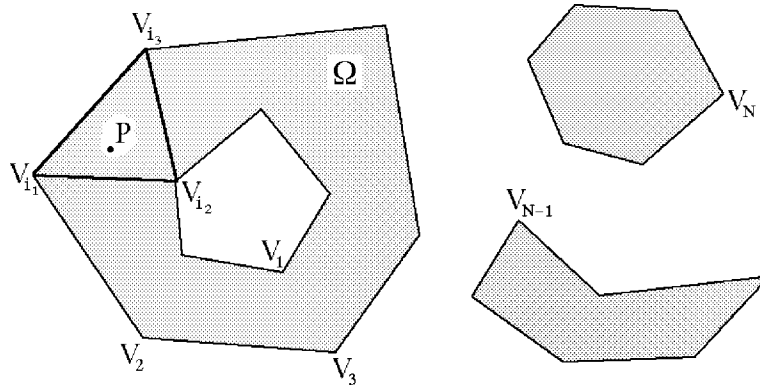
A questo scopo si osserva che tutti i punti  $(x_G, y_G) \in \mathbb{R}^2$  per i quali sia soddisfatta la condizione

$$(x \ y \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} > 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \tag{12.6}$$

verificano in modo ovvio anche il requisito meno restrittivo sui soli vertici  $V_i$ :

$$(x_i \ y_i \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} > 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \tag{12.7}$$

Viceversa, si supponga soddisfatta la condizione (12.7). Siccome qualsiasi poligono che costituisce  $\Omega$  può sempre scomporsi in triangoli, se  $P$  è un qualsiasi punto di  $\Omega$  — di coordinate  $(x, y)$  — esisterà almeno un triangolo chiuso di vertici  $V_{i_1}, V_{i_2}, V_{i_3}$ ,  $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, \dots, n\}$ , contenente  $P$ .



Ma il triangolo chiuso  $V_{i_1}V_{i_2}V_{i_3}$  coincide con l'involuppo convesso dei suoi vertici e sono perciò definiti tre coefficienti — o “pesi” —  $w_1, w_2, w_3 \geq 0$  tali che  $w_1 + w_2 + w_3 = 1$  e

$$(x, y) = w_1(x_{i_1}, y_{i_1}) + w_2(x_{i_2}, y_{i_2}) + w_3(x_{i_3}, y_{i_3}),$$

per cui la (12.7) implica

$$(x \ y \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^3 w_k (x_{i_k} \ y_{i_k} \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} > 0$$

in quanto

$$(x_{i_k} \ y_{i_k} \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} > 0 \quad \forall k = 1, 2, 3$$

mentre i coefficienti non negativi  $w_1, w_2, w_3$  non possono essere tutti nulli. Si conclude così che la condizione (12.7) implica la (12.6): *le due condizioni sono equivalenti.*

La superficie di completo appoggio si scrive pertanto come

$$\mathcal{A} = \left\{ (x_G, y_G) \in \mathbb{R}^2 : (x_i \ y_i \ 1) S^{-1} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} > 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

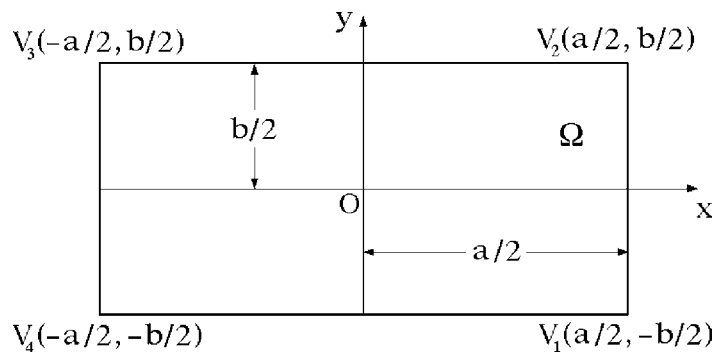
ed è quindi caratterizzabile mediante l'intersezione di un numero finito di semipiani, ciascuno corrispondente ad un vertice di  $\Omega$  (per quanto gli elementi della matrice  $S$  siano comunque calcolati *integrando* sul dominio  $\Omega$  e non sommando sui relativi vertici). La superficie di completo appoggio  $\mathcal{A}$  è dunque un *poligono* aperto e convesso, come avviene nel caso di  $\Omega$  finito.

