

## 1. DISCUSSIONE DI WEIERSTRASS

Si considera un punto materiale di massa  $m$  vincolato a muoversi lungo una curva fissa e liscia e soggetto a sollecitazioni puramente posizionali. La posizione del punto è determinata dall'ascissa curvilinea  $x$ , mentre le forze posizionali agenti su di esso si descrivono per mezzo del potenziale  $-W(x)$ , essendo  $W(x)$  l'energia potenziale del sistema. L'equazione del moto si scrive, assumendo l'ascissa  $x$  definita sull'intervallo aperto  $I \subseteq \mathbb{R}$ :

$$m\ddot{x} = -W'(x) \quad (1)$$

altresì equivalente al sistema del primo ordine in forma normale:

$$\frac{d}{dt}(x, v) = \left( v, -\frac{1}{m}W'(x) \right) \quad (x, v) \in I \times \mathbb{R} . \quad (2)$$

Le usuali condizioni che garantiscono esistenza ed unicità della soluzione massimale per il problema di Cauchy relativo portano a richiedere che  $W'(x)$  sia continua e localmente lipschitziana (in  $x$ ). In tali ipotesi il problema di valori iniziali  $(x_0, v_0) \in I \times \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(x, v) = \left( v, -\frac{1}{m}W'(x) \right) \\ (x, v)(t_0) = (x_0, v_0) \end{cases}$$

ammette sempre una ed una sola soluzione massimale  $(x, v)(t, t_0, x_0, v_0)$ , definita su un intervallo aperto  $J(t_0, x_0, v_0) \subseteq \mathbb{R}$  ed ivi almeno di classe  $C^1$ . Per brevità la componente  $x$  di tale soluzione verrà indicata con  $x(t)$  ed in forza della relazione  $v = \dot{x}$  sarà una funzione di classe  $C^2$ . Moltiplicando membro a membro la (1) per  $\dot{x}$  si ha immediatamente:

$$\frac{m}{2}\dot{x}(t)^2 + W(x(t)) = E \quad (3)$$

con  $E$  costante lungo la soluzione massimale (energia meccanica totale del sistema). In modo del tutto equivalente si può considerare la funzione:

$$H(x, v) = \frac{m}{2}v^2 + W(x)$$

e verificare che la sua derivata lungo la soluzione,  $\dot{H}$ , è identicamente nulla sul dominio  $I \times \mathbb{R}$  di definizione del sistema (2). Dalla (3) si deduce:

$$\dot{x}(t)^2 = \frac{2}{m}[E - W(x(t))] \equiv \Phi(x(t)) ,$$

con  $\Phi'(x) = -2W'(x)/m$  continua e localmente lipschitziana in  $x$ . La positività del primo membro implica che:

$$\Phi(x(t)) \geq 0 \quad \forall t \in J(t_0, x_0, v_0) \quad (4)$$

ed inoltre che:

$$\dot{x}(t) = \pm \sqrt{\Phi(x(t))} \quad (5)$$

sullo stesso intervallo di definizione della soluzione. Si osservi che  $\dot{x}(t)$  e  $\sqrt{\Phi(x(t))}$  sono continue in  $t \in J(t_0, x_0, v_0)$  in quanto composizioni di funzioni continue. Pertanto le eventuali variazioni di segno nella (5) possono avere luogo soltanto se  $\Phi(x(t)) = 0$ , vale a dire se  $x(t)$  è uno zero di  $\Phi$ .

Allo scopo di illustrare la discussione di Weierstrass si assumerà per fissare le idee  $v_0 \geq 0$ , il caso  $v_0 < 0$  potendosi trattare in modo analogo.

### Teorema 1

Se  $\Phi(x_0) = 0$  e  $\Phi'(x_0) = 0$ , allora  $x(t) = x_0 \forall t \in \mathbb{R}$  è la soluzione massimale dell'equazione del moto (1) con dati iniziali  $(x(t_0), \dot{x}(t_0)) = (x_0, 0)$ .

Infatti la condizione  $\Phi(x_0) = 0$  implica che l'energia cinetica e dunque la velocità iniziale  $v_0$  siano nulle. D'altra parte  $\Phi'(x_0) = 0$  significa che  $x_0$  è punto critico dell'energia potenziale, per cui  $x(t) = x_0 \forall t \in \mathbb{R}$  è certamente soluzione della (1).

### Teorema 2

Sia  $v_0 > 0$  — ossia  $\Phi(x_0) > 0$  — e l'equazione  $\Phi(x) = 0$  non ammetta soluzioni per  $x > x_0$ ,  $x \in I$ . Allora la soluzione del sistema per  $t \geq t_0$ ,  $t \in J(t_0, x_0, v_0)$ , è data dall'integrale di Weierstrass:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad \forall x(t) \in I \cap [x_0, +\infty)$$

e corrisponde ad un moto progressivo del punto materiale. Indicato con  $\sup(I)$  l'estremo superiore di  $I$  — e convenendo che  $\sup(I) = +\infty$  qualora  $I$  non sia limitato superiormente —, l'estremo superiore dell'intervallo  $J(t_0, x_0, v_0)$  di definizione della soluzione massimale vale:

$$t_0 + \int_{x_0}^{\sup(I)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad (6)$$

a condizione che l'integrale a secondo membro esista finito.  $J(t_0, x_0, v_0)$  risulterà invece superiormente illimitato nel caso che lo stesso integrale sia generalizzato e non convergente.

