

# Moti e sistemi rigidi

Dispense per il corso di Meccanica Razionale 1  
di Stefano Siboni

## 1. Moto rigido di un sistema di punti

Sia dato un sistema  $\mathbb{S}$  di  $N \geq 2$  punti materiali  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Per **configurazione** del sistema si intende la collezione delle posizioni simultanee di tutti i punti  $P_i$  ad uno stesso istante, e la si indicherà con la notazione:

$$P = (P_1, \dots, P_N).$$

**Moto** del sistema di punti è una qualsiasi applicazione definita su un intervallo di tempo  $I$ , che ad ogni istante  $t \in I$  fa corrispondere una configurazione del sistema:

$$t \in I : \longrightarrow P(t) = (P_1(t), \dots, P_N(t)).$$

Nelle usuali applicazioni meccaniche si considerano i soli **moti regolari**: il moto è una funzione di classe  $C^2$  nel proprio intervallo  $I$  di definizione. La condizione di regolarità del moto assicura l'esistenza di velocità ed accelerazione istantanea per ogni  $t \in I$ . Si parla di **moto rigido** del sistema  $\mathbb{S}$  quando le mutue distanze dei punti di  $\mathbb{S}$  si mantengono costanti durante il moto, vale a dire:

$$|P_i(t) - P_j(t)| = \alpha_{ij}, \text{ costante,} \quad \forall t \in I, \quad \forall i, j = 1, \dots, N.$$

## 2. Spazio solidale ad un sistema in moto rigido

Nella maggior parte delle applicazioni meccaniche, oltre al sistema in moto rigido  $\mathbb{S}$  ha interesse a considerare il cosiddetto **spazio solidale**. Geometricamente lo **spazio solidale** ad  $\mathbb{S}$  coincide con l'intero spazio fisico, i cui punti tuttavia vengono assunti in **moto solidale** con i punti del sistema  $\mathbb{S}$ : ognuno di essi è considerato in moto mantenendo costante la sua distanza da ciascun punto di  $\mathbb{S}$ . Lo spazio solidale ad  $\mathbb{S}$  prolunga idealmente a tutto lo spazio fisico il moto rigido di  $\mathbb{S}$ . Poiché nella maggior parte delle applicazioni non ha alcun interesse distinguere fra il sistema  $\mathbb{S}$  e lo spazio ad esso solidale, si è soliti indicare con lo stesso simbolo  $\mathbb{S}$  tanto il sistema di punti in moto rigido quanto il relativo spazio solidale. La stessa convenzione verrà seguita anche in queste note.

### 2.1 Terna solidale ad un sistema in moto rigido

Il moto di  $\mathbb{S}$  definisce, ad ogni istante  $t$ , una trasformazione dello spazio  $\mathbb{E}^3$  in se stesso. L'invarianza delle distanze fra i punti dello spazio solidale lungo il moto ha precise conseguenze su tale trasformazione, deducibili da considerazioni geometriche elementari:

- punti dello spazio solidale che risultino allineati ad un dato istante  $t' \in I$  tali si mantengono ad ogni altro istante  $t \in I$ ;
- qualsiasi triangolo che abbia per vertici tre punti arbitrari dello spazio solidale si mantiene congruente a se stesso lungo il moto. In particolare, gli angoli interni del triangolo sono invarianti nel tempo;

- se alcuni punti dello spazio solidale sono allineati lungo due rette concorrenti in un punto, le rette si mantengono concorrenti e l'angolo compreso fra di esse è invariante durante il moto. Se le due rette sono fra loro ortogonali, in particolare, lungo il moto rigido esse si trasformano in rette comunque ortogonali. Nel caso le rette siano parallele, il parallelismo si conserva lungo il moto del sistema.

Ne deriva che *qualsiasi terna di riferimento cartesiana ortogonale destra costituita da punti dello spazio solidale si trasforma, al variare del tempo, in una terna dello stesso tipo*. Una terna cosiffatta viene detta **terna di riferimento solidale** al sistema in moto rigido  $\mathbb{S}$  e rispetto ad essa tutti i punti dello spazio solidale hanno, come è ovvio, coordinate costanti.

## 2.2 Moto rigido come moto di trascinamento

La definizione di terna solidale consente di affermare che *il moto rigido del sistema  $\mathbb{S}$  e dello spazio ad esso solidale può sempre interpretarsi come moto di trascinamento di una qualsiasi terna solidale ad  $\mathbb{S}$  rispetto alla terna assoluta*.

Per contro, è facile convincersi che qualsiasi moto di trascinamento di una terna mobile rispetto ad una terna assoluta, comunque assegnate, risulta sempre rigido secondo la precedente definizione. Data una terna fissa  $\Omega\xi_1\xi_2\xi_3$  ed una terna mobile  $Ox_1x_2x_3$ , entrambe ortogonali, le posizioni assolute di due punti arbitrari  $A$  e  $B$  dello spazio solidale a  $Ox_1x_2x_3$  si esprimono per mezzo delle relazioni vettoriali

$$\begin{aligned} A(t) - \Omega &= O(t) - \Omega + \sum_{i=1}^3 a_i \hat{e}_i(t) \\ B(t) - \Omega &= O(t) - \Omega + \sum_{i=1}^3 b_i \hat{e}_i(t) \end{aligned} \quad \forall t \in I$$

dove l'origine  $O$  e i versori  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  della terna mobile sono funzioni assegnate  $C^1$  del tempo  $t$  nell'intervallo  $I$ , mentre le coordinate  $a_1, a_2, a_3$  di  $A$  e  $b_1, b_2, b_3$  di  $B$  rispetto allo stesso riferimento sono delle costanti. Sottraendo membro a membro le equazioni precedenti si ha allora

$$A(t) - B(t) = \sum_{i=1}^3 (a_i - b_i) \hat{e}_i(t)$$

e quadrando la relazione così ottenuta si perviene all'espressione

$$\begin{aligned} |A(t) - B(t)|^2 &= \left| \sum_{i=1}^3 (a_i - b_i) \hat{e}_i(t) \right|^2 = \\ &= \sum_{i=1}^3 (a_i - b_i) \hat{e}_i(t) \cdot \sum_{j=1}^3 (a_j - b_j) \hat{e}_j(t) = \sum_{i=1}^3 (a_i - b_i)^2 \end{aligned}$$

in quanto la base mobile  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  si mantiene ortonormale al variare del tempo

$$\hat{e}_i(t) \cdot \hat{e}_j(t) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, 2, 3, \quad \forall t \in I.$$

Ne deriva che la distanza fra i punti  $A$  e  $B$  dello spazio solidale alla terna mobile risulta costante durante l'intero moto di trascinamento. L'arbitrarietà dei punti  $A$  e  $B$  porta così a concludere che il moto dello spazio solidale rispetto alla terna assoluta, il moto di trascinamento, è rigido.

### 3. Velocità angolare e teorema di Poisson

Poiché il moto rigido del sistema  $\mathbb{S}$  — o dello spazio ad esso solidale — si può intendere come moto di trascinamento di una terna solidale ad  $\mathbb{S}$ , è possibile introdurre un **vettore velocità angolare istantanea** del moto rigido all'istante  $t \in I$ , identificabile con la velocità angolare istantanea  $\vec{\omega}$  del moto di trascinamento rispetto alla terna assoluta. Si osservi come la definizione di  $\vec{\omega}$  sia indipendente dalla scelta della terna di riferimento solidale; ciò per il fatto che due qualsivoglia terne di riferimento solidali sono sempre in stato di quiete relativa, per cui la base associata all'una si esprime mediante combinazioni lineari a coefficienti costanti di quella associata all'altra e l'invarianza di  $\vec{\omega}$  segue immediatamente dalle formule di Poisson. Introdotta una qualsiasi terna  $Ox_1x_2x_3$  solidale ad  $\mathbb{S}$ , un generico punto  $P$  dello spazio solidale può individuarsi per mezzo del vettore posizione

$$P = O + \sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i$$

in termini delle coordinate  $x_1, x_2, x_3$  di  $P$  rispetto alla terna solidale prescelta. La stessa relazione può essere usata per individuare il moto regolare del punto  $P$ , a patto di ricordare che le coordinate  $x_i$  si mantengono costanti durante il moto e che il moto di trascinamento è completamente determinato assegnando le leggi orarie  $O(t)$  ed  $\hat{e}_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3, \forall t \in I$ :

$$P(t) = O(t) + \sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i(t).$$

Derivando rispetto al tempo si ottiene la distribuzione delle velocità dei punti  $P$  dello spazio solidale all'istante  $t \in I$  considerato:

$$\dot{P} = \dot{O} + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{d\hat{e}_i}{dt} + \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \hat{e}_i = \dot{O} + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{d\hat{e}_i}{dt}$$

che la formula di Poisson  $d\hat{e}_i/dt = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_i$  permette di riscrivere nella forma equivalente:

$$\dot{P} = \dot{O} + \sum_{i=1}^3 x_i \vec{\omega} \wedge \hat{e}_i = \dot{O} + \vec{\omega} \wedge \sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i = \dot{O} + \vec{\omega} \wedge (P - O).$$

Il **teorema di Poisson** così stabilito fornisce l'espressione generale per la distribuzione delle velocità istantanee in un moto rigido:

$$\dot{P} = \dot{O} + \vec{\omega} \wedge (P - O).$$

Dati due punti qualsiasi  $P$  e  $Q$  partecipi del moto rigido — cioè di  $\mathbb{S}$  o dello spazio a questo solidale — il teorema di Poisson lega le loro velocità istantanee, le rispettive posizioni ed il vettore velocità angolare istantanea del moto rigido all'istante considerato:

$$\dot{P} = \dot{Q} + \vec{\omega} \wedge (P - Q).$$

## 4. Atto di moto rigido

Si definisce **atto di moto rigido** la distribuzione delle velocità di un sistema in moto rigido, ovvero dello spazio a questo solidale, ad un dato istante. Si può immaginare l'atto di moto rigido come una sorta di istantanea del campo di velocità del sistema in moto rigido. L'atto di moto rigido risulta completamente determinato noto che sia il vettore velocità angolare istantanea  $\vec{\omega}$  e la velocità, allo stesso istante, di un qualsiasi punto  $O$  partecipe dell'atto di moto rigido stesso. Tra moto e atto di moto rigido sussiste la stessa relazione che intercorre fra il moto e la velocità istantanea di un punto. Assegnato che sia il moto rigido  $P(t)$ ,  $t \in I$ , l'atto di moto rigido è determinato univocamente ad ogni istante  $t \in I$  per mezzo di una derivazione rispetto al tempo e quindi del teorema di Poisson:

$$\dot{P} = \dot{O} + \vec{\omega} \wedge (P - O). \quad (4.1)$$

Per contro, l'assegnazione dell'atto di moto rigido ad un dato istante  $t_0 \in I$  **non consente** di ricostruire l'intero moto rigido del sistema. Per poter individuare univocamente il moto rigido del sistema e dello spazio solidale si rende necessario assegnare l'atto di moto rigido ad ogni istante  $t \in I$ , nonché l'eventuale configurazione di  $\mathbb{S}$  ad un istante  $t_0 \in I$  comunque prefissato. Poiché, per il teorema di Poisson, l'atto di moto rigido è specificato completamente dalla velocità angolare  $\vec{\omega}$  e dalla velocità istantanea di un punto  $O$  partecipe dell'atto di moto stesso, individuare il moto nell'intervallo di tempo  $I$  equivale a risolvere in  $I$  il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{P} = \dot{O} + \vec{\omega}(t) \wedge (P - O) & (t, P) \in I \times \mathbb{R}^3 \\ P(t_0) = P_0 & (t_0, P_0) \in I \times \mathbb{R}^3 \end{cases} \quad (4.2)$$

per qualsiasi punto  $P \in \mathbb{R}^3$  di posizione iniziale  $P(t_0) = P_0$ . Che questa soluzione sia univocamente definita per ogni  $P \in \mathbb{R}^3$  e prolungabile sull'intervallo  $I$  segue immediatamente dal teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni massimali per il problema di Cauchy delle equazioni differenziali del primo ordine in forma normale, nonché dal teorema di prolungabilità. Basta osservare che:

- l'equazione differenziale di (4.2) è del primo ordine nella variabile dipendente  $P$ , e in forma normale;
- i termini  $\vec{\omega}$  e  $\dot{O}$ , che specificano l'atto di moto rigido  $\forall t \in I$ , devono intendersi funzioni di classe almeno  $C^1$  del tempo  $t$ . Essi infatti devono dare luogo ad un moto rigido regolare del sistema e dello spazio a questo solidale. Ne segue che la funzione a secondo membro dell'equazione (4.2) non solo è lineare nelle componenti di  $P - O$  rispetto alla terna assoluta, ma i suoi coefficienti sono pure funzioni  $C^1$  del tempo  $t \in I$ . Il secondo membro dell'equazione differenziale (4.2) è quindi una funzione  $C^1$  dei propri

argomenti  $P - O \in \mathbb{R}^3$  e  $t \in I$ . Il teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni massimali per il problema di Cauchy è dunque applicabile, come pure il teorema di prolungabilità;

- o lungo una qualsiasi soluzione del sistema (4.2) deve aversi:

$$\frac{d}{dt}(P - O)^2 = 2(P - O) \cdot (\dot{P} - \dot{O}) = 2(P - O) \cdot \vec{\omega} \wedge (P - O) = 0$$

per cui la distanza fra i punti  $P$  ed  $O$  si mantiene costante lungo la soluzione considerata. Il teorema di prolungabilità consente allora di concludere che la soluzione massimale di (4.2) deve essere definita sull'intero intervallo  $I$ ;

- o se  $P(t)$  e  $Q(t)$  sono due soluzioni massimali dell'equazione differenziale (4.2), si ha

$$\dot{P} - \dot{Q} = \vec{\omega} \wedge (P - O) - \vec{\omega} \wedge (Q - O) = \vec{\omega} \wedge (P - Q)$$

in modo che

$$\frac{d}{dt}(P - Q)^2 = 2(P - Q) \cdot (\dot{P} - \dot{Q}) = 2(P - Q) \cdot \vec{\omega} \wedge (P - Q) = 0$$

e quindi la distanza fra i punti  $P$  e  $Q$  rimane invariata durante tutto il moto. Questo risultato porta a concludere che i moti indotti dal problema di Cauchy (4.2) sono effettivamente rigidi, come affermato.

## 5. Moti rigidi composti e teoremi di composizione

Si è già sottolineato precedentemente come qualsiasi moto rigido possa essere interpretato come moto di trascinamento di una terna solidale rispetto alla terna assoluta. Due moti rigidi  $\mathfrak{M}_1$  ed  $\mathfrak{M}_2$  possono essere perciò interpretati come moto di una terna  $\mathfrak{T}_2$  relativamente ad un'altra terna  $\mathfrak{T}_1$  e, rispettivamente, di una ulteriore terna  $\mathfrak{T}_3$  rispetto alla  $\mathfrak{T}_2$ . Si definisce allora la **composizione dei moti rigidi  $\mathfrak{M}_1$  ed  $\mathfrak{M}_2$**  come il moto di trascinamento della terna  $\mathfrak{T}_3$  rispetto alla terna  $\mathfrak{T}_1$ . Questo moto **moto composto**, usualmente indicato con  $\mathfrak{M}_2 \circ \mathfrak{M}_1$ , è per definizione un moto rigido in quanto moto di trascinamento di una terna mobile rispetto ad una terna fissa. Molto importanti sono le relazioni che legano le velocità istantanee del moto composto a quelle dei moti componenti, nonché la velocità angolare istantanea del moto composto a quelle dei moti rigidi componenti.

### 5.1 Teorema di composizione delle velocità

Il teorema dei moti rigidi composti per le velocità stabilisce la relazione fra le velocità istantanee del moto composto e quelle dei moti rigidi componenti. L'enunciato è il seguente.

*La velocità istantanea di un qualsiasi punto  $P$  del moto composto  $\mathfrak{M}_2 \circ \mathfrak{M}_1$  è data dalla somma della velocità di trascinamento di  $P$  imputabile al moto componente  $\mathfrak{M}_1$  e della velocità di trascinamento di  $P$  dovuta al moto  $\mathfrak{M}_2$ .*

Il risultato si ottiene riguardando  $\mathfrak{M}_1$  come moto di trascinamento di una terna  $\mathfrak{T}_2$  rispetto ad una seconda terna  $\mathfrak{T}_1$  e, in modo analogo,  $\mathfrak{M}_2$  come moto di trascinamento della terna  $\mathfrak{T}_3$  rispetto a  $\mathfrak{T}_2$ . È sufficiente osservare che:

- se si applica il teorema dei moti relativi considerando  $\mathfrak{T}_1$  come terna fissa e  $\mathfrak{T}_2$  come terna mobile, la velocità relativa a  $\mathfrak{T}_1$  di un qualsiasi punto  $P$  partecipe del moto composto, e quindi solidale a  $\mathfrak{T}_3$ , si scrive nella forma

$$\dot{P}_1 = \dot{P}_{T,21} + \dot{P}_2 \quad (5.1)$$

in termini della velocità  $\dot{P}_2$  di  $P$  relativa a  $\mathfrak{T}_2$  e della velocità  $\dot{P}_{T,21}$  di trascinamento di  $P$  dovuta al moto  $\mathfrak{M}_1$ ;

- lo stesso teorema dei moti relativi applicato riguardando  $\mathfrak{T}_2$  come terna fissa e  $\mathfrak{T}_3$  come terna mobile, consente di esprimere la velocità di  $P$  relativa a  $\mathfrak{T}_2$  per mezzo della relazione

$$\dot{P}_2 = \dot{P}_{T,32} + \dot{P}_3$$

e quindi, per l'annullarsi della velocità di  $P$  relativa a  $\mathfrak{T}_3$ , di identificarla con la velocità  $\dot{P}_{T,32}$  di trascinamento di  $P$  dovuta al moto  $\mathfrak{M}_2$

$$\dot{P}_2 = \dot{P}_{T,32}; \quad (5.2)$$

- sostituendo l'equazione (5.2) nella (5.1) si perviene al risultato richiesto

$$\dot{P}_1 = \dot{P}_{T,21} + \dot{P}_{T,32}$$

valido per ogni punto  $P$  partecipe del moto composto  $\mathfrak{M}_2 \circ \mathfrak{M}_1$ .

## 5.2 Teorema di composizione delle velocità angolari

Il teorema dei moti composti per le velocità angolari fornisce una semplice relazione fra il vettore velocità angolare istantanea del moto composto  $\mathfrak{M}_2 \circ \mathfrak{M}_1$  e i vettori velocità angolare dei moti rigidi componenti  $\mathfrak{M}_1$  e  $\mathfrak{M}_2$ . Il teorema si enuncia come segue.

*La velocità angolare istantanea del moto composto  $\mathfrak{M}_2 \circ \mathfrak{M}_1$  coincide con la somma delle velocità angolari istantanee dei moti rigidi componenti, allo stesso istante.*

La dimostrazione è analoga a quella del teorema precedente. Conviene considerare ancora  $\mathfrak{M}_1$  come moto di trascinamento di una terna  $\mathfrak{T}_2$  rispetto alla terna  $\mathfrak{T}_1$ , ed  $\mathfrak{M}_2$  come moto di trascinamento della terna  $\mathfrak{T}_3$  rispetto alla terna  $\mathfrak{T}_2$ . Dati due punti arbitrari  $P$  e  $Q$  partecipi del moto composto, ossia solidali alla terna  $\mathfrak{T}_3$ , le loro velocità relative a  $\mathfrak{T}_1$  soddisfano la relazione

$$\dot{P}_1 - \dot{Q}_1 = \vec{\omega}_{31} \wedge (P - Q) \quad (5.3)$$

nella quale figura la velocità angolare istantanea  $\vec{\omega}_{31}$  del moto di trascinamento della terna  $\mathfrak{T}_3$  rispetto a  $\mathfrak{T}_1$ , cioè la velocità angolare istantanea del moto composto. D'altra parte,

il teorema dei moti composti per le velocità permette di scrivere le velocità del moto composto come somma delle velocità di trascinamento imputabili ai moti  $\mathfrak{M}_1$  ed  $\mathfrak{M}_2$

$$\dot{P}_1 - \dot{Q}_1 = \dot{P}_{T,21} - \dot{Q}_{T,21} + \dot{P}_{T,32} - \dot{Q}_{T,32}. \quad (5.4)$$

Il teorema di Poisson esprime infine le velocità di trascinamento in termini delle velocità angolari istantanee  $\vec{\omega}_{21}$ ,  $\vec{\omega}_{32}$ , rispettivamente di  $\mathfrak{T}_2$  rispetto a  $\mathfrak{T}_1$  e di  $\mathfrak{T}_3$  rispetto a  $\mathfrak{T}_2$ :

$$\dot{P}_{T,21} - \dot{Q}_{T,21} = \vec{\omega}_{21} \wedge (P - Q) \quad (5.5)$$

$$\dot{P}_{T,32} - \dot{Q}_{T,32} = \vec{\omega}_{32} \wedge (P - Q) \quad (5.6)$$

per cui la sostituzione delle relazioni (5.3), (5.5) e (5.6) nella (5.4) conduce all'identità

$$\vec{\omega}_{31} \wedge (P - Q) = \vec{\omega}_{21} \wedge (P - Q) + \vec{\omega}_{32} \wedge (P - Q)$$

che deve essere verificata per ogni coppia di punti  $P$  e  $Q$  dello spazio solidale a  $\mathfrak{T}_3$ . Le velocità angolari istantanee devono perciò soddisfare la relazione equivalente

$$(-\vec{\omega}_{31} + \vec{\omega}_{21} + \vec{\omega}_{32}) \wedge (P - Q) = 0 \quad \forall P - Q \in \mathbb{R}^3$$

la quale implica<sup>(1)</sup>

$$-\vec{\omega}_{31} + \vec{\omega}_{21} + \vec{\omega}_{32} = 0$$

e quindi il risultato richiesto.

## 6. Moti rigidi notevoli

Alcune tipologie di moti rigidi sono di particolare rilevanza. Si tratta dei:

- moti traslatori
- moti con asse fisso, o rotatori
- moti elicoidali

### 6.1 Moti traslatori

*Si definisce traslatorio il moto di un sistema  $\mathbb{S}$  di punti  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , per il quale il vettore posizione di un qualsiasi punto del sistema rispetto a qualsiasi altro risulta costante nel tempo:*

$$P_i(t) - P_j(t) = \vec{v}_{ij}, \text{ costante,} \quad \forall t \in I, \quad \forall i, j = 1, \dots, N.$$

La costanza del vettore posizione implica la costanza della distanza, per cui i moti traslatori sono necessariamente rigidi. Accanto al moto traslatorio del sistema  $\mathbb{S}$  è dato quindi

---

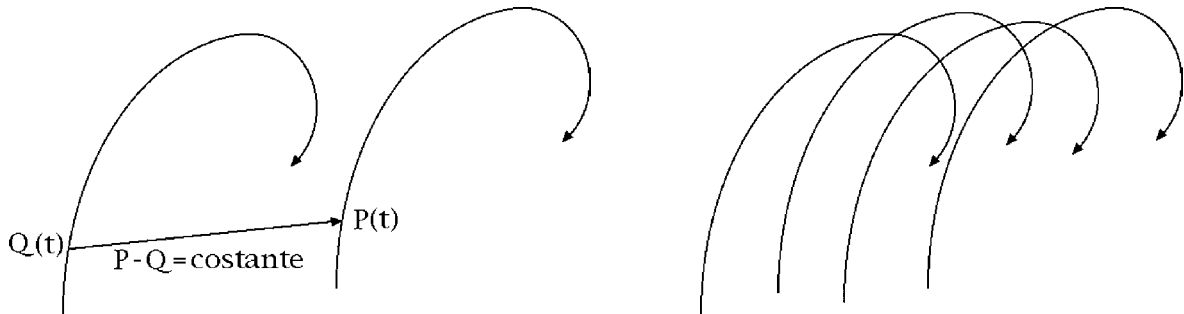
<sup>(1)</sup> il risultato segue immediatamente assumendo per assurdo  $-\vec{\omega}_{31} + \vec{\omega}_{21} + \vec{\omega}_{32} \neq 0$  e scegliendo  $P - Q \perp -\vec{\omega}_{31} + \vec{\omega}_{21} + \vec{\omega}_{32}$ , come è sempre lecito per l'arbitrarietà del vettore  $P - Q$ .

considerare, del tutto equivalentemente, anche quello del relativo spazio solidale. Per contro, l'invarianza della distanza  $|P_i - P_j|$  non implica quella del vettore posizione  $P_i - P_j$ , per cui i moti traslatori sono soltanto **particolari moti rigidi**.

In un moto traslatorio qualsiasi le traiettorie dei singoli punti sono completamente arbitrarie. Di notevole vi è soltanto il fatto che noto il moto di un punto  $Q$  dello spazio solidale, il moto di un qualsiasi altro punto  $P$  dello stesso spazio è determinato completamente dall'invarianza nel tempo del vettore posizione relativo a  $Q$ :

$$P(t) = Q(t) + P - Q \quad \forall t \in I.$$

In un certo senso, un po' euristicamente, le traiettorie dei punti in un moto traslatorio si ottengono le une dalle altre per una semplice traslazione, secondo un vettore fisso che dipende soltanto dal punto considerato, come illustra la figura seguente:



I moti traslatori sono suscettibili di tutta una serie di caratterizzazioni notevoli, molto utili nelle applicazioni cinematiche e dinamiche.

### 6.1.1 Caratterizzazione in termini dei versori di una terna solidale

*Un moto rigido è traslatorio nell'intervallo di tempo  $I$  se e soltanto se, considerata una qualsiasi terna solidale  $Ox_1x_2x_3$ , i versori di base associati  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  si mantengono costanti per ogni  $t \in I$ .*

Se il moto rigido è di tipo traslatorio, è chiaro che i versori di una qualsiasi terna solidale  $Ox_1x_2x_3$  sono i vettori posizione rispetto all'origine  $O$  di particolari punti dello spazio solidale, che nel tempo devono mantenersi costanti:

$$\hat{e}_i(t) = \text{costante} \quad \forall t \in I, \quad \forall i = 1, 2, 3.$$

Per contro, se i versori di una qualsiasi terna solidale sono costanti nel tempo è sufficiente osservare che qualsiasi coppia di punti dello spazio solidale viene individuata da espressioni della forma

$$P(t) = O(t) + \sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i(t) \quad Q(t) = O(t) + \sum_{i=1}^3 y_i \hat{e}_i(t)$$

nelle quali le coordinate  $x_1, x_2, x_3$  e  $y_1, y_2, y_3$  dei punti  $P$  e  $Q$  sono indipendenti dal tempo, e che di conseguenza il vettore posizione  $P - Q$  è costante in  $t$ :

$$P(t) - Q(t) = \sum_{i=1}^3 (x_i - y_i) \hat{e}_i(t) = \sum_{i=1}^3 (x_i - y_i) \hat{e}_i \quad \forall t \in I.$$

Si osservi che la velocità  $\dot{O}(t)$  dell'origine  $O(t)$  può essere identificata con il vettore  $\vec{v}(t)$  di cui al punto precedente.

### 6.1.2 Caratterizzazione in termini della velocità angolare istantanea

*Un moto rigido è traslatorio nell'intervallo di tempo  $I$  se e soltanto se la sua velocità angolare istantanea  $\vec{\omega}(t)$  risulta costantemente nulla  $\forall t \in I$*

Si è già osservato che il moto rigido è traslatorio in  $I$  se e soltanto se costanti sono in  $I$  i versori di base  $\hat{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , associati ad una qualsiasi terna solidale. Nell'ipotesi di moto traslatorio si ha quindi, ricordando le formule di Poisson:

$$0 = \frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\omega}(t) \wedge \hat{e}_i \quad \forall i = 1, 2, 3, \quad \forall t \in I, ,$$

dal che si deduce immediatamente<sup>(1)</sup> che  $\vec{\omega}(t) = 0 \forall t \in I$ . In modo analogo, se si assume che  $\vec{\omega}(t) = 0 \forall t \in I$ , deve risultare:

$$\frac{d\hat{e}_i}{dt}(t) = \vec{\omega}(t) \wedge \hat{e}_i(t) = 0 \wedge \hat{e}_i(t) = 0 \quad \forall t \in I, \quad \forall i = 1, 2, 3$$

in modo che i versori di base sono costanti a tutti i tempi:

$$\hat{e}_i(t) = \text{costante} \quad \forall t \in I, \quad \forall i = 1, 2, 3.$$

### 6.1.3 Caratterizzazione in termini dell'atto di moto

*Un moto è traslatorio nell'intervallo di tempo  $I$  se e soltanto se per ogni  $t \in I$  l'atto di moto corrispondente è uniforme, cioè indipendente dalla posizione nello spazio.*

Per ogni punto  $P$  di  $\mathbb{S}$  o dello spazio a questo solidale si ha

$$\dot{P}(t) = \vec{v}(t)$$

con il vettore  $\vec{v}(t)$  che può dipendere dal tempo ma non dalla posizione. Si osservi che l'atto di moto non è necessariamente costante da un istante all'altro, sebbene tutti i punti dello spazio solidale abbiano la stessa velocità istantanea ad un qualsiasi istante  $t \in I$  preassegnato. La condizione sull'atto di moto è certamente necessaria, poiché derivando rispetto al tempo la condizione del moto traslatorio

$$P(t) - Q(t) = \text{costante} \quad \forall t \in I, \quad \forall P, Q \in \mathbb{S}$$

---

<sup>(1)</sup> Il solo vettore  $\vec{\omega}$  simultaneamente parallelo a  $\hat{e}_1$ ,  $\hat{e}_2$  ed  $\hat{e}_3$  è il vettore nullo.

si ricava

$$\dot{P}(t) - \dot{Q}(t) = 0 \quad \forall t \in I, \quad \forall P, Q \in \mathbb{S}$$

e, indicata con  $\vec{v}(t)$  la velocità istantanea al tempo  $t \in I$  di un punto preassegnato  $Q$  dello spazio solidale, si prova l'uniformità dell'atto di moto ad ogni  $t$

$$\dot{P}(t) = \vec{v}(t) \quad \forall P \in \mathbb{S}, \quad \forall t \in I.$$

Viceversa, se l'atto di moto del sistema è uniforme ad ogni tempo:

$$\dot{P}(t) = \vec{v}(t) \quad \forall P \in \mathbb{R}^3, \quad \forall t \in I,$$

basta integrare fra un istante iniziale  $t_0 \in I$  prefissato ed un istante finale  $t \in I$  arbitrario per ottenere:

$$P(t) - P(t_0) = \int_{t_0}^t \dot{P}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \vec{v}(\tau) d\tau$$

e concludere quindi che il vettore posizione di un qualsiasi punto  $P$  dello spazio solidale al moto rispetto ad un qualsiasi altro punto  $Q$  è costante in  $t$ :

$$P(t) - Q(t) = P(t_0) - Q(t_0) \quad \forall t \in I,$$

come richiesto.

#### 6.1.4 Forma generale dell'atto di moto traslatorio

Per quanto detto sopra, l'atto di moto traslatorio è caratterizzato dalla **uniformità**: la velocità istantanea è indipendente dalla posizione  $P \in \mathbb{R}^3$  considerata, pur potendo variare da un istante all'altro, durante il moto. La forma generale dell'atto di moto traslatorio è quindi espressa da:

$$\dot{P} = \vec{v}$$

con  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$  vettore eventualmente dipendente dal tempo, ma indipendente dalla posizione  $P$ . Si osservi che la relazione è un caso particolare dell'espressione generale (4.1) per l'atto di moto rigido — teorema di Poisson — con  $\vec{\omega} = 0$ .

#### 6.1.5 Caso particolare di moto traslatorio: moto traslatorio rettilineo

Si è già sottolineato che in un moto traslatorio qualsiasi le traiettorie dei singoli punti sono completamente arbitrarie, a causa del fatto che la velocità istantanea  $\vec{v}$ , sebbene la stessa per tutti i punti partecipi del moto, può dipendere dal tempo. Un caso di particolare interesse è quello in cui la velocità  $\vec{v}$  si mantiene costante in direzione, potendosi esprimere nella forma

$$\vec{v}(t) = v(t) \hat{n}$$

in termini di un versore costante assegnato  $\hat{n}$  e di una funzione scalare  $v(t)$  di classe  $C^1$  nell'intervallo  $I$ . Una integrazione rispetto al tempo dell'atto di moto

$$\dot{P}(t) = v(t) \hat{n}$$

fra un istante  $t_0 \in I$  fissato a piacere ad un istante  $t \in I$  arbitrario porge infatti:

$$P(t) - P(t_0) = \int_{t_0}^t v(\tau) \hat{n} d\tau$$

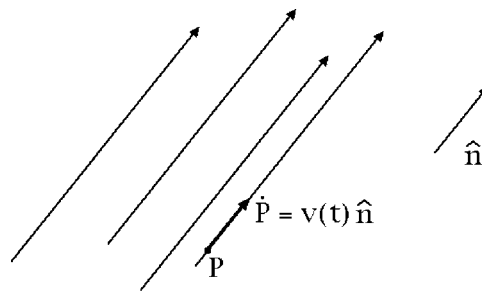
per cui

$$P(t) = P(t_0) + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \hat{n}$$

e la traiettoria del generico punto  $P$  dello spazio solidale risulta rettilinea. Per questo motivo il moto traslatorio così ottenuto è detto **moto traslatorio rettilineo**. Si ha quindi la definizione seguente.

*Il moto traslatorio rettilineo è quel moto traslatorio il cui atto di moto ha direzione — ma in generale non modulo e/o verso — costante.*

Si noti che in generale la velocità di un qualsiasi punto dello spazio solidale non è costante nel tempo, potendo variare tanto in modulo quanto in verso. Il moto del punto generico è rettilineo, ma nessuna condizione è imposta circa la legge oraria seguita dal punto lungo la propria traiettoria rettilinea. La figura seguente illustra le caratteristiche del generico moto traslatorio rettilineo:



### 6.1.6 Caso particolare: moto traslatorio rettilineo ed uniforme

Un caso particolare di moto traslatorio ricorre quando la velocità istantanea  $\vec{v}$  non solo è indipendente dalla posizione, ma anche dal tempo:

$$\dot{P} = \vec{v}, \quad \text{costante} \quad \forall P \in \mathbb{R}^3, \quad \forall t \in I.$$

La solita integrazione sull'intervallo  $[t_0, t] \subseteq I$  conduce all'equazione oraria:

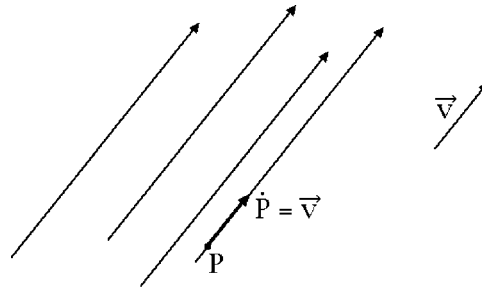
$$P(t) - P(t_0) = \int_{t_0}^t \vec{v} d\tau = (t - t_0) \vec{v}$$

per cui non soltanto tutti i punti  $P$  dello spazio solidale si muovono su traiettorie rettilinee, ma queste sono anche percorse con velocità costante, dunque di moto uniforme. Il moto di ogni punto dello spazio solidale è rettilineo ed uniforme, con la stessa velocità  $\vec{v}$ . Per questo

motivo un moto cosiffatto si dice **traslatorio rettilineo ed uniforme**. La definizione formale è riportata di seguito.

*Il moto traslatorio rettilineo e uniforme è quel moto traslatorio il cui atto di moto è indipendente dal tempo.*

Vale la pena di notare che nella definizione di moto traslatorio rettilineo e uniforme ricade anche il caso dello stato di quiete nell'intervallo  $t \in I$ , con  $\vec{v} = 0$ .



## 6.2 Moti con asse fisso, o rotatori

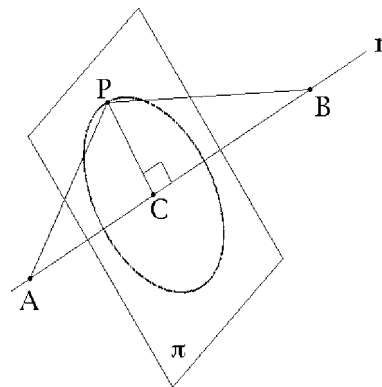
*Si dice moto rigido con asse fisso un qualunque moto rigido al cui spazio solidale appartiene una retta in quiete.*

La retta dello spazio solidale che si mantiene in quiete rispetto al riferimento assoluto è nota come **asse fisso**. Si sottolinea che, causa la definizione di moto rigido, risulta con asse fisso un qualsiasi moto rigido il cui spazio solidale contenga due punti distinti fissi rispetto al riferimento assoluto. La verifica è immediata.

Le traiettorie dei punti di un moto rigido con asse fisso  $r$  sono circolari e si collocano su circonferenze ortogonali all'asse, centrate su punti dello stesso  $r$ . Per provare l'asserto basta considerare che per ogni punto  $P$  dello spazio solidale non collocato su  $r$ , la sua distanza da due punti fissati  $A$  e  $B$  dell'asse  $r$  si mantiene costante nel tempo:

$$|P - A| = \text{costante} \quad |P - B| = \text{costante}$$

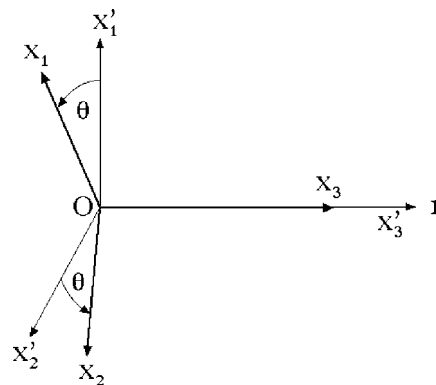
per cui il triangolo  $ABP$  si conserva congruente a se stesso, con la base  $AB$  collocata su  $r$ . Il punto  $P$  deve dunque muoversi lungo l'intersezione delle sfere di raggio  $|P - A|$  e  $|P - B|$  rispettivamente centrate nei punti fissi  $A$  e  $B$ ; tali sfere si intersecano lungo una circonferenza fissa, posta in un piano  $\pi$  ortogonale ad  $r$  e centrata nel punto  $C$  di intersezione fra  $r$  e  $\pi$ .  $C$  è anche la proiezione ortogonale di  $P$  sull'asse fisso. Per tale ragione i moti rigidi con asse fisso sono anche noti come **moti rotatori**.



Qualsiasi moto con asse fisso può essere descritto come moto di trascinamento di una terna solidale rispetto alla terna assoluta. La rappresentazione standard prevede di introdurre le terne assoluta e solidale in modo che:

- abbiano l'origine  $O$  in comune e appartenente all'asse fisso del moto;
- gli assi  $Ox_3, Ox'_3$  delle due terne coincidano con l'asse fisso.

Il moto della terna solidale  $Ox_1x_2x_3$  rispetto alla terna assoluta  $Ox'_1x'_2x'_3$  viene descritto per mezzo dell'angolo di rotazione  $\theta$  compreso fra gli assi  $Ox'_1$  e  $Ox_1$  delle due terne di riferimento. L'angolo  $\theta$  e l'asse fisso  $Ox'_3$  si assumono orientati l'uno rispetto all'altro secondo la cosiddetta **regola della mano destra** o di Stokes, nota anche come **convenzione sinistrorsa** o levogira: se si immagina di serrare a pugno la mano destra e di drizzarne il pollice, collocandolo lungo l'asse  $Ox'_3$  in modo che l'estremità ne indichi il verso, allora il senso di avvolgimento delle dita restanti specifica il verso dell'angolo  $\theta$  crescente. La mutua configurazione delle terne fissa e solidale è illustrata nella figura seguente:



Un generico moto rigido con asse fisso  $Ox_3$  viene specificato assegnando l'angolo di rotazione  $\theta$  come funzione del tempo in un opportuno intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Il moto con asse fisso è regolare se e soltanto se la funzione  $\theta(t)$  è di classe  $C^2$  nel proprio intervallo di

definizione. Di grande importanza è l'espressione della velocità angolare istantanea del moto rigido con asse fisso nella configurazione considerata. Tale espressione viene ricavata usando la relazione generale dedotta dalle formule di Poisson:

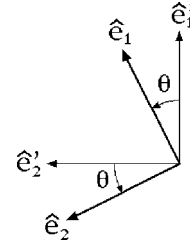
$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \hat{e}_i \wedge \frac{d\hat{e}_i}{dt} \quad (6.1)$$

e considerando la rappresentazione dei versori della terna solidale  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  in termini dei versori  $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$  della terna assoluta:

$$\begin{cases} \hat{e}_1 = \hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_1 \hat{e}'_1 + \hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_2 \hat{e}'_2 + \hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_3 \hat{e}'_3 \\ \hat{e}_2 = \hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_1 \hat{e}'_1 + \hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_2 \hat{e}'_2 + \hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_3 \hat{e}'_3 \\ \hat{e}_3 = \hat{e}_3 \cdot \hat{e}'_1 \hat{e}'_1 + \hat{e}_3 \cdot \hat{e}'_2 \hat{e}'_2 + \hat{e}_3 \cdot \hat{e}'_3 \hat{e}'_3. \end{cases}$$

Il calcolo esplicito dei coseni direttori  $\hat{e}_i \cdot \hat{e}'_j$  della terna mobile rispetto a quella fissa consente di scrivere questa rappresentazione nella forma:

$$\begin{cases} \hat{e}_1 = \cos \theta \hat{e}'_1 + \sin \theta \hat{e}'_2 \\ \hat{e}_2 = -\sin \theta \hat{e}'_1 + \cos \theta \hat{e}'_2 \\ \hat{e}_3 = \hat{e}'_3 \end{cases}$$



che derivata rispetto al tempo porge:

$$\begin{cases} d\hat{e}_1/dt = (-\sin \theta \hat{e}'_1 + \cos \theta \hat{e}'_2) \dot{\theta} \\ d\hat{e}_2/dt = (-\cos \theta \hat{e}'_1 - \sin \theta \hat{e}'_2) \dot{\theta} \\ d\hat{e}_3/dt = 0 \end{cases}$$

e sostituita nella formula (6.1) conduce al risultato richiesto:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \frac{1}{2} \hat{e}_1 \wedge \frac{d\hat{e}_1}{dt} + \frac{1}{2} \hat{e}_2 \wedge \frac{d\hat{e}_2}{dt} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \hat{e}'_1 & \hat{e}'_2 & \hat{e}'_3 \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \dot{\theta} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \hat{e}'_1 & \hat{e}'_2 & \hat{e}'_3 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{vmatrix} \dot{\theta} = \dot{\theta} \hat{e}'_3. \end{aligned}$$

Il vettore velocità angolare istantanea si ottiene quindi derivando rispetto al tempo l'angolo di rotazione  $\theta$  e moltiplicando il risultato per il versore associato all'asse fisso, nell'ipotesi che angolo e asse siano reciprocamente orientati secondo la convenzione sinistrorsa. In caso contrario l'espressione ricavata è ancora corretta a meno di un cambiamento di segno — con il quale si tiene conto dell'opposto orientamento dell'angolo o dell'asse.

### 6.2.1 Forma generale dell'atto di moto rigido con asse fisso

Il teorema di Poisson (4.1) per l'atto di moto rigido assume una forma particolarmente semplice nel caso dei moti rigidi con asse fisso. Se nella formula (4.1) si identifica  $O$  con un punto dell'asse fisso, si ha  $\dot{O} = 0$  e la relazione si riduce a:

$$\dot{P} = \vec{\omega} \wedge (P - O). \quad (6.2)$$

Se inoltre il punto  $P$  appartiene anch'esso all'asse fisso, deve risultare  $\dot{P} = 0$  e quindi

$$\vec{\omega} \wedge (P - O) = 0$$

da cui si deduce che il vettore velocità angolare istantanea  $\vec{\omega}$  è necessariamente parallela all'asse fisso.