**12.4 Esempio: nocciolo d'inerzia per base d'appoggio rettangolare**

La base d'appoggio  $\Omega$  sia un rettangolo di lati  $a$  e  $b$ . Conviene introdurre la terna di riferimento nel piano d'appoggio in modo che l'origine  $O$  venga a coincidere con il centro del rettangolo e gli assi  $Ox, Oy$  siano paralleli ai rispettivi lati. I vertici di  $\Omega$  sono dunque i punti:

$$V_1(a/2, -b/2) \quad V_2(a/2, b/2) \quad V_3(-a/2, b/2) \quad V_4(-a/2, -b/2),$$

come evidenziato nella figura seguente:



Gli elementi della matrice  $S$  si calcolano immediatamente dalla definizione (12.3):

$$S_{xx} = \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy x^2 = \int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx \int_{-b/2}^{b/2} dy = \frac{1}{12} a^3 b$$

$$S_{yy} = \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy y^2 = \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy = \frac{1}{12} a b^3$$

$$S_{xy} = \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy xy = \int_{-a/2}^{a/2} x dx \int_{-b/2}^{b/2} y dy = 0$$

$$\begin{aligned}
S_x &= \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy x = \int_{-a/2}^{a/2} x dx \int_{-b/2}^{b/2} dy = 0 \\
S_y &= \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy y = \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} y dy = 0 \\
S_1 &= \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy = ab
\end{aligned}$$

per cui la matrice  $S$  assume la forma diagonale

$$S = \begin{pmatrix} a^3b/12 & 0 & 0 \\ 0 & ab^3/12 & 0 \\ 0 & 0 & ab \end{pmatrix}$$

con inversa

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 12/a^3b & 0 & 0 \\ 0 & 12/ab^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/ab \end{pmatrix}.$$

La superficie di completo appoggio  $\mathcal{A}$  è dunque costituita da tutti e soli i punti  $(x_G, y_G) \in \mathbb{R}^2$  per i quali risulta

$$(x \ y \ 1) \begin{pmatrix} 12/a^3b & 0 & 0 \\ 0 & 12/ab^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/ab \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} > 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

ossia

$$\frac{12}{a^3b}xx_G + \frac{12}{ab^3}yy_G + \frac{1}{ab} > 0 \quad (x, y) \in [-a/2, a/2] \times [-b/2, b/2]. \quad (12.8)$$

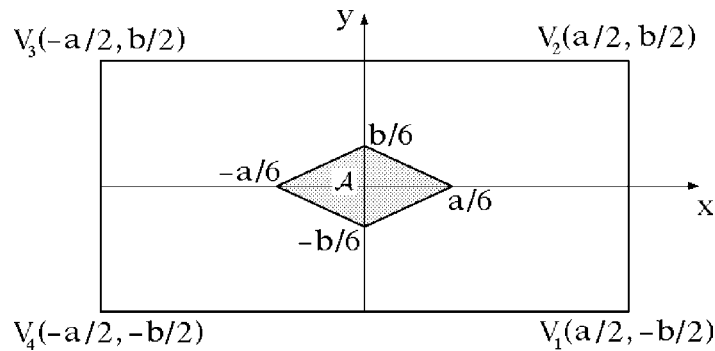
Essendo  $\Omega$  un poligono, la condizione (12.8) può essere equivalentemente soddisfatta nei soli vertici  $V_1, V_2, V_3, V_4$ :

$$\begin{aligned}
\frac{6}{a^2b}x_G - \frac{6}{ab^2}y_G + \frac{1}{ab} > 0 & \quad \frac{6}{a^2b}x_G + \frac{6}{ab^2}y_G + \frac{1}{ab} > 0 \\
-\frac{6}{a^2b}x_G + \frac{6}{ab^2}y_G + \frac{1}{ab} > 0 & \quad -\frac{6}{a^2b}x_G - \frac{6}{ab^2}y_G + \frac{1}{ab} > 0
\end{aligned}$$

e conduce al sistema di disequazioni lineari:

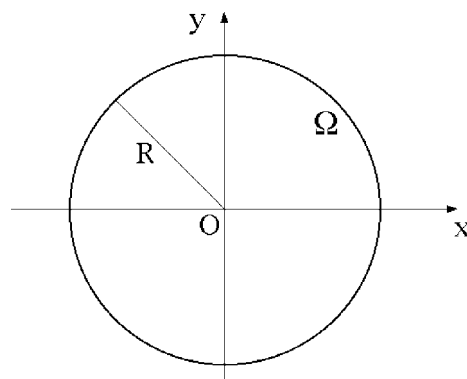
$$\begin{cases} \frac{x_G}{a} - \frac{y_G}{b} + \frac{1}{6} > 0 \\ \frac{x_G}{a} + \frac{y_G}{b} + \frac{1}{6} > 0 \\ -\frac{x_G}{a} + \frac{y_G}{b} + \frac{1}{6} > 0 \\ -\frac{x_G}{a} - \frac{y_G}{b} + \frac{1}{6} > 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è rappresentata dal rombo tratteggiato in figura:



**12.5 Esempio: nocciolo centrale d’inerzia per base d’appoggio circolare**

Se la base d’appoggio  $\Omega$  è un cerchio di raggio  $R$ , la terna di riferimento più appropriata per determinare il nocciolo centrale d’inerzia è quella che pone la propria origine  $O$  nel centro del cerchio e vede gli assi coordinati  $Ox$  e  $Oy$  nel piano d’appoggio, come illustrato nella figura seguente:



Si ha allora, esprimendo l’integrale in coordinate polari piane mediante la trasformazione

$(x, y) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$ , con  $(\rho, \varphi) \in [0, R] \times [0, 2\pi)$ ,

$$\begin{aligned} S_{xx} &= \int_{\Omega} x^2 dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \rho \rho^2 \cos^2 \varphi = \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{R^4}{8} \left[ \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi R^4}{4} \end{aligned}$$

mentre

$$S_{yy} = \int_{\Omega} y^2 dx dy = S_{xx} = \frac{\pi R^4}{4}$$

ed ovviamente

$$S_{xy} = \int_{\Omega} xy dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \rho \rho^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0.$$

Vale infine:

$$S_x = 0 \quad S_y = 0 \quad S_1 = \pi R^2,$$

in modo che la matrice  $S$  diventa

$$S = \begin{pmatrix} \pi R^4/4 & 0 & 0 \\ 0 & \pi R^4/4 & 0 \\ 0 & 0 & \pi R^2 \end{pmatrix}$$

ed ammette l'inversa diagonale

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 4/\pi R^4 & 0 & 0 \\ 0 & 4/\pi R^4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\pi R^2 \end{pmatrix}.$$

La superficie di completo appoggio  $\mathcal{A}$  è costituita da tutti e soli i punti  $(x_G, y_G) \in \mathbb{R}^2$  che soddisfano la condizione

$$(x \ y \ 1) \begin{pmatrix} 4/\pi R^4 & 0 & 0 \\ 0 & 4/\pi R^4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\pi R^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} > 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

per i quali risulta cioè

$$\frac{4}{\pi R^4} x x_G + \frac{4}{\pi R^4} y y_G + \frac{1}{\pi R^2} > 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega,$$

ossia

$$x x_G + y y_G + \frac{R^2}{4} > 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Si ha pertanto la caratterizzazione seguente della superficie di completo appoggio

$$\mathcal{A} = \left\{ (x_G, y_G) \in \mathbb{R}^2 : xx_G + yy_G + \frac{R^2}{4} > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq R^2 \right\}$$

che, essendo la base d'appoggio un insieme compatto di  $\mathbb{R}^2$ , può anche porsi nella forma alternativa

$$\mathcal{A} = \left\{ (x_G, y_G) \in \mathbb{R}^2 : \min_{x^2+y^2 \leq R^2} xx_G + yy_G + \frac{R^2}{4} > 0 \right\}. \quad (12.9)$$