La condizione iniziale  $v_0 > 0$  e l'assenza di zeri di  $\Phi$  in  $\{x \in I : x > x_0\}$  implicano l'equazione:

$$\dot{x}(t) = +\sqrt{\Phi(x(t))} \quad \forall t \in J(t_0, x_0, v_0) \cap [t_0, +\infty)$$

risolvibile per separazione di variabili:

$$t = t_0 + \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad \forall x(t) \in I \cap [x_0, +\infty) . \quad (7)$$

La soluzione  $x(t)$  è una funzione monotona crescente di  $t \geq t_0$ , il che prova la natura progressiva del moto. Infine, l'estremo superiore di  $J(t_0, x_0, v_0)$  si ottiene dalla (7) considerando il limite  $x(t) \rightarrow \sup(I)$ —: ciò equivale precisamente al calcolo della (6) e comporta che l'intervallo sia superiormente illimitato se e soltanto se l'integrale generalizzato diverge.

**Teorema 3**

Sia  $v_0 > 0$  — ossia  $\Phi(x_0) > 0$  — ed esista  $\bar{x} \in I$ ,  $\bar{x} > x_0$ , tale che  $\Phi(\bar{x}) = 0$  e  $\Phi(x) > 0 \forall x \in [x_0, \bar{x})$ . Si distinguono allora due casi:

- i) se  $\bar{x}$  è uno zero semplice di  $\Phi$ , se cioè  $\Phi'(\bar{x}) \neq 0$ , si ha in  $\bar{x}$  un punto di inversione del moto del sistema;
- ii) se  $\bar{x}$  non è uno zero semplice di  $\Phi$ , vale a dire  $\Phi'(\bar{x}) = 0$ ,  $\bar{x}$  è una meta asintotica per il moto del punto materiale.

Nel caso i) si osservi preliminarmente che in effetti la condizione  $\Phi(x) > 0 \forall x \in [x_0, \bar{x})$  implica debba aversi  $\Phi'(\bar{x}) < 0$ . Per ogni  $x(t) \in [x_0, \bar{x})$  la soluzione segue dall'integrale di Weierstrass:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du$$

dove per un  $u^* \in (u, \bar{x})$  opportuno vale:

$$\frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} = \frac{1}{\sqrt{\Phi(u) - \Phi(\bar{x})}} = \frac{1}{\sqrt{(u - \bar{x})\Phi'(u^*)}}$$

e quindi:

$$\frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} \sim \frac{1}{\sqrt{\bar{x} - u}} \quad (u \rightarrow \bar{x}-) \tag{8}$$

avendosi  $\lim_{u \rightarrow \bar{x}-} \Phi'(u^*) = \Phi'(\bar{x}) < 0$  causa la supposta continuità di  $\Phi'$ . La relazione (8) implica la convergenza dell'integrale generalizzato:

$$\int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du$$

per cui esiste finito l'istante  $\bar{t}$  definito da:

$$\bar{t} = t_0 + \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du$$

e  $\lim_{t \rightarrow \bar{t}-} x(t) = \bar{x}$ ; l'essere  $\Phi(\bar{x}) = 0$  comporta altresì  $\lim_{t \rightarrow \bar{t}-} \dot{x}(t) = 0$  e dal teorema di prolungabilità si deduce che la soluzione massimale del problema di Cauchy soddisfa la condizione  $x(\bar{t}) = \bar{x}$ , essendo  $(\bar{x}, 0) \in I \times \mathbb{R}$ . Dunque  $\bar{t} \in J(t_0, x_0, v_0)$ , intervallo aperto. Inoltre dall'equazione del moto (1) segue che  $\ddot{x}(\bar{t}) = -W'(\bar{x})/m = \Phi'(\bar{x})/2 < 0$  e per la continuità in  $t$  di  $\dot{x}(t)$  deve esistere un intorno  $(\bar{t} - \varepsilon, \bar{t} + \varepsilon) \subseteq J(t_0, x_0, v_0)$  dove  $\ddot{x}(t) < 0$ . Nello stesso intorno la funzione  $\dot{x}(t)$  sarà decrescente e poichè  $\dot{x}(\bar{t}) = 0$  si conclude che  $\dot{x}(t) < 0 \forall t \in (\bar{t}, \bar{t} + \varepsilon)$ , cioè che all'istante  $\bar{t}$  e nella posizione  $\bar{x}$  si verifica un cambiamento di segno della velocità istantanea del punto.