### 6.2.2 Accelerazione istantanea di un punto generico

L'accelerazione istantanea di un punto  $P$  dello spazio solidale al sistema in moto rigido con asse fisso si ricava derivando rispetto al tempo l'equazione (6.2):

$$\ddot{P} = \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O) + \vec{\omega} \wedge \dot{P} = \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)]$$

Si osservi che la derivata  $\dot{\vec{\omega}}$  è, al pari di  $\vec{\omega}$ , parallela all'asse fisso, per cui il vettore

$$\dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O)$$

è o nullo o ortogonale all'asse fisso, nonché tangente alla circonferenza ortogonale all'asse e passante per  $P$ . Per contro, nel caso sia  $\vec{\omega} = 0$  si ha  $\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)] = 0$ , mentre per  $\vec{\omega} \neq 0$  l'identità vettoriale:

$$\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)] = (P - O) \cdot \vec{\omega} \vec{\omega} - \vec{\omega}^2 (P - O) = -\vec{\omega}^2 \left[ P - O - (P - O) \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} \right]$$

consente di concludere che il vettore  $\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)]$  risulta diretto secondo la congiungente di  $P$  con la sua proiezione ortogonale sull'asse fisso, centro della traiettoria circolare di  $P$ . Si è così stabilito che l'accelerazione  $\ddot{P}$  consta di una somma di due termini: una **accelerazione tangenziale**:

$$\vec{a}_\tau = \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O) \quad (6.3)$$

e una **accelerazione centripeta**:

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)]. \quad (6.4)$$

### 6.2.3 Caso particolare di moto rigido con asse fisso: moto rotatorio uniforme

In un moto rotatorio qualsiasi, definito sull'intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$ , l'atto di moto ad ogni istante  $t \in I$  è specificato dalla relazione (6.2), con il vettore velocità angolare  $\vec{\omega}$  che mantiene costantemente la direzione dell'asse fisso, ma che nondimeno può essere funzione del tempo.

Un caso di particolare interesse è quello in cui il vettore velocità angolare  $\vec{\omega}$  si conserva costante in tutto l'intervallo  $I$ :

$$\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}, \quad \text{costante} \quad \forall t \in I.$$

Dalle relazioni (6.3) e (6.4) si rileva allora l'annullarsi dell'accelerazione tangenziale lungo il moto circolare di un qualsiasi punto  $P$  dello spazio solidale, mentre l'accelerazione centripeta risulta di modulo costante causa la costanza di  $|\vec{\omega}|$ :

$$|\vec{a}_n| = |\vec{\omega}|^2 \left| P - O - (P - O) \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} \right| = |\vec{\omega}|^2 |P - C|$$

essendo  $C$  la proiezione ortogonale di  $P$  sull'asse fisso. Il generico punto  $P$  dello spazio solidale si muove perciò su una traiettoria circolare, percorsa con velocità scalare istantanea costante: si tratta di moti circolari uniformi. Questa osservazione giustifica la denominazione di **moto rotatorio uniforme** che viene in genere riservata a questa particolare tipologia di moto rigido con asse fisso. La definizione formale è la seguente.

*Si dice moto rotatorio uniforme nell'intervallo di tempo  $I$  il moto con asse fisso la cui velocità angolare è costante in  $t \in I$ .*

È immediato verificare che se in un moto con asse fisso esiste almeno un punto dello spazio solidale non collocato sull'asse ed animato da moto circolare uniforme, allora il moto rigido deve risultare rotatorio uniforme.

Allo stesso risultato si può pervenire anche per via analitica. Si supponga, per semplicità, che il vettore costante della velocità angolare istantanea sia diretto secondo l'asse coordinato  $Ox_3$  della terna assoluta e possa quindi esprimersi nella forma

$$\vec{\omega} = \omega \hat{e}_3, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Rispetto alla terna assoluta  $Ox_1x_2x_3$ , il teorema di Poisson consente di scrivere la velocità istantanea del generico punto  $P$ , individuato da  $P - O = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i$ , nel modo seguente:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\omega x_2 \\ \dot{x}_2 = +\omega x_1 \\ \dot{x}_3 = 0 \end{cases} \quad (6.5)$$

sistema di equazioni differenziali che, integrato, consente di scrivere la forma generale del corrispondente moto rigido. La terza equazione implica che la quota  $x_3$  sia un integrale primo:

$$x_3 = c_3, \quad \text{costante},$$

mentre dalle prime due equazioni si ricava, derivando in  $t$  la prima e sostituendo l'espressione di  $\dot{x}_2$  ottenuta dalla seconda:

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 0.$$

Questa è l'equazione di un oscillatore armonico semplice di pulsazione  $\omega$  e la sua soluzione generale è data da:

$$x_1 = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

con  $c_1$  e  $c_2$  costanti reali arbitrarie, determinate dalle condizioni iniziali, ossia dalle coordinate iniziali del punto considerato. La prima delle equazioni (6.5) porge allora per  $x_2$  l'espressione:

$$x_2 = -\frac{1}{\omega} \dot{x}_1 = c_1 \sin(\omega t) - c_2 \cos(\omega t)$$

per cui la soluzione generale del sistema lineare omogeneo (6.5) diventa:

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) \\ x_2(t) = c_1 \sin(\omega t) - c_2 \cos(\omega t) \\ x_3(t) = c_3 \end{cases} \quad (6.6)$$

con condizione iniziale, all'istante  $t = 0$ , del tipo:

$$x_1(0) = c_1 \quad x_2(0) = -c_2 \quad x_3(0) = c_3.$$

In termini di queste condizioni iniziali, la soluzione generale (6.6) si esprime equivalentemente come:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(0) \cos(\omega t) - x_2(0) \sin(\omega t) \\ x_2(t) = x_1(0) \sin(\omega t) + x_2(0) \cos(\omega t) \\ x_3(t) = x_3(0) \end{cases}$$

e può anche porsi nella forma matriciale equivalente:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix}$$

che, come ben noto dalla geometria analitica, permette di interpretare la soluzione come trasformazione di rotazione di un angolo  $\omega t$  attorno all'asse  $Ox_3$ <sup>(1)</sup>, come si voleva verificare.

### 6.3 Moti elicoidali

Si definisce moto elicoidale la composizione di due moti rigidi, dei quali:

- uno traslatorio rettilineo con velocità istantanea  $\vec{v} \neq 0$ ;
- uno rigido con asse fisso parallelo a  $\vec{v}$ , la cui velocità angolare  $\vec{\omega} \neq 0$  sia proporzionale a  $\vec{v}$ :

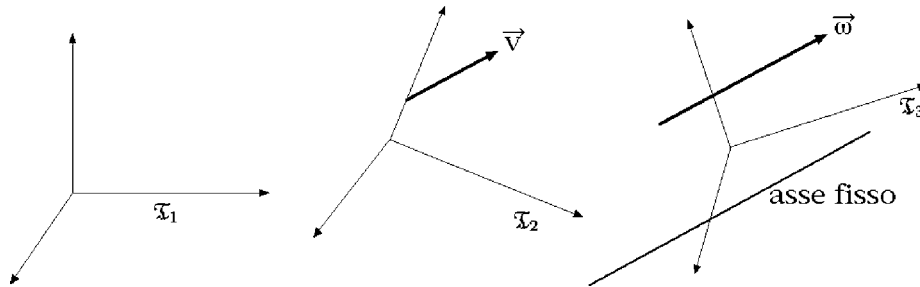
$$\vec{\omega} = c \vec{v}$$

secondo un coefficiente di proporzionalità  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  indipendente dal tempo.

---

<sup>(1)</sup> secondo la convenzione sinistrorsa

Si sottolinea che la definizione **non richiede che i vettori  $\vec{v}$  ed  $\vec{\omega}$  siano costanti nel tempo**, ma soltanto che tale risulti il loro coefficiente di proporzionalità  $c$ . È evidente dalla definizione che **il moto elicoidale è un moto rigido**, in quanto composizione di due moti rigidi. Al solito, la definizione è meglio comprensibile se si interpretano i moti componenti come moti di trascinamento: il moto traslatorio rettilineo sarà quello di una terna  $\mathfrak{T}_2$  rispetto alla terna assoluta  $\mathfrak{T}_1$ , mentre il moto rotatorio è il moto di trascinamento di una terza terna  $\mathfrak{T}_3$  rispetto a  $\mathfrak{T}_2$ . Il moto elicoidale si identifica con il moto di trascinamento della terna  $\mathfrak{T}_3$  rispetto al riferimento  $\mathfrak{T}_1$ , come vuole la definizione di moto rigido composto.



L'asse fisso  $r$  del moto rotatorio è ovviamente **invariante** per il moto con asse fisso. Ma poiché il moto traslatorio rettilineo ha velocità  $\vec{v}$  **parallela** ad  $r$ , tale asse è **invariante** anche per il moto elicoidale: i punti dello spazio solidale che ad un dato istante  $t_0 \in I$  appartengono ad  $r$  si mantengono sulla stessa retta  $r$  ad ogni altro istante  $t \in I$ . In altri termini, durante il moto la retta  $r$ , riguardata come solidale alla terna  $\mathfrak{T}_2$ , scivola sulla stessa retta  $r$  quale appare nel riferimento assoluto  $\mathfrak{T}_1$ . Questo asserto è valido grazie alla postulata proporzionalità dei vettori  $\vec{v}$  ed  $\vec{\omega}$ , ma non richiede che il coefficiente di proporzionalità  $c \neq 0$  sia costante nel tempo.

Le stesse considerazioni portano a concludere che i punti dello spazio solidale al moto elicoidale si muovono tutti su superfici cilindriche a base circolare e di asse  $r$ . Dato un qualsiasi punto  $P$  dello spazio solidale a  $\mathfrak{T}_3$ , il cilindro circolare di asse  $r$  e raggio pari alla distanza fra  $P$  ed  $r$  è una superficie invariante rispetto al moto rotatorio di  $\mathfrak{T}_3$  relativo a  $\mathfrak{T}_2$ ; l'essere poi  $\vec{v}$  parallela ad  $r$  assicura che la medesima proprietà di invarianza deve estendersi anche al moto elicoidale, non essendo rimossa dal moto traslatorio rettilineo di  $\mathfrak{T}_2$  relativamente a  $\mathfrak{T}_1$ . Anche per questa proprietà l'indipendenza dal tempo di  $c$  è irrilevante.

Per caratterizzare geometricamente in modo più specifico la traiettoria del generico punto  $P$  dello spazio solidale, conviene valutarne la velocità istantanea per mezzo del teorema dei moti relativi, ovvero del teorema dei moti rigidi composti. La velocità assoluta di  $P$  è data dalla somma delle velocità di trascinamento che competono a  $P$  per il moto di trascinamento — traslatorio rettilineo — di  $\mathfrak{T}_2$  rispetto a  $\mathfrak{T}_1$  e per il moto di trascinamento — rotatorio — di  $\mathfrak{T}_3$  in rapporto a  $\mathfrak{T}_2$ :

$$\dot{P} = \dot{P}_{T,21} + \dot{P}_{T,32}.$$

Ma la velocità di trascinamento di  $P$  dovuta al moto traslatorio di  $\mathfrak{T}_2$  rispetto a  $\mathfrak{T}_1$  è

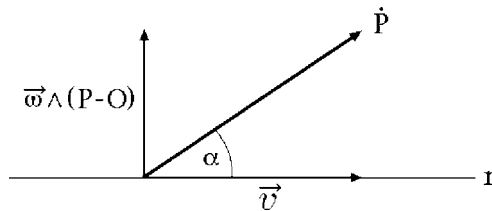
indipendente dalla posizione di  $P$ :

$$\dot{P}_{T,21} = \vec{v}$$

mentre quella imputabile al moto rotatorio di  $\mathfrak{T}_3$  relativamente a  $\mathfrak{T}_2$  si scrive per mezzo dell'equazione (6.2):

$$\dot{P}_{T,32} = \vec{\omega} \wedge (P - O) = c\vec{v} \wedge (P - O)$$

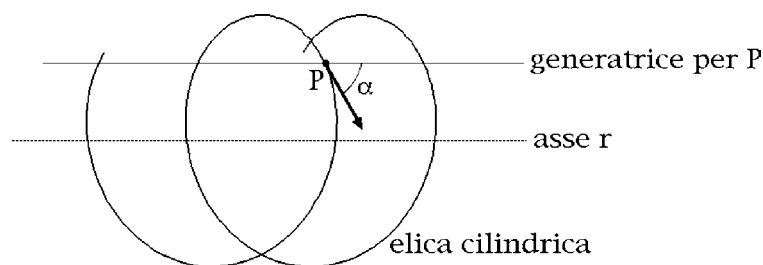
a patto di scegliere  $O \in r$ . I due componenti di velocità sono quindi rispettivamente l'uno parallelo e l'altro ortogonale all'asse  $r$ , come illustra la figura sotto riportata:



L'angolo compreso fra la direzione di  $\dot{P}$  e quella di  $r$  ha ampiezza  $\alpha$  data dalla relazione:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|\vec{\omega} \wedge (P - O)|}{|\vec{v}|} = \frac{|c\vec{v} \wedge (P - O)|}{|\vec{v}|} = \frac{|c||\vec{v}||P - C|}{|\vec{v}|} = |c||P - C|$$

essendo  $C$  la proiezione ortogonale di  $P$  su  $r$  e  $|P - C|$  la distanza **costante** di  $P$  da  $r$ . Dal momento che  $c$  è costante, l'angolo  $\alpha$  è costante nel tempo e dunque indipendente dalla posizione del punto  $P$  lungo la sua traiettoria. Basta ora osservare che la velocità istantanea  $\dot{P}$  è tangente alla traiettoria di  $P$  nella posizione considerata per concludere che  $\alpha$  rappresenta anche l'angolo compreso fra la traiettoria di  $P$  e la retta passante per  $P$  parallela all'asse  $r$  — la cosiddetta **generatrice per  $P$**  della superficie cilindrica di asse  $r$  e raggio  $P - C$ . In definitiva, per un moto elicoidale arbitrario il moto di un generico punto  $P$  avviene lungo una traiettoria completamente ubicata sulla superficie cilindrica di asse  $r$  e raggio pari alla distanza di  $P$  da  $r$ , che taglia la retta generatrice condotta per  $P$  secondo un angolo  $\alpha$  costante.



Una traiettoria cosiffatta viene detta **elica cilindrica**, cilindrica perché localizzata su una superficie cilindrica, elica in quanto caratterizzata da un angolo curva/generatrice costante lungo la curva. Ciò giustifica, a posteriori, la denominazione dei moti elicoidali: questi sono caratterizzati dal fatto che tutti i loro punti si muovono su traiettorie elicoidali (cilindriche).

### 6.3.1 Caso particolare di moto elicoidale: moto elicoidale uniforme

È importante sottolineare che in generale i punti dello spazio solidale ad un moto elicoidale **non si muovono di moto uniforme**, come si deduce dall'espressione della velocità istantanea scalare di  $P$ :

$$|\dot{P}| = |\vec{v} + c\vec{v} \wedge (P - C)| = [|\vec{v}|^2 + c^2|\vec{v}|^2|P - C|^2]^{1/2} = |\vec{v}|[1 + c^2|P - C|^2]^{1/2} \quad (6.7)$$

in cui, al solito,  $C$  rappresenta la proiezione ortogonale di  $P$  sull'asse  $r$ . La costanza del coefficiente  $c$  non basta, da sola, ad assicurare la costanza nel tempo della velocità  $|\dot{P}|$  e dunque l'uniformità del moto di  $P$ . Se infatti il radicando  $1 + c^2|P - C|^2$  nella (6.7) è indipendente dal tempo nell'ipotesi del generico moto elicoidale, **il componente traslatorio di velocità  $\vec{v}$  può non risultare costante in  $t$** .

L'unico modo per ottenere moti uniformi — nel qual caso uniformi saranno i moti di **tutti** i punti dello spazio solidale — è quello di assumere  $\vec{v}$  costante e di conseguenza anche  $\vec{\omega}$ :

$$\vec{\omega} = c\vec{v} = \text{costante}.$$

Il moto elicoidale si dice, in questo caso, **elicoidale uniforme** e risulta dalla composizione di un moto **traslatorio rettilineo e uniforme** e di un **moto rotatorio uniforme**. Perciò:

*Il moto elicoidale uniforme è la composizione di due moti rigidi, uno traslatorio rettilineo ed uniforme, di velocità istantanea  $\vec{v} \neq 0$ , e l'altro rotatorio uniforme con asse parallelo a  $\vec{v}$  e velocità angolare  $\vec{\omega}$  non nulla.*

### 6.3.2 Moti traslatorio rettilineo e con asse fisso come casi limite di moto elicoidale

Un **moto traslatorio rettilineo** può sempre intendersi come la composizione dello stesso moto traslatorio rettilineo con un moto rotatorio di velocità angolare nulla: il moto traslatorio rettilineo è dunque interpretabile come un moto elicoidale il cui componente rotatorio è nullo. Le traiettorie dei punti dello spazio solidale sono delle rette, che possono riguardarsi come eliche cilindriche di passo infinito.

In modo analogo, un **moto rigido con asse fisso** si può sempre identificare con la composizione di un moto traslatorio rettilineo di velocità istantanea nulla e dello stesso moto con asse fisso. Si può quindi parlare di un moto elicoidale con componente traslatorio nullo. I punti dello spazio solidale seguono delle traiettorie circolari, interpretabili come eliche cilindriche di passo nullo.

### 6.3.3 Atto di moto elicoidale

L'atto di moto di un moto elicoidale è dato dal teorema generale di Poisson:

$$\dot{P} = \dot{O} + \vec{\omega} \wedge (P - O) \quad \forall P \in \mathbb{R}^3$$

che, scelto il punto  $O$  sull'asse del moto componente rotatorio assume la forma:

$$\dot{P} = \vec{v} + \vec{\omega} \wedge (P - O) \quad \forall P \in \mathbb{R}^3 \quad (6.8)$$

con  $\vec{\omega}$  parallelo a  $\vec{v}$  — ossia  $\vec{\omega} = c\vec{v}$ . Si osservi che l'atto di moto elicoidale può essere identificato con l'atto di moto di un moto elicoidale uniforme in cui il moto traslatorio rettilineo avviene con velocità  $\vec{v}$  e quello rotatorio con velocità angolare  $\vec{\omega} = c\vec{v}$  attorno all'asse fisso  $O\vec{\omega}$ . Sovente è proprio questa ad essere assunta come definizione dell'atto di moto elicoidale.

Si mette in evidenza che un atto di moto traslatorio può essere considerato come un caso limite di atto di moto elicoidale con componente rotatorio, ovvero vettore velocità angolare, nullo:

$$\dot{P} = \vec{v} = \vec{v} + 0 \wedge (P - O) \quad \forall P \in \mathbb{R}^3.$$

Viceversa, il generico atto di moto rotatorio può sempre intendersi come caso limite di un atto di moto elicoidale con componente traslatorio nullo:

$$\dot{P} = \vec{\omega} \wedge (P - O) = 0 + \vec{\omega} \wedge (P - O) \quad \forall P \in \mathbb{R}^3.$$

## 7. Teorema di Mozzi

Il teorema di Mozzi fornisce una interpretazione cinematica molto semplice del più generale atto di moto rigido. L'enunciato è il seguente.

*Ogni atto di moto rigido è elicoidale.*

La dimostrazione del teorema si basa sull'esistenza del cosiddetto **asse istantaneo di moto**, o **asse di Mozzi**, secondo il lemma sottoriportato.

### 7.1 Lemma dell'asse istantaneo di moto

*Dato l'atto di moto rigido  $\dot{P} = \dot{O} + \vec{\omega} \wedge (P - O)$ , con velocità angolare  $\vec{\omega}$  non nulla, è non vuoto il luogo dei punti  $P$  dello spazio solidale la cui velocità istantanea risulta parallela ad  $\vec{\omega}$ . Tale luogo di punti è una retta parallela ad  $\vec{\omega}$ , e tutti i suoi punti presentano la medesima velocità.*

Il predetto luogo di punti è noto come **asse istantaneo di moto** o **asse di Mozzi**, dal nome del matematico italiano che lo introdusse per la prima volta nel XVIII secolo:

$$a = \{P \in \mathbb{R}^3 : \dot{O} + \vec{\omega} \wedge (P - O) = \lambda \vec{\omega}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Nel caso particolare che i punti dell'asse istantaneo di moto abbiano velocità nulla, si parla di **asse istantaneo di rotazione**, o di **asse di istantanea rotazione**.

La dimostrazione del lemma è costruttiva e puramente algebrica. Per prima cosa conviene determinare il luogo dei punti che possono soddisfare la definizione di asse istantaneo. Se si assume che  $P \in a$ , per un qualche  $\lambda \in \mathbb{R}$  opportuno deve aversi:

$$\dot{P} = \dot{O} + \vec{\omega} \wedge (P - O) = \lambda \vec{\omega} \tag{7.1}$$

e moltiplicando vettorialmente a sinistra per  $\vec{\omega}$  ambo i membri dell'equazione, si ottiene:

$$\vec{\omega} \wedge \dot{O} + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)] = 0.$$

Questa relazione si scrive in una forma più semplice espandendo il doppio prodotto vettoriale mediante la ben nota identità  $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ ,  $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ :

$$\vec{\omega} \wedge \dot{O} + \vec{\omega} \cdot (P - O)\vec{\omega} - |\vec{\omega}|^2(P - O) = 0$$

e conduce ad una soluzione formale per il vettore posizione di  $P$ :

$$P - O = \frac{1}{|\vec{\omega}|^2} \vec{\omega} \wedge \dot{O} + \frac{\vec{\omega} \cdot (P - O)}{|\vec{\omega}|^2} \vec{\omega} \quad (7.2)$$

resa possibile dall'essere  $|\vec{\omega}| > 0$ . Apparentemente la soluzione (7.2) è soltanto formale, dal momento che l'incognita  $P - O$  compare anche a secondo membro e quindi non può intendersi determinata. Nondimeno, è lecito concludere che le eventuali soluzioni di (7.1) devono comunque presentarsi nella forma:

$$P - O = \frac{1}{|\vec{\omega}|^2} \vec{\omega} \wedge \dot{O} + \alpha \vec{\omega} \quad (7.3)$$

per un qualche  $\alpha \in \mathbb{R}$  opportuno. In effetti, si verifica che **per ogni**  $\alpha \in \mathbb{R}$  il vettore (7.3) costituisce una soluzione dell'equazione (7.1). Sostituendo il secondo membro della (7.3) nell'espressione (7.1) per la velocità di  $P$  si ha infatti:

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \dot{O} + \vec{\omega} \wedge \left[ \frac{1}{|\vec{\omega}|^2} \vec{\omega} \wedge \dot{O} + \alpha \vec{\omega} \right] = \dot{O} + \frac{1}{|\vec{\omega}|^2} \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \dot{O}) = \\ &= \dot{O} + \frac{1}{|\vec{\omega}|^2} \left[ \vec{\omega} \cdot \dot{O} \vec{\omega} - |\vec{\omega}|^2 \dot{O} \right] = \frac{\vec{\omega} \cdot \dot{O}}{|\vec{\omega}|^2} \vec{\omega} \end{aligned} \quad (7.4)$$

che risulta effettivamente della forma  $\lambda \vec{\omega}$ , con  $\lambda = \vec{\omega} \cdot \dot{O} / |\vec{\omega}|^2$ , e dunque parallelo a  $\vec{\omega}$ . Si conclude pertanto che:

$$a = \left\{ P \in \mathbb{R}^3 : P - O = \frac{1}{|\vec{\omega}|^2} \vec{\omega} \wedge \dot{O} + \alpha \vec{\omega}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

I punti di  $a$  sono individuati sommando al punto fisso  $Q$  specificato da

$$Q - O = \frac{1}{|\vec{\omega}|^2} \vec{\omega} \wedge \dot{O}$$

un arbitrario vettore  $\alpha \vec{\omega}$ , parallelo a  $\vec{\omega}$ : si tratta perciò di una retta avente la stessa direzione di  $\vec{\omega}$ . Per ogni  $P \in a$  l'equazione (7.4) porge infine la velocità  $\dot{P}$ , indipendente dal punto prescelto. La dimostrazione del lemma è completa.

## 7.2 Atti di moto propriamente elicoidali

Si è dimostrato che per  $\vec{\omega} \neq 0$  esiste unico l'asse di Mozzi, diretto secondo la stessa direzione di  $\vec{\omega}$  e costituito da punti dello spazio solidale in moto con la stessa velocità  $\lambda \vec{\omega}$ , parallela ad  $\vec{\omega}$ . Basta allora considerare l'espressione di Poisson per l'atto di moto rigido identificando  $O$  con un punto dell'asse di Mozzi per ottenere:

$$\dot{P} = \lambda \vec{\omega} + \vec{\omega} \wedge (P - O) \quad \forall P \in \mathbb{R}^3$$

che per  $\lambda \neq 0$  coincide con l'espressione (6.8) dell'atto di moto elicoidale. **Se la velocità angolare istantanea è diversa da zero e i punti dell'asse di Mozzi hanno velocità non nulla, l'atto di moto rigido si identifica sempre con un atto di moto elicoidale.**

Per completare la dimostrazione del teorema di Mozzi rimangono da considerare il caso particolare di  $\vec{\omega} = 0$  e quello di  $\vec{\omega} \neq 0$  con i punti dell'asse istantaneo di moto a velocità nulla.

## 7.3 Atti di moto traslatori

Per  $\vec{\omega} = 0$  l'atto di moto rigido è di tipo traslatorio:

$$\dot{P} = \vec{v} \quad \forall P \in \mathbb{R}^3$$

e si è già rilevato che può considerarsi come caso limite di atto di moto elicoidale, con velocità angolare nulla. L'asse di Mozzi, tuttavia, non risulta definito.

## 7.4 Atti di moto rotatori

Se  $\vec{\omega} \neq 0$  ma i punti dell'asse di Mozzi  $a$  hanno velocità nulla, l'atto di moto rigido è di tipo rotatorio. Basta infatti scegliere  $O \in a$  per ottenere:

$$\dot{P} = \vec{\omega} \wedge (P - O) \quad \forall P \in \mathbb{R}^3$$

che si è già osservato potersi riguardare come caso limite di atto di moto elicoidale, con componente traslatorio nullo. Si comprende il motivo della denominazione di **asse istantaneo di rotazione** che viene riservata, in questo caso, all'asse di Mozzi.

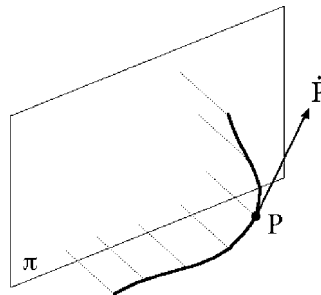
Includendo gli ultimi due casi particolari come casi limite di atti di moto elicoidale, la dimostrazione del teorema di Mozzi è completa.

## 7.5 Osservazione

Si sottolinea che il teorema di Mozzi fa riferimento agli **atti di moto** e non ai **moti rigidi**. Affermare che tutti i moti rigidi sono di tipo elicoidale non avrebbe infatti alcun significato, data la possibilità di considerare — ad esempio — moti rigidi con un punto fisso che non sono in alcun modo interpretabili come moti elicoidali<sup>(1)</sup>.

## 8. Moti rigidi piani

Si dice *moto rigido piano* ogni moto rigido i cui punti si mantengono a distanza costante da un piano fisso  $\pi$ .



Il piano  $\pi$  della precedente definizione viene detto **piano direttore del moto** o semplicemente **piano del moto** o anche **piano fisso**. I vettori velocità istantanea risultano dunque paralleli a tale piano, in ogni istante. Un caso particolare di moto rigido piano è quello di sistemi rigidi di forma laminare vincolati a scorrere su un piano fisso. L'atto di moto di un qualsiasi moto rigido piano si dice **atto di moto rigido piano**. Vale la seguente forma particolare del teorema di Mozzi, che esclude il ricorrere di atti di moto rigido piano propriamente elicoidali.

### 8.1 Teorema di classificazione degli atti di moto rigido piano

*Ogni atto di moto rigido piano è o puramente traslatorio o puramente rotatorio. Nel caso puramente rotatorio l'asse di Mozzi è ortogonale al piano fisso ed esiste un unico punto  $C \in \pi$  dello spazio solidale la cui velocità istantanea vale zero.*

Il punto  $C$  dell'enunciato precedente è identificabile con l'intersezione fra il piano  $\pi$  e l'asse di Mozzi e si dice **centro di rotazione istantanea** — o centro istantaneo di rotazione.

Per dimostrare il teorema si osserva che in generale un atto di moto rigido qualsiasi può sempre scriversi nella forma:

$$\dot{P} = \dot{O} + \vec{\omega} \wedge (P - O) \quad (8.1)$$

essendo  $P$  ed  $O$  due qualsivoglia punti partecipi del moto e  $\vec{\omega}$  il vettore velocità angolare istantanea. Nella fattispecie sia  $O \in \pi$  e si indichi con  $\hat{n}$  il versore normale al piano fisso  $\pi$ , orientato a piacere. Si osserva preliminarmente che per un moto piano  $\vec{\omega}$  risulta normale

<sup>(1)</sup> Si intende, naturalmente, che esistono moti rigidi ben più complessi di quelli elicoidali.

a  $\pi$ . Moltiplicando scalarmente membro a membro la (8.1) per  $\hat{n}$  si ottiene infatti:

$$\dot{P} \cdot \hat{n} = \dot{O} \cdot \hat{n} + \vec{\omega} \wedge (P - O) \cdot \hat{n}$$

ossia  $0 = \vec{\omega} \cdot (P - O) \wedge \hat{n}$ . Ma per ipotesi  $(P - O) \wedge \hat{n}$  è un vettore parallelo a  $\pi$  e, potendosi scegliere  $P - O$  a piacere in  $\mathbb{R}^3$ ,  $\vec{\omega}$  ha componente nulla lungo tale piano. In definitiva esiste un  $\omega \in \mathbb{R}$  tale che  $\vec{\omega} = \omega \hat{n}$ , per cui la (8.1) diviene:

$$\dot{P} = \dot{O} + \omega \hat{n} \wedge (P - O) .$$

Possono allora distinguersi due casi, secondo che  $\omega$  sia nullo o meno.

(i) Se  $\omega = 0$  si ha:

$$\dot{P} = \dot{O}$$

qualunque sia  $P$ , cosicchè l'atto di moto risulta puramente traslatorio;

(ii) se viceversa  $\omega \neq 0$  esiste un unico punto  $C \in \pi$  tale che  $\dot{C} = 0$ . Supponendo infatti che un simile punto esista, questo deve soddisfare l'equazione:

$$\dot{O} + \omega \hat{n} \wedge (C - O) = \dot{C} = 0$$

ovvero:

$$\hat{n} \wedge (C - O) = -\frac{1}{\omega} \dot{O} ,$$

da cui moltiplicando vettorialmente membro a membro per  $\hat{n}$  si deduce:

$$\hat{n} \wedge [\hat{n} \wedge (C - O)] = -\frac{1}{\omega} \hat{n} \wedge \dot{O}$$

e quindi, per note proprietà del doppio prodotto vettoriale:

$$\hat{n} [(C - O) \cdot \hat{n}] - (C - O)(\hat{n} \cdot \hat{n}) = -\frac{1}{\omega} \hat{n} \wedge \dot{O} .$$

D'altra parte  $C, O \in \pi$  per cui  $C - O$  risulta parallelo a  $\pi$  e  $\hat{n} \cdot (C - O) = 0$ . Pertanto:

$$C = O + \frac{1}{\omega} \hat{n} \wedge \dot{O} . \quad (8.2)$$

Si verifica immediatamente che il punto così determinato appartiene al piano  $\pi$  e soddisfa la condizione desiderata  $\dot{C} = 0$ ; inoltre la (8.2) individua univocamente  $C$ , il quale è dunque unico. L'identificazione di  $C$  con l'intersezione fra  $\pi$  e l'asse di Mozzi segue poi dal fatto che i punti di detto asse hanno velocità parallela al vettore  $\vec{\omega}$ , ossia normale al piano  $\pi$ . L'asse di Mozzi è pertanto normale a  $\pi$  e passa per il punto  $C$ . Non rimane che scrivere l'atto di moto rigido rispetto al punto  $C$ :

$$\dot{P} = \dot{C} + \vec{\omega} \wedge (P - C) = \omega \hat{n} \wedge (P - C)$$

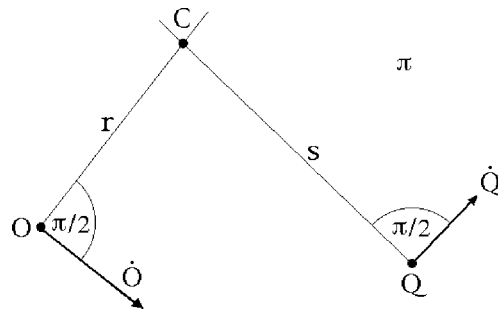
che descrive precisamente un atto di moto rotatorio di centro  $C$  e asse  $C\hat{n}$ , e giustifica la denominazione di centro di rotazione istantanea riservata al punto  $C$  stesso. Ciò completa la prova del teorema.

## 8.2 Calcolo del centro di rotazione istantanea

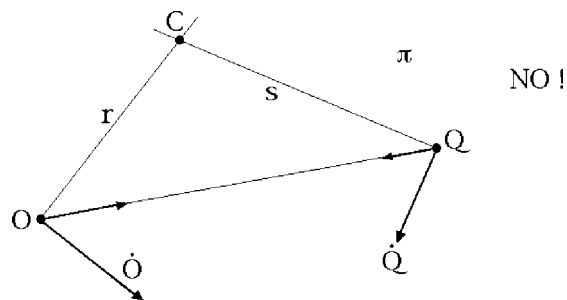
Il calcolo del centro di rotazione istantanea per un atto di moto rigido piano a velocità angolare istantanea non nulla può essere eseguito mediante due diversi metodi, quello algebrico e quello geometrico.

Il **metodo algebrico** consiste nell'applicare la formula (8.2), noti che siano  $O$ ,  $\dot{O}$  e  $\omega \neq 0$ .

Il **metodo geometrico** si fonda sull'osservazione che in virtù della formula (8.2) se si conosce la velocità istantanea  $\dot{O}$  di un punto  $O \in \pi$  dello spazio solidale, o  $\dot{O} = 0$ , nel qual caso  $O$  è esso stesso il centro di rotazione istantanea, oppure il centro di rotazione istantanea  $C$  deve essere collocato sulla retta  $r$  del piano  $\pi$  condotta per  $O \in \pi$  e ortogonale alla velocità istantanea  $\dot{O}$  — teorema di Chasles. Se allo stesso istante è nota la velocità istantanea  $\dot{Q} \neq 0$  di un secondo punto  $Q \in \pi$  dello spazio solidale è evidente che  $C$  deve appartenere all'intersezione fra  $r$  e l'analogo retta  $s$  in  $\pi$  condotta per  $Q$  ortogonalmente a  $\dot{Q}$ . Qualora le due rette non siano parallele o coincidenti, il loro unico punto di intersezione si identifica con il centro di rotazione istantanea, come illustra la figura seguente:



Questo risultato è noto come **teorema di Chasles**. Nel caso le rette  $r$  e  $s$  siano coincidenti non si può concludersi se non che  $C \in r$ . Non può infine ricorrere la circostanza che le rette  $r$  ed  $s$  siano parallele non coincidenti, poiché essa corrisponderebbe ad un atto di moto traslatorio, con velocità angolare  $\vec{\omega}$  nulla e centro istantaneo di rotazione conseguentemente non definito. Vale la pena di sottolineare, infine, che il metodo geometrico **presuppone il carattere rigido piano dell'atto di moto** e richiede quindi la verifica preliminare di tale proprietà. Così ad esempio, nella situazione descritta di seguito la posizione del centro di rotazione istantanea sembra essere determinata univocamente dall'intersezione fra le rette  $r$  e  $s$



rispettivamente ortogonali alle velocità  $\dot{O}$  e  $\dot{Q}$  dei punti  $O$  e  $Q$ . In realtà per questo sistema il centro di rotazione istantanea non ha alcun significato, in quanto l'atto di moto ivi descritto non è né rigido né tantomeno piano. Di ciò ci si convince facilmente notando che per due punti arbitrari  $O$  e  $Q$  di un qualsiasi atto di moto rigido deve aversi:

$$(Q - O) \cdot (\dot{Q} - \dot{O}) = (Q - O) \cdot \vec{\omega} \wedge (Q - O) = 0$$

per cui la proiezione lungo il segmento  $OQ$  della velocità relativa fra  $Q$  e  $O$  deve risultare nulla; condizione quest'ultima qui certamente violata **dal momento che le componenti di  $\dot{O}$  e  $\dot{Q}$  lungo  $Q - O$  hanno verso opposto.**

### 8.3 Dipendenza dal tempo di asse di Mozzi e centro istantaneo di rotazione

È importante ribadire che asse di Mozzi e centro di rotazione istantanea **sono attributi dell'atto di moto** rigido e conseguentemente **variano durante il moto** — piano o meno che sia. Al trascorrere del tempo la posizione dell'asse di Mozzi e, nel caso piano, del centro di istantanea rotazione mutano continuamente.

### 8.4 Base e rulletta

Si considerino due terne di riferimento cartesiane ortogonali  $Ox_1x_2x_3$  ed  $O'x'_1x'_2x'_3$ , la prima assoluta e la seconda solidale al sistema in moto rigido piano. Siano inoltre i piani coordinati  $Ox_1x_2$  ed  $O'x'_1x'_2$  coincidenti con il piano  $\pi$  di cui alla definizione di moto rigido piano. Durante il moto il centro di rotazione istantanea cambia la propria posizione rispetto sia alla terna fissa che a quella solidale. Si hanno allora le seguenti definizioni:

*Si dice base del moto rigido piano il luogo dei centri di istantanea rotazione determinato rispetto al sistema di riferimento fisso  $Ox_1x_2x_3$ .*

*Si definisce rulletta del moto rigido piano il luogo dei centri di istantanea rotazione determinato rispetto al sistema di riferimento solidale  $O'x'_1x'_2x'_3$ .*

Usualmente si riguarda la base come una curva rigida solidale alla terna fissa  $Ox_1x_2x_3$ , dunque in quiete rispetto al riferimento assoluto. Per contro, di regola si considera la rulletta come una curva rigida in moto di conserva con la terna solidale  $O'x'_1x'_2x'_3$ .

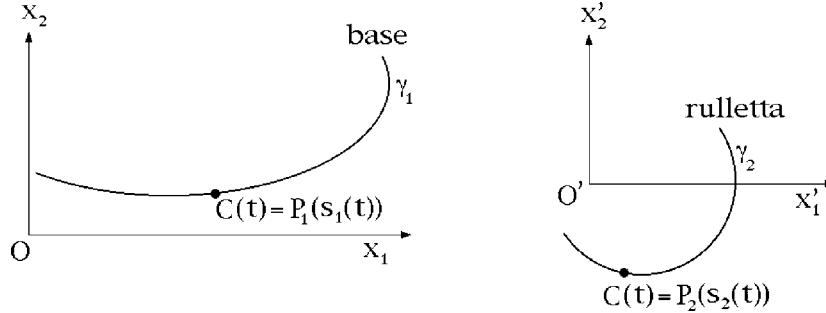
### 8.5 Teorema del moto relativo di base e rulletta

*Durante il moto rigido piano la rulletta, considerata in quiete rispetto alla terna solidale, e la base, fissa nel riferimento assoluto, rotolano senza strisciare l'una sull'altra.*

Si tratta di provare che ad ogni istante  $t \in I$  la base e la rulletta sono tangenti l'una all'altra in un punto, in corrispondenza del quale la velocità relativa delle due curve è uguale a zero. Il fatto che ad ogni istante  $t \in I$  la base  $\gamma_1$  e la rulletta  $\gamma_2$  abbiano un punto di intersezione è evidente: tale punto si identifica con l'unico centro istantaneo di rotazione all'istante considerato, visto che base e rulletta sono i luoghi dei centri istantanei di rotazione al variare di  $t$  in  $I$ . Durante il moto rigido piano, il centro di rotazione istantanea  $C(t)$  cambia la propria posizione tanto lungo la base  $\gamma_1$  quanto lungo la rulletta  $\gamma_2$ .

Se  $P_1(s_1)$ , con ascissa curvilinea  $s_1$ , è la parametrizzazione di  $\gamma_1$  nella terna assoluta  $Ox_1x_2x_3$ , la posizione del centro di rotazione istantanea potrà esprimersi nella forma:

$$C(t) = P_1(s_1(t)) \quad t \in I;$$



in modo analogo, la parametrizzazione  $P_2(s_2)$  di ascissa curvilinea  $s_2$  rispetto alla terna solidale  $O'x'_1x'_2x'_3$  consente di scrivere il centro di rotazione istantanea all'istante  $t$  come:

$$C(t) = P_2(s_2(t)) \quad t \in I.$$

La velocità assoluta di  $C$  all'istante  $t \in I$  è allora data dalla derivata

$$\dot{C} = \frac{d}{dt}P_1(s_1(t)) = \frac{dP_1}{ds_1}(s_1(t)) \dot{s}_1(t)$$

mentre la velocità di  $C$  relativa alla terna solidale  $O'x'_1x'_2x'_3$  allo stesso istante vale

$$\dot{C}_R = \frac{d}{dt}P_2(s_2(t)) = \frac{dP_2}{ds_2}(s_2(t)) \dot{s}_2(t).$$

La velocità di trascinamento di  $C$  dovuta al moto di trascinamento di  $O'x'_1x'_2x'_3$  rispetto a  $Ox_1x_2x_3$  è invece

$$\dot{C}_T = 0$$

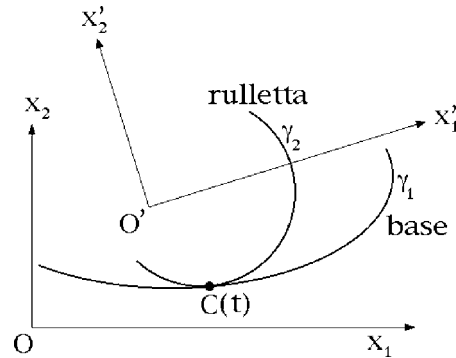
dovendosi identificare, per definizione, con la velocità assoluta di un punto solidale a  $O'x'_1x'_2x'_3$  che occupi la posizione  $C$  — ma il punto dello spazio solidale nella posizione  $C \in Ox_1x_2$  è il centro istantaneo di rotazione e la sua velocità assoluta è nulla. Il teorema dei moti relativi conduce allora a:

$$\frac{dP_1}{ds_1}(s_1(t)) \dot{s}_1(t) = \frac{dP_2}{ds_2}(s_2(t)) \dot{s}_2(t)$$

ovvero alla relazione equivalente:

$$\hat{\tau}_1(s_1(t)) \dot{s}_1(t) = \hat{\tau}_2(s_2(t)) \dot{s}_2(t)$$

nella quale figurano i versori  $\hat{\tau}_1(s_1(t))$  e  $\hat{\tau}_2(s_2(t))$  rispettivamente tangenti alle curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  nella posizione  $C(t)$ . Nel punto  $C(t)$  la base e la rulletta hanno i versori tangenti linearmente dipendenti, dunque o uguali od opposti. Ciò significa che  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono **tangenti** in  $C(t)$  e non semplicemente secanti: durante il moto rigido piano **la base e la rulletta rotolano l'una sull'altra**.