Il minimo della funzione obiettivo  $xx_G + yy_G$  sul cerchio chiuso  $x^2 + y^2 \leq R^2$ , a  $(x_G, y_G)$  fissato, si calcola convenientemente passando a coordinate polari piane:

$$x = \rho \cos \varphi \quad y = \rho \sin \varphi \quad \rho \in [0, R], \varphi \in [0, 2\pi),$$

$$x_G = \rho_G \cos \varphi_G \quad y_G = \rho_G \sin \varphi_G \quad \rho_G \geq 0, \varphi_G \in [0, 2\pi),$$

le quali consentono di esprimere la funzione obiettivo nella forma

$$\rho \cos \varphi \rho_G \cos \varphi_G + \rho \sin \varphi \rho_G \sin \varphi_G = \rho \rho_G \cos(\varphi - \varphi_G)$$

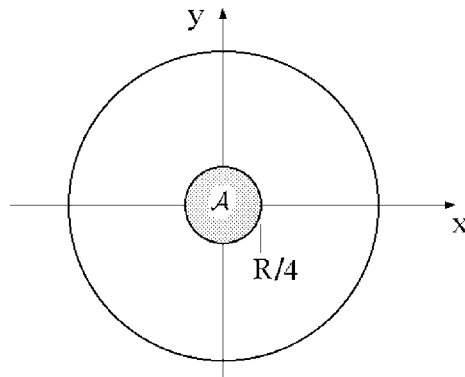
e di valutarne immediatamente il minimo assoluto per  $(\rho, \varphi) \in [0, R] \times [0, 2\pi)$ :

$$\min_{(\rho, \varphi) \in [0, R] \times [0, 2\pi)} \rho \rho_G \cos(\varphi - \varphi_G) = -\rho_G R$$

raggiunto in  $(\rho, \varphi) = (R, \varphi_G + \pi \text{ mod } 2\pi)$ . La (12.9) diventa così

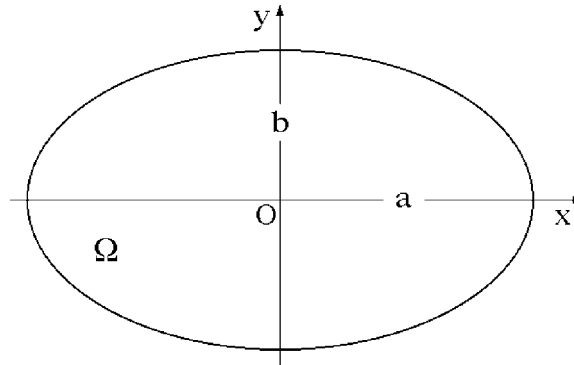
$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left\{ (x_G, y_G) = (\rho_G \cos \varphi_G, \rho_G \sin \varphi_G) : -\rho_G R + \frac{R^2}{4} > 0, \rho_G \geq 0, \varphi_G \in [0, 2\pi) \right\} \\ &= \left\{ (x_G, y_G) = (\rho_G \cos \varphi_G, \rho_G \sin \varphi_G) : 0 \leq \rho_G < \frac{R}{4}, \varphi_G \in [0, 2\pi) \right\} \end{aligned}$$

e si identifica con il *cerchio aperto di centro  $O$  e raggio  $R/4$* .



**12.6 Esempio: nocciolo centrale d’inerzia per base d’appoggio ellittica**

Il problema precedente si generalizza al caso in cui la base d’appoggio  $\Omega$  sia costituita da un dominio ellittico chiuso di semiassi maggiore e minore  $a$  e  $b$ , rispettivamente. La terna di riferimento più ovvia per calcolare la matrice (12.3) è la terna centrale d’inerzia che ha origine nel centro  $O$  dell’ellisse di contorno e gli assi  $Ox$ ,  $Oy$  sovrapposti agli assi di simmetria della figura



Rispetto a tale terna la regione d’appoggio è individuata dalla disequazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