Nel caso ii) si ricorda che  $\Phi'$  è una funzione localmente lipschitziana in  $x$ , cosicchè esistono un intorno  $(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$  ed una costante positiva  $L$  tali che:

$$|\Phi'(x) - \Phi'(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) .$$

In particolare  $|\Phi'(x) - \Phi'(\bar{x})| \leq L|x - \bar{x}|$  e quindi  $|\Phi'(x)| \leq L|x - \bar{x}|$ , ed essendo  $x \leq \bar{x}$ :

$$-L(\bar{x} - x) \leq \Phi'(x) \leq L(\bar{x} - x) .$$

Una integrazione membro a membro fra  $x$  ed  $\bar{x}$  porge allora:

$$-\frac{L}{2}(\bar{x} - x)^2 \leq \Phi(x) \leq \frac{L}{2}(\bar{x} - x)^2$$

da cui si deduce la maggiorazione:

$$|\Phi(x)| \leq \frac{L}{2}(\bar{x} - x)^2 \quad \forall x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x}]$$

che conduce a:

$$\frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} = \frac{1}{\sqrt{|\Phi(x)|}} \geq \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{1}{|\bar{x} - x|}$$

ed implica la divergenza dell'integrale di Weierstrass:

$$\int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du ,$$

mentre la soluzione  $\forall x(t) \in [x_0, \bar{x})$  è data da:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du .$$

$\bar{x}$  è dunque meta asintotica per il moto del sistema.

### Esempio notevole

Si consideri un punto materiale vincolato ad una curva fissa e liscia di ascissa curvilinea  $x \in \mathbb{R}$  e soggetto al potenziale  $-W(x) = |x|^{3/2}$ . La posizione del punto all'istante iniziale  $t_0$  sia individuata dal valore  $x_0 < 0$  dell'ascissa e l'energia meccanica totale  $E$  del sistema risulti nulla. Si assuma positiva la velocità iniziale  $v_0$  corrispondente. La conservazione dell'energia si scrive:

$$\frac{m}{2}\dot{x}(t)^2 - |x(t)|^{3/2} = 0 \quad \forall t \in J(t_0, x_0, v_0)$$

per cui:

$$\Phi(x) = \frac{2}{m}|x|^{3/2}$$

che è di classe  $C^1$  in  $\mathbb{R}$  ed ammette in  $\bar{x} = 0$  uno zero non semplice. Ci si aspetta che  $\bar{x} = 0$  costituisca una meta asintotica per il moto del sistema, ma in realtà non è così. In un conveniente intorno destro di  $t_0$  si ha in effetti, tenuto conto del segno della condizione iniziale:

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2}{m}}(-x(t))^{3/4} \quad x(t) < 0$$

e quindi, separando le variabili:

$$\sqrt{\frac{2}{m}}(t - t_0) = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{(-u)^{3/4}} du \quad \forall x(t) < 0 ,$$

relazione dalla quale si deduce:

$$x(t) = - \left[ (-x_0)^{1/4} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{m}}(t - t_0) \right]^4 \leq 0 \quad (9)$$

ed analoghe espressioni per le derivate prima e seconda in  $t$ :

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2}{m}} \left[ (-x_0)^{1/4} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{m}}(t - t_0) \right]^3 \quad (10)$$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{3}{2m} \left[ (-x_0)^{1/4} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{m}}(t - t_0) \right]^2 . \quad (11)$$

Si osservi che le espressioni (9), (10) e (11) sono definite formalmente per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Si ha in effetti:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{1}{m} W'(x(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

con  $x(t_0) = x_0$  ed  $\dot{x}(t_0) > 0$ . Vale inoltre  $x(\bar{t}) = 0$  e  $\dot{x}(\bar{t}) = 0$  per  $\bar{t} = t_0 + 4\sqrt{m/2}(-x_0)^{1/4}$ , dunque  $\bar{x} = 0$  non è meta asintotica ma punto di inversione del moto, come segue dalla (9). La contraddizione è solo apparente, in quanto  $\Phi'$  non risulta lipschitziana in alcun intorno aperto dell'origine  $x = 0$ , per cui neppure l'unicità della soluzione del problema di Cauchy è assicurata. In realtà detta unicità non sussiste in quanto la (9) è soluzione massimale del problema a valori iniziali:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -W'(x) , & W(x) = -|x|^{3/2} \\ x(\bar{t}) = 0 \\ \dot{x}(\bar{t}) = 0 \end{cases}$$

definita  $\forall t \in \mathbb{R}$ , mentre lo stesso problema di Cauchy ammette anche la soluzione di equilibrio:

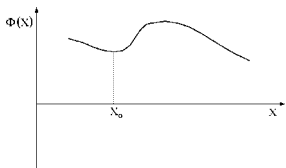
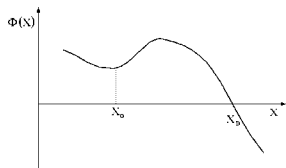
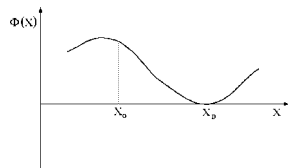
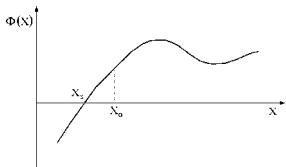
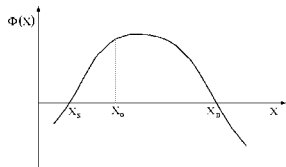
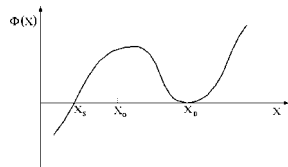
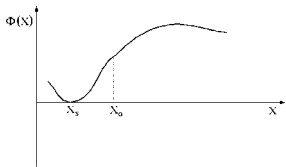
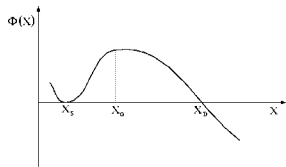
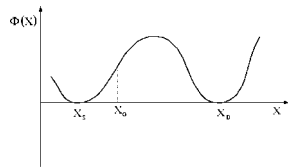
$$x(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} ,$$

chiaramente distinta dalla precedente.