Si osservi inoltre che il punto  $C(t)$  preso sulla rulletta  $\gamma_2$ , e dunque solidale alla terna  $O'x'_1x'_2x'_3$ , ha velocità relativa a  $Ox_1x_2x_3$  nulla

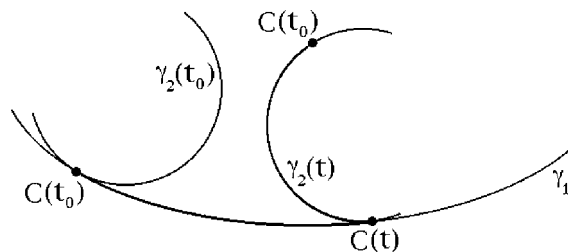
$$\dot{C}_T = 0$$

che coincide quindi con quella del corrispondente punto  $C(t)$  di  $\gamma_1$  — fissa in  $Ox_1x_2x_3$ . Di conseguenza, il moto di rotolamento relativo della rulletta e della base è **puro**, o **senza strisciamento**. In effetti, se  $\hat{\tau}_1 = \hat{\tau}_2$  si ha

$$\dot{s}_1(t) = \dot{s}_2(t) \quad \forall t \in I$$

e quindi **gli archi spazzati dal centro istantaneo di rotazione lungo la base e la rulletta in un generico intervallo di tempo  $[t_0, t] \subseteq I$  hanno uguale lunghezza:**

$$s_1(t) - s_1(t_0) = s_2(t) - s_2(t_0) \quad \forall t_0, t \in I$$



Alla stessa conclusione, salvo che per l'orientamento opposto degli archi descritti su base e rulletta dal punto di contatto, si perviene nell'ipotesi che i versori tangenti siano opposti.

## 9. Sistemi rigidi di punti materiali

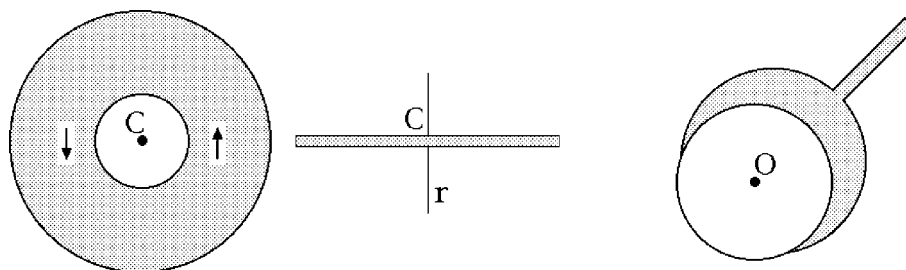
Nelle pagine precedenti si sono esaminate le proprietà salienti dei moti rigidi. La trattazione è stata puramente cinematica e non ha tenuto in alcun conto la natura del sistema in moto. Se opportunamente sollecitato e per appropriate condizioni iniziali, qualsiasi sistema di punti materiali può muoversi di moto rigido — al limite anche un sistema di punti materiali liberi, in totale assenza di vincoli.

*Si definisce sistema, o corpo, rigido un qualsiasi sistema di punti materiali vincolato a muoversi di moto rigido.*

Per definizione tutti i moti di un sistema rigido sono rigidi, ma in generale non è vero il viceversa, cosicché esistono sistemi non rigidi capaci di eseguire moti rigidi nelle appropriate condizioni. Lo **spazio solidale** al sistema rigido si definisce come l'insieme dei punti dello spazio fisico  $\mathbb{R}^3$  pensati a distanza costante da tutti i punti del sistema lungo un arbitrario moto di questo. Tre sono le tipologie di sistemi rigidi che ha interesse considerare, di solito, nelle applicazioni:

- (i) **sistemi rigidi liberi**, ai quali nessun altro vincolo è imposto se non la rigidità dei moti possibili;
- (ii) **sistemi rigidi con punto fisso**, i cui moti possibili sono tutti e soltanto quelli rigidi con un punto  $O$  fisso rispetto alla terna di riferimento assoluta;
- (iii) **sistemi rigidi con asse fisso**, i cui moti possibili sono tutti e soltanto i moti rigidi con un asse fisso  $r$  rispetto alla terna assoluta.

Ricorre di frequente la circostanza che il punto o l'asse fisso, pur essendo compresi per definizione nello spazio solidale, non appartengano al sistema. Tale è il caso, ad esempio, di un compact disk in moto rotatorio entro l'alloggiamento del relativo lettore CD: il moto del disco è rotatorio ma l'asse fisso è la retta  $r$  ortogonale al piano di giacitura del disco e passante per il suo centro  $C$ , per cui nessun punto di  $r$  appartiene al sistema. Un altro esempio interessante è quello di una calotta sferica la cui superficie interna è posta in contatto con l'esterno di una sfera fissa di uguale raggio e centro  $O$  — il cosiddetto **snodo sferico**. Qualunque sistema rigido che sia solidalmente ancorato alla calotta sferica è un sistema rigido con punto fisso  $O$ , il quale tuttavia al sistema non può appartenere.



È molto significativo il seguente risultato:

*Il baricentro di un sistema rigido appartiene sempre al suo spazio solidale.*

Rispetto ad una qualsiasi terna solidale le coordinate  $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$  dei punti materiali  $P_i$  del sistema sono infatti costanti durante qualsiasi moto:

$$P_i(t) - O(t) = \sum_{j=1}^3 x_{ij} \hat{e}_j(t), \quad x_{ij} = \text{costante} \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad j = 1, 2, 3,$$

e data la costanza delle rispettive masse  $m_i$  la stessa proprietà si estende anche al baricentro  $G$  del sistema:

$$G(t) - O(t) = \left( \sum_{i=1}^N m_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^N m_i (P_i(t) - O(t)) = \sum_{j=1}^3 \left[ \left( \sum_{i=1}^N m_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^N m_i x_{ij} \right] \hat{e}_j(t).$$

Ciò comporta, in particolare, **la possibilità di avere sistemi rigidi con il punto fisso nel baricentro** — l'eventuale punto fisso di un sistema rigido deve appartenere allo spazio solidale.

## 10. Operatore d'inerzia

L'operatore d'inerzia gioca un ruolo fondamentale nello studio della dinamica dei sistemi rigidi. L'operatore caratterizza la distribuzione della massa del sistema rigido, ed è per questo motivo che argomenti quali la definizione e lo studio dell'operatore d'inerzia vanno sotto il nome generale di **geometria delle masse**. Per fissare le idee, nella discussione che segue si considererà un sistema  $\mathbb{S}$  di punti materiali  $P_i, i = 1, \dots, N$ , di masse rispettive  $m_i$ .

### 10.1 Operatore d'inerzia

*Dato un punto  $O \in \mathbb{R}^3$ , si dice operatore d'inerzia in  $O$  — o rispetto ad  $O$  — del sistema  $\mathbb{S}$  di punti materiali l'applicazione  $L_O$  di  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}^3$  definito da:*

$$L_O(\vec{u}) = \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge [m_i \vec{u} \wedge (P_i - O)] \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3. \quad (10.1)$$

Si noti che la definizione formale dell'operatore d'inerzia non richiede espressamente che il sistema sia rigido, benché questa proprietà sia fondamentale nella quasi totalità delle applicazioni. Oltre che dal modo in cui la massa del sistema si distribuisce nello spazio, l'operatore d'inerzia non dipende che dalla scelta — arbitraria — del punto  $O$ .

### 10.2 Momento d'inerzia

*Si considerino un sistema  $\mathbb{S}$  di punti materiali e una retta  $r$ . Sia  $\delta_i$  la distanza del generico punto  $P_i$  del sistema dall'asse  $r$ . Si dice momento d'inerzia di  $\mathbb{S}$  rispetto all'asse  $r$  la sommatoria estesa a tutti i punti del sistema dei prodotti  $m_i \delta_i^2$ :*

$$I_r = \sum_{i=1}^N m_i \delta_i^2. \quad (10.2)$$

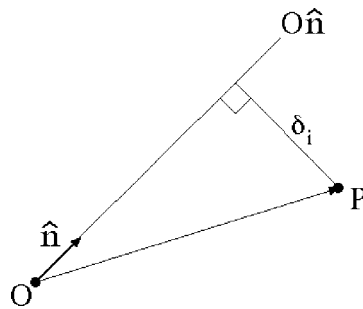
### 10.3 Momento d'inerzia espresso mediante l'operatore d'inerzia

Il momento d'inerzia di un sistema  $\mathbb{S}$  di punti materiali rispetto ad un asse passante per il punto  $O$  e la cui direzione sia individuata dal versore  $\hat{n}$  può essere calcolato in termini dell'operatore d'inerzia in  $O$ . Indicato con  $I_{O\hat{n}}$  il momento d'inerzia rispetto alla retta  $O\hat{n}$ , vale la formula:

$$I_{O\hat{n}} = \hat{n} \cdot L_O(\hat{n}). \quad (10.3)$$

La prova di questa relazione si ottiene notando che la distanza  $\delta_i$  di un punto  $P_i$  dall'asse  $O\hat{n}$  può essere scritta nella forma:

$$\delta_i = |\hat{n} \wedge (P_i - O)|$$



per cui il momento d'inerzia rispetto ad  $O\hat{n}$  diventa:

$$I_{O\hat{n}} = \sum_{i=1}^N m_i \delta_i^2 = \sum_{i=1}^N m_i \hat{n} \wedge (P_i - O) \cdot \hat{n} \wedge (P_i - O)$$

e scambiando i prodotti scalare e vettore nel prodotto misto:

$$I_{O\hat{n}} = \sum_{i=1}^N \hat{n} \cdot (P_i - O) \wedge [m_i \hat{n} \wedge (P_i - O)] = \hat{n} \cdot \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge [m_i \hat{n} \wedge (P_i - O)].$$

È sufficiente infine fare uso della definizione (10.1) dell'operatore d'inerzia in  $O$  per stabilire la (10.3), come richiesto.

### 10.4 Momento angolare di un sistema rigido con punto fisso

Sia  $\mathbb{S}$  un sistema rigido di punti materiali con punto fisso  $O$ . Se il vettore velocità angolare istantanea del sistema è  $\vec{\omega}$ , il momento angolare rispetto al punto fisso  $O$  del sistema si esprime come:

$$\vec{K}_O = L_O(\vec{\omega}). \quad (10.4)$$

La velocità istantanea del punto  $P_i \in \mathbb{S}$  vale infatti:

$$\dot{P}_i = \vec{\omega} \wedge (P_i - O)$$

in modo che il momento angolare in  $O$  assume la forma:

$$\vec{K}_O = \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge m_i \dot{P}_i = \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge [m_i \vec{\omega} \wedge (P_i - O)] = L_O(\vec{\omega}).$$

## 10.5 Energia cinetica di un sistema rigido con punto fisso

L'operatore d'inerzia è molto importante anche per esprimere in modo conveniente l'energia cinetica di un sistema rigido  $\mathbb{S}$  con punto fisso  $O$ . Se  $\vec{\omega}$  è il vettore velocità angolare istantanea del sistema, l'energia cinetica vale:

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot L_O(\vec{\omega}) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{K}_O. \quad (10.5)$$

Sostituendo l'espressione della velocità istantanea  $\dot{P}_i = \vec{\omega} \wedge (P_i - O)$  nella definizione dell'energia cinetica, si ha:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{P}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{\omega} \wedge (P_i - O) \cdot \vec{\omega} \wedge (P_i - O)$$

e con il solito scambio dei prodotti scalare e vettore nel prodotto misto si ottiene:

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge [m_i \vec{\omega} \wedge (P_i - O)] = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot L_O(\vec{\omega}) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{K}_O.$$

## 11. Proprietà dell'operatore d'inerzia

Si verifica facilmente che l'operatore d'inerzia in  $O \in \mathbb{R}^3$  di un sistema  $\mathbb{S}$  di punti materiali è un **operatore lineare simmetrico**.

### 11.1 Linearità

L'operatore  $L_O$  è lineare in  $\mathbb{R}^3$  a valori in  $\mathbb{R}^3$ , nel senso che  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$  vale:

$$L_O(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \alpha L_O(\vec{u}) + \beta L_O(\vec{v}).$$

La proprietà è una conseguenza immediata della linearità del prodotto vettoriale in ciascuno dei propri argomenti, nonché del prodotto per uno scalare rispetto all'argomento vettoriale. Si ha infatti, per definizione,

$$\begin{aligned} L_O(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) &= \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge [m_i (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \wedge (P_i - O)] = \\ &= \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge [\alpha m_i \vec{u} \wedge (P_i - O) + \beta m_i \vec{v} \wedge (P_i - O)] = \\ &= \alpha \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge [m_i \vec{u} \wedge (P_i - O)] + \beta \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge [m_i \vec{v} \wedge (P_i - O)] = \\ &= \alpha L_O(\vec{u}) + \beta L_O(\vec{v}). \end{aligned}$$

Come è facile intuire, la linearità è una proprietà fondamentale dell'operatore d'inerzia, che in larga parte ne giustifica l'introduzione. Di immediata interpretazione, rende particolarmente agevole il calcolo del momento angolare e dell'energia cinetica dei sistemi rigidi.

## 11.2 Simmetria

L'operatore lineare  $L_O$  di  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}^3$  è simmetrico, nel senso che:

$$\vec{u} \cdot L_O(\vec{v}) = L_O(\vec{u}) \cdot \vec{v} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3.$$

La simmetria si dimostra scrivendo il prodotto  $\vec{u} \cdot L_O(\vec{v})$  in una forma invariante per lo scambio dei vettori arbitrari  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot L_O(\vec{v}) &= \vec{u} \cdot \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge [m_i \vec{v} \wedge (P_i - O)] = \\ &= \sum_{i=1}^N \vec{u} \cdot (P_i - O) \wedge [m_i \vec{v} \wedge (P_i - O)] = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{u} \wedge (P_i - O) \cdot \vec{v} \wedge (P_i - O) \end{aligned}$$

e sfruttando quindi la proprietà commutativa del prodotto scalare:

$$\vec{u} \cdot L_O(\vec{v}) = \vec{v} \cdot L_O(\vec{u}) = L_O(\vec{u}) \cdot \vec{v} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3.$$

Il significato geometrico della proprietà di simmetria è meno immediato di quello della linearità. La denominazione si giustifica per il fatto che l'applicazione dell'operatore  $L_O$  al primo o al secondo argomento vettoriale di un prodotto scalare è ininfluenza sul risultato. Dalla simmetria seguono proprietà molto importanti:

- (i) la matrice di rappresentazione dell'operatore  $L_O$  rispetto ad una qualsiasi base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$  è **reale e simmetrica**;
- (ii) gli **autovalori** dell'operatore d'inerzia sono tutti **reali**;
- (iii) **autovettori** di  $L_O$  relativi ad **autovalori distinti** sono sempre **mutuamente ortogonali**;
- (iv) è anzi sempre definita una **base ortonormale di autovettori** dell'operatore d'inerzia, rispetto alla quale la matrice di rappresentazione dell'operatore si presenta in forma diagonale. Si dice che l'operatore d'inerzia è sempre **diagonalizzabile** rispetto ad una base ortonormale (di autovettori).

Queste proprietà meritano qualche commento, che fornisce anche l'occasione per richiamare alcuni concetti fondamentali di algebra lineare.

(i) La matrice di rappresentazione  $[L_O]$  di un operatore lineare  $L_O$  serve a descrivere l'azione dell'operatore sui vettori dello spazio vettoriale in cui questo è definito, nella

fattispecie  $\mathbb{R}^3$ . Essa dipende dalla scelta della base dello spazio vettoriale rispetto alla quale si vuole ottenere la rappresentazione di vettori e operatori lineari. Indicata tale base con  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ , la matrice rappresentativa  $[L_O]$  ha elementi  $L_{\alpha\beta}$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ , definiti dalle relazioni:

$$L_O(\hat{e}_\alpha) = \sum_{\beta=1}^3 L_{\beta\alpha} \hat{e}_\beta \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (11.1)$$

ed è chiaramente una matrice reale  $3 \times 3$ . La sua esistenza ed unicità seguono dall'essere  $L_O(\vec{x})$  un vettore e  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  una base di  $\mathbb{R}^3$ , ma si intende che uno stesso operatore lineare presenta rappresentazioni diverse in relazione alla base utilizzata. La matrice di rappresentazione consente di esprimere in forma matriciale l'azione degli operatori lineari sui vettori. Nella fattispecie, se  $x_1, x_2, x_3$  sono le componenti rispetto alla base  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  di un generico vettore  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{x} = \sum_{\alpha=1}^3 x_\alpha \hat{e}_\alpha,$$

il vettore ottenuto applicando l'operatore  $L_O$  al vettore  $\vec{x}$  si scrive, per linearità:

$$L_O(\vec{x}) = L_O\left(\sum_{\alpha=1}^3 x_\alpha \hat{e}_\alpha\right) = \sum_{\alpha=1}^3 x_\alpha L_O(\hat{e}_\alpha)$$

e facendo uso della matrice di rappresentazione, con un successivo scambio di sommatorie, diventa:

$$L_O(\vec{x}) = \sum_{\alpha=1}^3 x_\alpha \sum_{\beta=1}^3 L_{\beta\alpha} \hat{e}_\beta = \sum_{\beta=1}^3 \left[ \sum_{\alpha=1}^3 L_{\beta\alpha} x_\alpha \right] \hat{e}_\beta.$$

Si conclude che le componenti rispetto a  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  del vettore  $L_O(\vec{x})$  sono date dalle relazioni:

$$[L_O(\vec{x})]_\beta = \sum_{\alpha=1}^3 L_{\beta\alpha} x_\alpha \quad \beta = 1, 2, 3,$$

che possono anche porsi nella forma matriciale equivalente:

$$\begin{pmatrix} [L_O(\vec{x})]_1 \\ [L_O(\vec{x})]_2 \\ [L_O(\vec{x})]_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = [L_O] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (11.2)$$

**L'azione dell'operatore lineare su un vettore viene ricondotta ad un prodotto matriciale:** il vettore colonna delle componenti di  $L_O(\vec{x})$  si ottiene moltiplicando il vettore colonna delle componenti di  $\vec{x}$  per la matrice di rappresentazione dell'operatore  $L_O$  rispetto alla stessa base. Nel caso che la **base** sia **ortonormale**, come avviene di regola, gli elementi della matrice rappresentativa definita dalle (11.1) possono essere calcolati usando la condizione di ortonormalizzazione  $\hat{e}_\alpha \cdot \hat{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad \forall \alpha, \beta = 1, 2, 3$ :

$$\hat{e}_\gamma \cdot L_O(\hat{e}_\alpha) = \hat{e}_\gamma \cdot \sum_{\beta=1}^3 L_{\beta\alpha} \hat{e}_\beta = \sum_{\beta=1}^3 L_{\beta\alpha} \hat{e}_\gamma \cdot \hat{e}_\beta = \sum_{\beta=1}^3 L_{\beta\alpha} \delta_{\beta\gamma} = L_{\gamma\alpha} \quad \forall \gamma, \alpha = 1, 2, 3.$$

Risulta perciò evidente che la matrice rappresentativa di un operatore simmetrico rispetto ad una base ortonormale è sempre **reale e simmetrica**:

$$L_{\gamma\alpha} = \hat{e}_\gamma \cdot L_O(\hat{e}_\alpha) = \hat{e}_\alpha \cdot L_O(\hat{e}_\gamma) = L_{\alpha\gamma} \quad \forall \gamma, \alpha = 1, 2, 3.$$

(ii) Si dice **autovettore** dell'operatore lineare  $L_O$  un qualsiasi vettore non nullo  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$  tale che:

$$L_O(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \quad (11.3)$$

per uno scalare  $\lambda \in \mathbb{R}$  opportuno. Lo scalare  $\lambda$  si definisce un **autovalore** dell'operatore lineare considerato. L'azione dell'operatore lineare su un suo autovettore si riduce alla semplice moltiplicazione dello stesso autovettore per il relativo autovalore. È evidente dalla definizione che una qualsiasi combinazione lineare non nulla di autovettori relativi allo stesso autovalore è ancora un autovettore associato allo stesso autovalore

$$L_O(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha L_O(\vec{u}) + \beta L_O(\vec{v}) = \alpha \lambda \vec{u} + \beta \lambda \vec{v} = \lambda(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v})$$

$\forall \vec{u}, \vec{v}, L_O(\vec{u}) = \lambda\vec{u}, L_O(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ : **l'insieme degli autovettori relativi ad un dato autovalore  $\lambda$ , completato con il vettore nullo, è dunque un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$** . Tale sottospazio viene detto **autospazio associato all'autovalore  $\lambda$**  considerato. Rispetto ad una qualsiasi base di  $\mathbb{R}^3$ , l'equazione (11.3) assume la forma matriciale:

$$[L_O] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

ossia:

$$([L_O] - \lambda\mathbb{I}) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (11.4)$$

in termini delle componenti  $v_1, v_2, v_3$  dell'autovettore  $\vec{v}$  e della matrice unità  $\mathbb{I}$ . L'equazione (11.4) è lineare ed omogenea nelle variabili  $v_1, v_2, v_3$  e per definizione di autovettore deve ammettere una **soluzione non nulla**. Il teorema di Cramer assicura che condizione necessaria e sufficiente per una soluzione diversa da quella banale è che si abbia:

$$\det([L_O] - \lambda\mathbb{I}) = 0 \quad (11.5)$$

nota come **equazione caratteristica** del problema agli autovalori. Come è immediato verificare, nel caso dell'operatore d'inerzia  $L_O$  l'equazione caratteristica è una equazione algebrica di terzo grado, che ammette in generale tre soluzioni complesse  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , eventualmente coincidenti. Queste soluzioni sono gli autovalori dell'operatore. Una volta che gli autovalori siano stati calcolati, i corrispondenti autovettori possono essere caratterizzati determinando le — infinite — soluzioni non nulle in  $(v_1, v_2, v_3)$  dell'equazione (11.4). Sebbene la matrice di rappresentazione  $[L_O]$  dipenda dalla scelta della base  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ , si può dimostrare che l'equazione caratteristica (11.5) ed i corrispondenti autovalori sono invarianti per un qualsivoglia cambiamento di base; e che le nuove soluzioni  $(v_1, v_2, v_3)$

del problema agli autovalori sono semplicemente le componenti degli stessi autovettori rispetto alla nuova base prescelta. **Autovalori ed autovettori sono perciò attributi dell'operatore**  $L_O$ , anche se vengono sempre calcolati per via matriciale, facendo riferimento ad una particolare rappresentazione di operatore e vettori.

Nel caso di un operatore  $L_O$  simmetrico e per una base di riferimento  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  ortonormale, il problema agli autovalori assume la forma:

$$[L_O][v] = \lambda[v], \quad [v] = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \neq 0$$

e moltiplicato a sinistra per il vettore riga  $[v]^\dagger = (v_1^*, v_2^*, v_3^*)$ , trasposto coniugato di  $[v]$ , porge:

$$[v]^\dagger [L_O][v] = \sum_{\alpha=1}^3 v_\alpha^* \sum_{\beta=1}^3 L_{\alpha\beta} v_\beta = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 v_\alpha^* L_{\alpha\beta} v_\beta = \lambda [v]^\dagger [v] = \lambda \sum_{\alpha=1}^3 v_\alpha^* v_\alpha.$$

Grazie alla simmetria di  $[L_O]$  la complessa coniugata di quest'ultima relazione diventa:

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^3 v_\alpha L_{\alpha\beta} v_\beta^* = \sum_{\beta,\alpha=1}^3 v_\beta L_{\beta\alpha} v_\alpha^* = \sum_{\beta,\alpha=1}^3 v_\beta L_{\alpha\beta} v_\alpha^* = \lambda^* \sum_{\alpha=1}^3 v_\alpha^* v_\alpha$$

e sottratta membro a membro dall'equazione precedente conduce alla condizione:

$$0 = (\lambda - \lambda^*) \sum_{\alpha=1}^3 v_\alpha^* v_\alpha$$

nella quale la sommatoria è un numero strettamente positivo:

$$\sum_{\alpha=1}^3 v_\alpha^* v_\alpha = \sum_{\alpha=1}^3 |v_\alpha|^2 > 0$$

per via della condizione imposta  $[v] \neq 0$ . Conseguentemente  $\lambda^* = \lambda$  e l'autovalore deve risultare **reale**.

(iii) Dalla simmetria della matrice  $[L_O]$  si deduce che per ogni coppia di vettori colonna  $[u], [v] \in \mathbb{C}^3$  deve aversi:

$$[u]^\dagger [L_O][v] = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 u_\alpha^* L_{\alpha\beta} v_\beta = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 u_\alpha^* L_{\beta\alpha} v_\beta = \sum_{\beta=1}^3 \left( \sum_{\alpha=1}^3 L_{\beta\alpha} u_\alpha \right)^* v_\beta = ([L_O][u])^\dagger [v]$$

e nel caso che  $[u], [v] \in \mathbb{R}^3$  individuino autovettori  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$  associati ad autovalori (reali) distinti  $\lambda$  e  $\mu$

$$[L_O][u] = \lambda[u] \quad [L_O][v] = \mu[v] \quad \lambda \neq \mu,$$

ciò implica la relazione:

$$\mu [u]^\dagger [v] = [u]^\dagger \mu [v] = [u]^\dagger [L_O][v] = ([L_O][u])^\dagger [v] = (\lambda [u])^\dagger [v] = \lambda^* [u]^\dagger [v] = \lambda [u]^\dagger [v].$$

Di conseguenza:

$$(\lambda - \mu) [u]^\dagger [v] = 0$$

e per l'essere  $\lambda \neq \mu$  si conclude che  $[u]^\dagger [v] = 0$ . Poiché la base  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  è per ipotesi una base ortonormale, la condizione ottenuta esprime l'**ortogonalità degli autovettori**  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ :

$$0 = [u]^\dagger [v] = \sum_{\alpha=1}^3 u_\alpha^* v_\alpha = \sum_{\alpha=1}^3 u_\alpha v_\alpha = \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

(iv) Dalla definizione (11.1) appare evidente che se la matrice di rappresentazione è **diagonale**:

$$L_{\alpha\beta} = 0 \quad \forall \alpha \neq \beta$$

allora  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  è una base di autovettori, in quanto:

$$L_O(\hat{e}_\alpha) = \sum_{\beta=1}^3 L_{\beta\alpha} \hat{e}_\beta = L_{\alpha\alpha} \hat{e}_\alpha \quad \forall \alpha = 1, 2, 3.$$

Viceversa, è immediato verificare che se  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  costituisce una base di autovettori di  $L_O$ , la matrice di rappresentazione dell'operatore rispetto alla base  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  risulta diagonale:

$$L_O(\hat{e}_\alpha) = \lambda_\alpha \hat{e}_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 \delta_{\beta\alpha} \lambda_\beta \hat{e}_\beta \quad \implies \quad L_{\beta\alpha} = \delta_{\beta\alpha} \lambda_\beta.$$

Di conseguenza, **condizione necessaria e sufficiente perché un operatore lineare sia suscettibile di una rappresentazione diagonale è che esso ammetta una base di autovettori**. Per un operatore lineare qualsiasi l'esistenza di una base di autovettori, e la conseguente **diagonalizzabilità** dell'operatore, non è in generale una circostanza banale, né risulta necessariamente verificata. Può infatti darsi il caso che il numero di autovettori linearmente indipendenti sia inferiore alla dimensione dello spazio vettoriale su cui l'operatore è definito, con conseguente impossibilità di costruire basi di autovettori. Quand'anche l'operatore sia diagonalizzabile, non è affatto garantita la possibilità di costruire una base **ortonormale** di autovettori; può infatti accadere, in particolare, che gli autovettori relativi ad autovalori diversi non siano fra loro ortogonali. Si dimostra che:

*un operatore reale simmetrico non soltanto ha tutti gli autovalori reali e i relativi autospazi mutuamente ortogonali, ma ammette sempre almeno una base di autovettori ortonormali.*

L'operatore d'inerzia, in particolare, è caratterizzato da 3 autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  ed ammette almeno una base costituita da 3 autovettori ortonormali. Precisamente:

– se gli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sono tutti distinti, i tre relativi autospazi devono risultare ortogonali e di dimensione 1. Da ciascuno di essi è possibile estrarre due soli vettori

unitari, per cui esistono complessivamente 8 basi ortonormali di autovettori, ottenibili l'una dall'altra cambiando segno ad uno o più vettori di base. A meno di cambiamenti di segno dei versori, la base ortonormale di autovettori è univocamente determinata;

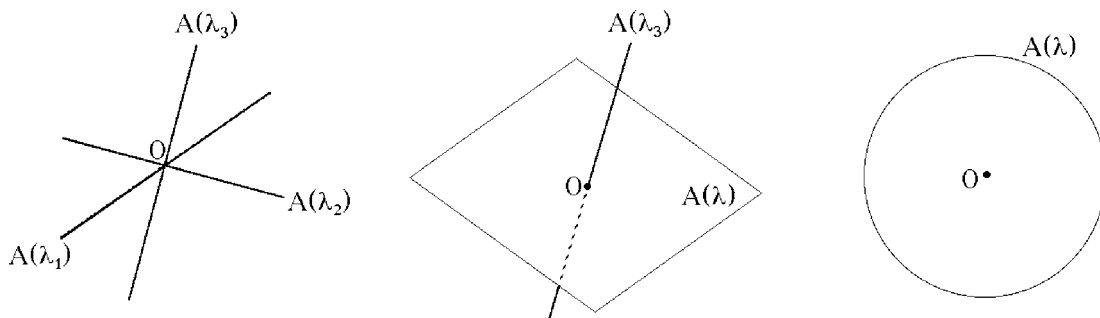
– se  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq \lambda_3$ , l'autospazio associato a  $\lambda_3$  è di dimensione 1 e l'autovettore unitario  $\hat{e}_3$  da esso ricavabile è determinato univocamente a meno del segno. L'autospazio associato all'autovalore doppio  $\lambda$  ha invece dimensione 2 ed è ortogonale al precedente: da esso è sempre possibile estrarre una coppia di autovettori ortonormali, che tuttavia non risulta determinata in modo univoco ma a meno di cambiamenti di segno e di rotazioni arbitrarie attorno al vettore  $\hat{e}_3$ ;

– se infine gli autovalori sono tutti identici, l'operatore d'inerzia coincide con l'operatore identità a meno di un fattore scalare:

$$L_O = \lambda \mathbb{I}$$

e qualsiasi vettore non nullo è autovettore con autovalore  $\lambda$ . L'autospazio associato a  $\lambda$  si identifica con l'intero  $\mathbb{R}^3$ . Di conseguenza, ogni base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$  è una base di autovettori.

La struttura degli autospazi di  $L_O$  nei tre casi considerati è riassunta nella figura seguente:



in cui  $A(\lambda)$  indica l'autospazio relativo all'autovalore  $\lambda$ . La figura ribadisce il maggiore o minore grado di arbitrarietà nella scelta della base ortonormale di autovettori.

### 11.3 Positività

L'operatore lineare  $L_O$  di  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}^3$  è definito positivo, nel senso che:

$$\vec{u} \cdot L_O(\vec{u}) > 0 \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Usando la definizione (10.1),  $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3$  assegnato si ha infatti

$$\vec{u} \cdot L_O(\vec{u}) = \sum_{i=1}^N m_i \vec{u} \cdot (P_i - O) \wedge [\vec{u} \wedge (P_i - O)]$$

e scambiando il prodotto scalare con il primo prodotto vettoriale in ciascun termine della sommatoria ne risulta che

$$\vec{u} \cdot L_O(\vec{u}) = \sum_{i=1}^N m_i \vec{u} \wedge (P_i - O) \cdot [\vec{u} \wedge (P_i - O)]$$

ossia

$$\vec{u} \cdot L_O(\vec{u}) = \sum_{i=1}^N m_i |\vec{u} \wedge (P_i - O)|^2. \quad (11.6)$$

Dall'espressione ottenuta appare evidente che il prodotto scalare  $\vec{u} \cdot L_O(\vec{u})$  è sempre non negativo, identificando l'operatore  $L_O$  come *semidefinito positivo*. In effetti, l'unico modo per annullare la sommatoria a secondo membro di (11.6) consiste nel richiedere l'annullarsi di tutti i vettori

$$\vec{u} \wedge (P_i - O) \quad \forall i = 1, \dots, N$$

una eventualità che per  $\vec{u} \neq 0$  ricorre unicamente qualora tutti i punti  $P_i$  siano allineati lungo la retta condotta per  $O$  e di direzione  $\vec{u}$ . *Se i punti del sistema non sono allineati lungo una retta passante per il punto  $O$ , l'equazione  $\vec{u} \cdot L_O(\vec{u}) = 0$  implica  $\vec{u} = 0$ , per cui*

$$\vec{u} \cdot L_O(\vec{u}) > 0 \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

e l'operatore d'inerzia risulta *definito positivo* anziché semplicemente semidefinito positivo. L'affermazione non vale nel caso di un sistema costituito da punti allineati secondo una retta passante per il punto  $O$  — un'asta rettilinea, ad esempio — nel qual caso l'operatore d'inerzia ha carattere semidefinito positivo. Una tale eventualità, tuttavia, nei casi pratici non si realizza mai per cui appare del tutto legittimo affermare che *l'operatore d'inerzia è sempre definito positivo* per qualsiasi sistema materiale di interesse fisico.

La positività è equivalente ad affermare che *tutti gli autovalori di  $L_O$  sono strettamente positivi* e non semplicemente reali. Per ogni autovalore  $\lambda$  ed autovettore associato  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  si ha infatti, per definizione

$$L_O(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$$

e moltiplicando scalarmente membro a membro per  $\vec{v}$  si perviene all'espressione

$$\vec{v} \cdot L_O(\vec{v}) = \lambda |\vec{v}|^2$$

dalla quale segue che, come è lecito procedere per l'essere  $|\vec{v}| > 0$ ,

$$\lambda = \vec{v} \cdot L_O(\vec{v}) / |\vec{v}|^2 > 0.$$

## 12. Matrice d'inerzia e sue proprietà

*Si dice matrice d'inerzia di un sistema  $S$  di punti materiali la matrice di rappresentazione dell'operatore d'inerzia in  $O$  rispetto ad una base ortonormale.*

La matrice d'inerzia viene usualmente indicata con  $[L_O]$  e dipende dalla scelta del punto  $O$  nonché della base ortonormale  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ . Equivalentemente, si può ritenere che la matrice d'inerzia sia relativa alla terna di riferimento cartesiana ortogonale  $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ , di origine  $O$  e base associata  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ . Poiché l'operatore d'inerzia  $L_O$  è un operatore lineare simmetrico, risulta simmetrica anche la sua matrice di rappresentazione rispetto ad una qualsiasi base ortonormale; la matrice d'inerzia  $[L_O]$  è pertanto una **matrice reale e simmetrica**. Dei suoi 9 elementi soltanto 6 risultano indipendenti, i 3 elementi diagonali e i 3 collocati, ad

esempio, al di sopra della diagonale principale. Causa la simmetria, la matrice d'inerzia è sempre riconducibile alla forma diagonale, rispetto ad una base ortonormale di autovettori di  $L_O$ .

La matrice d'inerzia consente di scrivere in forma matriciale, particolarmente comoda per le applicazioni, il momento angolare in  $O$  di un sistema rigido con punto fisso  $O$ . Basta infatti indicare con  $K_1, K_2, K_3$  e  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  rispettivamente le componenti relative alla base  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  del momento angolare  $\vec{K}_O$  e della velocità angolare istantanea  $\vec{\omega}$  e sostituirle nell'equazione (11.2) per ottenere l'espressione matriciale dell'equazione (10.4):

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = [L_O] \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (12.1)$$

mentre la formula (10.5) per l'energia cinetica dello stesso sistema diventa:

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{K}_O = \frac{1}{2} (\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3) \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3) [L_O] \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}. \quad (12.2)$$

In forma algebrica, calcolando i prodotti matriciali, il momento angolare del sistema rigido è quindi dato da:

$$\vec{K}_O = \sum_{\alpha=1}^3 K_\alpha \hat{e}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 L_{\alpha\beta} \omega_\beta \hat{e}_\alpha = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 L_{\alpha\beta} \omega_\beta \hat{e}_\alpha$$

e l'energia cinetica dall'espressione:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^3 L_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta.$$

Gli elementi della matrice d'inerzia per un sistema di punti materiali si possono calcolare per mezzo della definizione:

$$L_{\alpha\beta} = \hat{e}_\alpha \cdot L_O(\hat{e}_\beta) = \hat{e}_\alpha \cdot \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge [m_i \hat{e}_\beta \wedge (P_i - O)] \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

applicando la solita identità del doppio prodotto vettoriale entro la sommatoria:

$$\begin{aligned} L_{\alpha\beta} &= \hat{e}_\alpha \cdot \sum_{i=1}^N m_i [(P_i - O)^2 \hat{e}_\beta - \hat{e}_\beta \cdot (P_i - O) (P_i - O)] = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i [(P_i - O)^2 \delta_{\alpha\beta} - \hat{e}_\alpha \cdot (P_i - O) \hat{e}_\beta \cdot (P_i - O)]. \end{aligned}$$

Se si indicano con  $x_{i\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , le coordinate  $(P_i - O) \cdot \hat{e}_\alpha$  del punto  $P_i$  rispetto alla terna  $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ , l'espressione precedente si riduce a:

$$L_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N m_i \left[ \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 x_{i\gamma}^2 - x_{i\alpha}x_{i\beta} \right] = \sum_{i=1}^N m_i [\delta_{\alpha\beta}(x_{i1}^2 + x_{i2}^2 + x_{i3}^2) - x_{i\alpha}x_{i\beta}]$$

per cui la matrice d'inerzia relativa a  $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3 = Ox_1x_2x_3$  si scrive esplicitamente nella forma:

$$[L_O] = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N m_i(x_{i2}^2 + x_{i3}^2) & -\sum_{i=1}^N m_i x_{i1}x_{i2} & -\sum_{i=1}^N m_i x_{i1}x_{i3} \\ -\sum_{i=1}^N m_i x_{i1}x_{i2} & \sum_{i=1}^N m_i(x_{i1}^2 + x_{i3}^2) & -\sum_{i=1}^N m_i x_{i2}x_{i3} \\ -\sum_{i=1}^N m_i x_{i1}x_{i3} & -\sum_{i=1}^N m_i x_{i2}x_{i3} & \sum_{i=1}^N m_i(x_{i1}^2 + x_{i2}^2) \end{pmatrix}. \quad (12.3)$$

Gli elementi diagonali della matrice hanno l'evidente significato di momenti d'inerzia relativi agli assi coordinati della terna  $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ :

$$\begin{aligned} L_{11} &= \sum_{i=1}^N m_i(x_{i2}^2 + x_{i3}^2) = I_{O\hat{e}_1} = I_{Ox_1} \\ L_{22} &= \sum_{i=1}^N m_i(x_{i3}^2 + x_{i1}^2) = I_{O\hat{e}_2} = I_{Ox_2} \\ L_{33} &= \sum_{i=1}^N m_i(x_{i1}^2 + x_{i2}^2) = I_{O\hat{e}_3} = I_{Ox_3} \end{aligned}$$

e per questa ragione vengono usualmente chiamati **momenti d'inerzia** tout court del sistema. In quanto momenti d'inerzia, si tratta di coefficienti **non negativi**. Si dimostra facilmente che condizione necessaria e sufficiente per l'annullarsi di un momento d'inerzia è che tutti i punti materiali del sistema giacciano lungo il corrispondente asse coordinato, in modo che le distanze di tutti i punti materiali da quell'asse siano nulle. Tutti e tre i momenti d'inerzia si annullano se e soltanto se tutti i punti materiali del sistema sono concentrati nell'origine  $O$  — ossia simultaneamente allineati lungo i tre assi coordinati della terna di riferimento. In ogni altro caso i momenti d'inerzia di un sistema rigido sono coefficienti strettamente positivi.

Gli elementi non diagonali della (12.3) non sono interpretabili in modo altrettanto immediato. Trattandosi di somme di prodotti delle coordinate cartesiane dei punti del sistema, prese due a due e pesate con i valori delle rispettive masse, questi coefficienti sono noti come **prodotti d'inerzia** od anche, equivalentemente, come **momenti di deviazione**. Le loro espressioni permettono di verificare direttamente l'attesa simmetria della matrice d'inerzia:

$$L_{12} = -\sum_{i=1}^N m_i x_{i1} x_{i2} = L_{21}$$

$$L_{23} = -\sum_{i=1}^N m_i x_{i2} x_{i3} = L_{32}$$

$$L_{31} = -\sum_{i=1}^N m_i x_{i3} x_{i1} = L_{13}$$

ma non di attribuire un segno definito ai coefficienti: **i prodotti d'inerzia possono risultare positivi, negativi o nulli**, secondo la particolare distribuzione di massa del sistema rigido e la scelta della terna di riferimento.

## 13. Diagonalizzazione della matrice d'inerzia

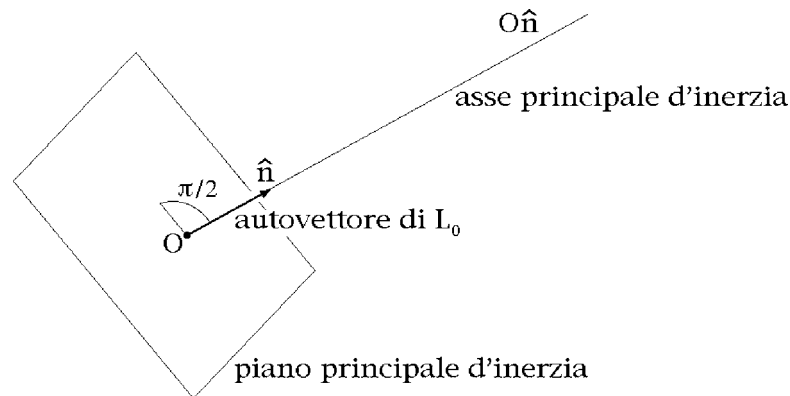
Un problema fondamentale nello studio della dinamica dei sistemi rigidi è quello della diagonalizzazione dell'operatore d'inerzia, ossia la riduzione della matrice d'inerzia alla forma diagonale mediante una scelta appropriata della terna di riferimento.

### 13.1 Elementi principali e centrali d'inerzia di un sistema di punti materiali

Nello studio del problema di diagonalizzazione si è soliti introdurre alcuni termini convenzionali, relativi ad assi, piani, terne di riferimento e momenti d'inerzia. Si tratta dei cosiddetti **elementi principali e centrali d'inerzia**. Le definizioni essenziali sono le seguenti.