Il momento d’inerzia rispetto all’asse  $Oy$  si ricava dall’integrale

$$S_{xx} = \int_{\Omega} x^2 dx dy = \int_{-a}^a dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy x^2 = \int_{-a}^a dx x^2 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = 4b \int_0^a x^2 \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} dx$$

che con la sostituzione  $x = a \sin \vartheta$  si riduce a

$$\begin{aligned} S_{xx} &= 4b \int_0^{\pi/2} a^2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta a \cos \vartheta d\vartheta = a^3 b \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\vartheta d\vartheta = \\ &= a^3 b \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4\vartheta}{2} d\vartheta = \frac{a^3 b}{2} \left[ \vartheta - \frac{\sin 4\vartheta}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} a^3 b. \end{aligned}$$

Un calcolo analogo permette di determinare il momento d’inerzia rispetto all’asse  $Ox$ :

$$S_{yy} = \int_{\Omega} y^2 dx dy = \frac{\pi}{4} ab^3$$

mentre gli elementi residui sono ovvi

$$S_{xy} = 0 \quad S_x = 0 \quad S_y = 0 \quad S_1 = \pi ab.$$

Anche in questo caso la matrice (12.3) ha struttura diagonale

$$S = \begin{pmatrix} \pi a^3 b/4 & 0 & 0 \\ 0 & \pi a b^3/4 & 0 \\ 0 & 0 & \pi a b \end{pmatrix}$$

con inversa

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 4/\pi a^3 b & 0 & 0 \\ 0 & 4/\pi a b^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\pi a b \end{pmatrix}$$

per cui i punti della superficie di completo appoggio sono tutti e soltanto gli  $(x_G, y_G) \in \mathbb{R}^2$  tali che

$$(x \ y \ 1) \begin{pmatrix} 4/\pi a^3 b & 0 & 0 \\ 0 & 4/\pi a b^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\pi a b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} > 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

vale a dire

$$\frac{4}{\pi a^3 b} x x_G + \frac{4}{\pi a b^3} y y_G + \frac{1}{\pi a b} > 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

La condizione si scrive nella forma equivalente

$$\frac{x x_G}{a^2} + \frac{y y_G}{b^2} + \frac{1}{4} > 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

che è opportuno riesprimere nelle coordinate definite da

$$x = a \rho \cos \varphi \quad y = b \rho \sin \varphi \quad \rho \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$x_G = a \rho_G \cos \varphi_G \quad y_G = b \rho_G \sin \varphi_G \quad \rho_G \geq 0, \varphi_G \in [0, 2\pi)$$

in termini delle quali si ottiene

$$\rho \rho_G \cos(\varphi - \varphi_G) + \frac{1}{4} > 0 \quad (\rho, \varphi) \in [0, 1] \times [0, 2\pi).$$

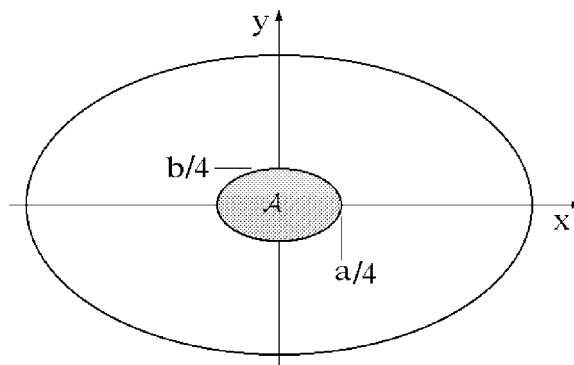
Essendo  $\rho_G \geq 0$ , il minimo della funzione a primo membro è raggiunto in  $(\rho, \varphi) = (1, \varphi_G + \pi \bmod 2\pi)$  e vale

$$-\rho_G + \frac{1}{4} > 0$$

per cui la superficie di completo appoggio è individuata dall'insieme

$$\mathcal{A} = \left\{ (x_G, y_G) = (a \rho_G \cos \varphi_G, b \rho_G \sin \varphi_G) : 0 \leq \rho_G < \frac{1}{4}, \varphi_G \in [0, 2\pi) \right\}$$

in cui si riconosce il *dominio aperto del piano  $Oxy$  contenente l'origine e avente come frontiera l'ellisse di semiassi  $a/4$  e  $b/4$  rispettivamente paralleli a quelli della frontiera di  $\Omega$*  — la seconda ellisse si ottiene dalla prima per omotetia, applicando il fattore di scala  $1/4$ . Il risultato è illustrato nella figura che segue