### Applicazione dei teoremi

Per fissare le idee sia  $I = \mathbb{R}$ . La posizione iniziale all'istante  $t = t_0$  del punto materiale sia individuata dall'ascissa  $x_0$ , e la velocità allo stesso istante sia  $v_0 > 0$ . L'energia meccanica totale sarà data dall'espressione  $E = mv_0^2/2 + W(x_0)$ . Si indichi con  $\Omega \subseteq I$  il più grande intervallo contenente  $x_0$  tale che  $\Phi(x) > 0 \forall x \in \Omega$ . L'eventuale minimo di  $\Omega$  verrà indicato con  $x_s$ , mentre  $x_D$  è il valore dell'ascissa corrispondente all'eventuale massimo. Dalla continuità di  $\Phi$  segue immediatamente che  $\Phi(x_s) = \Phi(x_D) = 0$ . Nell'ipotesi che  $\Phi'$

sia continua e localmente lipschitziana su  $I \subseteq \mathbb{R}$ , si possono distinguere i 9 casi indicati nella tabella seguente:

	Nessuno zero a destra	Zero semplice a destra	Zero doppio a destra
Nessuno zero a sinistra	caso NN 	caso NS 	caso ND 
Zero semplice a sinistra	caso SN 	caso SS 	caso SD 
Zero doppio a sinistra	caso DN 	caso DS 	caso DD 

*Caso NN*

- o Moto progressivo.
- o Legge oraria data da:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du ,$$

integrale ordinario  $\forall x(t) \in \mathbb{R}$ .

- o Regione accessibile:  $x \in \mathbb{R}$ .
- o Intervallo  $J(t_0, x_0, v_0)$  di definizione della soluzione massimale:

$$\left( t_0 + \int_{x_0}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du , t_0 + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \right)$$

dove gli integrali impropri  $\int_{x_0}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du$  e  $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du$  possono divergere a  $-\infty$  e  $+\infty$  rispettivamente — secondo l'andamento del potenziale.

*Caso NS*

- Due fasi di moto, una progressiva ed una retrograda.
- Regione accessibile:  $\{x \in \mathbb{R} : x \leq x_D\}$ , con  $x_D$  punto di inversione.
- Legge oraria:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad \forall x(t) \in (-\infty, x_D]$$

per la fase progressiva e:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x_D} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du - \int_{x_D}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad \forall x(t) \in (-\infty, x_D]$$

per quella retrograda.

- Intervallo  $J(t_0, x_0, v_0)$ :

$$\left( t_0 + \int_{x_0}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du, t_0 + \int_{x_0}^{x_D} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du + \int_{-\infty}^{x_D} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \right)$$

dove l'integrale su  $[x_0, x_D]$  è sempre convergente, mentre i due integrali generalizzati restanti possono convergere o meno a seconda del potenziale.

*Caso ND*

- Moto progressivo.
- Regione accessibile:  $\{x \in \mathbb{R} : x < x_D\}$ , con  $x_D$  meta asintotica.
- Legge oraria data da:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad \forall x(t) \in (-\infty, x_D)$$

- Intervallo  $J(t_0, x_0, v_0)$ :

$$\left( t_0 + \int_{x_0}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du, +\infty \right)$$

*Caso SN*

- Due fasi di moto, una retrograda ed una progressiva.
- Regione accessibile  $\{x \in \mathbb{R} : x \geq x_S\}$ , con  $x_S$  punto di inversione.
- Legge oraria data dall'integrale di Weierstrass:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad \forall x(t) \in [x_S, +\infty)$$

per la fase progressiva del moto, e da:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x_S} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du - \int_{x_S}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad \forall x(t) \in [x_S, +\infty)$$

per quella retrograda.

- Intervallo  $J(t_0, x_0, v_0)$  di definizione della soluzione massimale:

$$\left( t_0 - \int_{x_s}^{x_0} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du - \int_{x_s}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du, t_0 + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \right)$$

in cui il solo integrale certamente convergente è quello su  $[x_s, x_0]$ .