*Si definisce asse principale d'inerzia in  $O$  di un sistema  $\mathbb{S}$  di punti materiali un'asse passante per  $O$  la cui direzione sia individuata da un autovettore dell'operatore d'inerzia di  $\mathbb{S}$  in  $O$ .*

*Per piano principale d'inerzia in  $O$  dello stesso sistema si intende un piano passante per  $O$  ortogonale ad un autovettore dell'operatore d'inerzia in  $O$ . Equivalentemente, piano principale d'inerzia in  $O$  è un piano condotto per  $O$  e ortogonale ad un asse principale d'inerzia in  $O$ .*



*Terna principale d'inerzia in  $O$  del sistema  $\mathbb{S}$  è una terna cartesiana ortogonale di origine  $O$  i cui assi coordinati siano assi principali d'inerzia di  $\mathbb{S}$  in  $O$ . In modo equivalente, una terna principale d'inerzia in  $O$  si può definire come una terna cartesiana  $Ox_1x_2x_3$  i cui piani coordinati  $Ox_1x_2$ ,  $Ox_2x_3$ ,  $Ox_3x_1$  sono piani principali d'inerzia di  $\mathbb{S}$  in  $O$ .*

**La simmetria dell'operatore d'inerzia in  $O$  assicura per ogni  $O \in \mathbb{R}^3$  l'esistenza di almeno una terna principale d'inerzia.**

È evidente dalle precedenti definizioni che rispetto ad una terna principale d'inerzia la matrice d'inerzia del sistema risulta diagonale; viceversa, se una terna di riferimento  $Ox_1x_2x_3$  è principale d'inerzia, allora i suoi assi coordinati sono principali d'inerzia in  $O$  per il sistema. Rispetto ad una terna principale d'inerzia la matrice d'inerzia è diagonale e i prodotti d'inerzia risultano conseguentemente nulli; i momenti d'inerzia assumono valori caratteristici  $A_1, A_2, A_3$  che si identificano con gli autovalori dell'operatore d'inerzia in  $O$ , come è evidente dalla forma dell'equazione caratteristica nella base della terna principale:

$$0 = \det([L_O] - \lambda \mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} A_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & A_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & A_3 - \lambda \end{pmatrix} = (A_1 - \lambda)(A_2 - \lambda)(A_3 - \lambda).$$

*Gli elementi diagonali  $A_1, A_2, A_3$  della matrice d'inerzia rispetto ad una terna principale in  $O$  sono gli autovalori dell'operatore d'inerzia in  $O$  e sono detti momenti principali d'inerzia.*

I momenti principali d'inerzia del sistema  $\mathbb{S}$  dipendono esclusivamente dalla scelta del punto  $O$ .

*Gli elementi principali (assi, piani, terne, momenti) d'inerzia rispetto al baricentro  $G$  sono detti elementi centrali d'inerzia.*

In particolare, i momenti centrali d'inerzia sono gli autovalori dell'operatore d'inerzia in  $G$ ,  $L_G$ . La simmetria dell'operatore  $L_G$  garantisce l'esistenza di almeno una terna centrale d'inerzia del sistema.

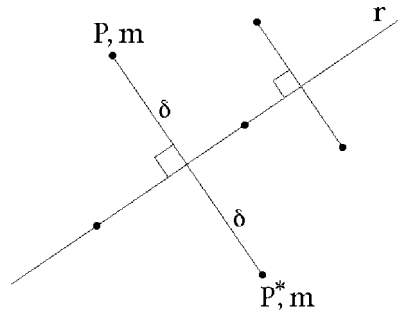
## 13.2 Elementi di simmetria

Alla determinazione delle terne principali — o centrali — d’inerzia e dei corrispondenti assi e piani principali — rispettivamente, centrali — si può pervenire, in generale, risolvendo il relativo problema agli autovalori. Si assegna una terna di riferimento arbitraria di origine  $O$  e si calcola la relativa matrice d’inerzia  $[L_O]$  del sistema; ricavati autovalori ed autovettori, si può procedere alla costruzione della terna principale.

Questa procedura generale può essere semplificata o persino evitata qualora il sistema presenti particolari elementi di simmetria. Tali elementi sono costituiti da assi e piani di simmetria.

### 13.2.1 Asse di simmetria

*Si dice asse di simmetria di un sistema  $\mathbb{S}$  di punti materiali una retta  $r$  tale che per ogni punto materiale  $P$  di  $\mathbb{S}$ , di massa  $m$ , o  $P$  appartiene a  $r$  oppure il punto simmetrico di  $P$  rispetto alla retta  $r$  è a sua volta un punto materiale del sistema, di uguale massa  $m$ .*



In presenza di un asse di simmetria i punti del sistema  $\mathbb{S}$  si distinguono in due sottoinsiemi: i punti che stanno sull’asse e quelli che giacciono al di fuori dell’asse; i secondi sono organizzati per coppie di punti simmetrici rispetto all’asse e di uguale massa. Si intende che i valori delle masse possono dipendere dalla coppia di punti simmetrici considerata.

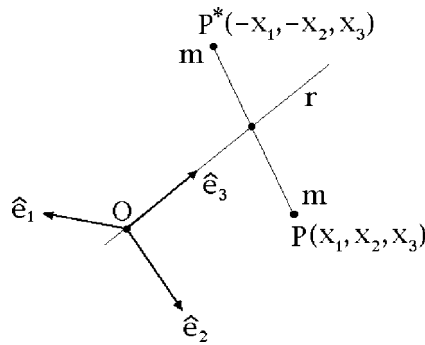
*Se il sistema  $\mathbb{S}$  ammette un asse di simmetria  $r$ , allora  $r$  è asse principale d’inerzia rispetto ad ogni suo punto. La retta  $r$  è anche asse centrale d’inerzia.*

Per provare l’asserto si scelga un punto  $O \in r$  e si introduca, per semplicità una terna di riferimento cartesiana ortogonale di origine  $O$  e il cui asse  $Ox_3$ , di versore  $\hat{e}_3$ , coincida con  $r$ . I prodotti d’inerzia  $L_{13}$  e  $L_{31}$  sono nulli:

$$L_{13} = L_{31} = -\sum_{i=1}^N m_i x_{i1} x_{i3} = 0$$

in quanto gli eventuali punti del sistema posti sull’asse hanno le coordinate  $x_1$  e  $x_2$  nulle e non danno alcun contributo, mentre gli altri ricorrono per coppie simmetriche di eguale massa le cui coordinate differiscono per il segno delle  $x_1$ ,  $x_2$  e che forniscono perciò un contributo nullo al prodotto d’inerzia:

$$-mx_1x_3 - m(-x_1)x_3 = -mx_1x_3 + mx_1x_3 = 0.$$



Lo stesso risultato vale per i prodotti  $L_{23}$  e  $L_{32}$ :

$$L_{23} = L_{32} = -\sum_{i=1}^N m_i x_{i2} x_{i3} = 0$$

per cui la matrice d'inerzia relativa a  $Ox_1x_2x_3$  assume la forma:

$$[L_O] = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & 0 \\ L_{12} & L_{22} & 0 \\ 0 & 0 & L_{33} \end{pmatrix} \tag{13.1}$$

e soddisfa la condizione:

$$[L_O] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & 0 \\ L_{12} & L_{22} & 0 \\ 0 & 0 & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_{33} \end{pmatrix} = L_{33} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dalla quale si deduce che  $\hat{e}_3$  è un autovettore dell'operatore d'inerzia  $L_O$  con autovalore  $L_{33}$ :

$$L_O(\hat{e}_3) = L_{33} \hat{e}_3 .$$

L'asse  $r = O\hat{e}_3$  è dunque un asse principale d'inerzia. Che si tratti anche di un asse centrale segue immediatamente notando che il baricentro  $G$  del sistema giace necessariamente sull'asse di simmetria, in modo che sull'asse è dato di scegliere  $O = G$ .

**13.2.2 Asse di simmetria di ordine  $n$  ( $n$  intero positivo  $> 2$ )**

*Un sistema  $\mathbb{S}$  si dice ammettere un asse di simmetria a di ordine (intero)  $n \geq 2$  se qualsiasi rotazione di un angolo  $2\pi/n$  attorno all'asse  $a$  lascia invariato il sistema, per quanto riguarda sia la collocazione dei suoi punti che le relative masse.*

Per riconoscere un asse di simmetria di ordine  $n$  non è dunque sufficiente verificare che la rotazione di  $2\pi/n$  radianti attorno ad esso assicuri la completa sovrapposizione *geometrica* del sistema con se stesso, ma occorre anche accertare che i punti portati a sovrapporsi siano di uguale massa. Per  $n = 2$  la definizione coincide con quella dell'asse di simmetria

in senso ordinario, discusso nella sezione 13.2.1., per cui è sufficiente considerare il caso di  $n > 2$ .

*Se il sistema  $\mathbb{S}$  ammette un asse di simmetria  $a$  di ordine  $n \geq 2$ , allora  $a$  è asse principale d'inerzia rispetto ad ogni suo punto. Lo stesso  $a$  costituisce anche un asse centrale d'inerzia per il sistema.*

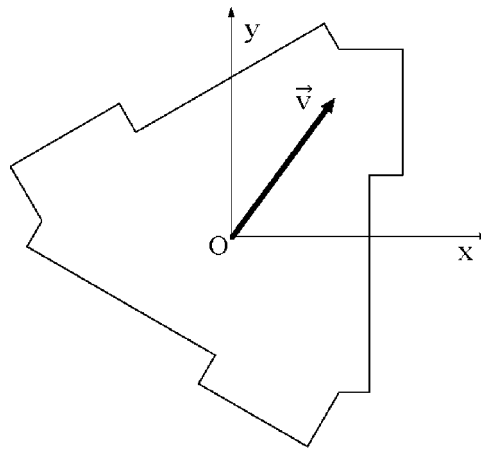
L'asserto è ovvio per  $n = 2$ . Per provarlo nel caso di  $n > 2$  si consideri un punto  $O \in a$  e si indichi con  $\hat{n}$  il versore direttore di  $a$ , in modo che  $a = O\hat{n}$ . L'operatore d'inerzia in  $O$  del sistema ammette una base ortonormale di autovettori; sia  $\vec{v}$  uno di questi autovettori, per cui  $L_O(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ , con  $\lambda > 0$ . Si possono verificare tre casi:

- (i)  $\vec{v}$  è parallelo a  $\hat{n}$ . In tal caso anche  $\hat{n}$  costituisce un autovettore dell'operatore d'inerzia in  $O$  del sistema:

$$L_O(\hat{n}) = \lambda\hat{n},$$

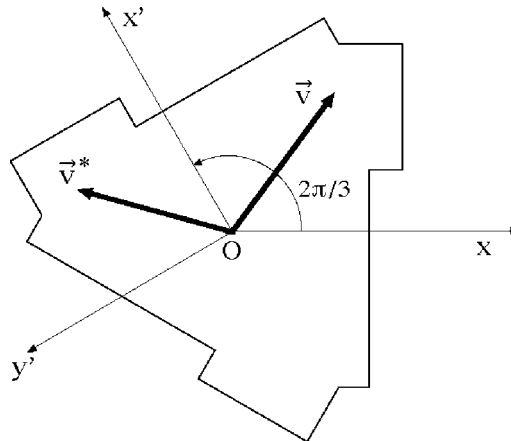
per cui  $a = O\hat{n}$  è un asse principale d'inerzia in  $O$ , come affermato;

- (ii)  $\vec{v}$  è ortogonale a  $\hat{n}$ . In questo caso il vettore  $\vec{v}^*$  ottenuto ruotando  $\vec{v}$  di  $2\pi/n$  attorno ad  $a = O\hat{n}$  è ancora un autovettore di  $L_O$ , associato allo stesso autovalore  $\lambda$ . Per verificarlo, si introduca una terna cartesiana ortogonale  $Oxyz$  in modo che l'asse di simmetria  $a$  si identifichi con l'asse  $Oz$ , come illustrato nella figura seguente per il caso di un sistema con asse di simmetria ternario:



dove viene messo in evidenza anche l'autovettore  $\vec{v}$ . Una rotazione di  $2\pi/n$  radianti (nella fattispecie di  $2\pi/3$  rad) attorno all'asse  $a = Oz$  della terna fa sì che l'intero sistema materiale e l'autovettore  $\vec{v}$  appaiano ruotati di un angolo opposto  $-2\pi/n$  nel nuovo sistema di riferimento, che si indicherà con  $Ox'y'z$ . Dal momento che  $a$  è un asse di simmetria di ordine  $n$ , rispetto a  $Ox'y'z$  il sistema materiale è collocato esattamente come rispetto al riferimento originale e quindi relativamente a  $Ox'y'z$  un autovettore di  $L_O$  deve collocarsi come già  $\vec{v}$  rispetto a  $Oxyz$ . Deve perciò esistere un secondo autovettore  $\vec{v}^*$ , ruotato di un angolo  $2\pi/n$  radianti attorno a  $Oz$  rispetto a  $\vec{v}$ ,

e con lo stesso autovalore associato  $\lambda$ , secondo quanto descritto dalla figura seguente:



Ma  $\vec{v}$  e  $\vec{v}^*$  sono di certo linearmente indipendenti, in quanto l'angolo di rotazione  $2\pi/n$  non può risultare multipli intero di  $\pi$  per  $n > 2$ . Ne segue allora che qualsiasi vettore non nullo e ortogonale all'asse  $a$  rappresenta un autovettore di  $L_O$ , sempre con lo stesso autovalore  $\lambda$ . Di conseguenza,  $\hat{n}$  deve essere un autovettore dell'operatore d'inerzia in  $O$  del sistema, poichè questo è il solo modo di assicurare l'esistenza di una base ortonormale di autovettori di  $L_O$ . Per definizione,  $a = O\hat{n}$  deve dunque costituire un asse principale d'inerzia in  $O$ ;

- (iii)  $\vec{v}$  non è né parallelo né ortogonale a  $\hat{n}$ . Nella fattispecie il vettore  $\vec{v}$  ed i vettori ottenuti ruotando  $\vec{v}$  di un angolo  $2\pi/n$  e  $-2\pi/n$  attorno ad  $O\hat{n}$  formano un sistema linearmente indipendente di 3 autovettori associati ad un comune autovalore: i tre vettori, applicati in  $O$ , non sono infatti complanari. Ne segue che qualsiasi vettore non nullo è autovettore di  $L_O$  e che il sistema presenta dunque una distribuzione sferica di massa rispetto ad  $O$ . Si conclude che  $a = O\hat{n}$  è un asse principale d'inerzia in  $O$  del sistema.

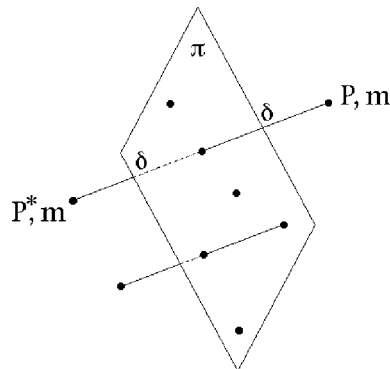
Per completare la dimostrazione basta ricordare che in presenza di un asse di simmetria di ordine  $n \geq 2$  il baricentro  $G$  del sistema appartiene sempre all'asse, per cui nella costruzione precedente può sempre assumersi  $O = G$ : l'asse di simmetria costituisce pertanto un asse centrale d'inerzia per il sistema.

Va sottolineato che la presenza di un asse di simmetria  $a$  di ordine  $n > 2$  implica sempre la struttura giroscopica o la distribuzione sferica di massa del sistema rispetto ad ogni punto  $O \in a$  (in particolare rispetto al baricentro): *i momenti principali d'inerzia in  $O \in a$  (o centrali)  $A_1, A_2, A_3$  non possono risultare tutti distinti*. Qualora si abbia struttura giroscopica, con  $A_1 = A_2 \neq A_3$ , l'asse principale associato ad  $A_3$  ("asse di figura" del corpo a struttura giroscopica in  $O$ ) deve coincidere con l'asse di simmetria.

### 13.2.3 Piano di simmetria

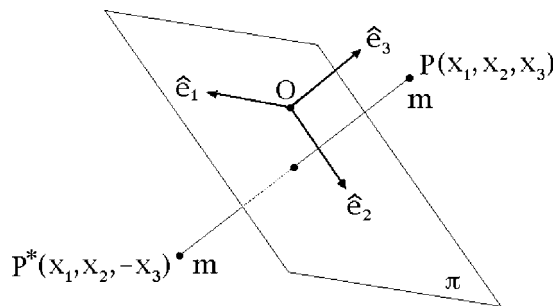
*Si definisce piano di simmetria di un sistema  $S$  di punti materiali un piano  $\pi$  tale che ogni punto  $P$  del sistema, di massa  $m$ , o appartiene a  $\pi$  oppure è associato ad un punto simmetrico rispetto a  $\pi$  appartenente a sua volta al sistema e di uguale massa  $m$ .*

Se è definito un piano di simmetria  $\pi$ , i punti del sistema  $\mathbb{S}$  che non giacciono su tale piano si presentano raccolti in coppie di punti di uguale massa disposti simmetricamente rispetto a  $\pi$ . I valori della massa varieranno, in generale, da coppia a coppia.



Se il sistema  $\mathbb{S}$  ammette un piano di simmetria  $\pi$ , allora  $\pi$  è piano principale d'inerzia rispetto ad ogni suo punto. Il piano  $\pi$  è anche piano centrale d'inerzia.

La verifica è analoga a quella vista per l'asse di simmetria. Si scelga un punto  $O \in \pi$  e si introduca una terna di riferimento  $Ox_1x_2x_3$  in modo che  $\pi$  coincida con il piano coordinato  $Ox_1x_2$  ovvero, equivalentemente, il versore  $\hat{e}_3$  sia ortogonale a  $\pi$ .



I prodotti d'inerzia  $L_{13}$  e  $L_{31}$  sono uguali a zero:

$$L_{13} = L_{31} = -\sum_{i=1}^N m_i x_{i1} x_{i3} = 0$$

per il fatto che i punti del sistema appartenenti al piano  $\pi = Ox_1x_2$  hanno quota  $x_3$  nulla e non danno ad essi alcun contributo, mentre tutti gli altri punti del sistema compaiono nella sommatoria per coppie simmetriche di contributo nullo:

$$-mx_1x_3 - mx_1(-x_3) = -mx_1x_3 + mx_1x_3 = 0.$$

Poiché la stessa proprietà vale pure per i prodotti  $L_{23}$  e  $L_{32}$ , se ne deduce che anche in questo caso la matrice d'inerzia assume la forma (13.1) e che di conseguenza il versore  $\hat{e}_3$  è di nuovo autovettore dell'operatore d'inerzia in  $O$  con autovalore  $L_{33}$ :

$$L_O(\hat{e}_3) = L_{33} \hat{e}_3.$$

La retta  $O\hat{e}_3$  costituisce dunque un asse principale d'inerzia e siccome il piano  $\pi = Ox_1x_2$  è a questo ortogonale e passante per  $O$ , si conclude che  $\pi$  è un piano principale d'inerzia, come affermato. Che poi  $\pi$  rappresenti anche un piano centrale d'inerzia segue immediatamente notando che il piano di simmetria deve necessariamente contenere il baricentro del sistema, per cui è sempre dato di scegliere  $O = G$  e di ripetere la costruzione precedente.

### 13.3 Sistemi piani

Un caso particolare di grande importanza pratica è quello dei **sistemi piani** di punti materiali, completamente ubicati in un piano assegnato  $\pi$ . Poiché il piano  $\pi$  è certamente un piano di simmetria, conviene introdurre una terna di riferimento cartesiana ortogonale che abbia l'origine in un punto  $O \in \pi$ , l'asse  $Ox_3$  ortogonale a  $\pi$  e gli assi residui  $Ox_1$   $Ox_2$  in  $\pi$ , in modo che la matrice d'inerzia assuma la forma (13.1). Nella fattispecie la matrice d'inerzia si semplifica ulteriormente notando che tutti i punti del sistema hanno quota  $x_3$  nulla e che pertanto:

$$L_{11} = \sum_{i=1}^N m_i (x_{i2}^2 + x_{i3}^2) = \sum_{i=1}^N m_i x_{i2}^2$$

$$L_{22} = \sum_{i=1}^N m_i (x_{i3}^2 + x_{i1}^2) = \sum_{i=1}^N m_i x_{i1}^2$$

per cui:

$$L_{33} = \sum_{i=1}^N m_i (x_{i1}^2 + x_{i2}^2) = \sum_{i=1}^N m_i x_{i1}^2 + \sum_{i=1}^N m_i x_{i2}^2 = L_{22} + L_{11} \quad (13.2)$$

e la matrice d'inerzia diventa:

$$[L_O] = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & 0 \\ L_{12} & L_{22} & 0 \\ 0 & 0 & L_{11} + L_{22} \end{pmatrix}.$$

La matrice d'inerzia di un sistema piano, rispetto ad una terna di riferimento  $Ox_1x_2x_3$  il cui piano coordinato  $Ox_1x_2$  coincida con il piano di giacitura del sistema, dipende pertanto da tre soli coefficienti: i due momenti d'inerzia e il solo prodotto d'inerzia relativi agli assi coordinati sul piano di giacitura,  $Ox_1$  e  $Ox_2$ . La relazione (13.2) è nota talvolta come **teorema dell'asse perpendicolare**.

## 14. Teorema di Huygens-Steiner

Nota che sia la matrice d'inerzia di un sistema  $\mathbb{S}$  rispetto ad una terna di riferimento cartesiana e ortogonale  $Ox_1x_2x_3$ , nonché la posizione del relativo baricentro, è possibile ricavare la matrice d'inerzia relativa ad una qualsiasi altra terna cartesiana ortogonale  $Qy_1y_2y_3$ : è sufficiente conoscere le coordinate in  $Ox_1x_2x_3$  della nuova origine  $Q$  e i coseni direttori della nuova terna rispetto alla vecchia. Non si rende quindi necessario ricorrere direttamente alla definizione per calcolare momenti e prodotti d'inerzia del sistema relativamente

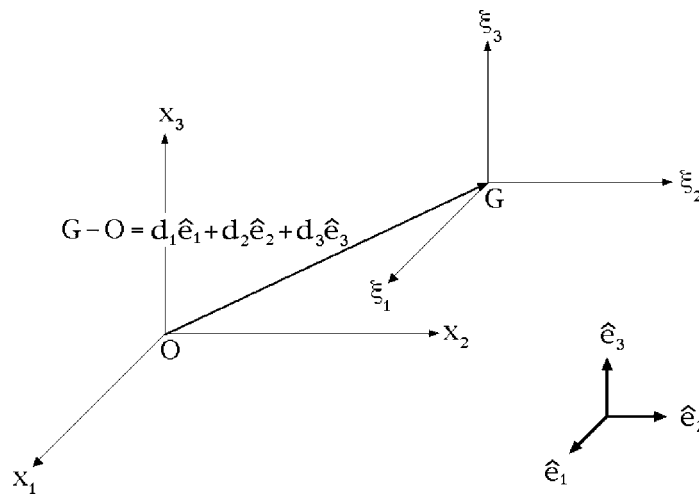
a  $Qy_1y_2y_3$  e il calcolo ne risulta notevolmente semplificato. La relazione algebrica generale che lega le matrici d'inerzia relative alla nuova e alla vecchia terna è tuttavia piuttosto complessa e non verrà esaminata in queste note. Ci si limiterà a considerare un caso particolare, nondimeno molto importante, suscettibile di una formulazione elementare: quello di terne di riferimento cartesiane ortogonali ottenute l'una dall'altra per semplice traslazione e dunque caratterizzate da assi omonimi rispettivamente paralleli. Si ha il seguente:

### 14.1 Teorema di Huygens-Steiner generalizzato

*Dato un sistema  $\mathcal{S}$  di punti materiali, si considerino due terne di riferimento cartesiane ortogonali  $Ox_1x_2x_3$  e  $G\xi_1\xi_2\xi_3$ , l'una di origine  $O$  arbitraria e l'altra con origine nel baricentro  $G$  di  $\mathcal{S}$  — riferimento baricentrale. Le terne siano sovrapponibili l'una all'altra per semplice traslazione, in modo che gli assi omonimi  $Ox_i$  e  $G\xi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , risultino rispettivamente paralleli fra di loro e la base di versori associata  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  sia la stessa per le due terne.*

*Indicati allora con  $G - O = d_1\hat{e}_1 + d_2\hat{e}_2 + d_3\hat{e}_3$  il vettore posizione del baricentro rispetto al riferimento  $Ox_1x_2x_3$  e con  $m$  la massa del sistema, la matrice d'inerzia  $[L_O]$  del sistema relativa alla terna  $Ox_1x_2x_3$  e quella  $[L_G]$  relativa alla terna baricentrale  $G\xi_1\xi_2\xi_3$  soddisfano alla relazione matriciale:*

$$[L_O] = [L_G] + m \begin{pmatrix} d_2^2 + d_3^2 & -d_1d_2 & -d_1d_3 \\ -d_1d_2 & d_3^2 + d_1^2 & -d_2d_3 \\ -d_1d_3 & -d_2d_3 & d_1^2 + d_2^2 \end{pmatrix}.$$



Il teorema afferma che la matrice d'inerzia  $[L_O]$  rispetto ad una terna  $Ox_1x_2x_3$  si ricava dalla matrice d'inerzia  $[L_G]$  relativa alla terna baricentrale  $G\xi_1\xi_2\xi_3$ , ottenuta per traslazione in  $G$  della terna originale, sommando ad essa una matrice di correzione che può pensarsi a sua volta come la matrice d'inerzia rispetto a  $Ox_1x_2x_3$  di un sistema materiale fittizio costituito dal solo baricentro  $G$  in cui si pensi concentrata l'intera massa  $m$ .

Per dimostrare il teorema si nota in primo luogo che le coordinate  $x_{i\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , di un generico punto  $P_i \in \mathbb{S}$  rispetto alla terna  $Ox_1x_2x_3$  sono legate alle corrispondenti coordinate  $\xi_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , relative al riferimento  $G\xi_1\xi_2\xi_3$  dall'ovvia relazione:

$$x_{i\alpha} = d_\alpha + \xi_{i\alpha} \quad \forall \alpha = 1, 2, 3, \quad i = 1, \dots, N. \quad (14.1)$$

L'elemento  $L_{\alpha\beta}$  della matrice d'inerzia  $[L_O]$  si scrive allora:

$$[L_O]_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N m_i \left[ \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 x_{i\gamma}^2 - x_{i\alpha} x_{i\beta} \right]$$

e sostituendo le (14.1) in luogo delle coordinate  $x_{i\alpha}$  diventa:

$$[L_O]_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N m_i \left[ \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 (d_{i\gamma} + \xi_{i\gamma})^2 - (d_\alpha + \xi_{i\alpha})(d_\beta + \xi_{i\beta}) \right].$$

Eseguendo i prodotti si ottiene poi:

$$[L_O]_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N m_i \left[ \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 (d_\gamma^2 + 2d_\gamma \xi_{i\gamma} + \xi_{i\gamma}^2) - d_\alpha d_\beta - d_\alpha \xi_{i\beta} - \xi_{i\alpha} d_\beta - \xi_{i\alpha} \xi_{i\beta} \right]$$

in modo che un riordinamento dei termini conduce a:

$$\begin{aligned} [L_O]_{\alpha\beta} &= \sum_{i=1}^N m_i \left[ \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 \xi_{i\gamma}^2 - \xi_{i\alpha} \xi_{i\beta} \right] + \sum_{i=1}^N m_i \left[ \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 d_\gamma^2 - d_\alpha d_\beta \right] + \\ &+ 2\delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 d_\gamma \sum_{i=1}^N m_i \xi_{i\gamma} - d_\alpha \sum_{i=1}^N m_i \xi_{i\beta} - d_\beta \sum_{i=1}^N m_i \xi_{i\alpha}. \end{aligned}$$

Basta infine indicare con  $m$  la massa totale  $\sum_{i=1}^N m_i$ , osservare che i termini di primo grado nelle coordinate  $\xi$  altro non sono se non le coordinate del baricentro  $G$  rispetto alla terna baricentrale — ovviamente nulle:

$$\sum_{i=1}^N m_i \xi_{i\alpha} = m \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \xi_{i\alpha} = m (G - G) \cdot \hat{e}_\alpha = 0 \quad \forall \alpha = 1, 2, 3, \quad (14.2)$$

e riconoscere nei termini residui l'elemento  $L_{\alpha\beta}$  della matrice d'inerzia relativa a  $G\xi_1\xi_2\xi_3$ :

$$\sum_{i=1}^N m_i \left[ \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 \xi_{i\gamma}^2 - \xi_{i\alpha} \xi_{i\beta} \right] = [L_G]_{\alpha\beta}$$

per stabilire il risultato:

$$[L_O]_{\alpha\beta} = [L_G]_{\alpha\beta} + m \left[ \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 d_\gamma^2 - d_\alpha d_\beta \right] \quad \forall \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

Si sottolinea che il teorema assume questa forma particolarmente semplice — anche da memorizzare — grazie alle identità (14.2). L'ipotesi che la seconda terna sia baricentrale risulta quindi essenziale nel provare il risultato.

### 14.2 Prima applicazione: terne non baricentrali

Il teorema di Huygens-Steiner si estende facilmente al caso di terne ottenute l'una dall'altra per pura traslazione nessuna delle quali abbia origine nel baricentro del sistema  $\mathbb{S}$ . Indicate con  $Ox_1x_2x_3$  e  $\Omega x_1x_2x_3$  le due terne e con  $G$  il baricentro di  $\mathbb{S}$ , se si pone:

$$G - O = d_1 \hat{e}_1 + d_2 \hat{e}_2 + d_3 \hat{e}_3$$

per il vettore posizione del baricentro rispetto alla prima terna e:

$$G - \Omega = \delta_1 \hat{e}_1 + \delta_2 \hat{e}_2 + \delta_3 \hat{e}_3$$

per il vettore posizione di  $G$  rispetto alla seconda, il teorema di Huygens-Steiner conduce alle seguenti relazioni per la matrice d'inerzia relativa alla terna baricentrale  $Gx_1x_2x_3$ :

$$[L_O] = [L_G] + m \begin{pmatrix} d_2^2 + d_3^2 & -d_1 d_2 & -d_1 d_3 \\ -d_1 d_2 & d_3^2 + d_1^2 & -d_2 d_3 \\ -d_1 d_3 & -d_2 d_3 & d_1^2 + d_2^2 \end{pmatrix}$$

$$[L_\Omega] = [L_G] + m \begin{pmatrix} \delta_2^2 + \delta_3^2 & -\delta_1 \delta_2 & -\delta_1 \delta_3 \\ -\delta_1 \delta_2 & \delta_3^2 + \delta_1^2 & -\delta_2 \delta_3 \\ -\delta_1 \delta_3 & -\delta_2 \delta_3 & \delta_1^2 + \delta_2^2 \end{pmatrix}$$

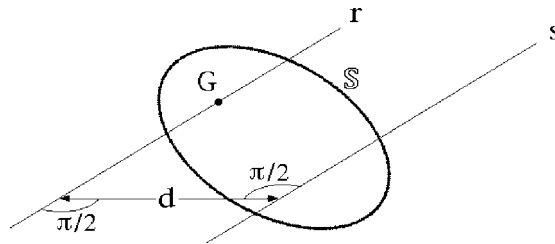
dalle quali, eliminando  $[L_G]$ , si deduce la relazione cercata tra le matrici  $[L_O]$  ed  $[L_\Omega]$ :

$$[L_\Omega] = [L_O] - m \begin{pmatrix} d_2^2 + d_3^2 & -d_1 d_2 & -d_1 d_3 \\ -d_1 d_2 & d_3^2 + d_1^2 & -d_2 d_3 \\ -d_1 d_3 & -d_2 d_3 & d_1^2 + d_2^2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} \delta_2^2 + \delta_3^2 & -\delta_1 \delta_2 & -\delta_1 \delta_3 \\ -\delta_1 \delta_2 & \delta_3^2 + \delta_1^2 & -\delta_2 \delta_3 \\ -\delta_1 \delta_3 & -\delta_2 \delta_3 & \delta_1^2 + \delta_2^2 \end{pmatrix}.$$

In definitiva il calcolo viene eseguito introducendo la terna baricentrale come riferimento ausiliario ed applicando due volte il teorema di Huygens-Steiner.

### 14.3 Seconda applicazione: teorema di Huygens-Steiner

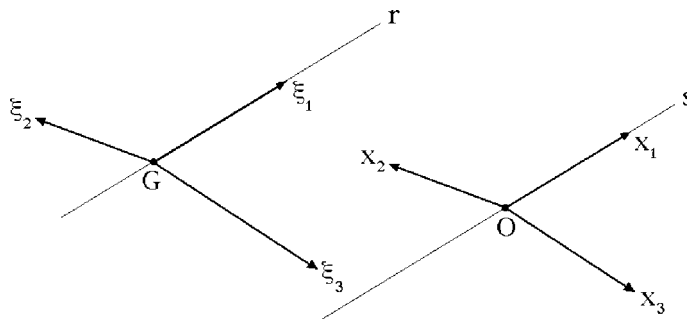
La forma originale del teorema di Huygens-Steiner si riferisce ai soli momenti d'inerzia.



Siano  $r$  ed  $s$  due rette parallele, la prima delle quali passante per il baricentro  $G$  di un sistema  $\mathbb{S}$  di punti materiali di massa  $m$ . Allora il momento d'inerzia di  $\mathbb{S}$  rispetto all'asse  $s$  si ottiene dal momento d'inerzia relativo all'asse baricentrale  $r$  sommando il prodotto della massa del sistema per il quadrato della distanza  $d$  fra gli assi:

$$I_s = I_r + md^2 . \tag{14.3}$$

Il teorema si prova introducendo due terne  $Ox_1x_2x_3$  e  $G\xi_1\xi_2\xi_3$  ottenute l'una dall'altra per semplice traslazione, in modo che la retta  $s$  coincida con l'asse coordinato  $Ox_1$  e la retta  $r$  si identifichi con l'asse coordinato  $G\xi_1$  della terna baricentrale.



Il teorema di Huygens-Steiner generalizzato porge allora, per l'elemento  $L_{11}$  delle matrici d'inerzia:

$$[L_O]_{11} = [L_G]_{11} + m(d_2^3 + d_3^2)$$

e il risultato segue notando che:

$$[L_O]_{11} = I_s \quad [L_G]_{11} = I_r \quad d_2^3 + d_3^2 = d^2 .$$

### 14.4 Terza applicazione: terne principali ottenute per traslazione di terne centrali

Dal teorema di Huygens-Steiner generalizzato segue che è sempre possibile costruire delle terne principali d'inerzia traslando opportunamente una terna centrale d'inerzia.

*La terna di riferimento ottenuta per traslazione di una terna centrale d'inerzia è principale se e soltanto se la traslazione ha luogo lungo un asse centrale d'inerzia.*

Se infatti  $G\xi_1\xi_2\xi_3$  è una terna centrale d'inerzia del sistema la relativa matrice d'inerzia assume la forma diagonale:

$$[L_G] = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}$$

nella quale  $A_1, A_2, A_3$  sono i momenti centrali d'inerzia; la matrice d'inerzia rispetto alla terna  $Ox_1x_2x_3$  ricavata traslando  $G\xi_1\xi_2\xi_3$  nell'origine  $O$  definita da  $G - O = d_1\hat{e}_1 + d_2\hat{e}_2 +$

$d_3 \hat{e}_3 \neq 0$  per Huygens-Steiner diventa perciò:

$$[L_O] = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} d_2^2 + d_3^2 & -d_1 d_2 & -d_1 d_3 \\ -d_1 d_2 & d_3^2 + d_1^2 & -d_2 d_3 \\ -d_1 d_3 & -d_2 d_3 & d_1^2 + d_2^2 \end{pmatrix}.$$

Per definizione, la nuova terna  $Ox_1x_2x_3$  è principale d'inerzia se e soltanto se la matrice  $[L_O]$  risulta diagonale. Condizione necessaria e sufficiente a che ciò avvenga è che siano nulli tutti i termini correttivi dei prodotti d'inerzia:

$$-md_1d_2 = 0 \qquad -md_2d_3 = 0 \qquad -md_3d_1 = 0$$

ovvero che si abbia:

$$d_1d_2 = d_2d_3 = d_3d_1 = 0.$$

Poiché per ipotesi  $(d_1, d_2, d_3) \neq (0, 0, 0)$  la condizione ricorre se e soltanto se due delle coordinate  $d_1, d_2, d_3$  sono nulle e la terza diversa da zero. Ciò equivale a richiedere che  $G - O$  sia diretto secondo gli assi coordinati della terna  $G\xi_1\xi_2\xi_3$  e che quindi l'origine  $O$  si collochi lungo uno degli assi centrali d'inerzia del sistema.

## 15. Additività delle matrici d'inerzia

È evidente dalle rispettive definizioni che l'operatore e la matrice d'inerzia sono delle grandezze additive. Se un sistema di punti materiali  $\mathbb{S}$  si compone di due parti disgiunte  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{B}$ , la matrice d'inerzia di  $\mathbb{S}$  rispetto ad una terna  $Ox_1x_2x_3$  è la somma delle matrici d'inerzia di  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{B}$  relativamente alla stessa terna:

$$\begin{aligned} [L_O]_{\alpha\beta} &= \sum_{P_i \in \mathbb{S}} m_i \left[ \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 x_{i\gamma}^2 - x_{i\alpha}x_{i\beta} \right] = \qquad \forall \alpha, \beta = 1, 2, 3 \\ &= \sum_{P_i \in \mathbb{A}} m_i \left[ \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 x_{i\gamma}^2 - x_{i\alpha}x_{i\beta} \right] + \sum_{P_i \in \mathbb{B}} m_i \left[ \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 x_{i\gamma}^2 - x_{i\alpha}x_{i\beta} \right]. \end{aligned}$$

Questa proprietà di additività può essere utile per semplificare il calcolo della matrice d'inerzia in sistemi compositi.

## 16. Sistemi continui

Le definizioni di operatore e matrice d'inerzia, di asse, piano e terna principale o centrale d'inerzia, di asse e piano di simmetria, nonché le relative proprietà possono essere convenientemente estese al caso di sistemi (rigidi) continui: curve, superfici e solidi regolari.

### 16.1 Curve regolari

Si dice che un sistema ha la struttura di una curva regolare se la sua geometria è descritta da una parametrizzazione  $\varphi$  di un intervallo reale  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  a valori nello spazio fisico  $\mathbb{R}^3$ :

$$P - O = \varphi(\xi) \quad , \quad \xi \in [a, b].$$

La parametrizzazione si intende **regolare**, nel senso che la funzione  $\varphi$  è di classe  $C^1$  nel proprio dominio di definizione ed ivi soddisfa la condizione:

$$\varphi'(\xi) \neq 0 \quad \forall \xi \in [a, b].$$

La parametrizzazione definisce una **curva regolare** di  $\mathbb{R}^3$  e la sua immagine si dice **traccia** della curva regolare. La lunghezza del tratto di curva compreso fra i valori  $\xi$  e  $\xi + d\xi$  del parametro è data da:

$$ds = |\varphi'(\xi)| d\xi$$

e la massa dello stesso tratto di curva si esprime per mezzo della densità lineare  $\lambda(\xi)$ :

$$dm = \lambda ds = \lambda(\xi) |\varphi'(\xi)| d\xi$$

in modo che la massa del sistema vale:

$$m = \int_a^b \lambda(\xi) |\varphi'(\xi)| d\xi.$$

L'operatore d'inerzia in  $O$  viene definito in modo naturale a partire dalla definizione (10.1) per un sistema di punti materiali, sostituendo alle masse la massa infinitesima  $dm = \lambda ds$ , ai vettori  $P_i - O$  la parametrizzazione  $\varphi$  e alla sommatoria l'integrale curvilineo:

$$L_O(\vec{u}) = \int_a^b \varphi(\xi) \wedge [\lambda(\xi) \vec{u} \wedge \varphi(\xi)] |\varphi'(\xi)| d\xi \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3.$$

Gli elementi della matrice d'inerzia rispetto alla terna  $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$  si definiscono per mezzo delle relazioni:

$$L_{\alpha\beta} = \int_a^b \lambda(\xi) \left[ \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 x_\gamma(\xi)^2 - x_\alpha(\xi)x_\beta(\xi) \right] |\varphi'(\xi)| d\xi \quad \forall \alpha, \beta = 1, 2, 3,$$

in cui le funzioni  $x_\alpha(\xi)$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , sono le componenti di  $\varphi(\xi)$  rispetto alla base  $\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$  — si tratta evidentemente di funzioni  $C^1$  nell'intervallo  $[a, b]$ . **Tutte le proprietà** viste per i sistemi discreti **si estendono inalterate anche al caso curvilineo**, come è immediato verificare.

## 16.2 Superfici regolari

La geometria di un sistema materiale con la struttura di una superficie regolare è rappresentata mediante una parametrizzazione  $\varphi$  di un dominio chiuso  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}^3$ :

$$P - O = \varphi(u, v) \quad , \quad (u, v) \in \Omega.$$

La parametrizzazione è **regolare**, cioè di classe  $C^1$  nel proprio dominio di definizione e soddisfacente alla condizione:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \neq 0$$

che garantisce l'esistenza di un versore normale ad ogni singolo punto della superficie. La parametrizzazione definisce una **superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$**  e la sua immagine è detto **traccia** della superficie regolare. L'area infinitesima dell'elemento di superficie parametrizzato dal rettangolo  $[u, u + du] \times [v, v + dv] \subset \Omega$  viene espressa da:

$$dA = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right| dudv$$

e la massa della stessa porzione di superficie si rappresenta mediante una funzione non negativa di densità superficiale  $\sigma(u, v)$ :

$$dm = \sigma dA = \sigma(u, v) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right| dudv.$$

La massa del sistema si scrive perciò:

$$m = \int_{\Omega} \sigma(u, v) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right| dudv$$

mentre l'operatore d'inerzia in  $O$  si definisce sempre a partire dalla (10.1) rimpiazzando le masse dei singoli punti con la massa infinitesima  $dm = \sigma dA$ , i vettori posizione  $P_i - O$  con la parametrizzazione  $\varphi$  e la sommatoria discreta con l'integrale di superficie:

$$L_O(\vec{u}) = \int_{\Omega} \varphi \wedge (\sigma \vec{u} \wedge \varphi) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| dudv \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3.$$

Indicate con  $x_{\alpha}(u, v)$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , le componenti di  $\varphi(u, v)$  rispetto ad una base ortonormale  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ , la matrice d'inerzia del sistema rispetto alla terna  $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$  ha gli elementi:

$$L_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} \sigma \left[ \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 x_{\gamma}^2 - x_{\alpha}x_{\beta} \right] \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| dudv \quad \forall \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

Anche per le superfici regolari valgono tutte le proprietà già dimostrate per i sistemi di punti materiali discreti.

### 16.3 Solidi regolari

Un solido regolare è descritto da una parametrizzazione del tipo:

$$P - O = \varphi(u, v, w) \quad , \quad (u, v, w) \in \Omega$$

definita su un dominio chiuso  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  a valori in  $\mathbb{R}^3$ . La parametrizzazione regolare è di classe  $C^1$  in  $\Omega$  e soddisfa la condizione supplementare

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v, w) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v, w) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial w}(u, v, w) \neq 0 \quad \forall (u, v, w) \in \Omega.$$

Il volume infinitesimo dell'elemento di solido parametrizzato dal rettangolo  $[u, u + du] \times [v, v + dv] \times [w, w + dw] \subset \Omega$  si definisce nella forma:

$$dV = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v, w) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v, w) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial w}(u, v, w) \right| dudvdw$$

e la sua massa viene espressa per mezzo di una densità non negativa  $\rho(u, v, w)$ :

$$dm = \rho dV = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v, w) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v, w) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial w}(u, v, w) \right| dudvdw.$$

La massa del sistema vale perciò:

$$m = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v, w) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v, w) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial w}(u, v, w) \right| dudvdw$$

mentre l'operatore d'inerzia in  $O$  si definisce un modo analogo a quanto già visto nel caso di curve e superfici regolari:

$$L_O(\vec{u}) = \int_{\Omega} \varphi \wedge (\rho \vec{u} \wedge \varphi) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right| dudvdw \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3.$$

Se  $x_{\alpha}(u, v, w)$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , sono le componenti di  $\varphi(u, v, w)$  relativamente ad una base ortonormale  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ , gli elementi della matrice d'inerzia del sistema rispetto alla terna  $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$  diventano:

$$L_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} \rho \left[ \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma=1}^3 x_{\gamma}^2 - x_{\alpha}x_{\beta} \right] \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right| dudvdw \quad \forall \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

Ai solidi regolari si applicano le stesse proprietà precedentemente dimostrate per i sistemi di punti materiali discreti.