# Indice degli argomenti

1.	Corpo rigido pesante appoggiato su un piano orizzontale rigido e privo di attrito .....	1
2.	Configurazioni di equilibrio .....	2
3.	Condizione necessaria per l'equilibrio .....	3
3.1	Definizione. Poligono d'appoggio .....	4
3.2	Definizione. Centro di pressione .....	4
3.3	Condizione necessaria .....	5
4.	Condizione sufficiente per l'equilibrio .....	5
5.	Caratterizzazione completa dell'equilibrio .....	6
6.	Caratterizzazione dell'involuppo convesso di un insieme finito di punti in un piano .....	6
6.1	Lemma 1. Combinazioni lineari convesse .....	7
6.2	Lemma 2. Rappresentazione dei punti del triangolo chiuso .....	8
6.3	Lemma 3. Inviluppo convesso di un insieme finito .....	11
6.4	Lemma 4. Inclusione di $\text{conv}(\Omega)$ nell'unione dei triangoli $\text{Triang}(\Omega)$ .....	12
6.5	Lemma 5. Caratterizzazione dell'involuppo convesso in termini di combinazioni lineari convesse .....	12
6.6	Non univocità della rappresentazione dei punti di $\text{conv}(\Omega)$ mediante combinazioni lineari convesse .....	13
7.	Estensione a corpi con un numero infinito di punti .....	14
8.	Condizione dei vincoli ideali per un corpo rigido appoggiato .....	15
8.1	Condizione dei vincoli ideali .....	15
8.2	Forma semplificata della condizione dei vincoli ideali .....	16
8.3	Condizione semplificata dei vincoli ideali espressa mediante il prodotto scalare ..	16
8.4	Risultanti e momenti risultanti delle reazioni esplicabili per i vincoli ideali .....	17
8.5	Equivalenza con il modello del piano orizzontale rigido .....	20
9.	Modello del suolo debolmente cedevole .....	21
9.1	Condizione necessaria per l'equilibrio .....	22
9.1.1	Coefficienti di struttura all'equilibrio .....	22
9.1.2	Calcolo dei coefficienti di struttura .....	23
9.1.3	Condizione necessaria per l'equilibrio .....	24
9.1.4	Poligono (o superficie) di completo appoggio .....	25
9.1.5	Terna "centrale d'inerzia" per la base d'appoggio .....	25
9.1.6	Struttura del poligono di completo appoggio .....	27
9.1.7	Forma finale della condizione necessaria per l'equilibrio .....	27
9.2	Condizione sufficiente per l'equilibrio .....	28
9.3	Casi critici. Modello esteso .....	28
10.	Esempio illustrativo .....	29
11.	Complemento. Equivalenza dei modelli a piano rigido e a piano debolmente cedevole nel caso di tre punti d'appoggio .....	31

12.	Complemento. Superficie di completo appoggio e nocciolo centrale d'inerzia . . . .	35
12.1	Centro relativo di un sistema piano di punti $\Omega$ rispetto ad una retta . . . . .	35
12.2	Nocciolo centrale d'inerzia di $\Omega$ . . . . .	35
12.3	Caso di base d'appoggio $\Omega$ continua . . . . .	37
12.3.1	Per $\Omega$ compatto la superficie di completo appoggio $\mathcal{A}$ è un aperto di $\mathbb{R}^2$ . . . . .	38
12.3.2	Base d'appoggio $\Omega$ costituita da una unione finita di poligoni compatti . . . . .	40
12.4	Esempio: nocciolo centrale d'inerzia per base d'appoggio rettangolare . . . . .	42
12.5	Esempio: nocciolo centrale d'inerzia per base d'appoggio circolare . . . . .	44
12.6	Esempio: nocciolo centrale d'inerzia per base d'appoggio ellittica . . . . .	47