### Caso SS

- Moto periodico.
- Regione accessibile  $\{x \in \mathbb{R} : x_s \leq x \leq x_D\}$ , con  $x_s$  ed  $x_D$  punti di inversione del moto.
- Intervallo  $J(t_0, x_0, v_0) = \mathbb{R}$ .
- Legge oraria in forma standard:

$$x(t) = x_s + (x_D - x_s) \sin^2 \left[ \frac{1}{2} Q(t - t_0 + c) \right] \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

dove  $Q$  è una funzione trascendente definita da:

$$z = \int_0^{Q(z)} \frac{(x_D - x_s) |\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)|}{\sqrt{\Phi[x_s + (x_D - x_s) \sin^2(\lambda/2)]}} d\lambda, \quad Q(z) \in \mathbb{R}, \quad (12)$$

sul dominio:

$$\left( - \int_0^{+\infty} \frac{(x_D - x_s) |\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)|}{\sqrt{\Phi[x_s + (x_D - x_s) \sin^2(\lambda/2)]}} d\lambda, + \int_0^{+\infty} \frac{(x_D - x_s) |\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)|}{\sqrt{\Phi[x_s + (x_D - x_s) \sin^2(\lambda/2)]}} d\lambda \right)$$

e con codominio  $\mathbb{R}$  — l'applicazione è ovviamente invertibile —. La costante  $c$  è determinata da  $x_0$ :

$$c = Q^{-1} \left[ 2 \arcsin \left( \frac{x_0 - x_s}{x_D - x_s} \right)^{1/2} \right].$$

### Dimostrazione

La prima fase di moto — nel futuro — è progressiva, con:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad \forall x(t) \in [x_s, x_D].$$

Si ponga  $u = x_s + (x_D - x_s) \sin^2(\lambda/2)$ ,  $\lambda \in [0, \pi]$ , ottenendo:

$$t - t_0 = \int_{\lambda(x_0)}^{\lambda[x(t)]} \frac{x_D - x_s}{\sqrt{\Phi[u(\lambda)]}} \sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2) d\lambda$$

dove  $u(\lambda) = x_s + (x_D - x_s) \sin^2(\lambda/2)$ , definita in  $[0, \pi]$  con codominio  $[x_s, x_D]$ , e  $\lambda(u)$  è la sua funzione inversa. Poichè  $\sin(\lambda/2) \geq 0$  e  $\cos(\lambda/2) \geq 0 \forall \lambda \in [0, \pi]$ , si può anche scrivere:

$$t - t_0 = \int_{\lambda(x_0)}^{\lambda[x(t)]} \frac{x_D - x_s}{\sqrt{\Phi[u(\lambda)]}} |\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)| d\lambda .$$

La seconda fase di moto è retrograda, con legge oraria:

$$t - t_0 = \int_{\lambda(x_0)}^{\pi} \frac{x_D - x_s}{\sqrt{\Phi[u(\lambda)]}} |\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)| d\lambda - \int_{x_D}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad x(t) \in [x_s, x_D] . \quad (13)$$

Nel secondo integrale si pone ancora  $u = x_s + (x_D - x_s) \sin^2(\lambda/2)$ , ma questa volta con  $\lambda \in [\pi, 2\pi]$ . Si ha perciò:

$$\begin{aligned} - \int_{x_D}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du &= - \int_{\pi}^{\lambda[x(t)]} \frac{x_D - x_s}{\sqrt{\Phi[u(\lambda)]}} \sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2) d\lambda = \\ &= \int_{\pi}^{\lambda[x(t)]} \frac{x_D - x_s}{\sqrt{\Phi[u(\lambda)]}} |\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)| d\lambda \end{aligned}$$

e la (13) diventa:

$$t - t_0 = \int_{\lambda(x_0)}^{\lambda[x(t)]} \frac{x_D - x_s}{\sqrt{\Phi[u(\lambda)]}} |\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)| d\lambda , \quad (14)$$

essendo  $\lambda(x_0) \in [0, \pi]$  e  $\lambda[x(t)] \in [\pi, 2\pi]$ . In modo analogo, alla  $n$ -esima fase di moto si potrà scrivere la stessa relazione (14) con  $\lambda(x_0) \in [0, \pi]$  e  $\lambda[x(t)] \in [(n-1)\pi, n\pi]$ , esprimibile anche nella forma:

$$t - t_0 + c = \int_0^{\lambda[x(t)]} \frac{x_D - x_s}{\sqrt{\Phi[u(\lambda)]}} |\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)| d\lambda \quad (15)$$

con  $c$  costante opportuna. Se si introduce la funzione crescente  $Q$  data dalla (12), di codominio  $\mathbb{R}$ , l'equazione (15) si inverte formalmente:

$$\lambda[x(t)] = Q(t - t_0 + c)$$

per cui:

$$x(t) = x_s + (x_D - x_s) \sin^2 \left[ \frac{1}{2} Q(t - t_0 + c) \right] \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

In particolare:

$$x_0 = x_s + (x_D - x_s) \sin^2 \left[ \frac{Q(c)}{2} \right]$$

e quindi:

$$c = Q^{-1} \left[ 2 \arcsin \left( \frac{x_0 - x_S}{x_D - x_S} \right)^{1/2} \right],$$

il che completa la dimostrazione.

#### Caso SD

- Due fasi di moto, una retrograda ed una progressiva.
- Regione accessibile:  $\{x \in \mathbb{R} : x_S \leq x < x_D\}$  con  $x_S$  punto di inversione ed  $x_D$  meta asintotica.
- Legge oraria definita dagli integrali di Weierstrass:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad \forall x(t) \in [x_S, x_D)$$

nella fase progressiva e:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x_S} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du - \int_{x_S}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad \forall x(t) \in [x_S, x_D)$$

in quella retrograda.

- Intervallo  $J(t_0, x_0, v_0) = \mathbb{R}$ .