## 17. Equazioni cardinali della dinamica rigida

Le equazioni cardinali della dinamica rigida non sono altro che le equazioni cardinali della dinamica applicate ad un sistema rigido. Dal caso generale esse si distinguono per:

- (i) la forma particolare assunta dalla quantità di moto e dal momento angolare del sistema, causa la specifica struttura degli atti di moto rigido;
- (ii) la scelta del polo  $O$  nell'equazione cardinale del momento angolare, polo usualmente identificato con un punto dello spazio solidale al sistema.

Le equazioni cardinali della quantità di moto e del momento angolare si scrivono nella forma usuale:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^{\text{est}} \\ \frac{d\vec{K}_O}{dt} = m \dot{G} \wedge \dot{O} + \vec{M}_O^{\text{est}} \end{cases} \quad (17.1)$$

essendosi indicati con  $G$ ,  $\vec{Q}$ ,  $\vec{K}_O$  rispettivamente il baricentro, la quantità di moto e il momento angolare in  $O$  del sistema, mentre  $\vec{R}^{\text{est}}$  e  $\vec{M}_O^{\text{est}}$  sono il risultante ed il momento risultante in  $O$  delle forze esterne applicate al sistema, attive e di reazione vincolare. Si osservi in proposito che non è in generale possibile attribuire la reazione vincolare agente su un punto materiale alla specifica interazione di questo con altri punti materiali appartenenti o meno al sistema; di conseguenza, non è banale distinguere le reazioni vincolari in interne ed esterne al sistema. **Può così essere opportuno ricomprendere in  $\vec{R}^{\text{est}}$  e  $\vec{M}_O^{\text{est}}$  l'intero contributo delle reazioni vincolari, senza distinguere fra interne ed esterne.** La quantità di moto del sistema può anche essere espressa in termini della velocità del baricentro  $G$ :

$$\vec{Q} = m\dot{G}.$$

Nella fattispecie il baricentro  $G$  è un punto dello spazio solidale al sistema e la sua velocità si può rappresentare mediante il teorema di Poisson; se  $O$  è un punto dello spazio solidale, il teorema porge:

$$\dot{G} = \dot{O} + \vec{\omega} \wedge (G - O)$$

sicché l'accelerazione istantanea di  $G$  vale:

$$\ddot{G} = \ddot{O} + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - O)]$$

e l'equazione cardinale della quantità di moto diventa:

$$m\ddot{O} + m\dot{\vec{\omega}} \wedge (G - O) + m\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - O)] = \vec{R}^{\text{est}}.$$

Considerazioni analoghe valgono per il momento angolare in  $O$ , punto dello spazio solidale del sistema:

$$\begin{aligned} \vec{K}_O &= \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge m_i \dot{P}_i = \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge m_i [\dot{O} + \vec{\omega} \wedge (P_i - O)] = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \wedge \dot{O} + \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge [m_i \vec{\omega} \wedge (P_i - O)] = \\ &= m(G - O) \wedge \dot{O} + L_O(\vec{\omega}) \end{aligned}$$

in modo che la derivata rispetto al tempo di  $\vec{K}_O$  risulta:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{K}_O}{dt} &= m(\dot{G} - \dot{O}) \wedge \dot{O} + m(G - O) \wedge \ddot{O} + \frac{d}{dt} L_O(\vec{\omega}) = \\ &= m\dot{G} \wedge \dot{O} + m(G - O) \wedge \ddot{O} + \frac{d}{dt} L_O(\vec{\omega}) \end{aligned}$$

e la seconda equazione cardinale della dinamica rigida assume la forma:

$$m\dot{G} \wedge \dot{O} + m(G - O) \wedge \ddot{O} + \frac{d}{dt} L_O(\vec{\omega}) = m\dot{G} \wedge \dot{O} + \vec{M}_O^{\text{est}}$$

che semplificando si riduce a:

$$m(G - O) \wedge \ddot{O} + \frac{d}{dt} L_O(\vec{\omega}) = \vec{M}_O^{\text{est}}.$$

## 18. Teorema dell'energia cinetica per un sistema rigido

Il teorema dell'energia cinetica in forma differenziale è dato dall'espressione:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^N \dot{P}_i \cdot \vec{F}_i = \pi.$$

Se  $O$  è un punto dello spazio solidale al sistema rigido, la potenza  $\pi$  delle forze applicate al sistema si scrive in funzione del risultante e del momento risultante in  $O$  delle forze applicate:

$$\begin{aligned} \pi &= \sum_{i=1}^N \dot{P}_i \cdot \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N [\dot{O} + \vec{\omega} \wedge (P_i - O)] \cdot \vec{F}_i = \\ &= \sum_{i=1}^N \dot{O} \cdot \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N \vec{\omega} \wedge (P_i - O) \cdot \vec{F}_i = \\ &= \dot{O} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = \dot{O} \cdot \vec{R} + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_O \end{aligned}$$

e quindi, in virtù del principio di azione e reazione, del solo risultante e momento risultante in  $O$  delle sole sollecitazioni esterne:

$$\pi = \dot{O} \cdot \vec{R}^{\text{est}} + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_O^{\text{est}}.$$

Il teorema delle forze vive per un sistema rigido diventa pertanto:

$$\frac{dT}{dt} = \dot{O} \cdot \vec{R}^{\text{est}} + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_O^{\text{est}}. \quad (18.1)$$

Notevole è la circostanza che la potenza delle sollecitazioni agenti sul sistema rigido dipenda unicamente dalle sollecitazioni **esterne**, mentre nei sistemi non rigidi anche le forze interne giocano un ruolo di rilievo.

## 19. Introduzione alla dinamica dei sistemi rigidi

È ben noto dalla dinamica dei sistemi che lungo i moti di un sistema di punti materiali devono sempre essere soddisfatte le equazioni cardinali della quantità di moto e del momento angolare. L'idea chiave nello studio della dinamica dei sistemi rigidi è che **le equazioni cardinali dell'impulso e del momento angolare forniscono le equazioni del moto**, purché riscritte convenientemente e a condizione di introdurre opportune prescrizioni supplementari, necessarie per trattare le eventuali reazioni vincolari esterne. Le equazioni cardinali costituiscono un sistema di **6 equazioni scalari indipendenti**: la circostanza che queste possano determinare completamente la dinamica di un sistema rigido **composto da un numero qualsivoglia di punti materiali** si spiega con il fatto che i sistemi rigidi

sono sistemi vincolati e il numero di variabili atte a specificarne completamente la configurazione dipende unicamente dai vincoli e non dal numero di punti materiali costituenti. Tale numero è noto come **numero di gradi di libertà** del sistema: e la sua definizione va ben oltre lo studio dei soli sistemi rigidi, essendo caratteristica dei cosiddetti **sistemi olonomi**. I teoremi generali di esistenza ed unicità delle soluzioni del problema di Cauchy nei sistemi di equazioni differenziali impongono che **il numero di equazioni scalari del moto coincida con il numero di variabili** che individuano le configurazioni del sistema, ossia con il numero di gradi di libertà: ciò allo scopo di assicurare che le condizioni iniziali determinino completamente il moto del sistema nel passato e nel futuro — **determinismo** della meccanica.

I casi notevoli per i quali ha interesse scrivere le equazioni del moto sono quelli dei sistemi rigidi liberi, con punto fisso e con asse fisso.

## 19.1 Sistemi rigidi liberi

Un sistema rigido libero non è soggetto ad ulteriori vincoli oltre a quelli di rigidità. Ci si convince facilmente che il numero di gradi di libertà di un sistema rigido libero è pari a 6. Senza fornire una prova rigorosa di questa proprietà, che andrebbe comunque oltre gli scopi di queste note, si può osservare che per specificare la configurazione del sistema rigido libero occorre:

- (i) assegnare in primo luogo la posizione di un suo punto  $A$ , il che si otterrà per mezzo delle relative coordinate cartesiane  $x_A, y_A, z_A$ ;
- (ii) individuare la posizione di un secondo punto  $B$  del sistema, distinto da  $A$ . Poiché la distanza  $|A - B|$  è un invariante per qualsiasi moto rigido, le tre coordinate  $x_B, y_B, z_B$  di  $B$  non potranno essere assegnate arbitrariamente, dovendo soddisfare la condizione

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = |A - B|^2; \quad (19.1)$$

si verifica che due coordinate di  $B$  sono ancora libere, mentre la terza è individuata conformemente alla condizione (19.1). Non si rende indispensabile l'uso di due coordinate cartesiane. Ad esempio, è lecito individuare la posizione di  $B$  mediante un sistema di coordinate polari sferiche  $(\rho, \theta, \phi)$  di polo  $A$ : la coordinata radiale  $\rho$  è fissata al valore costante  $|A - B|$ , mentre rimangono disponibili la longitudine  $\phi$  e la colatitudine  $\theta$ ;

- (iii) specificare l'angolo di rotazione del sistema attorno all'asse  $AB$  rispetto ad un piano di riferimento passante per lo stesso asse. Una volta che siano assegnate le posizioni dei due punti distinti  $A$  e  $B$  dello spazio solidale, infatti, la configurazione del sistema rigido libero non è ancora determinata in modo univoco, essendo consentite rotazioni arbitrarie del sistema attorno all'asse  $AB$ .

La configurazione del sistema viene perciò completamente specificata assegnando 6 parametri: il sistema è a 6 gradi di libertà e 6 sono le equazioni differenziali (scalari) del moto che si rende necessario scrivere per poter descrivere deterministicamente il moto del sistema. Non sorprende che per un sistema rigido libero le equazioni del moto siano precisamente **tutte** le equazioni cardinali della dinamica, riscritte convenientemente.

## 19.2 Sistemi rigidi con punto fisso

In un sistema rigido con punto fisso  $O$  i moti possibili sono tutti e soli i moti rigidi per i quali il punto  $O$  appartiene allo spazio solidale e si mantiene in quiete rispetto alla terna assoluta. Il numero di gradi di libertà è 3. Questa affermazione si giustifica con lo stesso argomento qualitativo esposto nel caso precedente, identificando  $A$  con  $O$ . Le coordinate di  $A = O$  sono ora fisse e dunque cessano di essere variabili del sistema, le cui configurazioni saranno individuate dalle sole 3 coordinate residue. Per questi sistemi le equazioni del moto si identificano con le 3 componenti scalari dell'equazione cardinale del momento angolare, assumendo come polo il punto fisso  $O$  e riscrivendo le relazioni in modo conveniente — **equazioni di Eulero**. Si osservi che, per via del punto fisso, sul sistema agiscono certamente delle reazioni vincolari esterne e che di conseguenza l'equazione cardinale del momento angolare contiene a secondo membro il momento risultante in  $O$  — incognito — di tali reazioni. Si rende perciò necessaria una ipotesi *ad hoc* per trattare queste reazioni incognite, la cosiddetta condizione di **punto fisso privo di attrito**.

## 19.3 Sistemi rigidi con asse fisso

I moti possibili di un sistema rigido con asse fisso  $r$  sono tutti e soli quelli per i quali la retta  $r$  appartiene allo spazio solidale ed è fissa relativamente alla terna assoluta. Il sistema è ad un solo grado di libertà, come si accerta immediatamente con l'argomento già sviluppato nel caso dei sistemi rigidi liberi scegliendo i punti  $A$  e  $B$  sull'asse fisso. La configurazione del sistema è univocamente determinata dal suo angolo di rotazione attorno all'asse fisso, rispetto ad un piano di riferimento preassegnato. L'unica equazione scalare che descrive il moto del sistema si ottiene proiettando lungo l'asse fisso l'equazione cardinale del momento angolare rispetto ad un punto dello stesso asse. Anche su questo tipo di sistemi si esercitano reazioni vincolari esterne, il cui momento assiale risultante rispetto all'asse fisso compare a secondo membro nell'equazione del moto. Trattandosi di reazioni incognite, si deve assumere una ipotesi aggiuntiva che consenta di ricavare una equazione pura del moto. È la condizione di **asse fisso privo di attrito**.

La determinazione delle equazioni del moto per il sistema rigido con punto fisso rappresenta, in un certo senso, il problema più generale fra quelli in esame: le equazioni pure del moto nei casi libero e con asse fisso vengono ottenute come applicazioni particolari delle procedure messe a punto per il caso del punto fisso.

## 20. Equazioni di Eulero per un sistema rigido con punto fisso

L'equazione cardinale del momento angolare rispetto al punto fisso  $O$  è:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{est}}$$

ossia, ricordata l'espressione per il momento angolare in termini dell'operatore d'inerzia  $L_O$  e del vettore velocità angolare istantanea  $\vec{\omega}$ , e separati i contributi delle sollecitazioni

attive e delle reazioni vincolari al momento risultante:

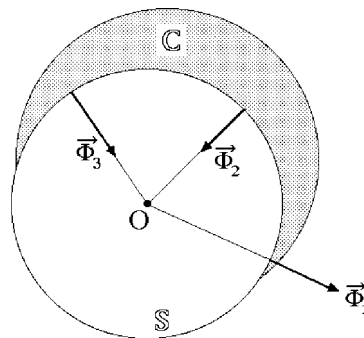
$$\frac{d}{dt}L_O(\vec{\omega}) = \vec{M}_O^{a,est} + \vec{M}_O^{\phi,est}.$$

### 20.1 Ipotesi del punto fisso privo di attrito

Allo scopo di ottenere equazioni pure del moto si rende necessario richiedere che il momento risultante in  $O$  delle reazioni vincolari esterne si conservi costantemente uguale a zero:

$$\vec{M}_O^{\phi,est} = 0; \tag{20.1}$$

in altri termini, si assume che le reazioni vincolari esterne esplicabili dal sistema siano tutte e sole quelle il cui momento risultante rispetto al punto fisso è nullo. Questa condizione viene detta di **punto fisso privo di attrito**. Questa singolare denominazione merita qualche commento. In apparenza, la condizione (20.1) sembra dover essere sempre soddisfatta e non costituire quindi una restrizione alle reazioni vincolari esterne che sul sistema possono esercitarsi: se si suppone che le reazioni vincolari esterne siano applicate nel solo punto fisso  $O$ , allora l'unica reazione in  $O$  non può che avere momento nullo in  $O$ . Questo tipo di ipotesi, tuttavia, non appare molto realistico: nella maggior parte dei casi le reazioni vincolari esterne non sono applicate al solo punto fisso  $O$ , ma ad una molteplicità di punti del sistema, per cui il ricorrere della condizione (20.1) non è evidente. Un esempio verosimile, peraltro già esaminato precedentemente, è quello della calotta sferica  $\mathbb{C}$  la cui superficie interna sia a contatto con l'esterno di una sfera fissa  $\mathbb{S}$  di uguale raggio e centro  $O$ . Qualunque corpo rigido che sia solidalmente connesso alla calotta sferica è un sistema rigido con punto fisso  $O$ . Le reazioni vincolari esterne agenti sul sistema sono applicate in ogni singolo punto della superficie interna di  $\mathbb{C}$ , in contatto con  $\mathbb{S}$ . Nell'ipotesi che tale superficie di contatto sia **priva di attrito**, le reazioni vincolari esterne devono risultare punto per punto ad essa ortogonali e quindi dirette lungo un raggio di  $\mathbb{S}$  — vedi figura.



Il momento in  $O$  della reazione vincolare esterna applicata ad un qualsiasi punto della superficie interna di  $\mathbb{C}$  è dunque nullo, comportando così l'annullarsi anche del momento risultante  $\vec{M}_O^{\phi,est}$ . Si deduce che **la condizione (20.1) è certamente soddisfatta in caso di attrito radente nullo**. Questo esempio giustifica la denominazione adottata di sistema rigido con punto fisso privo di attrito benché, si intende, la condizione (20.1) sia

più generale. In tale ipotesi, l'equazione cardinale del momento angolare rispetto al punto fisso non reca traccia di reazioni vincolari:

$$\frac{d}{dt}L_O(\vec{\omega}) = \vec{M}_O^{a,est} \quad (20.2)$$

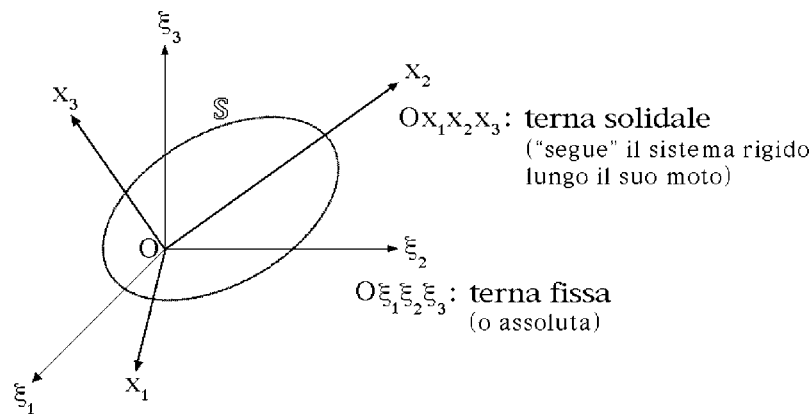
e costituisce pertanto una **equazione pura del moto** del sistema.

## 20.2 Terna di riferimento per il calcolo del momento angolare

Il calcolo del momento angolare  $L_O(\vec{\omega})$  nel primo membro della (20.2) viene necessariamente eseguito in forma matriciale: si assegna una base ortonormale  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  e si sostituiscono di conseguenza l'operatore d'inerzia  $L_O$  e la velocità angolare  $\vec{\omega}$  rispettivamente con la matrice d'inerzia  $[L_O]$  relativa alla terna  $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$  e con il vettore colonna  $(\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3)^T$  delle componenti di  $\vec{\omega}$  rispetto alla stessa base. Il vettore colonna delle componenti di  $L_O(\vec{\omega})$  relative alla base  $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$  è quindi dato dal prodotto matriciale  $[L_O](\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3)^T$ , conformemente alla (12.1). **È però importante riflettere attentamente sulla scelta della base  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ !** Sebbene infatti tale scelta sia in linea di principio **completamente arbitraria**, una scelta oculata può **semplificare notevolmente** il problema di scrivere in modo esplicito le equazioni del moto.

A prima vista potrebbe sembrare che la scelta più ragionevole per il calcolo sia rappresentata dalla base della terna assoluta cui è riferito il moto, dal momento che i versori di base risultano costanti nel tempo. Questa strategia, tuttavia, non appare affatto vantaggiosa se si considera che il sistema rigido è **in moto** e che quindi la sua distribuzione di massa rispetto alla terna di riferimento assoluta viene continuamente modificata per effetto del moto: **calcolando la matrice d'inerzia rispetto alla terna assoluta, gli elementi della matrice risulterebbero funzioni molto complesse del tempo**, di difficile valutazione.

Un metodo molto più conveniente consiste nell'introdurre una terna di riferimento  $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$  con origine nel punto fisso e **solidale al sistema rigido**: in questo modo il problema di determinare il moto del sistema viene ricondotto ad un problema di calcolo del moto di trascinamento della terna solidale rispetto alla terna assoluta. Si potrebbe obiettare che i versori  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  vengono "trascinati" dal moto del sistema e che pertanto la loro dipendenza dal tempo risulta a priori sconosciuta, tuttavia questa strategia offre un enorme vantaggio: rispetto alla terna solidale il sistema rigido si mantiene, per definizione, costantemente in quiete e la sua distribuzione di massa non muta nel tempo. Di conseguenza, la matrice d'inerzia relativa alla terna solidale si presenta **costante** lungo qualsivoglia moto del sistema. Non solo ma, considerata la simmetria dell'operatore d'inerzia in  $O$ , la terna solidale può sempre scegliersi principale, così da assicurare che la matrice  $[L_O]$  sia non soltanto costante ma anche **costantemente diagonale**, con i prodotti d'inerzia costantemente nulli.



La matrice d'inerzia relativa alla terna solidale  $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$  diventa perciò:

$$[L_O] = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix}$$

con i momenti principali d'inerzia  $A_1, A_2, A_3$  che sono **costanti caratteristiche del sistema**, dipendenti soltanto dalla scelta del corpo rigido e del punto fisso  $O$ . I loro valori devono essere determinati preventivamente, ma non richiedono alcun aggiornamento durante il moto del sistema.

### 20.3 Equazioni di Eulero

Quella della terna solidale principale è la procedura vincente, che permette di scrivere le equazioni del moto del sistema rigido con punto fisso privo di attrito in forma esplicita. Si intende che **la velocità angolare istantanea  $\vec{\omega}$  del sistema coincide con quella di trascinamento della terna solidale rispetto a quella assoluta**. Indicate con  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  le componenti relative alla terna solidale  $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$  del vettore velocità angolare istantanea, si ha che:

$$\vec{\omega} = \omega_1\hat{e}_1 + \omega_2\hat{e}_2 + \omega_3\hat{e}_3$$

per cui il momento angolare  $\vec{K}_O = L_O(\vec{\omega})$  a primo membro della (20.2) ha in  $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$  le componenti:

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1\omega_1 \\ A_2\omega_2 \\ A_3\omega_3 \end{pmatrix}$$

ed assume perciò la forma:

$$\vec{K}_O = L_O(\vec{\omega}) = A_1\omega_1\hat{e}_1 + A_2\omega_2\hat{e}_2 + A_3\omega_3\hat{e}_3. \tag{20.3}$$

È importante sottolineare che l'introduzione delle componenti  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  ha qui il significato di una **pura proiezione geometrica**: il vettore  $\vec{\omega}$  qui considerato **non quello relativo**

**alla terna solidale**, ma sempre e comunque il vettore velocità angolare **riferito alla terna assoluta**, di cui vengono determinate le proiezioni sugli assi della terna solidale al solo scopo di semplificare i calcoli. Né del resto dovrebbe esserci motivo di confusione, dal momento che rispetto alla terna solidale il sistema si mantiene permanentemente in quiete e dunque la velocità angolare istantanea relativa alla terna solidale risulterebbe, per definizione, identicamente nulla.

Ricordando che i versori della terna solidale sono mobili, la derivata in  $t$  della (20.3) porge allora:

$$\frac{d}{dt}L_O(\vec{\omega}) = A_1\dot{\omega}_1 \hat{e}_1 + A_1\omega_1 \frac{d\hat{e}_1}{dt} + A_2\dot{\omega}_2 \hat{e}_2 + A_2\omega_2 \frac{d\hat{e}_2}{dt} + A_3\dot{\omega}_3 \hat{e}_3 + A_3\omega_3 \frac{d\hat{e}_3}{dt}$$

e se si fa uso delle formule di Poisson diventa:

$$\frac{d}{dt}L_O(\vec{\omega}) = A_1\dot{\omega}_1 \hat{e}_1 + A_2\dot{\omega}_2 \hat{e}_2 + A_3\dot{\omega}_3 \hat{e}_3 + \vec{\omega} \wedge (A_1\omega_1 \hat{e}_1 + A_2\omega_2 \hat{e}_2 + A_3\omega_3 \hat{e}_3). \quad (20.4)$$

Va osservato che l'equazione ottenuta è una riscrittura di:

$$\frac{d_A}{dt}\vec{K}_O = \frac{d_R}{dt}\vec{K}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{K}_O$$

dal momento che la derivata di  $\vec{K}_O$  relativa alla terna solidale si ottiene derivando in  $t$  le componenti di  $\vec{K}_O$  rispetto alla stessa terna e riguardando i relativi versori  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  come costanti:

$$\frac{d_R}{dt}\vec{K}_O = \frac{d}{dt}(A_1\omega_1) \hat{e}_1 + \frac{d}{dt}(A_2\omega_2) \hat{e}_2 + \frac{d}{dt}(A_3\omega_3) \hat{e}_3 = A_1\dot{\omega}_1 \hat{e}_1 + A_2\dot{\omega}_2 \hat{e}_2 + A_3\dot{\omega}_3 \hat{e}_3.$$

Non rimane che eseguire il prodotto vettoriale in (20.4):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L_O(\vec{\omega}) &= A_1\dot{\omega}_1 \hat{e}_1 + A_2\dot{\omega}_2 \hat{e}_2 + A_3\dot{\omega}_3 \hat{e}_3 + \\ &+ (A_3 - A_2)\omega_2\omega_3 \hat{e}_1 + (A_1 - A_3)\omega_3\omega_1 \hat{e}_2 + (A_2 - A_1)\omega_1\omega_2 \hat{e}_3 \end{aligned}$$

e proiettare l'equazione cardinale (20.2) lungo i versori  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ :

$$\begin{cases} A_1\dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2)\omega_2\omega_3 = \vec{M}_O^{\text{a,est}} \cdot \hat{e}_1 \\ A_2\dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3)\omega_3\omega_1 = \vec{M}_O^{\text{a,est}} \cdot \hat{e}_2 \\ A_3\dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1)\omega_1\omega_2 = \vec{M}_O^{\text{a,est}} \cdot \hat{e}_3 \end{cases}$$

per ottenere le **equazioni di Eulero**:

$$\begin{cases} A_1\dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2)\omega_2\omega_3 = M_1 \\ A_2\dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3)\omega_3\omega_1 = M_2 \\ A_3\dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1)\omega_1\omega_2 = M_3 \end{cases} \quad (20.5)$$

nelle quali  $M_1, M_2, M_3$  sono le componenti di  $\vec{M}_O^{a,est}$  lungo gli assi della terna solidale. Da notare che scritta la prima delle equazioni (20.5), le altre si ricavano con due successive permutazioni circolari degli indici 1, 2 e 3.

## 20.4 Incompletezza delle equazioni di Eulero

A prima vista, le equazioni di Eulero (20.5) sembrano costituire un sistema di equazioni differenziali del primo ordine nelle variabili  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , peraltro facilmente riconducibile alla forma normale. In realtà ciò è vero soltanto nel caso dei cosiddetti **moti per inerzia** del sistema rigido con punto fisso  $O$ , allorquando il momento in  $O$  delle sollecitazioni attive esterne si assume identicamente nullo e le equazioni di Eulero si riducono a:

$$\begin{cases} A_1 \dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2) \omega_2 \omega_3 = 0 \\ A_2 \dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3) \omega_3 \omega_1 = 0 \\ A_3 \dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1) \omega_1 \omega_2 = 0. \end{cases}$$

Secondo i soliti criteri generali, le forze attive agenti sul sistema potranno dipendere dalla posizione e dalla velocità istantanea dei suoi punti, cioè a dire dalla configurazione e dall'atto di moto<sup>(1)</sup>. Ma la configurazione del sistema rigido con punto fisso viene specificata assegnando la posizione della terna solidale rispetto alla terna assoluta mentre l'atto di moto, nota che sia la configurazione, è individuato univocamente dalla velocità angolare istantanea  $\vec{\omega}$ . Come già osservato, 3 variabili occorrono e bastano per determinare completamente la configurazione del sistema rigido con punto fisso, e dunque quegli stessi parametri saranno necessari e sufficienti per assegnare la posizione della terna solidale rispetto a quella assoluta. Indicati con  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  tali parametri, si conclude che le forze attive applicate saranno in generale delle funzioni delle variabili di configurazione, delle componenti di  $\vec{\omega}$  e del tempo:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \quad \forall i = 1, \dots, N$$

e che lo stesso deve valere per le componenti  $M_1, M_2, M_3$  del momento risultante in  $O$  di quelle stesse forze:

$$M_h = M_h(t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \quad , \quad h = 1, 2, 3.$$

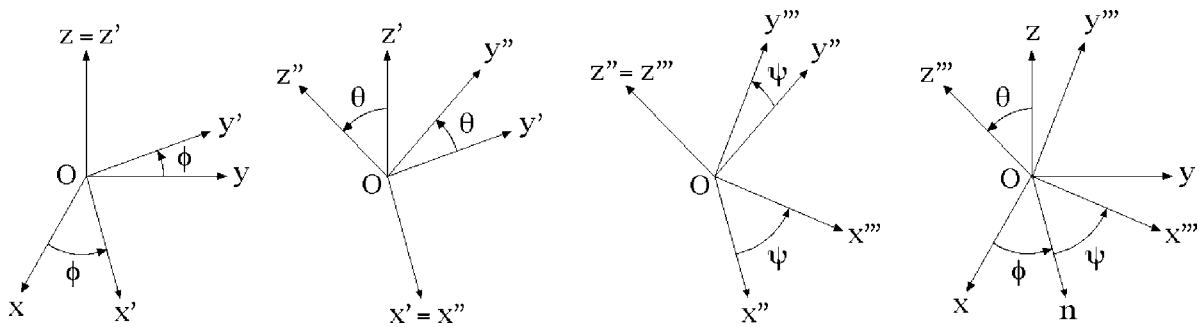
È a questo punto evidente che le equazioni euleriane costituiscono in realtà un sistema di 3 equazioni differenziali del primo ordine nelle **6** variabili  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3$  e sono pertanto **in numero insufficiente** a determinare univocamente il moto del sistema quando anche si assegnino le appropriate condizioni iniziali — i valori delle variabili ad un dato istante. In questo senso si dice che **le equazioni di Eulero sono incomplete**. Si rende necessario introdurre **tre ulteriori equazioni differenziali del primo ordine** in modo da bilanciare il numero di equazioni e di variabili.

---

<sup>(1)</sup> oltre che, eventualmente, in modo esplicito dal tempo

## 21. Angoli di Eulero

Le coordinate  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  atte a specificare la configurazione della terna solidale rispetto a quella assoluta possono essere scelte in vario modo. Ad esempio si possono identificare con tre coseni direttori, scelti convenientemente, della terna solidale rispetto a quella fissa. Nella maggior parte delle applicazioni, tuttavia, si preferisce impiegare i cosiddetti **angoli di Eulero**, che offrono tutta una serie di vantaggi. Come suggerisce il nome, gli angoli di Eulero  $\phi, \theta, \psi$  sono variabili angolari e ognuna di esse descrive una rotazione attorno ad un asse coordinato di un sistema di riferimento introdotto opportunamente. Esse consentono di rappresentare la posizione assoluta della terna solidale mediante una composizione di tre successive rotazioni, di seguito illustrate:



- (i) una rotazione di un angolo  $\phi$  attorno all'asse  $Oz$  conduce dalla terna fissa  $Oxyz$  ad una terna ausiliaria  $Ox'y'z'$ , in modo che  $Oz' = Oz$ . Il parametro  $\phi$  è detto **angolo di precessione** e si intende orientato rispetto all'asse  $Oz$  conformemente alla regola della mano destra;
- (ii) dalla terna  $Ox'y'z'$  si passa ad un secondo riferimento ausiliario  $Ox''y''z''$  mediante una rotazione di un angolo  $\theta$  attorno al nuovo asse delle ascisse  $Ox' = Ox''$ . La variabile  $\theta$  si dice **angolo di nutazione** e per il suo orientamento relativo a  $Ox'$  si adotta la solita convenzione levogira;
- (iii) una rotazione di un angolo  $\psi$  attorno all'asse delle quote  $Oz''$  porta infine dalla terna ausiliaria  $Ox''y''z''$  alla terna solidale  $Ox'''y'''z'''$ , con asse ed angolo sempre mutuamente orientati secondo la regola della mano destra. L'angolo  $\psi$  è detto **di rotazione propria**, o di **spin**.

È evidente che per ogni scelta degli angoli euleriani viene individuata univocamente la posizione della terna solidale  $Ox'''y'''z'''$  rispetto alla terna fissa. Viceversa, se per gli angoli di Eulero si assumono gli intervalli di definizione

$$0 \leq \phi < 2\pi \quad 0 < \theta < \pi \quad 0 \leq \psi < 2\pi$$

allora ad ogni assegnata posizione della terna solidale corrisponde un'unica tripletta di valori  $(\phi, \theta, \psi)$  delle variabili; sono escluse soltanto le configurazioni che vedono gli assi  $Oz$  e  $Oz'''$  sovrapposti — corrispondenti a  $\theta = 0$ , per assi concordi, e a  $\theta = \pi$  per assi discordi. In effetti, l'angolo di nutazione  $\theta$  si può sempre identificare con il più piccolo angolo compreso

fra le direzioni positive degli assi coordinati  $Oz$  e  $Oz'''$ , orientato del primo asse al secondo: tale angolo è necessariamente definito nell'intervallo  $[0, \pi]$ . Se si eccettua la circostanza particolare di  $\theta = 0$  o  $\theta = \pi$ , si vede allora che i piani coordinati  $Oxy$  e  $Ox'''y'''$  si intersecano in una retta  $On$  nota come **linea nodale**, ortogonale ad entrambi gli assi  $Oz$  e  $Oz'''$ , alla quale è peraltro possibile attribuire univocamente un orientamento imponendo che la terna di assi  $Oz Oz''' On$  sia destra<sup>(1)</sup>. Risulta inoltre evidente che l'angolo di precessione  $\phi$  è quello compreso fra le direzioni positive degli assi  $Ox$  e  $On$  nel piano  $Oxy$ , mentre  $\psi$  si identifica con l'angolo compreso fra le direzioni positive di  $On$  e  $Ox'''$  nel piano coordinato  $Ox'''y'''$ . Entrambi gli angoli  $\phi$  e  $\psi$  sono univocamente determinati nell'intervallo  $[0, 2\pi)$  — o in qualsiasi altro intervallo reale semichiuso di ampiezza  $2\pi$ . Qualora sia invece  $\theta = 0$  o  $\theta = \pi$ , i valori di  $\phi$  e  $\psi$  non sono più separatamente accessibili, potendosi determinare soltanto l'ampiezza  $\phi + \psi$  dell'angolo compreso fra le direzioni positive degli assi coordinati  $Ox$  e  $Ox'''$ ; in questi casi si perde la biunivocità della corrispondenza fra le configurazioni della terna solidale e le triplette di valori degli angoli euleriani.

### 21.1 Matrice dei coseni direttori della terna solidale rispetto alla terna assoluta

Il vantaggio di utilizzare gli angoli di Eulero nella descrizione dei sistemi rigidi con punto fisso si riconosce già nel ricavare la matrice dei coseni direttori della terna solidale rispetto alla terna assoluta. A questo scopo, si indichino con:

$$\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3 \quad \hat{e}'_1 \hat{e}'_2 \hat{e}'_3 \quad \hat{e}''_1 \hat{e}''_2 \hat{e}''_3 \quad \hat{e}'''_1 \hat{e}'''_2 \hat{e}'''_3$$

le basi ortonormali associate rispettivamente alla terna fissa  $Oxuz$ , ai riferimenti ausiliari  $Ox'y'z'$  e  $Ox''y''z''$ , e alla terna solidale  $Ox'''y'''z'''$ . Le coordinate di un qualsiasi punto  $P \in \mathbb{R}^3$  relative agli stessi riferimenti siano, nell'ordine:

$$x \ y \ z \quad x' \ y' \ z' \quad x'' \ y'' \ z'' \quad x''' \ y''' \ z''' .$$

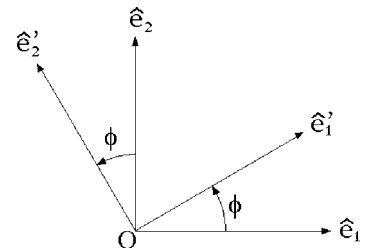
La matrice dei coseni direttori viene costruita come prodotto di tre matrici, ciascuna dipendente da uno solo degli angoli euleriani.

(i) L'espressione del vettore  $P - O$  nelle coordinate  $Oxyz$  e  $Ox'y'z'$ :

$$x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3 = x'\hat{e}'_1 + y'\hat{e}'_2 + z'\hat{e}'_3$$

permette di ricavare la relativa trasformazione di coordinate:

$$\begin{cases} x = x' \hat{e}'_1 \cdot \hat{e}_1 + y' \hat{e}'_2 \cdot \hat{e}_1 + z' \hat{e}'_3 \cdot \hat{e}_1 \\ y = x' \hat{e}'_1 \cdot \hat{e}_2 + y' \hat{e}'_2 \cdot \hat{e}_2 + z' \hat{e}'_3 \cdot \hat{e}_2 \\ z = x' \hat{e}'_1 \cdot \hat{e}_3 + y' \hat{e}'_2 \cdot \hat{e}_3 + z' \hat{e}'_3 \cdot \hat{e}_3 \end{cases}$$



<sup>(1)</sup> il verso della linea nodale è cioè quello del prodotto vettore fra i versori associati a  $Oz$  e  $Oz'''$ .

che si esprime immediatamente in termini dell'angolo di precessione  $\phi$ :

$$\begin{cases} x = \cos \phi x' - \sin \phi y' \\ y = \sin \phi x' + \cos \phi y' \\ z = z' \end{cases}$$

e può anche porsi nella forma matriciale equivalente:

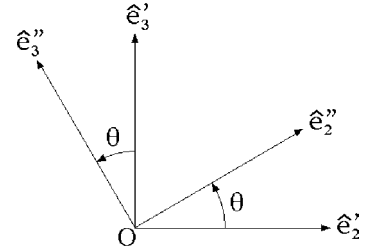
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \quad (21.1)$$

(ii) Analogamente, uguagliando le espressioni del vettore  $P - O$  nei sistemi di coordinate  $Ox'y'z'$  e  $Ox''y''z''$ :

$$x' \hat{e}'_1 + y' \hat{e}'_2 + z' \hat{e}'_3 = x'' \hat{e}''_1 + y'' \hat{e}''_2 + z'' \hat{e}''_3$$

e proiettando membro a membro sui versori della terna  $Ox'y'z'$ , si ottiene la trasformazione di coordinate:

$$\begin{cases} x' = x'' \hat{e}''_1 \cdot \hat{e}'_1 + y'' \hat{e}''_2 \cdot \hat{e}'_1 + z'' \hat{e}''_3 \cdot \hat{e}'_1 \\ y' = x'' \hat{e}''_1 \cdot \hat{e}'_2 + y'' \hat{e}''_2 \cdot \hat{e}'_2 + z'' \hat{e}''_3 \cdot \hat{e}'_2 \\ z' = x'' \hat{e}''_1 \cdot \hat{e}'_3 + y'' \hat{e}''_2 \cdot \hat{e}'_3 + z'' \hat{e}''_3 \cdot \hat{e}'_3 \end{cases}$$



che in termini dell'angolo di nutazione  $\theta$  diventa:

$$\begin{cases} x' = x'' \\ y' = \cos \theta y'' - \sin \theta z'' \\ z' = \sin \theta y'' + \cos \theta z'' \end{cases}$$

e in forma matriciale si scrive:

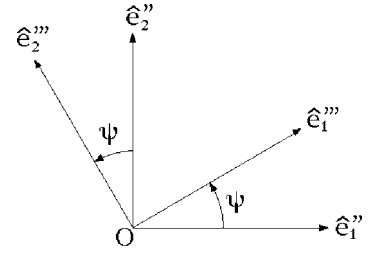
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}. \quad (21.2)$$

(iii) Infine, dal confronto delle espressioni di  $P - O$  nelle coordinate  $Ox''y''z''$  e  $Ox'''y'''z'''$ :

$$x'' \hat{e}''_1 + y'' \hat{e}''_2 + z'' \hat{e}''_3 = x''' \hat{e}'''_1 + y''' \hat{e}'''_2 + z''' \hat{e}'''_3$$

con una proiezione sui versori della terna  $Ox''y''z''$  si perviene alla trasformazione di coordinate:

$$\begin{cases} x'' = x''' \hat{e}_1''' \cdot \hat{e}_1'' + y''' \hat{e}_2''' \cdot \hat{e}_1'' + z''' \hat{e}_3''' \cdot \hat{e}_1'' \\ y'' = x''' \hat{e}_1''' \cdot \hat{e}_2'' + y''' \hat{e}_2''' \cdot \hat{e}_2'' + z''' \hat{e}_3''' \cdot \hat{e}_2'' \\ z'' = x''' \hat{e}_1''' \cdot \hat{e}_3'' + y''' \hat{e}_2''' \cdot \hat{e}_3'' + z''' \hat{e}_3''' \cdot \hat{e}_3'' \end{cases}$$



che in termini dell'angolo di rotazione  $\psi$  si riduce a:

$$\begin{cases} x'' = \cos \psi x''' - \sin \psi y''' \\ y'' = \sin \psi x''' + \cos \psi y''' \\ z'' = z''' \end{cases}$$

e assume l'equivalente forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix}. \tag{21.3}$$

La composizione delle relazioni (21.1), (21.2), (21.3) porge allora:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix}$$

e poiché dalla relazione vettoriale

$$x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3 = x'''\hat{e}_1''' + y'''\hat{e}_2''' + z'''\hat{e}_3'''$$

segue la relazione di trasformazione:

$$\begin{cases} x = x''' \hat{e}_1''' \cdot \hat{e}_1 + y''' \hat{e}_2''' \cdot \hat{e}_1 + z''' \hat{e}_3''' \cdot \hat{e}_1 \\ y = x''' \hat{e}_1''' \cdot \hat{e}_2 + y''' \hat{e}_2''' \cdot \hat{e}_2 + z''' \hat{e}_3''' \cdot \hat{e}_2 \\ z = x''' \hat{e}_1''' \cdot \hat{e}_3 + y''' \hat{e}_2''' \cdot \hat{e}_3 + z''' \hat{e}_3''' \cdot \hat{e}_3 \end{cases}$$

si conclude che la matrice dei coseni direttori fra le terne solidale e fissa vale:

$$A(\phi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} \hat{e}_1''' \cdot \hat{e}_1 & \hat{e}_2''' \cdot \hat{e}_1 & \hat{e}_3''' \cdot \hat{e}_1 \\ \hat{e}_1''' \cdot \hat{e}_2 & \hat{e}_2''' \cdot \hat{e}_2 & \hat{e}_3''' \cdot \hat{e}_2 \\ \hat{e}_1''' \cdot \hat{e}_3 & \hat{e}_2''' \cdot \hat{e}_3 & \hat{e}_3''' \cdot \hat{e}_3 \end{pmatrix}$$

e deve identificarsi con il triplo prodotto matriciale precedente:

$$A(\phi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 21.2 Descrizione del moto in termini degli angoli euleriani

Il moto di trascinamento della terna solidale rispetto a quella assoluta viene completamente specificato assegnando gli angoli di Eulero come funzioni del tempo —  $C^2$  se si richiede che il moto sia regolare:

$$\phi = \phi(t) \quad \theta = \theta(t) \quad \psi = \psi(t).$$

I punti dello spazio solidale al sistema rigido hanno coordinate costanti rispetto alla terna solidale  $Ox'''y'''z'''$ . Il moto assoluto di un punto arbitrario dello spazio solidale si rappresenta perciò mediante le coordinate assolute corrispondenti:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = A(\phi(t), \theta(t), \psi(t)) \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix}.$$

## 21.3 Velocità angolare istantanea del sistema

L'impiego degli angoli di Eulero rende particolarmente agevole il calcolo della velocità angolare istantanea del sistema rigido, identificabile con la velocità angolare del moto di trascinamento della terna solidale rispetto alla terna assoluta. Poiché infatti il moto di trascinamento della terna solidale è costruito come composizione dei tre moti rigidi rotatori, per il teorema dei moti rigidi composti la velocità angolare è la somma delle velocità angolari dei singoli moti componenti:

- $\dot{\phi} \hat{e}_3$ , dovuta alla rotazione di un angolo  $\phi$  della terna  $Ox'y'z'$  rispetto alla terna fissa  $Oxyz$  attorno all'asse  $Oz = Oz'$ ;
- $\dot{\theta} \hat{e}'_1$ , attribuibile al moto di rotazione della terna ausiliaria  $Ox''y''z''$  rispetto alla terna  $Ox'y'z'$ , attorno all'asse  $Ox' = Ox''$  secondo un angolo  $\theta$ ;
- $\dot{\psi} \hat{e}''_3$ , imputabile al moto rotatorio della terna solidale  $Ox'''y'''z'''$  attorno all'asse  $Oz'' = Oz'''$  della terna  $Ox''y''z''$ , secondo un angolo  $\psi$ .

Si ha perciò:

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \hat{e}_3 + \dot{\theta} \hat{e}'_1 + \dot{\psi} \hat{e}''_3 = \dot{\phi} \hat{e}'_3 + \dot{\theta} \hat{e}''_1 + \dot{\psi} \hat{e}'''_3. \quad (21.4)$$

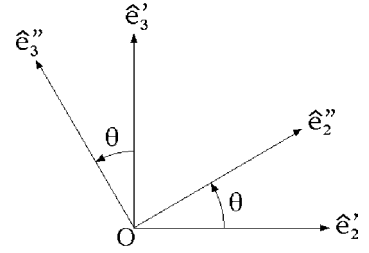
In questa espressione compaiono versori della terna solidale e delle terne ausiliarie. Allo scopo di ottenere le componenti  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  del vettore  $\vec{\omega}$  nella terna solidale, è necessario esprimere i versori  $\hat{e}'_3$  e  $\hat{e}''_1$  come combinazione lineare dei versori solidali  $\hat{e}'''_1, \hat{e}'''_2, \hat{e}'''_3$ .

Conviene procedere per gradi ed esprimere anzitutto  $\hat{e}'_3$  in funzione di  $\hat{e}''_1, \hat{e}''_2, \hat{e}''_3$  con la solita proiezione ortogonale:

$$\hat{e}'_3 = \hat{e}'_3 \cdot \hat{e}''_1 \hat{e}''_1 + \hat{e}'_3 \cdot \hat{e}''_2 \hat{e}''_2 + \hat{e}'_3 \cdot \hat{e}''_3 \hat{e}''_3$$

scrivendo esplicitamente il risultato in termini dell'angolo di nutazione:

$$\hat{e}'_3 = \sin \theta \hat{e}''_2 + \cos \theta \hat{e}''_3$$

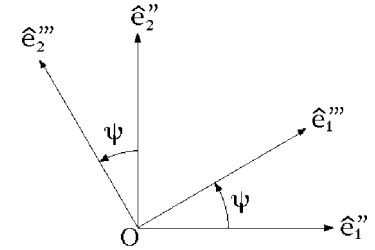


per poi sostituirlo nella (21.4) ed ottenere la relazione:

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}''_2 + \dot{\phi} \cos \theta \hat{e}''_3 + \dot{\theta} \hat{e}'_1 + \dot{\psi} \hat{e}'''_3 = \dot{\theta} \hat{e}'_1 + \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}''_2 + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \hat{e}'''_3. \quad (21.5)$$

In modo analogo si rappresentano i versori  $\hat{e}''_1, \hat{e}''_2$  come combinazioni lineari dei versori solidali  $\hat{e}'''_1, \hat{e}'''_2, \hat{e}'''_3$ :

$$\begin{cases} \hat{e}''_1 = \hat{e}'''_1 \hat{e}'''_1 + \hat{e}'''_2 \hat{e}'''_2 + \hat{e}'''_3 \hat{e}'''_3 \\ \hat{e}''_2 = \hat{e}'''_1 \hat{e}'''_1 + \hat{e}'''_2 \hat{e}'''_2 + \hat{e}'''_3 \hat{e}'''_3 \end{cases}$$



secondo coefficienti che dipendono dall'angolo di spin:

$$\begin{cases} \hat{e}''_1 = \cos \psi \hat{e}'''_1 - \sin \psi \hat{e}'''_2 \\ \hat{e}''_2 = \sin \psi \hat{e}'''_1 + \cos \psi \hat{e}'''_2 \\ \hat{e}''_3 = \hat{e}'''_3 \end{cases}$$

in modo che (21.5) diventa:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \dot{\theta} (\cos \psi \hat{e}'''_1 - \sin \psi \hat{e}'''_2) + \dot{\phi} \sin \theta (\sin \psi \hat{e}'''_1 + \cos \psi \hat{e}'''_2) + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \hat{e}'''_3 = \\ &= (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi) \hat{e}'''_1 + (-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi) \hat{e}'''_2 + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \hat{e}'''_3. \end{aligned}$$

Se ne deducono le espressioni per le componenti  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  della velocità angolare secondo gli assi della terna solidale:

$$\begin{cases} \omega_1 = \cos \psi \dot{\theta} + \sin \psi \sin \theta \dot{\phi} \\ \omega_2 = -\sin \psi \dot{\theta} + \cos \psi \sin \theta \dot{\phi} \\ \omega_3 = \dot{\psi} + \cos \theta \dot{\phi} \end{cases} \quad (21.6)$$

in funzione degli angoli euleriani e delle loro derivate prime in  $t$ . Si sottolinea che le equazioni (21.6) sono lineari nelle derivate  $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$  e possono perciò porsi nella forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \sin \theta \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \Delta(\theta, \psi) \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (21.7)$$

dove la matrice  $\Delta(\theta, \psi)$  ha determinante:

$$\det \Delta(\theta, \psi) = \det \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \sin \theta \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\sin \theta$$

e risulta quindi invertibile  $\forall \psi \in \mathbb{R}$  e  $\forall \theta \in (0, \pi)$ .

## 22. Chiusura delle equazioni di Eulero

Le 3 equazioni (21.6) si affiancano alle equazioni di Eulero (20.5) per completare il sistema delle equazioni del moto:

$$\begin{cases} \omega_1 = \cos \psi \dot{\theta} + \sin \psi \sin \theta \dot{\phi} \\ \omega_2 = -\sin \psi \dot{\theta} + \cos \psi \sin \theta \dot{\phi} \\ \omega_3 = \dot{\psi} + \cos \theta \dot{\phi} \\ A_1 \dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2) \omega_2 \omega_3 = M_1 \\ A_2 \dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3) \omega_3 \omega_1 = M_2 \\ A_3 \dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1) \omega_1 \omega_2 = M_3. \end{cases} \quad (22.1)$$

Nell'ipotesi che  $\theta \in (0, \pi)$ , la (21.7) consente di ricavare le derivate  $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$  in termini degli angoli euleriani e delle componenti di velocità angolare:

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \sin \theta \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \Delta(\theta, \psi)^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

mentre per  $A_1, A_2, A_3 > 0^{(1)}$  le equazioni di Eulero possono scriversi:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 + \frac{A_3 - A_2}{A_1} \omega_2 \omega_3 = \frac{1}{A_1} M_1 \\ \dot{\omega}_2 + \frac{A_1 - A_3}{A_2} \omega_3 \omega_1 = \frac{1}{A_2} M_2 \\ \dot{\omega}_3 + \frac{A_2 - A_1}{A_3} \omega_1 \omega_2 = \frac{1}{A_3} M_3 \end{cases}$$

con le componenti  $M_1, M_2, M_3$  del momento risultante che dipendono da configurazione, atto di moto e tempo, e dunque sono **funzioni note** degli angoli euleriani, delle componenti

---

<sup>(1)</sup> come sempre avviene nei casi di interesse fisico, dal momento che i punti di un sistema reale non sono mai perfettamente allineati su una retta

di velocità angolare e del tempo. Ne segue la **riduzione a forma normale** delle equazioni di Eulero complete:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \Delta(\theta, \psi)^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \\ \dot{\omega}_1 = -\frac{A_3 - A_2}{A_1} \omega_2 \omega_3 + \frac{1}{A_1} M_1(t, \phi, \theta, \psi, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ \dot{\omega}_2 = -\frac{A_1 - A_3}{A_2} \omega_3 \omega_1 + \frac{1}{A_2} M_2(t, \phi, \theta, \psi, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ \dot{\omega}_3 = -\frac{A_2 - A_1}{A_3} \omega_1 \omega_2 + \frac{1}{A_3} M_3(t, \phi, \theta, \psi, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \end{cases} \quad (22.2)$$

che costituiscono un sistema di 6 equazioni differenziali del primo ordine in forma normale nelle 6 variabili dipendenti  $\phi, \theta, \psi, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ , definito nell'aperto di  $\mathbb{R}^7$ :

$$\Omega = \{(t, \phi, \theta, \psi, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \pi) \times \mathbb{R}^4\}.$$

Al relativo problema di Cauchy si perviene assegnando i valori delle variabili dipendenti ad un istante  $t_0 \in \mathbb{R}$  qualsivoglia:

$$(\phi(t_0), \theta(t_0), \psi(t_0), \omega_1(t_0), \omega_2(t_0), \omega_3(t_0)) = (\phi^0, \theta^0, \psi^0, \omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0) \in \Omega;$$

la corrispondente soluzione massimale esiste ed è unica se le componenti  $M_1, M_2, M_3$  del momento risultante sono funzioni  $C^1$  dei loro argomenti. Tutti gli altri termini a secondo membro nelle equazioni (22.2) sono infatti funzioni  $C^\infty$  delle variabili dipendenti e non condizionano la regolarità del sistema di equazioni, cui sono dunque applicabili i teoremi di esistenza e unicità delle soluzioni massimali. Si arriva così alla conclusione che il moto è completamente determinato assegnando posizione e velocità di tutti i punti del sistema all'istante iniziale.

## 23. Statica del corpo rigido con punto fisso privo di attrito

In analogia a quanto visto per il punto materiale libero o vincolato, la definizione di equilibrio di un sistema rigido con punto fisso privo di attrito viene data con riferimento al concetto di **quiete** del sistema. Se si indica con  $P_0$  una particolare configurazione del sistema,

*si dice quiete in  $P_0$  quel moto particolare che vede il sistema permanere indefinitamente nella configurazione  $P_0$ , vale a dire:*

$$P(t) = P_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

*Una configurazione  $P_0$  viene definita di equilibrio per il sistema qualora la quiete in  $P_0$  sia un moto del sistema, cioè una soluzione delle relative equazioni differenziali del moto.*

In modo del tutto equivalente si dice anche che  $P_0$  è **una configurazione di equilibrio** o, più semplicemente, **un equilibrio** del sistema in esame. Nella fattispecie, gli stati di quiete che individuano gli equilibri del sistema rigido con punto fisso privo di attrito sono le **soluzioni statiche** delle equazioni del moto, ossia soluzioni del tipo

$$(\phi(t), \theta(t), \psi(t), \omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)) = (\phi^0, \theta^0, \psi^0, \omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

delle equazioni (22.2):

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \Delta(\theta^0, \psi^0)^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1^0 \\ \omega_2^0 \\ \omega_3^0 \end{pmatrix} \\ 0 = -\frac{A_3 - A_2}{A_1} \omega_2^0 \omega_3^0 + \frac{1}{A_1} M_1(t, \phi^0, \theta^0, \psi^0, \omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0) \\ 0 = -\frac{A_1 - A_3}{A_2} \omega_3^0 \omega_1^0 + \frac{1}{A_2} M_2(t, \phi^0, \theta^0, \psi^0, \omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0) \\ 0 = -\frac{A_2 - A_1}{A_3} \omega_1^0 \omega_2^0 + \frac{1}{A_3} M_3(t, \phi^0, \theta^0, \psi^0, \omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0) \end{cases}$$

delle quali le prime 3 impongono l'annullarsi della velocità angolare a tutti i tempi:

$$\begin{pmatrix} \omega_1^0 \\ \omega_2^0 \\ \omega_3^0 \end{pmatrix} = \Delta(\theta^0, \psi^0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e le ultime 3 si riducono a:

$$\begin{cases} M_1(t, \phi^0, \theta^0, \psi^0, 0, 0, 0) = 0 \\ M_2(t, \phi^0, \theta^0, \psi^0, 0, 0, 0) = 0 \\ M_3(t, \phi^0, \theta^0, \psi^0, 0, 0, 0) = 0. \end{cases} \quad (23.1)$$

*Condizione necessaria e sufficiente perché una configurazione sia di equilibrio per il sistema rigido con punto fisso  $O$  privo di attrito è dunque che il momento risultante in  $O$  delle forze attive agenti sul sistema, valutate nella configurazione data, con atto di moto nullo e ad ogni istante, sia uguale a zero.*

Indicato con  $\vec{M}_O(t, P, \dot{P})$  il momento risultante in  $O$  delle sollecitazioni attive, funzione nota di tempo, configurazione  $P$  e atto di moto  $\dot{P}$ , l'equazione (23.1) si esprime nella forma equivalente:

$$\vec{M}_O(t, P_0, 0) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

nota come **seconda equazione cardinale della statica** di un sistema rigido con punto fisso privo di attrito. Essa fornisce la condizione necessaria e sufficiente affinché  $P_0$  sia configurazione di equilibrio del sistema. La prima equazione cardinale della statica non serve a individuare gli equilibri, ma consente semplicemente di calcolare il risultante delle reazioni vincolari esterne nella forma:

$$\vec{R}^{\phi, \text{est}} = -\vec{R}^{\text{a, est}}(t, P_0, 0)$$

essendo  $\vec{R}^{\text{a, est}}(t, P, \dot{P})$  il risultante delle forze attive esterne agenti sul sistema all'istante  $t$ , nella configurazione  $P$  e con atto di moto  $\dot{P}$ .

## 24. Moti per inerzia di un corpo rigido con punto fisso privo di attrito. Rotazioni permanenti

Le equazioni del moto per un sistema rigido con punto fisso privo di attrito sono molto complesse e non è possibile fornirne una soluzione esplicita se non in casi particolarmente semplici. Un esempio notevole è costituito dai cosiddetti **moti per inerzia**. Fra questi, relativamente semplice è lo studio dei **moti di rotazione permanente**, o stazionaria.

### 24.1 Nozione di moto per inerzia

*I moti per inerzia di un sistema rigido con punto fisso  $O$  privo di attrito sono quelli per i quali il momento risultante in  $O$  delle forze attive esterne risulta identicamente nullo.*

Si osservi che la condizione risulta certamente soddisfatta se il sistema non è soggetto ad alcuna sollecitazione attiva esterna, ma non vale in generale il viceversa: un esempio notevole è offerto da un corpo rigido pesante che abbia nel proprio baricentro  $G$  un punto fisso privo di attrito; come ben noto, il sistema delle forze peso è equivalente al peso totale applicato in  $G$  e dunque il momento risultante in  $G$  delle forze peso è costantemente uguale a zero. Un sistema rigido pesante sospeso per il baricentro si muove perciò di moto inerziale. È evidente dalla definizione e dall'equazione del moto (22.2) che fra i moti per inerzia sono compresi tutti gli stati di quiete, in una qualsiasi configurazione del sistema.

### 24.2 Integrali primi dei moti per inerzia

I moti per inerzia ammettono due integrali primi fondamentali: quello del momento angolare rispetto al punto fisso e quello dell'energia cinetica.

Che il momento angolare  $\vec{K}_O$ , rispetto al punto fisso  $O$ , sia un integrale primo nei moti per inerzia è evidente dalla seconda equazione cardinale della dinamica (20.2):

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{a, est}} = 0$$

giacché in questo caso il momento  $\vec{M}_O^{\text{a, est}}$  si mantiene costantemente nullo.

Quanto all'energia cinetica  $T$ , dal teorema delle forze vive per i sistemi rigidi — equazione (18.1) — si deduce che lungo qualsiasi soluzione delle equazioni del moto deve aversi:

$$\frac{dT}{dt} = \dot{O} \cdot \vec{R}^{\text{est}} + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_O^{\text{est}} = 0.$$

Vale infatti  $\dot{O} = 0$  in quanto  $O$  è punto fisso, mentre  $\vec{M}_O^{\text{a,est}} = 0$  per l'ipotesi di moto inerziale e  $\vec{M}_O^{\phi,\text{est}} = 0$  grazie alla condizione di punto fisso privo di attrito.

### 24.3 Caso notevole: rotazioni permanenti

Un caso notevole di moti per inerzia è rappresentato dalle cosiddette rotazioni permanenti, note anche come rotazioni stazionarie.

*Rotazione permanente di un sistema rigido con punto fisso privo di attrito è quel particolare moto inerziale per il quale il sistema ruota con velocità angolare costante attorno ad un asse fisso.*

**Le rotazioni permanenti sono dunque caratterizzate dalla condizione che  $\vec{\omega}$  sia costante a tutti i tempi rispetto alla terna di riferimento assoluta.** È importante rilevare fin d'ora la differenza rispetto ai moti con asse fisso: in questi ultimi infatti l'asse è **vincolato** a mantenersi in quiete, mentre le rotazioni permanenti sono **particolari moti per inerzia** dei sistemi rigidi con punto fisso, corrispondenti ad una **scelta appropriata delle condizioni iniziali**.

Non appare evidente dalla definizione che un sistema rigido con punto fisso privo di attrito e in moto inerziale possa effettivamente ammettere dei moti di rotazione permanente. In realtà tali moti esistono per qualsivoglia sistema rigido, secondo il seguente teorema.

*Sia dato un sistema rigido con punto fisso  $O$  privo di attrito e in moto per inerzia. Allora il vettore velocità angolare  $\vec{\omega}$  individua un moto di rotazione permanente se e soltanto se  $\vec{\omega}$  è diretto secondo un asse principale d'inerzia in  $O$  del sistema.*

Nessuna condizione è posta sul modulo della velocità angolare. Poiché ogni sistema rigido ammette sempre, in ogni suo punto, almeno tre assi principali d'inerzia ortogonali, il teorema assicura la possibilità di costruire una infinità di rotazioni permanenti secondo assi mutuamente ortogonali. Per la dimostrazione del teorema si osservi preliminarmente che la definizione di rotazione permanente:

$$\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0, \quad \text{costante}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

equivale a richiedere il costante annullarsi della derivata assoluta in  $t$ :

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt}(t) = \frac{d_A \vec{\omega}}{dt}(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e, assumendo un riferimento solidale al corpo rigido come terna mobile, può risciversi per mezzo del teorema della derivata relativa di una funzione a valori vettoriali, nella forma:

$$\frac{d_A \vec{\omega}}{dt}(t) = \frac{d_R \vec{\omega}}{dt}(t) + \vec{\omega}_T \wedge \vec{\omega}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

in termini della derivata di  $\vec{\omega}$  relativa alla terna solidale prescelta e della velocità angolare di trascinamento  $\vec{\omega}_T$  della terna solidale rispetto a quella fissa. Dal fatto che la terna mobile è solidale al corpo rigido segue evidentemente che  $\vec{\omega}_T = \vec{\omega}$ , cosicché:

$$\frac{d_A \vec{\omega}}{dt}(t) = \frac{d_R \vec{\omega}}{dt}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e quindi **condizione necessaria e sufficiente perché  $\vec{\omega}$  individui un moto di rotazione permanente è che  $\vec{\omega}$  si mantenga costante rispetto ad una terna solidale, comunque assegnata.** Ciò significa, ricordando la definizione di derivata di un vettore relativa ad una terna di riferimento, che le componenti  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  del vettore  $\vec{\omega}$  rispetto alla terna solidale si mantengono costanti nel tempo, al pari delle componenti nella terna assoluta. D'altra parte, la derivata rispetto al tempo del momento angolare in  $O$  vale:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \frac{d_A\vec{K}_O}{dt} = \frac{d_R\vec{K}_O}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{K}_O$$

e nell'ipotesi di moto per inerzia attorno al punto fisso  $O$  privo di attrito deve annullarsi identicamente per via dell'equazione cardinale (20.2):

$$\frac{d_R\vec{K}_O}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{K}_O = 0 \quad (24.1)$$

L'equazione (24.1) vale per qualsiasi moto inerziale del sistema. **In caso di rotazione permanente**, le componenti di  $\vec{K}_O$  secondo gli assi della terna solidale sono costanti ad ogni tempo, essendo determinate dal prodotto matriciale (12.1):

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = [L_O] \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

nel quale la matrice d'inerzia  $[L_O]$  è costante perché riferita ad una terna solidale, e il vettore colonna  $(\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3)^T$  per l'ipotesi che il moto sia di rotazione permanente. Di conseguenza, la derivata di  $\vec{K}_O$  relativa alla terna solidale risulta costantemente nulla e la (24.1) si riduce a:

$$\vec{\omega} \wedge \vec{K}_O = 0$$

ovvero a:

$$\vec{\omega} \wedge L_O(\vec{\omega}) = 0$$

che esprime una condizione di **parallelismo** fra i vettori  $\vec{\omega}$  e  $L_O(\vec{\omega})$ . Escluso il caso di  $\vec{\omega} = 0$ , che corrisponde alla quiete e non è di particolare interesse, la condizione precedente può sempre scriversi nella forma:

$$L_O(\vec{\omega}) = \lambda \vec{\omega} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad ,$$

che per l'essere  $\vec{\omega} \neq 0$  può interpretarsi come il problema agli autovalori dell'operatore d'inerzia  $L_O$ : in un moto di rotazione permanente, che non sia la quiete, il vettore velocità angolare istantanea — costante — deve essere un autovettore dell'operatore d'inerzia in  $O$  e risultare quindi diretto secondo uno degli assi principali d'inerzia in  $O$  del sistema rigido. **Il viceversa** è banale: assunto che  $\vec{\omega}^0 \neq 0$  sia un autovettore dell'operatore d'inerzia in  $O$ , allora si possono ripercorrere a ritroso tutti i passaggi precedenti e concludere che  $\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}^0 \ \forall t \in \mathbb{R}$  soddisfa l'equazione del moto (20.2) ed individua pertanto un moto del sistema, corrispondente per definizione ad una rotazione stazionaria.

## 25. Problema del moto per un sistema rigido libero

Vale la pena di fare un breve accenno anche al problema della determinazione delle equazioni del moto per un sistema rigido libero. Si è già sottolineato che le equazioni del moto di un sistema rigido libero sono date dalle due equazioni cardinali della dinamica (17.1):

$$\begin{cases} \frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^{\text{est}} \\ \frac{d\vec{K}_O}{dt} = m\dot{G} \wedge \dot{O} + \vec{M}_O^{\text{est}} \end{cases}$$

che, prendendo atto dell'assenza di reazioni vincolari esterne e identificando il polo dei momenti con il baricentro  $G$  del sistema, possono esprimersi nella forma semplificata:

$$\begin{cases} m\ddot{G} = \vec{R}^{\text{a,est}} \\ \frac{d\vec{K}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{a,est}}. \end{cases} \quad (25.1)$$

Si perviene ad una ulteriore semplificazione notando che il momento angolare rispetto al baricentro si identifica con quello del **moto attorno al baricentro**, il moto relativo ad una terna di origine  $G$  in moto traslatorio rispetto alla terna assoluta. Basta infatti indicare con  $\vec{v}_i$  la velocità del generico punto  $P_i$  relativa alla terna baricentrale e con  $\vec{K}'_G$  il momento angolare in  $G$  del moto attorno al baricentro per ottenere:

$$\begin{aligned} \vec{K}_G &= \sum_{i=1}^N (P_i - G) \wedge m_i \dot{P}_i = \sum_{i=1}^N (P_i - G) \wedge m_i (\dot{G} + \vec{v}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i (P_i - G) \wedge \dot{G} + \sum_{i=1}^N (P_i - G) \wedge m_i \vec{v}_i = m(G - G) \wedge \dot{G} + \vec{K}'_G = \vec{K}'_G, \end{aligned}$$

in modo che le equazioni (25.1) diventano:

$$\begin{cases} m\ddot{G} = \vec{R}^{\text{a,est}} \\ \frac{d\vec{K}'_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{a,est}}. \end{cases}$$

Ma il baricentro di un sistema rigido appartiene sempre, come ben noto, allo spazio a questo solidale, per cui il momento angolare  $\vec{K}'_G$  è quello di un sistema rigido con punto fisso nell'origine  $G$ , esprimibile per mezzo dell'operatore d'inerzia  $L_G$ :

$$\vec{K}'_G = L_G(\vec{\omega})$$

in termini del vettore velocità angolare  $\vec{\omega}$  relativo alla terna baricentrale, che peraltro coincide con quello relativo alla terna assoluta. L'equazione cardinale del

momento angolare in  $G$  diventa allora in tutto e per tutto equivalente a quella già studiata per il sistema rigido con punto fisso:

$$\frac{d}{dt}L_G(\vec{\omega}) = \vec{M}_G^{\text{a,est}}$$

e può quindi essere discussa nei modi visti in precedenza. La posizione di un generico punto  $P_i$  del sistema è fissa rispetto ad una qualsiasi terna solidale al sistema rigido. Se la terna solidale ha origine nel baricentro  $G$ , la posizione di  $P_i$  può essere specificata assegnando la posizione di  $G$  rispetto al riferimento assoluto e quella della terna solidale in rapporto allo stesso riferimento. Ciò si ottiene, ad esempio, per mezzo:

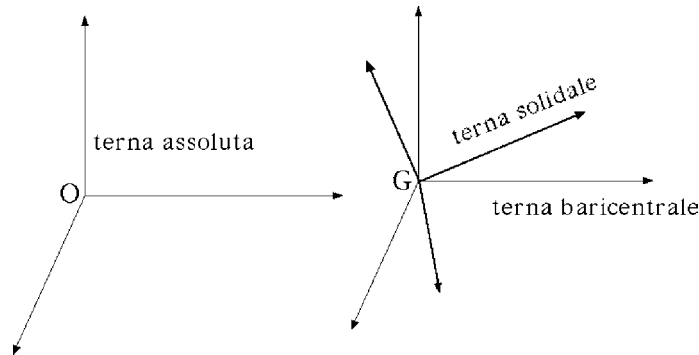
- delle coordinate cartesiane  $x_G, y_G, z_G$  del baricentro nella terna assoluta;
- degli angoli euleriani  $\phi, \theta, \psi$  che individuano la terna solidale rispetto a una qualsiasi terna di origine  $G$  e in moto traslatorio rispetto alla terna assoluta.

Conseguentemente, la velocità assoluta di  $P_i$  si esprime per mezzo del teorema di Poisson:

$$\dot{P}_i = \dot{G} + \vec{\omega} \wedge (P_i - G)$$

e può quindi essere individuata in funzione:

- delle componenti  $v_x, v_y, v_z$  di  $\dot{G}$  rispetto alla terna assoluta;
- delle componenti  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  di  $\vec{\omega}$  rispetto alla terna solidale;
- degli angoli euleriani  $\phi, \theta, \psi$ , da cui dipendono le componenti di  $P_i - G$  rispetto alla terna assoluta.



Poiché le forze attive agenti sul sistema si assumono sempre dipendere dal tempo, dalla configurazione e dall'atto di moto, la stessa proprietà deve estendersi anche al risultante e al momento risultante in  $G$  delle sollecitazioni attive esterne. Si conclude pertanto che le componenti di  $\vec{R}^{\text{a,est}}$  rispetto alla terna assoluta sono funzioni del tipo:

$$R_x = R_x(t, x_G, y_G, z_G, \phi, \theta, \psi, v_x, v_y, v_z, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

$$R_y = R_y(t, x_G, y_G, z_G, \phi, \theta, \psi, v_x, v_y, v_z, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

$$R_z = R_z(t, x_G, y_G, z_G, \phi, \theta, \psi, v_x, v_y, v_z, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

e lo stesso si verifica per le componenti di  $\vec{M}_G^{\text{a,est}}$  rispetto alla terna solidale:

$$\begin{aligned} M_1 &= M_1(t, x_G, y_G, z_G, \phi, \theta, \psi, v_x, v_y, v_z, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ M_2 &= M_2(t, x_G, y_G, z_G, \phi, \theta, \psi, v_x, v_y, v_z, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ M_3 &= M_3(t, x_G, y_G, z_G, \phi, \theta, \psi, v_x, v_y, v_z, \omega_1, \omega_2, \omega_3). \end{aligned}$$

Le equazioni del moto si scrivono perciò:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_G = v_x \\ \dot{y}_G = v_y \\ \dot{z}_G = v_z \\ \dot{v}_x = \frac{1}{m} R_x(t, x_G, y_G, z_G, \phi, \theta, \psi, v_x, v_y, v_z, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ \dot{v}_y = \frac{1}{m} R_y(t, x_G, y_G, z_G, \phi, \theta, \psi, v_x, v_y, v_z, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ \dot{v}_z = \frac{1}{m} R_z(t, x_G, y_G, z_G, \phi, \theta, \psi, v_x, v_y, v_z, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \Delta(\theta, \psi)^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \\ \dot{\omega}_1 = -\frac{A_3 - A_2}{A_1} \omega_2 \omega_3 + \frac{1}{A_1} M_1(t, x_G, y_G, z_G, \phi, \theta, \psi, v_x, v_y, v_z, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ \dot{\omega}_2 = -\frac{A_1 - A_3}{A_2} \omega_3 \omega_1 + \frac{1}{A_2} M_2(t, x_G, y_G, z_G, \phi, \theta, \psi, v_x, v_y, v_z, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ \dot{\omega}_3 = -\frac{A_2 - A_1}{A_3} \omega_1 \omega_2 + \frac{1}{A_3} M_3(t, x_G, y_G, z_G, \phi, \theta, \psi, v_x, v_y, v_z, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \end{array} \right.$$

e sono un sistema di 12 equazioni differenziali in forma normale del primo ordine nelle 12 variabili dipendenti  $x_G, y_G, z_G, \phi, \theta, \psi, v_x, v_y, v_z, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ , definito nell'aperto di  $\mathbb{R}^{13}$ :

$$\Omega = \left\{ (t, x_G, y_G, z_G, \phi, \theta, \psi, v_x, v_y, v_z, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbb{R}^5 \times (0, \pi) \times \mathbb{R}^7 \right\}.$$

Il problema di Cauchy si ottiene fissando i valori delle variabili dipendenti ad un istante iniziale  $t_0 \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} (x_G, y_G, z_G, \phi, \theta, \psi, v_x, v_y, v_z, \omega_1, \omega_2, \omega_3)(t_0) &= \\ &= (x_G^0, y_G^0, z_G^0, \phi^0, \theta^0, \psi^0, v_x^0, v_y^0, v_z^0, \omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0) \in \Omega \end{aligned}$$

e la relativa soluzione massimale esiste unica se le funzioni  $R_x, R_y, R_z, M_1, M_2, M_3$  sono di classe  $C^1$  nel dominio  $\Omega$ . Si ritrova, anche in questo caso, il risultato generale

che il moto è univocamente determinato assegnando la posizione e la velocità iniziali di tutti i punti del sistema. Gli **equilibri** sono le configurazioni nelle quali il sistema può permanere in quiete, corrispondenti cioè a **soluzioni statiche** delle equazioni del moto. Si verifica facilmente che le configurazioni di equilibrio  $P_0$  sono tutte e sole le soluzioni delle **equazioni cardinali della statica** per il sistema rigido libero:

$$\begin{cases} \vec{R}^{\text{a,est}}(t, P_0, 0) = 0 \\ \vec{M}_G^{\text{a,est}}(t, P_0, 0) = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (25.2)$$

essendo  $\vec{R}^{\text{a,est}}(t, P, \dot{P})$  e  $\vec{M}_G^{\text{a,est}}(t, P, \dot{P})$  il risultante e il momento risultante in  $G$  delle sollecitazioni attive esterne applicate al sistema. Poiché l'annullarsi del risultante rende il momento risultante indipendente dal polo, nel sistema (25.2) al baricentro  $G$  si può sostituire un polo arbitrario  $O$  senza alterare la condizione di equilibrio.

## 26. Problema del moto per un sistema rigido con asse fisso privo di attrito

Nella descrizione dinamica di un sistema rigido  $\mathbb{S}$  con asse fisso  $r$  conviene introdurre la terna fissa  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  e quella solidale  $Ox_1x_2x_3$  in modo che gli assi coordinati  $O\xi_3$  e  $Ox_3$  coincidano con l'asse fisso  $r$ . Poiché con questa scelta la comune origine  $O$  è evidentemente un punto fisso, l'equazione cardinale del momento angolare in  $O$  si scrive:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{a,est}} + \vec{M}_O^{\phi,\text{est}}$$

nella quale si è evidenziato il contributo delle reazioni vincolari esterne.

### 26.1 Ipotesi dell'asse fisso privo di attrito

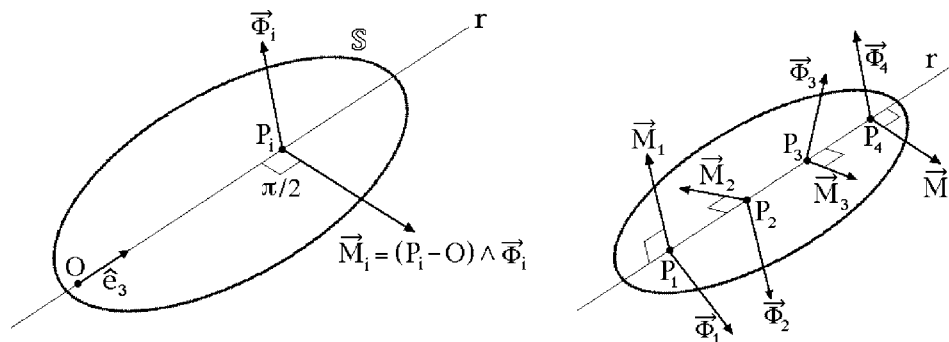
Allo scopo di ottenere una equazione pura del moto, si richiede che il momento assiale risultante, rispetto all'asse  $r$ , delle reazioni vincolari esterne sia identicamente nullo. Se  $\hat{e}_3$  è il versore associato all'asse  $r = O\xi_3 = Ox_3$ , ciò equivale ad assumere:

$$\vec{M}_O^{\phi,\text{est}} \cdot \hat{e}_3 = 0, \quad (26.1)$$

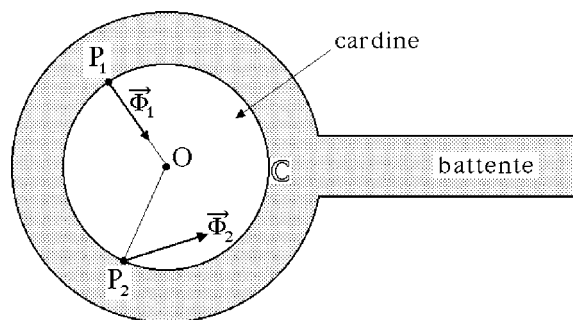
condizione nota come dell'**asse fisso privo di attrito**. La condizione è suggerita dal fatto che nel caso le reazioni vincolari esterne siano applicate esclusivamente all'asse  $r$  essa risulta automaticamente soddisfatta, avendosi:

$$(P_i - O) \wedge \vec{\Phi}_i \cdot \hat{e}_3 = 0$$

per qualsiasi reazione vincolare esterna  $\vec{\Phi}_i$  agente su un generico punto  $P_i$  dell'asse.

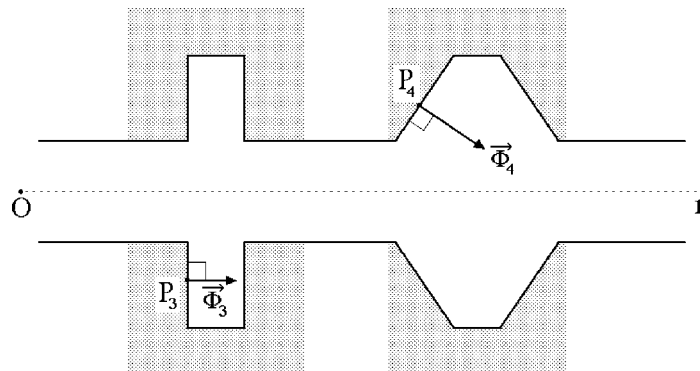


La circostanza che tutte le reazioni vincolari esterne si esercitino sull'asse fisso, tuttavia, non è quasi mai verificata: sovente, infatti, i punti dell'asse fisso non appartengono al sistema. Tale è il caso, ad esempio del battente di una porta o di una finestra impernato sui propri cardini: il moto rigido con asse fisso avviene in virtù dello scivolamento relativo di due superfici cilindriche coassiali, l'una solidale al cardine, l'altra al battente rigido. Vista ortogonalmente all'asse fisso, la situazione è quella illustrata nella figura seguente:



nella quale si è indicata con  $\mathbb{C}$  la superficie cilindrica del battente a contatto con il cardine fisso. Se lo scivolamento avviene senza attrito, allora in un generico punto della superficie  $\mathbb{C}$  del battente l'andamento della reazione vincolare esterna è quello esemplificato dal punto  $P_1$  in figura, con la reazione diretta secondo il raggio condotto per  $P_1$  del cilindro; il relativo momento rispetto a  $O \in r$  non risulta nullo, ma è comunque ortogonale all'asse fisso  $r$ , come richiesto. In assenza di attrito la condizione (26.1) appare certamente verificata. In presenza di attrito, viceversa, la reazione vincolare esterna può essere diretta arbitrariamente e, come illustra l'esempio del punto  $P_2 \in \mathbb{C}$ , può presentare una componente tangente alla superficie  $\mathbb{C}$ : siccome il vettore posizione  $P_2 - O$  non è diretto secondo  $r$ , nulla può concludersi in generale circa l'ortogonalità dell'asse fisso e del momento in  $O$  della reazione. L'esempio giustifica la denominazione di **asse fisso privo di attrito** riservata all'asse fisso qualora la condizione (26.1) sia identicamente soddisfatta.

Alla stessa conclusione si perviene considerando un fermo rigido cilindrico che impedisca al sistema rigido di scorrere lungo l'asse  $r$ , come illustrato a sinistra nella figura seguente:



Se gli attriti radenti sono trascurabili, la reazione vincolare  $\vec{\Phi}_3$  agente sul sistema nella posizione  $P_3$  deve risultare ortogonale alla superficie del corpo rigido, in modo che  $\vec{\Phi}_3$  è complanare al vettore  $P_3 - O$  e all'asse  $r$ . In presenza di attrito radente la reazione vincolare  $\vec{\Phi}_3$  in  $P_3$  non giace nel piano individuato da  $P_3 - O$  ed  $r$ , determinando così una componente non nulla del momento angolare in  $O$  **lungo**  $r$ . Il risultato rimane valido considerando un punto  $P_4$  lungo una superficie di rivoluzione più generale, avente  $r$  come asse di simmetria rotazionale — come la bi-troncoconica a destra nella stessa figura.

## 26.2 Equazione del moto

L'equazione del moto di un sistema rigido con asse fisso  $r = O\hat{e}_3$  privo di attrito si ottiene proiettando lungo l'asse l'equazione cardinale del momento angolare in  $O$ :

$$\hat{e}_3 \cdot \frac{d\vec{K}_O}{dt} = \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_O^{a,est} + \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_O^{\phi,est}$$

che si riduce ad una equazione pura per via della condizione (26.1):

$$\hat{e}_3 \cdot \frac{d\vec{K}_O}{dt} = \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_O^{a,est} \quad (26.2)$$

e per l'essere  $\hat{e}_3$  un versore costante si può scrivere nella forma:

$$\frac{d}{dt}(\hat{e}_3 \cdot \vec{K}_O) = \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_O^{a,est}.$$

Se  $\theta$  è l'angolo di rotazione del sistema rigido attorno all'asse fisso, orientato rispetto a quello secondo la convenzione levogira, la velocità angolare del sistema vale  $\dot{\theta}\hat{e}_3$  e il momento angolare in  $O$  si esprime per mezzo dell'operatore d'inerzia in  $O$ :

$$\vec{K}_O = L_O(\dot{\theta}\hat{e}_3)$$

per cui l'equazione del moto diventa:

$$\frac{d}{dt}(\hat{e}_3 \cdot L_O(\dot{\theta} \hat{e}_3)) = \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_O^{a,est}$$

e causa la linearità dell'operatore  $L_O$  risulta equivalente a:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\theta} \hat{e}_3 \cdot L_O(\hat{e}_3)) = \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_O^{a,est} .$$

Per definizione,  $\hat{e}_3 \cdot L_O(\hat{e}_3)$  si identifica con il momento d'inerzia  $L_{33}$  del sistema rigido rispetto all'asse fisso  $r = O\hat{e}_3$ ; tale momento è peraltro indipendente dall'angolo  $\theta$ , in quanto le rotazioni attorno all'asse  $r$  non modificano la distanza dei punti da tale asse. Essendo  $L_{33}$  costante, l'equazione del moto si semplifica in:

$$L_{33} \ddot{\theta} = \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_O^{a,est} .$$

Le forze attive agenti sul sistema possono dipendere soltanto dal tempo, dalla configurazione e dall'atto di moto. Ma la configurazione è individuata completamente dall'angolo di rotazione  $\theta$ , mentre l'atto di moto  $\dot{P} = \dot{\theta} \hat{e}_3 \wedge (P - O)$  è funzione di  $\theta$  e  $\dot{\theta}$ . Il momento assiale risultante rispetto ad  $r$  delle sollecitazioni attive sarà quindi una funzione nota di  $t$ ,  $\theta$  e  $\dot{\theta}$ :

$$\hat{e}_3 \cdot \vec{M}_O^{a,est} = M(t, \theta, \dot{\theta})$$

e l'equazione del moto si riconosce essere una equazione differenziale in forma normale del secondo ordine in  $\theta$ :

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{L_{33}} M(t, \theta, \dot{\theta})$$

equivalente al sistema del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = \frac{1}{L_{33}} M(t, \theta, \omega) \end{cases} \quad (26.3)$$

definito  $\forall (t, \theta, \omega) \in \mathbb{R}^3$ . Il problema di Cauchy si ottiene assegnando i valori di  $\theta$  e  $\omega = \dot{\theta}$  ad un istante iniziale  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Se  $M(t, \theta, \omega)$  è una funzione di classe  $C^1$  in  $\mathbb{R}^3$  vale il teorema di esistenza e unicità delle soluzioni massimali e il moto del sistema è completamente determinato dalle condizioni iniziali. Anche in questo caso si trova che il moto del sistema è univocamente determinato assegnando la posizione e la velocità iniziale di tutti i punti. Gli **equilibri** sono per definizione le configurazioni nelle quali il sistema può mantenersi indefinitamente **in quiete** e corrispondono perciò alle **soluzioni statiche** — ossia costanti — delle equazioni del moto (26.3):

$$\begin{cases} 0 = \omega \\ 0 = \frac{1}{L_{33}} M(t, \theta, \omega) \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \iff \quad M(t, \theta, 0) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

Si verifica facilmente che una configurazione  $P_0$  è di equilibrio per il sistema se e soltanto se soddisfa l'**equazione cardinale della statica** del sistema rigido con asse fisso privo di attrito:

$$\hat{e}_3 \cdot \vec{M}_O(t, P_0, 0) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

dove si indica con  $\hat{e}_3 \cdot \vec{M}_O(t, P, \dot{P})$  il momento assiale risultante rispetto all'asse fisso delle sollecitazioni attive all'istante  $t$ , nella configurazione  $P$  e con atto di moto  $\dot{P}$ .