#### Caso DN

- Moto progressivo.
- Regione accessibile:  $\{x \in \mathbb{R} : x > x_S\}$ , con  $x_S$  meta asintotica.
- Legge oraria:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad \forall x(t) \in (x_S, +\infty).$$

- Intervallo  $J(t_0, x_0, v_0)$  di definizione della soluzione massimale:

$$\left( -\infty, t_0 + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \right),$$

in cui l'integrale generalizzato può essere o meno convergente.

#### Caso DS

- Due fasi di moto, una retrograda ed una progressiva.
- Regione accessibile:  $\{x \in \mathbb{R} : x_S < x \leq x_D\}$ , con meta asintotica in  $x_S$  e punto di inversione in  $x_D$ .
- Legge oraria:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad \forall x(t) \in (x_S, x_D]$$

nella fase progressiva, e:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x_D} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du - \int_{x_D}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad \forall x(t) \in (x_s, x_D]$$

in quella retrograda.

- Intervallo  $J(t_0, x_0, v_0) = \mathbb{R}$ .

*Caso DD*

- Moto progressivo.
- Regione accessibile  $\{x \in \mathbb{R} : x_s < x < x_D\}$ , con  $x_s$  ed  $x_D$  mete asintotiche.
- Legge oraria:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad \forall x(t) \in (x_s, x_D).$$

- Intervallo di definizione della soluzione massimale:  $J(t_0, x_0, v_0) = \mathbb{R}$ .

**N.B.** Si osservi che il caso in cui  $I \subset \mathbb{R}$  si tratta in modo del tutto analogo. L'unica differenza rispetto a quanto esposto consiste nel fatto che gli estremi di integrazione  $-\infty$  e  $+\infty$  devono essere sostituiti con  $\inf(I)$  e  $\sup(I)$  rispettivamente. Si conviene al solito di porre  $\inf(I) = -\infty$  qualora l'intervallo  $I$  risulti inferiormente illimitato, e  $\sup(I) = +\infty$  nell'ipotesi che  $I$  sia superiormente illimitato. La verifica è immediata. Si illustra, a titolo di esempio, il caso seguente.

**Proposizione**

*Sia l'intervallo  $I$  limitato. Siano inoltre  $\inf(I)$  e  $\sup(I)$  tali che:*

$$\lim_{x \rightarrow \inf(I)+} \Phi(x) = \lim_{x \rightarrow \sup(I)-} \Phi(x) = 0.$$

*Si supponga infine che  $\Phi(x) > 0 \forall x \in I$  e che la condizione iniziale sia del tipo  $(x(t_0), \dot{x}(t_0)) = (x_0, v_0)$ , con  $x_0 \in I$  e  $v_0 > 0$ . Allora la soluzione massimale del corrispondente problema di Cauchy è individuata da:*

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad \forall x(t) \in I. \tag{16}$$

*Dimostrazione*

Poichè  $I$  è aperto per ipotesi,  $\inf(I) \notin I$  e  $\sup(I) \notin I$ . Dunque NON è lecito porre:

$$x_s \equiv \inf(I) \quad \text{e} \quad x_D \equiv \sup(I).$$

$\Phi$  non ha zeri nel proprio intervallo di definizione  $I$ . Inoltre, la scelta del segno positivo nella (16) si giustifica in forza dell'ipotesi  $v_0 > 0$ . Ciò premesso, consideriamo il moto nel futuro ( $t > t_0$ ), per  $x(t) \rightarrow \sup(I)-$ . Il moto per  $x(t) \rightarrow \inf(I)+$  si tratta in modo analogo. Si distinguono due casi:

- (a) se  $\int_{x_0}^{\sup(I)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du$  diverge, allora l'intervallo di definizione della soluzione (16) non è superiormente limitato. La soluzione non risulta dunque prolungabile nel futuro;
- (b) se viceversa  $\int_{x_0}^{\sup(I)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du$  converge a  $\bar{t} - t_0$ , con  $\bar{t} \in \mathbb{R}$  opportuno, la soluzione  $x(t)$  è definita su un intervallo superiormente limitato di estremo superiore  $\bar{t}$ .  $\bar{t}$  non appartiene a tale intervallo. Poichè infatti

$$\lim_{t \rightarrow \bar{t}-} x(t) = \sup(I)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \bar{t}-} \dot{x}(t)^2 = \lim_{t \rightarrow \bar{t}-} \Phi[x(t)] = 0,$$

per la continuità della soluzione dell'equazione differenziale dovrebbe aversi:

$$(x(\bar{t}), \dot{x}(\bar{t})) = \lim_{t \rightarrow \bar{t}-} (x(t), \dot{x}(t)) = (\sup(I), 0)$$

e siccome  $(\sup(I), 0) \notin I \times \mathbb{R}$  ciò contraddice la definizione di soluzione. In conclusione  $x(t)$  non è prolungabile nel futuro.

In modo del tutto analogo si prova che  $x(t)$  non può prolungarsi nel passato. Dunque  $x(t)$  data dalla (16) è massimale, il che completa la dimostrazione. Si osserva incidentalmente che l'intervallo di definizione di tale soluzione massimale assume la forma:

$$\left( t_0 + \int_{x_0}^{\inf(I)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du, t_0 + \int_{x_0}^{\sup(I)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \right).$$

## 2. DISCUSSIONE DI WEIERSTRASS PER ALCUNI POTENZIALI NOTEVOLI

L'integrale di Weierstrass si intende scritto nella forma

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{E + U(x)}} dx$$

dove  $m$  è la massa del punto materiale,  $U(x)$  il potenziale ed  $E$  il livello di energia fissato.  $t$  rappresenta l'intervallo di tempo trascorso dall'istante iniziale 0 ed  $x(0)$   $x(t)$  le ascisse del punto materiale agli istanti iniziale e finale rispettivamente — che si considerano comprese entro un'unica regione accessibile, in base al fissato valore dell'energia  $E$  —.

**(1) Potenziale quartico attrattivo**  $U(x) = -k \frac{x^4}{4}$ ,  $k > 0$

Verificare che:

- (i) valori negativi dell'energia  $E$  non sono permessi;
- (ii) per  $E = 0$  si ha un punto di equilibrio del sistema in  $x = 0$ ;
- (iii) per ogni  $E > 0$  fissato si determina un moto oscillatorio con punti di inversione  $x_{\pm} \equiv \pm(4E/k)^{1/4}$ . In tal caso l'integrale di Weierstrass si riduce alla forma standard:

$$t = \mp \left( \frac{m^2}{4kE} \right)^{1/4} \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta}} d\theta$$

per mezzo della sostituzione  $x = (4E/k)^{1/4} \cos \theta$ , con  $x_- \leq x \leq x_+$  e  $\theta \in [0, \pi]$ . Inoltre il periodo di oscillazione è espresso da:

$$T = 4 \left( \frac{m^2}{4kE} \right)^{1/4} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta}} d\theta \equiv 4 \left( \frac{m^2}{4kE} \right)^{1/4} F \left( 1/\sqrt{2} \right),$$

dove, come nel seguito, si è indicato con  $F(z)$  l'integrale ellittico completo di prima specie:

$$F(z) \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - z^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \quad z \in [0, 1).$$

**(2) Potenziale quartico repulsivo**  $U(x) = k \frac{x^4}{4}$ ,  $k > 0$

Si verifichi che:

- (i) tutti i valori dell'energia sono permessi;
- (ii) per  $E > 0$  è definita un'unica regione accessibile e l'integrale di W. si riduce in forma standard:

$$t = \pm \frac{1}{2} \left( \frac{m^2}{kE} \right)^{1/4} \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta}} d\theta$$

per mezzo della trasformazione  $x = (4E/k)^{1/4} \text{tg}(\theta/2)$ , con  $x \in \mathbb{R}$  e  $\theta \in [-\pi, \pi]$ . Il moto non è legato ed il punto materiale raggiunge l'infinito in un intervallo di tempo finito. Se ad esempio  $x(0) = 0$  tale intervallo risulta  $t_{\infty} \equiv (m^2/(kE))^{1/4} F(1/\sqrt{2})$ ;

- (iii) se  $E < 0$  esistono due regioni accessibili distinte, per  $x \geq (4|E|/k)^{1/4}$  ed  $x \leq -(4|E|/k)^{1/4}$ . Con il cambiamento di variabili  $x = (4|E|/k)^{1/4} \text{cotg}\theta$ , essendo  $\theta \in (0, \pi/4)$  nella prima regione e  $\theta \in (3\pi/4, \pi)$  nella seconda, l'integrale di W. diventa:

$$t = \mp \left( \frac{m^2}{k|E|} \right)^{1/4} \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \sin^2 \theta}} d\theta$$

L'ulteriore sostituzione  $\sqrt{2} \sin \theta = \sin \lambda$ ,  $\lambda \in (0, \pi/2)$ , definita per ciascuna delle due regioni accessibili, conduce alla forma standard:

$$t = \mp q \left( \frac{m^2}{4k|E|} \right)^{1/4} \int_{\lambda(0)}^{\lambda(t)} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \lambda}} d\lambda,$$

essendo  $q = +1$  nella prima regione e  $q = -1$  nell'altra. Il punto materiale raggiunge l'infinito in un intervallo di tempo finito;

(iv) per  $E = 0$  il punto  $x = 0$  è un punto di equilibrio del sistema. Esistono inoltre due regioni accessibili —  $x < 0$  ed  $x > 0$  — per le quali  $x = 0$  è meta asintotica.