### 26.3 Energia cinetica e momento angolare di un corpo rigido con asse fisso

Per diverse applicazioni è molto utile scrivere le espressioni dell'energia cinetica e del momento angolare di un sistema rigido con asse fisso  $O\hat{e}_3$ . L'**energia cinetica** si ottiene dalla relazione generale (10.5) sostituendo la forma particolare  $\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{e}_3$  della velocità angolare:

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot L_O(\vec{\omega}) = \frac{1}{2} \dot{\theta} \hat{e}_3 \cdot L_O(\dot{\theta} \hat{e}_3) = \frac{1}{2} \hat{e}_3 \cdot L_O(\hat{e}_3) \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} I_{O\hat{e}_3} \dot{\theta}^2.$$

Per quel che riguarda il momento angolare in  $O$ , introducendo una terna solidale  $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ , che in generale non potrà essere principale, l'equazione (11.2) fornisce per le componenti di  $\vec{K}_O$  rispetto alla stessa terna l'espressione:

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{13} \dot{\theta} \\ L_{23} \dot{\theta} \\ L_{33} \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

in modo che il momento angolare si scrive

$$\vec{K}_O = L_{13} \dot{\theta} \hat{e}_1 + L_{23} \dot{\theta} \hat{e}_2 + L_{33} \dot{\theta} \hat{e}_3. \quad (26.4)$$

Si sottolinea che sebbene il vettore velocità angolare istantanea  $\dot{\theta} \hat{e}_3$  sia sempre allineato con l'asse fisso, il momento angolare rispetto ad un punto dell'asse non si presenta necessariamente allineato allo stesso modo.

## 27. Cimenti dinamici ed equilibratura statica e dinamica di un sistema rigido con asse fisso privo di attrito

In generale, le reazioni vincolari esterne agenti su un sistema rigido con asse fisso  $O\hat{e}_3$  privo di attrito non possono essere determinate completamente. Se ne possono calcolare tuttavia il risultante ed il momento risultante rispetto ad un punto dell'asse per mezzo delle equazioni cardinali della dinamica. L'equazione cardinale della quantità di moto fornisce il risultante delle reazioni vincolari esterne:

$$\vec{R}^{\phi, \text{est}} = m\ddot{G} - \vec{R}^{\text{a, est}}$$

mentre quella del momento angolare porge il momento risultante in  $O$  delle stesse reazioni:

$$\vec{M}_O^{\phi, \text{est}} = \frac{d\vec{K}_O}{dt} - \vec{M}_O^{\text{a, est}} \quad (27.1)$$

Facendo uso della terna solidale già introdotta e della relazione (26.4), la derivata del momento angolare si scrive:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{K}_O}{dt} &= (L_{13} \hat{e}_1 + L_{23} \hat{e}_2 + L_{33} \hat{e}_3) \ddot{\theta} + \dot{\theta} \hat{e}_3 \wedge (L_{13} \hat{e}_1 + L_{23} \hat{e}_2 + L_{33} \hat{e}_3) \dot{\theta} = \\ &= (L_{13} \hat{e}_1 + L_{23} \hat{e}_2 + L_{33} \hat{e}_3) \ddot{\theta} + (L_{13} \hat{e}_2 - L_{23} \hat{e}_1) \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

cosicché le componenti dell'equazione (27.1) secondo i versori della terna solidale diventano:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O^{\phi, \text{est}} \cdot \hat{e}_1 &= L_{13} \ddot{\theta} - L_{23} \dot{\theta}^2 - \vec{M}_O^{\text{a, est}} \cdot \hat{e}_1 \\ \vec{M}_O^{\phi, \text{est}} \cdot \hat{e}_2 &= L_{23} \ddot{\theta} + L_{13} \dot{\theta}^2 - \vec{M}_O^{\text{a, est}} \cdot \hat{e}_2 \\ \vec{M}_O^{\phi, \text{est}} \cdot \hat{e}_3 &= L_{33} \ddot{\theta} - \vec{M}_O^{\text{a, est}} \cdot \hat{e}_3 \end{aligned}$$

l'ultima delle quali si identifica con l'equazione pura del moto, in quanto  $\vec{M}_O^{\phi, \text{est}} \cdot \hat{e}_3 = 0$  per l'ipotesi dell'asse fisso privo di attrito. Il principio di azione e reazione assicura che ad ogni reazione vincolare esterna applicata al sistema rigido deve corrispondere una sollecitazione opposta che il sistema esercita sui vincoli destinati a mantenere l'asse  $O\hat{e}_3$  nella sua posizione. Queste sollecitazioni sono note come **cimenti dinamici**. Il loro risultante e momento risultante rispetto al polo  $O$  sono evidentemente opposti a quelli delle reazioni vincolari esterne:

$$\vec{R}^{\text{cimenti}} = -\vec{R}^{\phi, \text{est}} \quad \vec{M}_O^{\text{cimenti}} = -\vec{M}_O^{\phi, \text{est}}.$$

La determinazione dei cimenti dinamici, o quantomeno dei loro risultanti, è una questione molto importante nella progettazione dei rotatori meccanici, dal momento che i cimenti stabiliscono l'entità delle sollecitazioni che i supporti — sostegni, cuscinetti a sfere, ecc. — atti a mantenere fisso l'asse di rotazione devono sopportare in condizioni di lavoro. La riduzione di tali sollecitazioni nella più ampia generalità possibile di situazioni di moto è un obiettivo importante dal punto di vista economico, comportando una minore usura e dunque una maggiore durata dei supporti, costi di manutenzione più contenuti, tempi di arresto più limitati.

## 27.1 Caso notevole: rotatore pesante

Un caso particolarmente interessante nella pratica è quello di un sistema rigido con asse fisso  $O\hat{e}_3$  privo di attrito soggetto esclusivamente al proprio peso, nell'ipotesi che l'asse vincolare non sia verticale. Nella fattispecie le equazioni precedenti si riducono a:

$$\begin{aligned} \vec{R}^{\phi, \text{est}} &= m\ddot{G} - m\vec{g} \\ \vec{M}_O^{\phi, \text{est}} \cdot \hat{e}_1 &= L_{13} \ddot{\theta} - L_{23} \dot{\theta}^2 - (G - O) \wedge m\vec{g} \cdot \hat{e}_1 \\ \vec{M}_O^{\phi, \text{est}} \cdot \hat{e}_2 &= L_{23} \ddot{\theta} + L_{13} \dot{\theta}^2 - (G - O) \wedge m\vec{g} \cdot \hat{e}_2 \end{aligned} \quad (27.2)$$

poiché  $\vec{R}^{a,est} = m\vec{g}$  e  $\vec{M}_O^{a,est} = (G - O) \wedge m\vec{g}$ .

## 27.2 Equilibratura statica del rotatore pesante

Il problema dell'equilibratura statica del corpo rigido pesante con asse fisso  $O\hat{e}_3$  privo di attrito consiste nell'assegnare  $O\hat{e}_3$  in modo che **tutte** le configurazioni del sistema siano di equilibrio. Posto  $\theta(t) = \theta_0$ , costante  $\forall t \in \mathbb{R}$ , nell'equazione del moto

$$L_{33}\ddot{\theta} = (G - O) \wedge m\vec{g} \cdot \hat{e}_3 \tag{27.3}$$

si ha:

$$0 = \hat{e}_3 \cdot (G - O) \wedge m\vec{g} = \hat{e}_3 \wedge (G - O) \cdot m\vec{g} \tag{27.4}$$

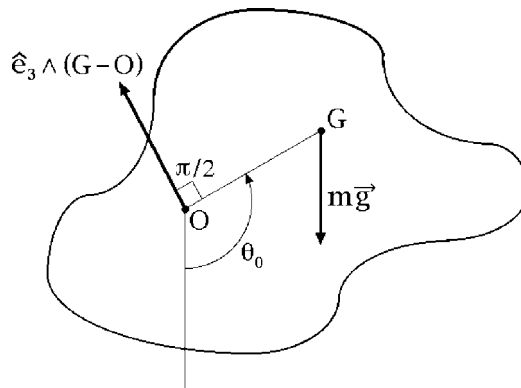
che si vuole soddisfatta per qualsiasi  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ . La condizione (27.4) è certamente verificata se il baricentro  $G$  del sistema giace sull'asse fisso, poiché in tal caso:

$$\hat{e}_3 \wedge (G - O) = 0$$

per cui  $\hat{e}_3 \wedge (G - O) \cdot m\vec{g} = 0$  per qualsiasi configurazione del sistema. Per contro, se fosse  $G \notin O\hat{e}_3$  risulterebbe non nullo e ortogonale al piano  $GO\hat{e}_3$  il vettore

$$\hat{e}_3 \wedge (G - O)$$

e scegliendo  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  in modo opportuno sarebbe sempre possibile violare la (27.4).



Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibratura statica di un rotatore pesante è che il baricentro del rotatore giaccia sull'asse fisso. In condizioni di equilibratura statica il baricentro  $G$  si mantiene in quiete sull'asse e la sua accelerazione è identicamente nulla, per cui dalla prima delle (27.2) si deduce che il risultante delle reazioni vincolari esterne è opposto al peso:

$$\vec{R}^{\phi,est} = -m\vec{g}$$

e indipendente dal moto del sistema. **I corrispondenti cimenti dinamici hanno lo stesso risultante  $m\vec{g}$  per qualsiasi moto del rotatore.** Si osservi inoltre che l'equa-

zione del moto (27.3) si riduce a  $L_{33}\ddot{\theta} = 0$  e che di conseguenza tutti i moti del sistema sono **rotatori uniformi**.

### 27.3 Equilibratura dinamica del rotatore pesante

Si assuma che per un rotatore pesante sia soddisfatta la condizione di equilibratura statica. L'asse fisso passa dunque per il baricentro  $G$  e può essere indicato nella forma  $G\hat{e}_3$ .

*Si dice che è realizzata l'equilibratura dinamica del rotatore se il risultante ed il momento risultante rispetto ad un punto dell'asse fisso dei cimenti dinamici sono indipendenti dalla velocità angolare per qualsiasi moto del sistema.*

Si è già osservato nella sezione precedente che tutti i moti di questo sistema sono rotatori uniformi, dunque della forma:

$$\theta(t) = \omega t + \alpha \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

con  $\omega, \alpha$  costanti reali arbitrarie, la prima delle quali identificabile con la velocità angolare scalare del sistema. Le (27.2) forniscono allora:

$$\begin{aligned} \vec{R}^{\text{cimenti}} &= m\vec{g} \\ \vec{M}_O^{\text{cimenti}} \cdot \hat{e}_1 &= -L_{13}\ddot{\theta} + L_{23}\dot{\theta}^2 + (G - O) \wedge m\vec{g} \cdot \hat{e}_1 = L_{23}\omega^2 + (G - O) \wedge m\vec{g} \cdot \hat{e}_1 \\ \vec{M}_O^{\text{cimenti}} \cdot \hat{e}_2 &= -L_{23}\ddot{\theta} - L_{13}\dot{\theta}^2 + (G - O) \wedge m\vec{g} \cdot \hat{e}_2 = -L_{13}\omega^2 + (G - O) \wedge m\vec{g} \cdot \hat{e}_2. \end{aligned}$$

La prima espressione è sempre indipendente dalla velocità angolare scalare  $\omega$  in virtù della condizione di equilibratura statica; per contro, il momento risultante dei cimenti

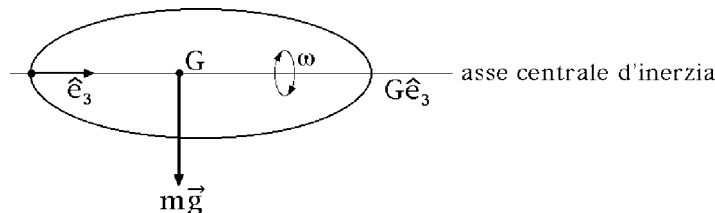
$$\vec{M}_O^{\text{cimenti}} = \vec{M}_O^{\text{cimenti}} \cdot \hat{e}_1 \hat{e}_1 + \vec{M}_O^{\text{cimenti}} \cdot \hat{e}_2 \hat{e}_2 = L_{23}\omega^2 \hat{e}_1 - L_{13}\omega^2 \hat{e}_2 + (G - O) \wedge m\vec{g}$$

risulta indipendente da  $\omega$  se e soltanto se:

$$L_{13} = L_{23} = 0$$

nel qual caso  $\vec{M}_O^{\text{cimenti}} = (G - O) \wedge m\vec{g}$ . Ciò equivale a richiedere che il versore  $\hat{e}_3$  sia autovettore dell'operatore d'inerzia in un qualsiasi punto dell'asse, in particolare nel baricentro  $G$ . Pertanto:

*condizione necessaria e sufficiente affinché sia realizzata l'equilibratura dinamica di un rotatore rigido è che l'asse fisso sia un asse centrale d'inerzia.*



In condizioni di equilibratura dinamica il momento angolare rispetto ad un punto dell'asse si mantiene costantemente diretto secondo la direzione dell'asse fisso.

## 28. Osservazione. Corpo rigido perfetto

Nello studio dinamico del sistema rigido libero si è fatto uso del terzo principio della dinamica per concludere che qualsiasi moto  $P(t)$ ,  $t \in I$ , del sistema deve risolvere le equazioni cardinali

$$m\ddot{G} = \vec{R}^{a,\text{est}}(t, P, \dot{P}) \quad \frac{d\vec{K}_G}{dt} = \vec{M}_G^{a,\text{est}}(t, P, \dot{P}) \quad (28.1)$$

in quanto risultante e momento risultante delle reazioni vincolari — necessariamente interne — devono essere nulli. Le equazioni pure del moto (28.1) appaiono quindi come una **condizione necessaria** affinché  $P(t)$  sia moto del sistema. Le stesse equazioni sono state assunte, tuttavia, come anche **sufficienti** a caratterizzare i moti del sistema rigido libero: **tutte** le soluzioni delle (28.1) sono state identificate come moti del sistema. Così, ad esempio, le configurazioni di equilibrio  $P_0$  del sistema rigido sono state riconosciute come **tutte e soltanto** quelle relative alle soluzioni statiche  $P(t) = P_0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , delle equazioni (28.1), in modo che alle equazioni cardinali della statica

$$\vec{R}^{a,\text{est}}(t, P_0, 0) = 0 \quad \vec{M}_G^{a,\text{est}}(t, P_0, 0) = 0$$

si è attribuito il ruolo di **condizioni necessarie e sufficienti** per l'equilibrio. Qual è il significato fisico di questo assunto? *Sotto quali ipotesi si può effettivamente ritenere che tutte le soluzioni delle equazioni cardinali della dinamica rappresentino altrettanti moti del sistema rigido libero?*

Sia  $P(t)$  una soluzione delle equazioni (28.1) nell'intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$ . La stessa funzione  $P(t)$  rimane soluzione delle equazioni del moto qualora alle forze attive  $\vec{F}_i(t, P, \dot{P})$ ,  $i = 1, \dots, N$ , agenti sui vari punti  $P_i$  del sistema, si sostituisca il sistema di forze attive applicate

$$\vec{F}_i(t, P, \dot{P}) + \vec{S}_i(t) \quad , \quad i = 1, \dots, N \quad ,$$

dove  $\{(P_i(t), \vec{S}_i(t)) \in \mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}^3, i = 1, \dots, N\}$  è un qualsiasi sistema di vettori applicati di risultante e momento risultante nulli:

$$\sum_{i=1}^N \vec{S}_i(t) = 0 \quad \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge \vec{S}_i(t) = 0.$$

Ciò segue dal fatto che il risultante ed il momento risultante delle sollecitazioni attive non vengono modificati:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{S}_i) &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N \vec{S}_i = \vec{R}^{a,\text{est}} + 0 = \vec{R}^{a,\text{est}} \\ \sum_{i=1}^N (P_i - G) \wedge (\vec{F}_i + \vec{S}_i) &= \sum_{i=1}^N (P_i - G) \wedge \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N (P_i - G) \wedge \vec{S}_i = \vec{M}_G^{a,\text{est}} + 0 = \vec{M}_G^{a,\text{est}} \end{aligned}$$

per cui le equazioni pure del moto (28.1) rimangono a loro volta invariate. D'altra parte, il postulato delle reazioni vincolari impone che per ogni punto materiale  $P_i$  del sistema si abbia

$$m_i \ddot{P}_i = \vec{F}_i + \vec{S}_i + \vec{\Phi}_i$$

in modo che le reazioni vincolari applicate risultano

$$\vec{\Phi}_i = m_i \ddot{P}_i - \vec{F}_i - \vec{S}_i \quad (28.2)$$

e soddisfano le condizioni imposte dal principio di azione e reazione:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \vec{\Phi}_i &= \sum_{i=1}^N m_i \ddot{P}_i - \sum_{i=1}^N \vec{F}_i - \sum_{i=1}^N \vec{S}_i = m\ddot{G} - \vec{R}^{a,\text{est}} - 0 = 0 \\ \sum_{i=1}^N (P_i - G) \wedge \vec{\Phi}_i &= \sum_{i=1}^N (P_i - G) \wedge m_i \ddot{P}_i - \sum_{i=1}^N (P_i - G) \wedge \vec{F}_i - \sum_{i=1}^N (P_i - G) \wedge \vec{S}_i = \\ &= \sum_{i=1}^N (P_i - G) \wedge m_i \ddot{P}_i - \vec{M}_G^{a,\text{est}} - 0 = \frac{d\vec{K}_G}{dt} - \vec{M}_G^{a,\text{est}} = 0. \end{aligned}$$

Nelle relazioni (28.2) i vettori  $m_i \ddot{P}_i - \vec{F}_i = m_i \ddot{P}_i(t) - \vec{F}_i(t, P(t), \dot{P}(t))$  sono funzioni pre-assegnate del tempo definite nell'intero intervallo  $I$ . Nondimeno, l'arbitrarietà del sistema di forze  $\vec{S}_i(t) \in \mathbb{R}^3$  consente di concludere che le reazioni vincolari possano consistere in un **qualsiasi** sistema di vettori applicati di risultante e momento risultante uguali a zero. Pertanto:

*richiedere che tutte le soluzioni delle equazioni cardinali pure (28.1) descrivano moti del sistema rigido libero, qualunque sia l'insieme delle sollecitazioni attive applicate, equivale a postulare che le reazioni vincolari — interne — esplicabili dai vincoli di rigidità del sistema siano tutti e soltanto i sistemi di vettori applicati ai punti del corpo con risultante e momento risultante uguali a zero.*

È questa l'ipotesi nota come **modello del corpo rigido perfetto**, che nelle note relative ai sistemi olonomi si riconoscerà essere la forma assunta dalla condizione dei vincoli ideali nel caso di un sistema rigido libero. Si osservi che l'assunto del corpo rigido perfetto non è mai realistico dal punto di vista fisico, in quanto non pone alcun limite all'intensità delle reazioni esplicabili dai vincoli. In realtà, in presenza di sollecitazioni attive troppo intense il sistema non è in grado di sviluppare reazioni vincolari di intensità sufficiente a preservare la rigidità dei moti: il corpo va perciò incontro a deformazioni che, al crescere delle sollecitazioni, possono risultare via via elastiche, anelastiche, plastiche, e sfociare infine in processi di frattura. Si intenderà quindi che le equazioni (28.1), sebbene ricavate sotto la condizione molto forte del corpo rigido perfetto, vengano poi utilizzate limitatamente al caso di condizioni iniziali "fisicamente ragionevoli", i cui corrispondenti moti non si accompagnino a reazioni vincolari di intensità irrealisticamente troppo elevata.

In modo del tutto analogo si verifica che:

- (i) condizione necessaria e sufficiente perchè tutte e sole le soluzioni dell'equazione cardinale pura (20.2) siano i moti del sistema rigido con punto fisso  $O$  privo di attrito è che le reazioni vincolari esplicabili dai vincoli siano tutte e soltanto quelle con momento risultante in  $O$  uguale a zero;
- (ii) condizione necessaria e sufficiente affinché tutte e sole le soluzioni dell'equazione cardinale pura (26.2) descrivano i moti del sistema rigido con asse fisso  $Oz$  privo di attrito è che le reazioni vincolari esplicabili dai vincoli siano tutte e soltanto quelle con momento risultante nullo rispetto a  $Oz$ .

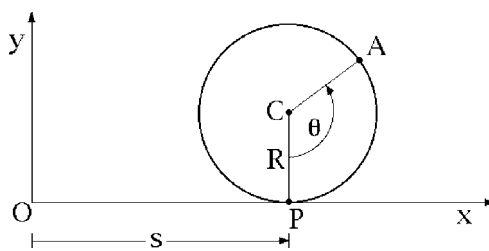
In ambo i casi, benché non sia strettamente necessario, si è soliti distinguere le reazioni vincolari in **interne** ed **esterne** al sistema. Per le prime si assume, come per il sistema rigido libero, che qualsiasi insieme di reazioni vincolari interne sia esplicabile dai vincoli, purché a risultante e momento risultante nulli; **le condizioni (i) e (ii) si intendono così caratterizzare le sole reazioni vincolari esterne**, mentre il modello del corpo rigido perfetto continua a descrivere le reazioni vincolari interne esplicabili dai vincoli di rigidità.

## 29. Rotolamento puro di un disco circolare su una retta o una circonferenza

In questa sezione si fornisce un breve accenno al problema cinematico del rotolamento puro, o senza strisciamento, di un disco circolare su una retta o una circonferenza fissa.

### 29.1 Rotolamento su una retta

Si consideri un disco circolare di centro  $C$  e raggio  $R$ , vincolato a rotolare senza strisciare sull'asse  $Ox$  di una terna di riferimento cartesiana ortogonale  $Oxyz$ , mantenendosi nel piano coordinato  $Oxy$ .



Il sistema è a due gradi di libertà, dal momento che le sue configurazioni possono essere determinate completamente:

- (i) assegnando l'ascissa  $s \in \mathbb{R}$  del punto  $P$  di contatto fra disco e asse  $Ox$ , il che specifica la posizione del centro  $C$

$$C - O = P - O + C - P = s \hat{e}_1 + R \hat{e}_2;$$

(ii) fissando l'angolo  $\theta$  compreso fra il raggio condotto per un punto  $A$  fissato sul bordo del disco e il raggio  $CP$ .

Nell'ipotesi di rotolamento puro la velocità del punto  $P$  del disco deve coincidere con quella del punto corrispondente sull'asse  $Ox$ : rispetto alla terna assoluta il comune valore della velocità istantanea deve essere zero. La condizione di rotolamento puro diventa perciò:

$$\dot{P} = \dot{C} + \vec{\omega} \wedge (P - C) = 0$$

dove  $\dot{C} = \dot{s} \hat{e}_1$ ,  $\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{e}_3$ ,  $P - C = -R \hat{e}_2$ , e quindi:

$$\dot{s} \hat{e}_1 + \dot{\theta} \hat{e}_3 \wedge (-R \hat{e}_2) = 0$$

ossia:

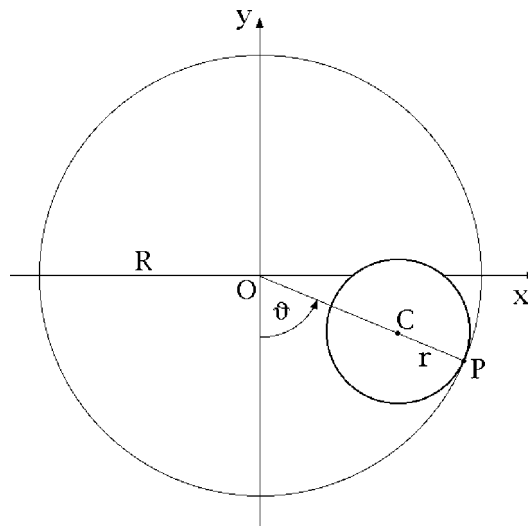
$$(\dot{s} + R\dot{\theta}) \hat{e}_1 = 0.$$

La condizione di rotolamento puro si traduce pertanto nella relazione  $\dot{s} + R\dot{\theta} = 0$ . La velocità angolare del disco assume così le forme equivalenti:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{e}_3 = -\frac{\dot{s}}{R} \hat{e}_3.$$

### 29.2 Rotolamento sul bordo interno di una circonferenza

Si consideri un disco circolare di centro  $C$  e raggio  $r$  vincolato a rotolare senza strisciare lungo il bordo interno di una circonferenza fissa di raggio  $R > r$ , posta nel piano coordinato  $Oxy$  della terna assoluta destra  $Oxyz$  e con centro nell'origine  $O$ . Il parametro lagrangiano è l'angolo  $\vartheta$  misurato fra il vettore  $C - O$  e la semiretta negativa dell'asse  $Oy$ .



La condizione di puro rotolamento impone che il punto  $P$  del disco posto a contatto con la guida ad un dato istante abbia la stessa velocità del corrispondente punto sulla guida,

cioè zero (la guida circolare è fissa per ipotesi). D'altra parte, la velocità istantanea di  $P$  si può esprimere per mezzo della formula di Poisson

$$\dot{P} = \dot{C} + \vec{\omega} \wedge (P - C) \quad (29.1)$$

dove, trattandosi di moto rigido piano, la velocità angolare istantanea è della forma

$$\vec{\omega} = \omega \hat{e}_3$$

per un  $\omega \in \mathbb{R}$  opportuno, mentre

$$\dot{C} = \dot{\vartheta} \hat{e}_3 \wedge (C - O)$$

in quanto la distanza  $|C - O| = R - r$  si mantiene costante lungo i moti possibili del sistema, sicchè il moto del segmento  $OC$  può riguardarsi come rigido con asse fisso  $Oz$  ed angolo di rotazione  $\vartheta$ . Allo stesso risultato si perviene, beninteso, scrivendo le coordinate di  $C$  in termini del parametro lagrangiano  $\vartheta = \vartheta(t)$

$$C - O = (R - r) \sin \vartheta \hat{e}_1 - (R - r) \cos \vartheta \hat{e}_2$$

e derivando rispetto al tempo l'espressione. La condizione di puro rotolamento diventa dunque

$$0 = \dot{\vartheta} \hat{e}_3 \wedge (C - O) + \omega \hat{e}_3 \wedge (P - C). \quad (29.2)$$

Il passo successivo consiste nell'osservare che in qualsiasi configurazione del sistema i punti  $O$ ,  $C$  e  $P$  sono sempre allineati, per cui i vettori  $P - C$  e  $C - O$  risultano paralleli e concordi e possono ottenersi l'uno dall'altro applicando l'opportuno fattore di scala:

$$P - C = \frac{C - O}{|C - O|} |P - C| = \frac{C - O}{R - r} r = \frac{r}{R - r} (C - O).$$

Dalla (29.2) si ottiene pertanto

$$0 = \left( \dot{\vartheta} + \omega \frac{r}{R - r} \right) \hat{e}_3 \wedge (C - O)$$

ma poichè il vettore  $\hat{e}_3 \wedge (C - O)$  non risulta mai nullo in quanto prodotto esterno di vettori ortogonali non nulli, deve necessariamente aversi

$$\dot{\vartheta} + \omega \frac{r}{R - r} = 0$$

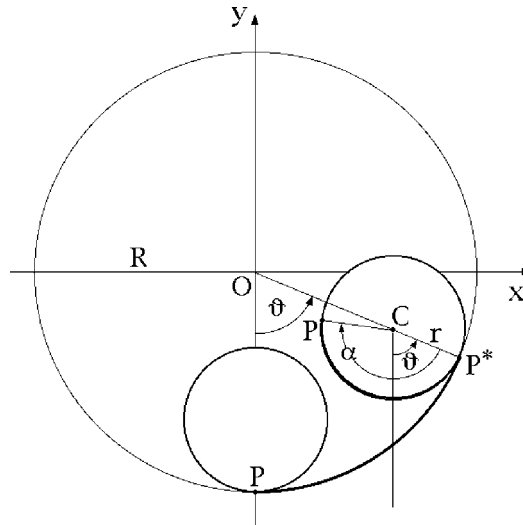
e concludersi che

$$\omega = -\frac{R - r}{r} \dot{\vartheta} = -\left( \frac{R}{r} - 1 \right) \dot{\vartheta}.$$

In definitiva, la velocità angolare del disco è data dalla formula

$$\vec{\omega} = -\left( \frac{R}{r} - 1 \right) \dot{\vartheta} \hat{e}_3. \quad (29.3)$$

È interessante notare come allo stesso risultato si possa pervenire in modo meno formale e più intuitivo ricorrendo ad un ragionamento di tipo geometrico.



Sia  $P$  il punto di contatto fra disco e circonferenza nella configurazione  $\vartheta = 0$ . Al crescere di  $\vartheta$  il disco rotola senza strisciare sul bordo interno della circonferenza fissa, il punto  $P$  del disco si sposta in senso orario e nel contempo  $P^*$  diventa il nuovo punto di contatto fra disco e guida. La condizione di puro rotolamento impone che l'arco  $PP^*$  sulla circonferenza e il corrispondente arco  $PP^*$  sul disco abbiano la stessa lunghezza. La lunghezza del primo arco è semplicemente  $R\vartheta$ , mentre quella sul secondo arco vale  $r\alpha$ , essendosi indicata con  $\alpha$  l'ampiezza dell'angolo  $P^*CP$ . Ne deriva che

$$\alpha = \frac{R}{r}\vartheta.$$

L'angolo  $\alpha$  non può essere usato direttamente per calcolare la velocità angolare istantanea del disco. Tale angolo è infatti compreso fra la direzione  $P - C$ , solidale al disco (cui  $P$  e  $C$  appartengono), e la direzione  $P^* - C$  che non è fissa nella terna assoluta, variando con l'angolo  $\vartheta$ . La definizione di velocità angolare istantanea richiede invece di considerare l'angolo compreso fra una direzione fissa sul corpo rigido e una direzione fissa nel riferimento assoluto, calcolare la derivata di tale angolo rispetto al tempo e moltiplicare il risultato per il versore associato all'asse di rotazione, conformemente alla regola della mano destra. Un angolo che soddisfa questi requisiti è quello compreso fra la direzione solidale al disco  $P - C$  e la semiretta condotta per  $C$  antiparallela all'asse coordinato  $Oy$ . L'angolo utile si ottiene sottraendo ad  $\alpha$  l'angolo compreso fra  $P^* - C$  e la semiretta  $Cy$  negativa, angolo quest'ultimo che coincide con  $\vartheta$  dato che le rette  $Oy$  e  $Cy$  sono parallele e tagliate dalla trasversale  $C - O$  (si tratta di angoli corrispondenti, dunque uguali).

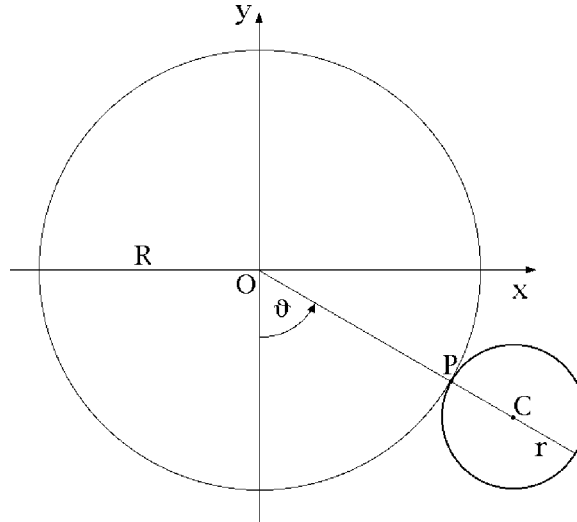
Infine, mentre al crescere di  $\vartheta$  il punto  $P^*$  si sposta in senso antiorario lungo la circonferenza, l'angolo  $\alpha - \vartheta$  descrive una rotazione oraria, che non è conforme alla regola della mano destra per il calcolo della velocità angolare istantanea. La velocità angolare del disco assume perciò la forma

$$\vec{\omega} = -\frac{d}{dt}(\alpha - \vartheta) \hat{e}_3 = -\frac{d}{dt}\left(\frac{R}{r}\vartheta - \vartheta\right) \hat{e}_3 = -\left(\frac{R}{r} - 1\right)\dot{\vartheta} \hat{e}_3$$

in accordo con il risultato precedente.

### 29.3 Rotolamento sul bordo esterno di una circonferenza

Si consideri lo stesso disco dell'esempio precedente ma vincolato ora a rotolare senza strisciare lungo il bordo esterno della circonferenza fissa di centro  $O$ , raggio  $R$  e giacitura  $Oxy$ .



Indicato con  $P$  il punto di contatto disco-guida in una qualsiasi configurazione la condizione di puro rotolamento si scriverà, come prima,

$$0 = \dot{P} = \dot{C} + \omega \hat{e}_3 \wedge (P - C) \quad (29.4)$$

e notando che lungo il moto del sistema il centro  $C$  si sposta a distanza costante dall'origine  $O$  risulta

$$\dot{C} = \dot{\vartheta} \hat{e}_3 \wedge (C - O)$$

in quanto il moto del segmento  $OC$  può considerarsi rigido con asse fisso  $Oz$  e angolo di rotazione  $\vartheta$ . Anche in questo caso i punti  $O$ ,  $P$  e  $C$  si mantengono costantemente allineati, ma ora i vettori  $P - C$  e  $C - O$  sono paralleli e *discordi* e il modulo di  $C - O$  non è pari alla differenza ma alla *somma* dei raggi. Si ha così:

$$P - C = -\frac{C - O}{|C - O|} |P - C| = -\frac{C - O}{R + r} r = -\frac{r}{R + r} (C - O)$$

e la condizione di puro rotolamento (29.4) diventa

$$0 = \dot{\vartheta} \hat{e}_3 \wedge (C - O) - \frac{r}{R + r} \omega \hat{e}_3 \wedge (C - O)$$

ossia

$$0 = \left( \dot{\vartheta} - \frac{r}{R + r} \omega \right) \hat{e}_3 \wedge (C - O).$$

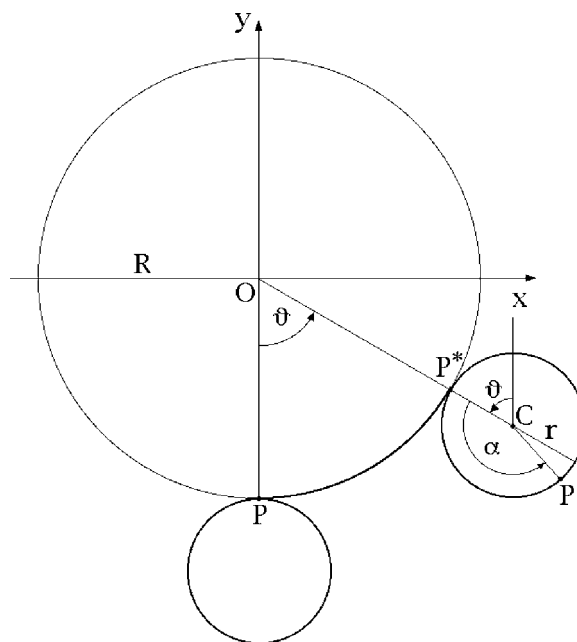
Essendo comunque  $\hat{e}_3 \wedge (C - O) \neq 0$ , si conclude che

$$\dot{\vartheta} - \frac{r}{R+r}\omega = 0$$

per cui  $\omega = (R+r)\dot{\vartheta}/r$  e la velocità angolare istantanea del disco si riduce a:

$$\vec{\omega} = \left(\frac{R}{r} + 1\right)\dot{\vartheta}\hat{e}_3.$$

Formalmente l'espressione può ricavarsi dalla (29.3) sostituendo  $r$  con  $-r$ , per tenere conto del fatto che i due contorni circolari non sono ubicati nello stesso semipiano, delimitato dalla comune retta tangente. Anche questo risultato è suscettibile di una notevole interpretazione geometrica, che ne può costituire una dimostrazione alternativa, per quanto un po' meno rigorosa.



Con le stesse notazioni introdotte per il disco collocato all'interno della circonferenza, la condizione di puro rotolamento implica ancora che l'ampiezza dell'angolo  $P^*\hat{C}P$  sia

$$\alpha = \frac{R}{r}\vartheta.$$

In questo caso, tuttavia, occorre considerare come direzione fissa rispetto alla terna assoluta la semiretta condotta da  $C$  parallela e concorde con l'asse  $Oy$ . L'angolo di rotazione del disco è dunque identificato con la somma  $\alpha + \vartheta$  e presenta già il corretto orientamento rispetto al versore  $\hat{e}_3$ , conformemente alla regola della mano destra. La velocità angolare istantanea del disco risulta pertanto

$$\vec{\omega} = \frac{d}{dt}(\alpha + \vartheta)\hat{e}_3 = \frac{d}{dt}\left(\frac{R}{r}\vartheta + \vartheta\right)\hat{e}_3 = \left(\frac{R}{r} + 1\right)\dot{\vartheta}\hat{e}_3$$

a conferma del risultato già ottenuto.

### 30. Attrito volvente

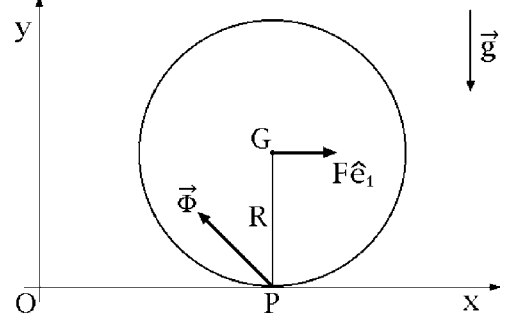
Si concludono queste note esaminando il problema dell'attrito volvente, che si manifesta quando un corpo rigido è vincolato a rotolare su una superficie (o una curva) rigida. L'esperienza insegna, infatti, che il solo attrito radente statico o dinamico non basta a render conto delle osservazioni sperimentali sul comportamento statico e dinamico dei corpi rigidi a contatto con una superficie o una curva rigida.

#### 30.1 Evidenze sperimentali dell'attrito volvente

Le osservazioni sperimentali mostrano, tanto in condizioni statiche quanto nel caso dinamico, che il modello dell'attrito radente non è adeguato a descrivere il comportamento dei corpi rigidi in rotolamento. Due semplici esempi, uno statico ed uno dinamico, sono sufficienti ad illustrare il problema.

##### 30.1.1 Disco omogeneo pesante in quiete su un piano orizzontale

Per illustrare la necessità di introdurre un attrito volvente in condizioni statiche, si consideri un disco omogeneo pesante di massa  $m$ , raggio  $R$  e centro  $G$ , appoggiato su un piano orizzontale (descritto per semplicità mediante un asse  $Ox$ ) e soggetto ad una forza costante orizzontale  $F\hat{e}_1$  applicata al baricentro  $G$ . È facile convincersi che un simile sistema non ammette alcuna configurazione di equilibrio, qualora si assuma che le forze reattive esterne si riducano ad un'unica reazione vincolare agente nel punto di contatto  $P$  fra disco e asse  $Ox$ . Indicate con  $\Phi_x$  e  $\Phi_y$  le componenti cartesiane della reazione vincolare  $\vec{\Phi}$  agente sul disco nel punto  $P$  ed applicando le equazioni cardinali della statica dovrebbe aversi infatti:



$$\begin{cases} -mg\hat{e}_2 + F\hat{e}_1 + \Phi_x\hat{e}_1 + \Phi_y\hat{e}_2 = 0 \\ (G - P) \wedge (-mg\hat{e}_2 + F\hat{e}_1) = 0 \end{cases} \tag{30.1}$$

e quindi, con la sostituzione  $G - P = R\hat{e}_2$  ed una proiezione ortogonale sugli assi:

$$\begin{cases} F + \Phi_x = 0 \\ -mg + \Phi_y = 0 \\ -RF = 0 \end{cases}$$

Quest'ultimo sistema di equazioni fornisce le componenti della reazione vincolare  $\vec{\Phi} = \Phi_x\hat{e}_1 + \Phi_y\hat{e}_2$ :

$$\Phi_x = -F \qquad \Phi_y = mg$$

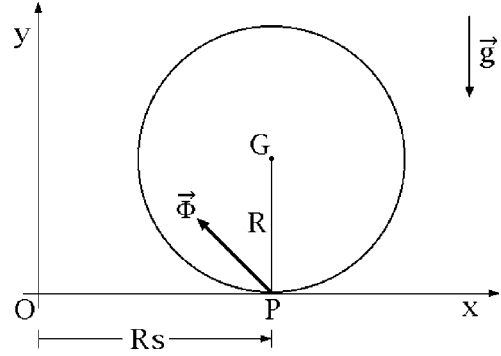
mentre l'ultima delle tre equazioni diventa:

$$RF = 0$$

e chiaramente non ammette alcuna soluzione nell'ipotesi che sia  $F \neq 0$ . *Non sono quindi definite configurazioni di equilibrio per il sistema!* Ciò è in evidente contrasto con l'osservazione sperimentale che vede il disco appoggiato *mantenersi in equilibrio* sul piano orizzontale, a condizione che la sollecitazione  $F\hat{e}_1$  non risulti troppo intensa.

### 30.1.2 Disco omogeneo pesante in rotolamento puro su un piano orizzontale

Si supponga che un disco circolare omogeneo pesante, di centro  $G$ , massa  $m$  e raggio  $R$ , rotoli senza strisciare lungo l'asse orizzontale  $Ox$  del piano d'appoggio, soggetto unicamente al proprio peso  $-mg\hat{e}_2$  e ad una reazione vincolare  $\vec{\Phi} = \Phi_x\hat{e}_1 + \Phi_y\hat{e}_2$  applicata nel punto di contatto  $P$  con il piano d'appoggio. Come coordinata generalizzata si introduca il parametro adimensionale  $s \in \mathbb{R}$  definito da  $s = x/R$ , essendo  $x$  l'ascissa del centro  $G$ . Si possono scrivere le equazioni del moto del sistema facendo uso delle equazioni cardinali dinamiche. A questo scopo si osserva che il vettore posizione, la velocità e l'accelerazione istantanea del (bari)centro  $G$  risultano:



$$G - O = Rs\hat{e}_1 + R\hat{e}_2 \quad \dot{G} = R\dot{s}\hat{e}_1 \quad \ddot{G} = R\ddot{s}\hat{e}_1$$

mentre la condizione di puro rotolamento consente di esprimere la velocità angolare istantanea del disco nella forma:

$$\vec{\omega} = -\dot{s}\hat{e}_3.$$

La prima equazione cardinale della dinamica diventa così:

$$m\ddot{G} = -mg\hat{e}_2 + \vec{\Phi}$$

ossia:

$$mR\ddot{s}\hat{e}_1 = -mg\hat{e}_2 + \Phi_x\hat{e}_1 + \Phi_y\hat{e}_2$$

e porge perciò le due equazioni scalari:

$$mR\ddot{s} = \Phi_x \quad 0 = -mg + \Phi_y. \quad (30.2)$$

La seconda equazione cardinale della dinamica rispetto al polo  $G$  risulta invece:

$$\frac{d\vec{K}_G}{dt} = (P - G) \wedge \vec{\Phi} + (G - G) \wedge (-mg\hat{e}_2)$$

con  $P - G = -R\hat{e}_2$  e

$$\vec{K}_G = L_G(\vec{\omega}) = L_G(-\dot{s}\hat{e}_3) = -\dot{s}L_G(\hat{e}_3) = -\dot{s}I_{Gz}\hat{e}_3 = -I_{Gz}\dot{s}\hat{e}_3$$

in termini del momento d'inerzia  $I_{Gz} = mR^2/2$  del disco relativo all'asse  $Gz$ . Ne deriva l'equazione vettoriale

$$-I_{Gz}\ddot{s}\hat{e}_3 = -R\hat{e}_2 \wedge (\Phi_x\hat{e}_1 + \Phi_y\hat{e}_2)$$

cui corrisponde l'unica equazione scalare:

$$-I_{Gz}\ddot{s} = R\Phi_x, \tag{30.3}$$

che unitamente alle equazioni (30.2) porge il sistema:

$$\begin{cases} mR\ddot{s} = \Phi_x \\ \Phi_y = mg \\ -I_{Gz}\ddot{s} = R\Phi_x. \end{cases}$$

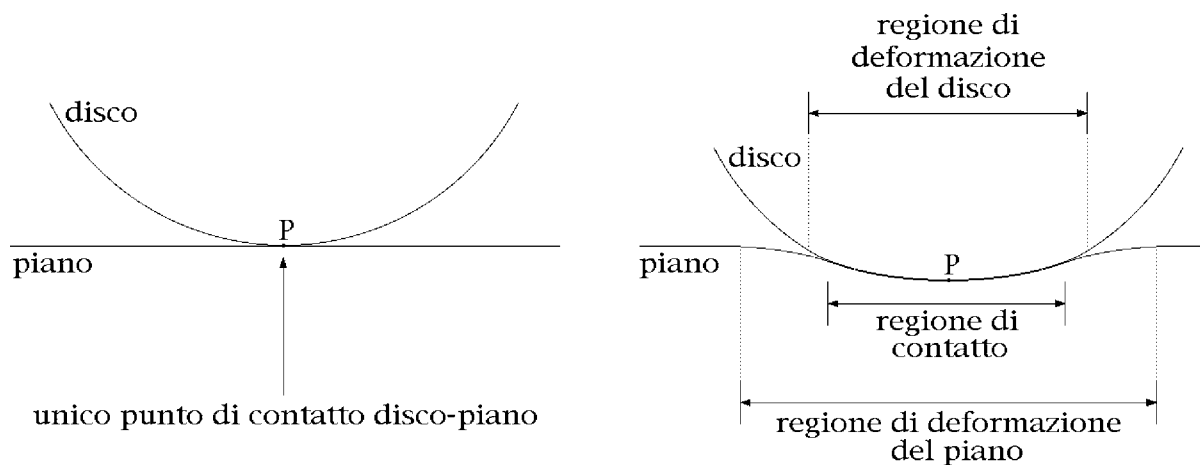
Basta allora sostituire la prima equazione nella terza per ottenere:

$$(I_{Gz} + mR^2)\ddot{s} = 0$$

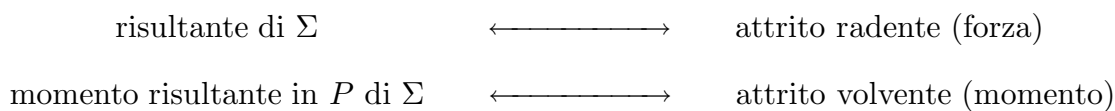
e concludere che  $\ddot{s} = 0$  lungo tutti i moti del sistema: *il moto del baricentro  $G$  è uniforme, come pure la rotazione del disco attorno al proprio asse baricentrale  $Gz$ , mentre  $\Phi_x = 0$  e  $\Phi_y = mg$ .* Da notare che la legge di Coulomb-Morin dell'attrito radente statico è certamente soddisfatta, avendosi  $0 = |\Phi_x| \leq \mu_s |\Phi_y| = \mu_s mg$ . Queste conclusioni sono in stridente contrasto con l'esperienza perchè prevedono che *il moto del disco debba continuare indefinitamente senza alcuna dissipazione di energia meccanica*, circostanza che peraltro non sorprende dato che la reazione vincolare agisce sempre su un punto  $P$  di velocità nulla e non può quindi compiere alcun lavoro.

### 30.2 Ipotesi fondamentale dell'attrito volvente

L'origine dell'attrito volvente statico e dinamico può essere compresa riconoscendo che i corpi in gioco — disco e piano orizzontale — sono soltanto approssimativamente rigidi. In un conveniente intorno di  $P$ , il disco ed il piano subiranno una piccola deformazione localizzata e le reazioni vincolari sul disco non saranno applicate nel solo punto  $P$  del contatto rigido, ma in una piccola superficie estesa intorno a  $P$  che costituirà la regione di effettivo contatto fra i due corpi. Poiché le reazioni vincolari non sono in realtà applicate ad un solo punto, il momento di tali reazioni rispetto a  $P$  potrà risultare non nullo e, se di segno opportuno, potrà rendere conto delle dissipazioni.



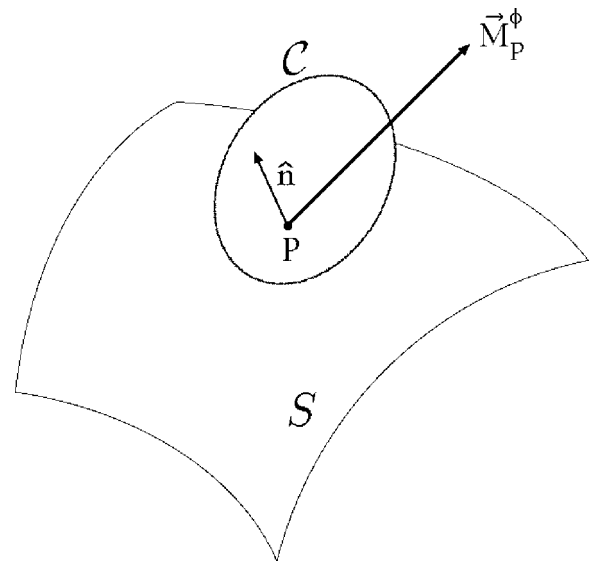
Il modello dell'attrito volvente nasce da una sorta di compromesso fra l'approssimazione di corpo rigido, usata per descrivere disco e piano orizzontale, e la presenza di inevitabili, piccole deformazioni. Queste fanno sì che il contatto non avvenga nel solo punto  $P$ , ma in corrispondenza di una piccola superficie nell'intorno di  $P$ . Le reazioni vincolari esercitate dal piano sul disco non si riducono quindi ad un'unica forza applicata in  $P$ , ma costituiscono un sistema di forze applicate con risultante  $\vec{\Phi}$  e momento risultante  $\vec{M}_P^\phi$  in  $P$ . Che il momento tenda a frenare il moto del disco segue dall'*isteresi* delle deformazioni: una volta deformati, piano e disco tardano un poco a riprendere la forma originale, con il risultato che le forze associate alla deformazione sul fronte di avanzamento del disco sono più intense di quelle prodotte sul retro. Tornando a considerare il disco come un sistema sostanzialmente rigido, questi risultanti specificano completamente l'effetto delle reazioni vincolari sul disco stesso. Al complesso sistema delle reazioni vincolari prodotte nella regione di contatto può sostituirsi un sistema equivalente costituito da un'unica forza di reazione vincolare applicata in  $P$  (che rappresenta l'eventuale *attrito radente* statico o dinamico) e da un'unica coppia (che costituisce l'*attrito volvente*, statico o dinamico). Il momento di tale coppia, l'attrito volvente, può identificarsi con il momento risultante rispetto al polo  $P$  del sistema di reazioni vincolari agenti nella superficie di contatto fra disco e piano. Lo schema seguente riassume quanto affermato:



dove si è indicato con  $\Sigma$  il sistema di reazioni vincolari applicate al disco nell'intorno di  $P$  che rappresenta la regione di contatto con il piano d'appoggio.

### 30.3 Attrito di rotolamento e attrito di imperniamento (giro o prillamento)

L'esperienza insegna che si rende necessario distinguere varie tipologie di attrito volvente. Si hanno infatti un *attrito di rotolamento* e un *attrito di imperniamento*, noto anche come attrito di giro o di prillamento. Entrambi presentano caratteri diversi in condizioni statiche e in condizioni dinamiche, in modo analogo a quanto già osservato a proposito dell'attrito radente. In tutta generalità si consideri un corpo rigido  $\mathcal{C}$  libero di rotolare su una superficie regolare assegnata  $S$ . Sia  $P$  il punto di contatto fra  $\mathcal{C}$  e  $S$ , e si indichi con  $\vec{M}_P^\phi$  il momento in  $P$  del sistema di reazioni vincolari esercitate sul corpo  $\mathcal{C}$  nell'area di contatto con  $S$ . Dunque, per quanto detto nella sezione precedente:



$$\text{attrito volvente} = \vec{M}_P^\phi.$$

Sia infine  $\hat{n}$  il versore normale a  $S$  nel punto

di contatto  $P$ , e si indichi con  $\vec{\omega}$  la velocità angolare del corpo  $\mathcal{C}$  rispetto al riferimento di quiete di  $S$ . Le varie tipologie di attrito volvente sono allora specificate dalle definizioni seguenti.

### 30.3.1 Attrito di rotolamento statico

L'attrito di rotolamento statico  $\vec{M}_{r,s}$  è la componente del momento  $\vec{M}_P^\phi$  tangente alla superficie  $S$  nel punto di contatto  $P$  quando  $\vec{\omega} = 0$ . L'attrito può dunque esprimersi nella forma:

$$\vec{M}_{r,s} = \vec{M}_P^\phi - \vec{M}_P^\phi \cdot \hat{n} \hat{n}.$$

### 30.3.2 Attrito di imperniamento statico

L'attrito di imperniamento statico  $\vec{M}_{i,s}$  è la componente del momento  $\vec{M}_P^\phi$  normale alla superficie  $S$  nel punto di contatto  $P$  quando  $\vec{\omega} = 0$ . L'espressione risulta la seguente:

$$\vec{M}_{i,s} = \vec{M}_P^\phi \cdot \hat{n} \hat{n}.$$

### 30.3.3 Attrito volvente statico

L'attrito volvente statico  $\vec{M}_s$  è il momento  $\vec{M}_P^\phi$  applicato quando  $\vec{\omega} = 0$ . Esso può quindi interpretarsi come la somma dell'attrito di rotolamento statico e di imperniamento statico:

$$\vec{M}_s = \vec{M}_P^\phi = \vec{M}_P^\phi - \vec{M}_P^\phi \cdot \hat{n} \hat{n} + \vec{M}_P^\phi \cdot \hat{n} \hat{n} = \vec{M}_{r,s} + \vec{M}_{i,s}.$$

### 30.3.4 Attrito di rotolamento dinamico

L'attrito di rotolamento dinamico  $\vec{M}_{r,d}$  è la componente del momento  $\vec{M}_P^\phi$  tangente alla superficie  $S$  nel punto di contatto  $P$  quando  $\vec{\omega} \neq 0$ . Esso può esprimersi nella forma:

$$\vec{M}_{r,d} = \vec{M}_P^\phi - \vec{M}_P^\phi \cdot \hat{n} \hat{n}$$

e si distingue da quello statico perchè obbedisce a leggi fenomenologiche diverse ( $\vec{M}_P^\phi$  presenta proprietà diverse quando la velocità angolare del corpo risulta nulla o non nulla).

### 30.3.5 Attrito di imperniamento dinamico

L'attrito di imperniamento dinamico  $\vec{M}_{i,d}$  è la componente del momento  $\vec{M}_P^\phi$  normale alla superficie  $S$  nel punto di contatto  $P$  quando  $\vec{\omega} \neq 0$ . Esso vale quindi:

$$\vec{M}_{i,d} = \vec{M}_P^\phi \cdot \hat{n} \hat{n}.$$

### 30.3.6 Attrito volvente dinamico

L'attrito volvente dinamico  $\vec{M}_d$  è il momento  $\vec{M}_P^\phi$  applicato quando  $\vec{\omega} \neq 0$ . Esso può intendersi come la somma dell'attrito di rotolamento dinamico e di imperniamento dinamico:

$$\vec{M}_d = \vec{M}_P^\phi = \vec{M}_P^\phi - \vec{M}_P^\phi \cdot \hat{n} \hat{n} + \vec{M}_P^\phi \cdot \hat{n} \hat{n} = \vec{M}_{r,d} + \vec{M}_{i,d}.$$

## 30.4 Leggi dell'attrito volvente

L'esperienza dimostra che l'attrito volvente statico e dinamico risultano essenzialmente indipendenti:

- (i) dalla forma della superficie  $S$  e del corpo  $\mathcal{C}$ ;
- (ii) dalle dimensioni del corpo  $\mathcal{C}$ ;
- (iii) dalla configurazione relativa del corpo e della superficie.

Come già per l'attrito radente, le leggi fenomenologiche che governano l'attrito volvente sono nettamente diverse nel caso statico ( $\vec{\omega} = 0$ ) e in quello dinamico ( $\vec{\omega} \neq 0$ ). Conviene indicare con  $\vec{\Phi}_n$  la componente normale ad  $S$  in  $P$  della reazione vincolare che la superficie esercita sul corpo  $\mathcal{C}$ .

### 30.4.1 Legge dell'attrito di rotolamento statico

L'attrito di rotolamento statico  $\vec{M}_{r,s}$  può essere qualunque vettore tangente a  $S$  in  $P$  che soddisfa la diseuguaglianza:

$$|\vec{M}_{r,s}| \leq \mu_{r,s} |\vec{\Phi}_n|,$$

essendo  $\mu_{r,s}$  un coefficiente non negativo, avente le dimensioni di una lunghezza, che dipende dalla natura delle superfici a contatto e che prende il nome di *coefficiente di attrito di rotolamento statico*.

Si osservi che la legge non determina né l'intensità né la direzione dell'attrito di rotolamento statico, ma pone soltanto un limite massimo all'intensità di questo.

### 30.4.2 Legge dell'attrito di imperniamento statico

L'attrito di imperniamento statico  $\vec{M}_{i,s}$  può essere qualunque vettore normale a  $S$  in  $P$  che soddisfa la diseuguaglianza:

$$|\vec{M}_{i,s}| \leq \mu_{i,s} |\vec{\Phi}_n|,$$

nella quale il coefficiente  $\mu_{i,s} \geq 0$  ha le dimensioni di una lunghezza, dipende dalla natura delle superfici a contatto ed è noto come *coefficiente di attrito di imperniamento statico*.

### 30.4.3 Legge dell'attrito volvente statico

La legge dell'attrito volvente statico è la combinazione delle due precedenti. Si ha dunque che l'attrito volvente statico  $\vec{M}_s$  può essere qualsiasi vettore della forma:

$$\vec{M}_s = \vec{M}_{r,s} + \vec{M}_{i,s}$$

con i vettori  $\vec{M}_{r,s}$  e  $\vec{M}_{i,s}$ , rispettivamente tangente e normale alla superficie  $S$  nel punto di contatto  $P$ , tali che:

$$|\vec{M}_{r,s}| \leq \mu_{r,s} |\vec{\Phi}_n| \quad \text{e} \quad |\vec{M}_{i,s}| \leq \mu_{i,s} |\vec{\Phi}_n|,$$

essendo  $\mu_{r,s}$  il coefficiente di attrito di rotolamento statico e  $\mu_{i,s}$  quello di imperniamento statico. *L'evidenza sperimentale suggerisce che usualmente si abbia  $\mu_{r,s} > \mu_{i,s}$ .*

### 30.4.4 Legge dell'attrito di rotolamento dinamico

L'attrito di rotolamento dinamico è un vettore opposto alla componente tangente ad  $S$  in  $P$  della velocità angolare di  $\mathcal{C}$ . Indicata con  $\vec{\omega}_\tau$  detta componente tangente, si ha la relazione:

$$\vec{M}_{r,d} = \begin{cases} 0 & \text{se } \vec{\omega}_\tau = 0 \\ -\mu_{r,d} |\vec{\Phi}_n| \frac{\vec{\omega}_\tau}{|\vec{\omega}_\tau|} & \text{se } \vec{\omega}_\tau \neq 0 \end{cases}$$

nella quale il *coefficiente di attrito di rotolamento dinamico*  $\mu_{r,d}$  è una costante non negativa che dipende dalla natura delle superfici a contatto e ha le dimensioni di una lunghezza. Si ha sempre  $\mu_{r,d} \leq \mu_{r,s}$ , ma in molti casi il coefficiente dinamico assume lo stesso valore di quello statico.

### 30.4.5 Legge dell'attrito di imperniamento dinamico

L'attrito di imperniamento dinamico è un vettore opposto alla componente normale ad  $S$  in  $P$  della velocità angolare di  $\mathcal{C}$ . Se si indica con  $\vec{\omega}_n$  detta componente normale, risulta:

$$\vec{M}_{i,d} = \begin{cases} 0 & \text{se } \vec{\omega}_n = 0 \\ -\mu_{i,d} |\vec{\Phi}_n| \frac{\vec{\omega}_n}{|\vec{\omega}_n|} & \text{se } \vec{\omega}_n \neq 0 \end{cases}$$

nella quale il *coefficiente di attrito di imperniamento dinamico*  $\mu_{i,d}$  è una costante non negativa che dipende dalla natura delle superfici a contatto e ha le dimensioni di una lunghezza. Anche in questo caso si ha in generale  $\mu_{i,d} \leq \mu_{i,s}$  e tipicamente  $\mu_{i,d} = \mu_{i,s}$ .

### 30.4.6 Legge dell'attrito volvente dinamico

La legge dell'attrito volvente dinamico segue dalla combinazione delle leggi relative all'attrito dinamico di rotolamento e di imperniamento. Se il corpo  $\mathcal{C}$  ha velocità angolare  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_\tau + \vec{\omega}_n \neq 0$ , con  $\vec{\omega}_\tau$  e  $\vec{\omega}_n$  rispettivamente tangente e normale alla superficie  $S$  nel punto di contatto  $P$ , l'attrito volvente dinamico è dato da:

$$\vec{M}_d = \vec{M}_{r,d} + \vec{M}_{i,d}$$

con:

$$\vec{M}_{r,d} = \begin{cases} 0 & \text{se } \vec{\omega}_\tau = 0 \\ -\mu_{r,d} |\vec{\Phi}_n| \frac{\vec{\omega}_\tau}{|\vec{\omega}_\tau|} & \text{se } \vec{\omega}_\tau \neq 0 \end{cases} \quad \vec{M}_{i,d} = \begin{cases} 0 & \text{se } \vec{\omega}_n = 0 \\ -\mu_{i,d} |\vec{\Phi}_n| \frac{\vec{\omega}_n}{|\vec{\omega}_n|} & \text{se } \vec{\omega}_n \neq 0 \end{cases}$$

e  $\mu_{r,d}$ ,  $\mu_{i,d}$  coefficienti di attrito dinamico di rotolamento e di imperniamento, rispettivamente. *Le misure sperimentali mostrano che di regola risulta  $\mu_{r,d} > \mu_{i,d}$ .*

### 30.5 Coesistenza degli attriti radente e volvente

Dalla discussione precedente appare chiaro che un corpo a contatto con una superficie fissa nel punto di contatto  $P$  risente di un sistema di reazioni vincolari il cui risultante e momento risultante in  $P$  sono in generale entrambi diversi da zero: *attrito radente e attrito volvente agiscono contemporaneamente*. Se la velocità  $\dot{P}$  del punto di contatto rispetto alla superficie è nulla, il corpo risente di un attrito radente statico; nel caso sia  $\dot{P} \neq 0$ , l'attrito radente da considerare è viceversa di tipo dinamico. Allo stesso tempo, qualora la velocità angolare  $\vec{\omega}$  del corpo nel riferimento di quiete della superficie sia nulla, sul corpo agisce un momento di attrito volvente statico; l'attrito volvente è invece di tipo dinamico per  $\vec{\omega} \neq 0$ . Lo schema seguente riassume quanto affermato:

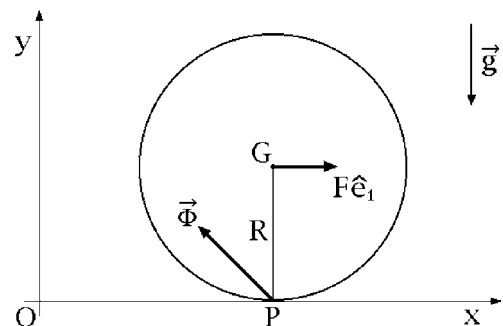
$\dot{P} = 0$	←————→	attrito radente statico
$\dot{P} \neq 0$	←————→	attrito radente dinamico
$\vec{\omega} = 0$	←————→	attrito volvente statico
$\vec{\omega} \neq 0$	←————→	attrito volvente dinamico

### 30.6 Esempi illustrativi

Gli esempi che seguono mostrano come l'introduzione dell'attrito volvente sia sufficiente a render conto delle principali osservazioni sperimentali circa il rotolamento dei corpi rigidi.

#### 30.6.1 Disco pesante in quiete su un piano orizzontale

Si riprenda il problema già considerato alla sezione 30.1.1: un disco circolare omogeneo e pesante, di massa  $m$ , raggio  $R$  e centro  $G$ , appoggiato su un piano orizzontale (descritto dall'asse  $Ox$ ) e soggetto ad una forza costante orizzontale  $F\hat{e}_1$  applicata al baricentro  $G$ . Si assuma però che in corrispondenza del punto di contatto  $P$  con l'asse  $Ox$  il disco sia sottoposto non soltanto ad una reazione vincolare  $\vec{\Phi} = \Phi_x\hat{e}_1 + \Phi_y\hat{e}_2$ , ma anche ad un momento  $M_r\hat{e}_3$  in  $P$  corrispondente ad un attrito di rotolamento. Si indichino con  $\mu_s$  e  $\mu_{r,s}$  rispettivamente il coefficiente di attrito radente statico e quello di rotolamento statico del disco sul piano. Se si suppone che il sistema sia in quiete, la prima equazione cardinale della statica porge l'espressione:



$$-mg\hat{e}_2 + F\hat{e}_1 + \Phi_x\hat{e}_1 + \Phi_y\hat{e}_2 = 0$$

corrispondente alla coppia di equazioni scalari:

$$F + \Phi_x = 0 \qquad -mg + \Phi_y = 0$$

dalle quali si deducono le componenti della reazione vincolare in  $P$  alla quiete:

$$\Phi_x = -F \qquad \Phi_y = mg. \tag{30.4}$$

La seconda equazione cardinale della statica rispetto al polo  $P$  porge inoltre:

$$(G - P) \wedge (F\hat{e}_1 - mg\hat{e}_2) + (P - P) \wedge \vec{\Phi} + M_r\hat{e}_3 = 0$$

ossia:

$$R\hat{e}_2 \wedge (F\hat{e}_1 - mg\hat{e}_2) + M_r\hat{e}_3 = 0$$

e quindi:

$$-RF + M_r = 0. \tag{30.5}$$

La legge di Coulomb-Morin dell'attrito radente statico impone che debba aversi:

$$|\Phi_x| \leq \mu_s |\Phi_y|$$

mentre la legge dell'attrito di rotolamento statico richiede che sia:

$$|M_r| \leq \mu_{r,s} |\Phi_y|.$$

Basta perciò sostituire le espressioni (30.4) e (30.5) per ottenere le condizioni necessarie e sufficienti all'equilibrio:

$$|F| \leq \mu_s mg \qquad R|F| \leq \mu_{r,s} mg$$

vale a dire:

$$|F| \leq mg\mu_s \qquad |F| \leq mg\mu_{r,s}/R. \tag{30.6}$$

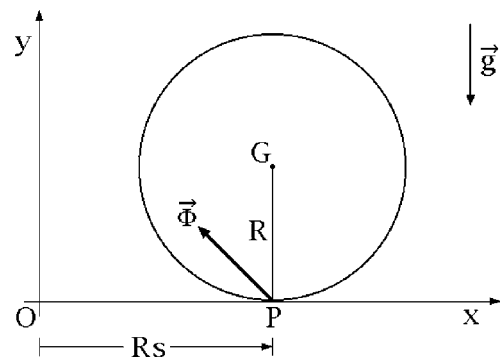
È dunque possibile realizzare uno stato di quiete nella configurazione iniziale, a patto che la forza  $F\hat{e}_1$  abbia una intensità sufficientemente bassa. Questa circostanza viene confermata dall'esperienza. La quale mostra altresì che non appena  $|F|$  è abbastanza grande da porre il sistema in movimento il disco prende a *rotolare senza strisciare*, implicando perciò la diseguaglianza:

$$\mu_{r,s}/R < \mu_s, \tag{30.7}$$

dal momento che al crescere di  $|F|$  la prima delle condizioni (30.6) a essere violata deve risultare la seconda.

### 30.6.2 Disco pesante in rotolamento puro su un piano orizzontale

Si consideri il problema già esaminato alla sezione 30.1.2: un disco circolare omogeneo pesante, di centro  $G$ , massa  $m$  e raggio  $R$ , rotola senza strisciare lungo l'asse orizzontale  $Ox$  del piano d'appoggio, soggetto unicamente al proprio peso  $-mg\hat{e}_2$ . Si supponga tuttavia che, in aggiunta alla reazione vincolare  $\vec{\Phi} = \Phi_x\hat{e}_1 + \Phi_y\hat{e}_2$  nel punto di contatto  $P$  con l'asse  $Ox$ , sul disco agisca anche un momento di attrito volvente dinamico  $M_{r,d}\hat{e}_3$ . Siano  $\mu_s$  e  $\mu_{r,d}$  rispettivamente il coefficiente di attrito radente statico e il coefficiente di attrito di rotolamento dinamico. Per scrivere le equazioni del moto si può ancora ricorrere alle equazioni cardinali della dinamica. Come



già visto in precedenza, l'accelerazione del baricentro  $G$  assume la forma:

$$\ddot{G} = R\ddot{s}\hat{e}_1,$$

mentre la condizione di puro rotolamento consente di esprimere la velocità angolare del disco come:

$$\vec{\omega} = -\dot{s}\hat{e}_3.$$

La prima equazione cardinale della dinamica diventa pertanto:

$$mR\ddot{s}\hat{e}_1 = -mg\hat{e}_2 + \Phi_x\hat{e}_1 + \Phi_y\hat{e}_2$$

e da essa si traggono le due equazioni scalari:

$$mR\ddot{s} = \Phi_x \quad -mg + \Phi_y = 0, \quad (30.8)$$

identiche alle (30.2). La seconda equazione cardinale della dinamica rispetto al polo  $G$  risulta invece:

$$\frac{d\vec{K}_G}{dt} = (P - G) \wedge \vec{\Phi} + (G - G) \wedge (-mg\hat{e}_2) + M_{r,d}\hat{e}_3$$

ed avendosi ancora:

$$\vec{K}_G = L_G(\vec{\omega}) = L_G(-\dot{s}\hat{e}_3) = -\dot{s}L_G(\hat{e}_3) = -\dot{s}I_{Gz}\hat{e}_3$$

in termini del momento d'inerzia  $I_{Gz} = mR^2/2$  del disco rispetto all'asse  $Gz$ , si perviene all'equazione vettoriale:

$$-I_{Gz}\ddot{s}\hat{e}_3 = -R\hat{e}_2 \wedge (\Phi_x\hat{e}_1 + \Phi_y\hat{e}_2) + M_{r,d}\hat{e}_3$$

che corrisponde all'unica equazione scalare:

$$-I_{Gz}\ddot{s} = R\Phi_x + M_{r,d}. \quad (30.9)$$

Per  $\dot{s} \neq 0$  si ha  $\vec{\omega} \neq 0$ , con  $\vec{\omega} \parallel Oz$ , e l'attrito volvente è effettivamente un attrito dinamico di rotolamento:

$$M_{r,d}\hat{e}_3 = -\mu_{r,d}\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}|\Phi_y| = -\mu_{r,d}\frac{-\dot{s}\hat{e}_3}{|-\dot{s}\hat{e}_3|}mg = -\mu_{r,d}\frac{-\dot{s}}{|\dot{s}|}mg\hat{e}_3 = \mu_{r,d}\frac{\dot{s}}{|\dot{s}|}mg\hat{e}_3, \quad (30.10)$$

in modo che  $M_{r,d} = \mu_{r,d}mg\dot{s}/|\dot{s}|$ . Sostituendo la (30.10) e la prima delle (30.8) nella (30.9) questa si riduce a:

$$-I_{Gz}\ddot{s} = mR^2\ddot{s} + \mu_{r,d}mg\frac{\dot{s}}{|\dot{s}|}$$

vale a dire:

$$(I_{Gz} + mR^2)\ddot{s} = -\mu_{r,d}mg\frac{\dot{s}}{|\dot{s}|},$$

ovvero:

$$\ddot{s} = -\frac{\mu_{r,d} mg}{I_{Gz} + mR^2} \dot{s}. \quad (30.11)$$

D'altra parte, la legge di Coulomb-Morin dell'attrito radente statico impone la condizione di puro rotolamento:

$$|\Phi_x| \leq \mu_s |\Phi_y|$$

ossia, tenuto conto delle (30.8):

$$|mR\ddot{s}| \leq \mu_s |mg|$$

e sostituendo la (30.11):

$$\frac{mR\mu_{r,d}}{I_{Gz} + mR^2} mg \leq \mu_s mg.$$

La diseuguaglianza ottenuta si può porre nella forma equivalente:

$$\frac{mR^2}{I_{Gz} + mR^2} \frac{\mu_{r,d}}{R} \leq \mu_s$$

e risulta certamente verificata in virtù della (30.7):

$$\frac{\mu_{r,s}}{R} \leq \mu_s$$

essendo al solito il coefficiente di attrito dinamico non superiore al corrispondente coefficiente di attrito statico:

$$\mu_{r,d} \leq \mu_{r,s},$$

in modo che si ha:

$$\frac{mR^2}{I_{Gz} + mR^2} \frac{\mu_{r,d}}{R} < \frac{\mu_{r,d}}{R} \leq \frac{\mu_{r,s}}{R} \leq \mu_s$$

come richiesto. L'equazione pura del moto (30.11) implica che se  $\dot{s}(0) > 0$  deve aversi un moto uniformemente decelerato:

$$\ddot{s} = -\frac{\mu_{r,d} mg}{I_{Gz} + mR^2}$$

fino all'annullarsi della velocità  $\dot{s}$  all'istante

$$t_{\text{fin}} = \dot{s}(0) \left/ \frac{\mu_{r,d} mg}{I_{Gz} + mR^2} \right.$$

allorquando *il sistema raggiunge lo stato di quiete*. Il caso  $\dot{s}(0) < 0$  si tratta in modo del tutto analogo e porta alla stessa conclusione. *L'introduzione dell'attrito volvente dinamico è quindi sufficiente a render conto del moto osservato per il sistema reale, che raggiunge la quiete in un intervallo di tempo finito.*

## A. Appendice. Isometrie

Si è visto nella sezione 2 che il moto dello spazio solidale ad un sistema  $\mathbb{S}$  definisce una trasformazione dello spazio fisico  $\mathbb{E}^3$  in se, trasformazione che ha la caratteristica di *preservare le distanze* fra i punti. Una trasformazione di questo tipo si dice una *isometria di  $\mathbb{E}^3$* , e in questa appendice se ne vuole determinare la rappresentazione matematica generale. In primo luogo è senz'altro opportuno fissare una origine  $O \in \mathbb{E}^3$  e sostituire  $\mathbb{E}^3$  con lo spazio vettoriale associato  $\mathbb{R}^3$  dei vettori posizione rispetto ad  $O$ . L'isometria  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  risulta perciò caratterizzata dalla condizione:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3.$$

La funzione ausiliaria  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da

$$g(x) = f(x) - f(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

soddisfa l'ovvia condizione  $g(0) = 0$  ed è anch'essa una isometria di  $\mathbb{R}^3$ :

$$|g(x) - g(y)| = |f(x) - f(0) - f(y) + f(0)| = |f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3.$$

La relazione può esprimersi in una forma del tutto equivalente elevando al quadrato ambo i membri:

$$[g(x) - g(y)]^2 = (x - y)^2$$

ed esplicitando i quadrati in termini di prodotti scalari:

$$g(x)^2 + g(y)^2 - 2g(x) \cdot g(y) = x^2 + y^2 - 2x \cdot y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3.$$

Per  $y = 0$  l'equazione implica:

$$g(x)^2 = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

e può quindi semplificarsi nel modo seguente:

$$g(x) \cdot g(y) = x \cdot y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3. \quad (\text{A.1})$$

Dunque, *l'isometria conserva i prodotti scalari fra i vettori posizione in  $\mathbb{E}^3$*  e non soltanto le distanze fra i punti. Ne deriva che se  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  è una base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$  anche i vettori:

$$g(\hat{e}_1), \quad g(\hat{e}_2), \quad g(\hat{e}_3) \quad (\text{A.2})$$

costituiscono una base ortonormale dello stesso spazio vettoriale, avendosi infatti:

$$g(\hat{e}_i)^2 = \hat{e}_i^2 = 1 \quad \forall i = 1, 2, 3$$

e

$$g(\hat{e}_i) \cdot g(\hat{e}_j) = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, 2, 3.$$

Posto  $y = \hat{e}_i$  nell'equazione (A.1), si ottiene allora:

$$g(x) \cdot g(\hat{e}_i) = x \cdot \hat{e}_i \quad \forall i = 1, 2, 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

e di conseguenza, grazie alla ortonormalità della base (A.2):

$$g(x) = \sum_{i=1}^3 g(x) \cdot g(\hat{e}_i) g(\hat{e}_i) = \sum_{i=1}^3 x \cdot \hat{e}_i g(\hat{e}_i) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Questa relazione esprime la *linearità* della funzione  $g$ , dal momento che:

$$x = \sum_{i=1}^3 x \cdot \hat{e}_i \hat{e}_i$$

per cui:

$$g\left(\sum_{i=1}^3 x \cdot \hat{e}_i \hat{e}_i\right) = \sum_{i=1}^3 x \cdot \hat{e}_i g(\hat{e}_i) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Considerati infatti due vettori  $a, b \in \mathbb{R}^3$  e posto:

$$a = \sum_{i=1}^3 a_i \hat{e}_i \quad b = \sum_{i=1}^3 b_i \hat{e}_i,$$

per qualsiasi coppia di scalari  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  risulterà:

$$\begin{aligned} g(\alpha a + \beta b) &= g\left(\alpha \sum_{i=1}^3 a_i \hat{e}_i + \beta \sum_{i=1}^3 b_i \hat{e}_i\right) = g\left(\sum_{i=1}^3 (\alpha a_i + \beta b_i) \hat{e}_i\right) = \\ &= \sum_{i=1}^3 (\alpha a_i + \beta b_i) g(\hat{e}_i) = \alpha \sum_{i=1}^3 a_i g(\hat{e}_i) + \beta \sum_{i=1}^3 b_i g(\hat{e}_i) = \\ &= \alpha g\left(\sum_{i=1}^3 a_i \hat{e}_i\right) + \beta g\left(\sum_{i=1}^3 b_i \hat{e}_i\right) = \alpha g(a) + \beta g(b). \end{aligned}$$

Una volta riconosciuto che l'isometria  $g$  è un operatore lineare di  $\mathbb{R}^3$ , la si potrà rappresentare rispetto alla base ortonormale  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  per mezzo di una opportuna *matrice di rappresentazione*  $A$ . Indicati con  $[x]$  e  $[g(x)]$  i vettori colonna delle componenti di  $x \in \mathbb{R}^3$  e  $g(x)$  rispetto a  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ , si avrà infatti:

$$[g(x)] = A[x]$$

e la condizione (A.1) di invarianza dei prodotti scalari assumerà la forma matriciale:

$$(A[x])^T A[y] = [x]^T [y] \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3$$

ossia

$$[x]^T A^T A [y] = [x]^T [y] \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3$$

ed infine:

$$[x]^T (A^T A - \mathbb{I}) [y] = 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3.$$

Quest'ultima relazione risulta verificata se e soltanto se  $A^T A - \mathbb{I} = 0$ , vale a dire:

$$A^T A = \mathbb{I}.$$

*La matrice di rappresentazione  $A$  di  $g$  rispetto alla base  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  è una matrice ortogonale. È immediato verificare che, viceversa, qualsiasi matrice ortogonale  $A$  rappresenta una isometria  $g$  di  $\mathbb{R}^3$ .*

*Non rimane che tornare alla funzione  $f(x) = f(0) + g(x)$  per concludere che ogni isometria di  $\mathbb{R}^3$  è la composizione di una trasformazione lineare ortogonale e di una traslazione, descritte rispettivamente da  $g(x)$  e da  $x \rightarrow x + f(0)$ .*

# Indice degli argomenti

1.	Moto rigido di un sistema di punti .....	1
2.	Spazio solidale ad un sistema in moto rigido.....	1
2.1	Terna solidale ad un sistema in moto rigido.....	1
2.2	Moto rigido come moto di trascinamento .....	2
3.	Velocità angolare e teorema di Poisson .....	3
4.	Atto di moto rigido .....	4
5.	Moti rigidi e teoremi di composizione.....	5
5.1	Teorema di composizione delle velocità .....	5
5.2	Teorema di composizione delle velocità angolari .....	6
6.	Moti rigidi notevoli .....	7
6.1	Moti traslatori.....	7
6.1.1	Caratterizzazione in termini dei versori di una terna solidale.....	8
6.1.2	Caratterizzazione in termini della velocità angolare istantanea .....	9
6.1.3	Caratterizzazione in termini dell'atto di moto .....	9
6.1.4	Forma generale dell'atto di moto traslatorio .....	10
6.1.5	Caso particolare di moto traslatorio: moto traslatorio rettilineo.....	10
6.1.6	Caso particolare: moto traslatorio rettilineo ed uniforme.....	11
6.2	Moti con asse fisso, o rotatori .....	12
6.2.1	Forma generale dell'atto di moto rigido con asse fisso.....	15
6.2.2	Accelerazione istantanea di un punto generico .....	15
6.2.3	Caso particolare di moto rigido con asse fisso: moto rotatorio uniforme .....	15
6.3	Moti elicoidali .....	17
6.3.1	Caso particolare di moto elicoidale: moto elicoidale uniforme .....	20
6.3.2	Moti traslatorio rettilineo e con asse fisso come casi limite di moto elicoidale....	20
6.3.3	Atto di moto elicoidale.....	20
7.	Teorema di Mozzi.....	21
7.1	Lemma dell'asse istantaneo di moto .....	21
7.2	Atti di moto propriamente elicoidali.....	23
7.3	Atti di moto traslatori .....	23
7.4	Atti di moto rotatori.....	23
7.5	Osservazione.....	24
8.	Moti rigidi piani .....	24
8.1	Teorema di classificazione degli atti di moto rigido piano.....	24

8.2	Calcolo del centro di rotazione istantanea.....	26
8.3	Dipendenza dal tempo di asse di Mozzi e centro istantaneo di rotazione.....	27
8.4	Base e rulletta.....	27
8.5	Teorema del moto relativo di base e rulletta.....	27
9.	Sistemi rigidi di punti materiali.....	30
10.	Operatore d'inerzia.....	31
10.1	Operatore d'inerzia.....	31
10.2	Momento d'inerzia.....	31
10.3	Momento d'inerzia espresso mediante l'operatore d'inerzia.....	32
10.4	Momento angolare di un sistema rigido con punto fisso.....	32
10.5	Energia cinetica di un sistema rigido con punto fisso.....	33
11.	Proprietà dell'operatore d'inerzia.....	33
11.1	Linearità.....	33
11.2	Simmetria.....	34
11.3	Positività.....	39
12.	Matrice d'inerzia e sue proprietà.....	40
13.	Diagonalizzazione della matrice d'inerzia.....	43
13.1	Elementi principali e centrali d'inerzia di un sistema di punti materiali.....	43
13.2	Elementi di simmetria.....	45
13.2.1	Asse di simmetria.....	45
13.2.2	Asse di simmetria di ordine $n$ ( $n$ intero positivo $> 2$ ).....	46
13.2.3	Piano di simmetria.....	48
13.3	Sistemi piani.....	50
14.	Teorema di Huygens-Steiner.....	50
14.1	Teorema di Huygens-Steiner generalizzato.....	51
14.2	1 <sup>a</sup> applicazione: terne non baricentrali.....	53
14.3	2 <sup>a</sup> applicazione: teorema di Huygens-Steiner.....	53
14.4	3 <sup>a</sup> applicazione: terne principali ottenute per traslazione di terne centrali.....	54
15.	Additività delle matrici d'inerzia.....	55
16.	Sistemi continui.....	55
16.1	Curve regolari.....	55
16.2	Superfici regolari.....	56
16.3	Solidi regolari.....	57
17.	Equazioni cardinali della dinamica rigida.....	58

18.	Teorema dell'energia cinetica per un sistema rigido .....	60
19.	Introduzione alla dinamica dei sistemi rigidi .....	60
19.1	Sistemi rigidi liberi .....	61
19.2	Sistemi rigidi con punto fisso .....	62
19.3	Sistemi rigidi con asse fisso .....	62
20.	Equazioni di Eulero per un sistema rigido con punto fisso .....	62
20.1	Ipotesi del punto fisso privo di attrito .....	63
20.2	Terna di riferimento per il calcolo del momento angolare .....	64
20.3	Equazioni di Eulero .....	65
20.4	Incompletezza delle equazioni di Eulero .....	67
21.	Angoli di Eulero .....	68
21.1	Matrice dei coseni direttori della terna solidale rispetto alla terna assoluta .....	69
21.2	Descrizione del moto in termini degli angoli euleriani .....	72
21.3	Velocità angolare istantanea del sistema .....	72
22.	Chiusura delle equazioni di Eulero .....	74
23.	Statica del corpo rigido con punto fisso privo di attrito .....	75
24.	Moti per inerzia di un corpo rigido con punto fisso privo di attrito. Rotazioni permanenti .....	77
24.1	Nozione di moto per inerzia .....	77
24.2	Integrali primi dei moti per inerzia .....	77
24.3	Caso notevole: rotazioni permanenti .....	78
25.	Problema del moto per un sistema rigido libero .....	80
26.	Problema del moto per un sistema rigido con asse fisso privo di attrito .....	83
26.1	Ipotesi dell'asse fisso privo di attrito .....	83
26.2	Equazione del moto .....	85
26.3	Energia cinetica e momento angolare di un corpo rigido con asse fisso .....	87
27.	Cimenti dinamici ed equilibratura statica e dinamica di un sistema rigido con asse fisso privo di attrito .....	87
27.1	Caso notevole: rotatore pesante .....	88
27.2	Equilibratura statica del rotatore pesante .....	89
27.3	Equilibratura dinamica del rotatore pesante .....	90
28.	Osservazione. Corpo rigido perfetto .....	91
29.	Rotolamento puro di un disco circolare su una retta o una circonferenza .....	93

29.1	Rotolamento su una retta .....	93
29.2	Rotolamento sul bordo interno di una circonferenza .....	94
29.3	Rotolamento sul bordo esterno di una circonferenza .....	97
30.	Attrito volvente .....	99
30.1	Evidenze sperimentali dell'attrito volvente.....	99
30.1.1	Disco omogeneo pesante in quiete su un piano orizzontale .....	99
30.1.2	Disco omogeneo pesante in rotolamento puro su un piano orizzontale .....	100
30.2	Ipotesi fondamentale dell'attrito volvente .....	101
30.3	Attrito di rotolamento e attrito di imperniamento (giro, o prillamento) .....	102
30.3.1	Attrito di rotolamento statico .....	103
30.3.2	Attrito di imperniamento statico .....	103
30.3.3	Attrito volvente statico .....	103
30.3.4	Attrito di rotolamento dinamico .....	103
30.3.5	Attrito di imperniamento dinamico .....	103
30.3.6	Attrito volvente dinamico .....	103
30.4	Leggi dell'attrito volvente .....	104
30.4.1	Legge dell'attrito di rotolamento statico .....	104
30.4.2	Legge dell'attrito di imperniamento statico .....	104
30.4.3	Legge dell'attrito volvente statico .....	104
30.4.4	Legge dell'attrito di rotolamento dinamico .....	105
30.4.5	Legge dell'attrito di imperniamento dinamico .....	105
30.4.6	Legge dell'attrito volvente dinamico .....	105
30.5	Coesistenza degli attriti radente e volvente .....	106
30.6	Esempi illustrativi .....	106
30.6.1	Disco omogeneo pesante in quiete su un piano orizzontale .....	106
30.6.2	Disco omogeneo pesante in rotolamento puro su un piano orizzontale .....	107
A.	Appendice. Isometrie .....	110