**(3) Potenziale di Lennard-Jones**  $U(x) = -\frac{a}{x^{12}} + \frac{b}{x^6}$ ,  $a, b > 0$  — **modello di potenziale interatomico**

Verificare, assumendo  $x > 0$ , che:

- (i) l'energia meccanica totale deve soddisfare la condizione  $E \geq -b^2/(4a)$ ;
- (ii) per  $E = -b^2/(4a)$  il sistema non può che trovarsi all'equilibrio in  $x = (2a/b)^{1/6}$ ;
- (iii) se  $-b^2/(4a) < E < 0$  il sistema oscilla fra i punti di inversione:

$$x_{\pm} \equiv \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a|E|}}{2|E|}.$$

In tal caso, con la sostituzione definita da  $x^6 = x_- + (x_+ - x_-) \sin^2 \theta$ ,  $x > 0$ ,  $\theta \in [0, \pi/2]$ , l'integrale di W. si riduce alla forma desingularizzata — integrale di Riemann in senso ordinario:

$$t = \pm \frac{1}{3} \left( \frac{m}{2|E|} \right)^{1/2} \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} [x_- + (x_+ - x_-) \sin^2 \theta]^{\frac{1}{6}} d\theta.$$

Il periodo di oscillazione è pari al doppio del precedente integrale calcolato fra gli estremi 0 e  $\pi/2$ ;

- (iv) per  $E > 0$  il moto non è oscillatorio ed il sistema raggiunge l'infinito, ma non in tempi finiti;
- (v) quale che sia il valore di  $E$ , il sistema non ha accesso alla regione  $x \leq 0$ .

**(4) Potenziale cubico**  $U(x) = -(ax^3 + bx^2 + cx + d)$ ,  $a > 0$  — **attrattivo a  $+\infty$**

Indicati con  $W^-$  ed  $W^+$  rispettivamente i valori del minimo e del massimo relativo dell'energia potenziale  $W(x) = -U(x)$ , verificare che:

- (i) tutti i valori reali dell'energia  $E$  sono ammessi;

- (ii)  $\forall E > W^+$  il sistema raggiunge  $x = -\infty$  in un intervallo di tempo finito, qualunque sia il dato iniziale  $x(0)$ . Lo stesso comportamento ricorre per  $E < W^-$ ;
- (iii) qualora  $W^- < E < W^+$  si determinano due regioni accessibili distinte, l'una inferiormente illimitata, in cui  $\forall x(0)$  il punto materiale raggiunge  $x = -\infty$  in un tempo finito, e l'altra limitata, caratterizzata da moto periodico. L'equazione  $E + U(x)$  ammette tre radici reali distinte,  $x_1 < x_2 < x_3$ . Nel caso periodico l'integrale di W. assume la forma standard:

$$t = \mp \left( \frac{2m}{a(x_3 - x_1)} \right)^{1/2} \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \left[ 1 - \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \sin^2 \theta \right]^{-1/2} d\theta$$

mediante la trasformazione  $x = x_3 - (x_3 - x_2) \sin^2 \theta$ ,  $x \in [x_2, x_3]$ ,  $\theta \in [0, \pi/2]$  (ricordare il teorema fondamentale dell'algebra);

- (iv) per  $E = W^+$  il sistema ammette un punto di equilibrio nel punto  $x_+$  di massimo relativo dell'energia potenziale. Sono inoltre definite due regioni accessibili, una delle quali inferiormente illimitata, per le quali  $x = x_+$  è meta asintotica.
- (v) per  $E = W^-$  si ha equilibrio in  $x = x_-$ , punto di minimo relativo di  $W(x)$ . È inoltre definita una regione accessibile inferiormente illimitata il cui estremo superiore è punto di inversione del moto. In tale regione il punto materiale raggiunge  $x = -\infty$  in un intervallo di tempo finito.

**(5) Potenziale cubico**  $U(x) = -(ax^3 + bx^2 + cx + d)$ ,  $a < 0$  — **repulsivo a  $+\infty$**

Con le stesse notazioni dell'esercizio precedente, si accerti che:

- (i) tutti i valori reali dell'energia  $E$  sono ammessi;
- (ii)  $\forall E > W^+$  il sistema raggiunge  $x = +\infty$  in un intervallo di tempo finito, qualunque sia il dato iniziale  $x(0)$ . Lo stesso comportamento ricorre per  $E < W^-$ ;
- (iii) qualora  $W^- < E < W^+$  si determinano due regioni accessibili distinte, l'una superiormente illimitata, in cui  $\forall x(0)$  il punto materiale raggiunge  $x = +\infty$  in un tempo finito, e l'altra limitata, caratterizzata da moto periodico. L'equazione  $E + U(x)$  ammette tre radici reali distinte,  $x_1 < x_2 < x_3$ . Nel caso periodico l'integrale di W. assume la forma standard:

$$t = \pm \left( \frac{2m}{|a|(x_3 - x_1)} \right)^{1/2} \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \left[ 1 - \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \sin^2 \theta \right]^{-1/2} d\theta$$

mediante la trasformazione  $x = x_1 + (x_2 - x_1) \sin^2 \theta$ ,  $x \in [x_1, x_2]$ ,  $\theta \in [0, \pi/2]$  (si usi ancora il teorema fondamentale dell'algebra);

- (iv) per  $E = W^+$  il sistema ammette un punto di equilibrio in  $x = x_+$ . Sono inoltre definite due regioni accessibili, una delle quali superiormente illimitata, per le quali  $x = x_+$  è meta asintotica.

- (v) per  $E = W^-$  si ha equilibrio nel punto  $x = x_-$ , di minimo relativo di  $W(x)$ . Esiste infine una regione accessibile superiormente illimitata con punto di inversione nell'estremo inferiore, il punto materiale raggiungendo  $x = +\infty$  in un intervallo di tempo finito, come in precedenza.

**(6) Potenziale del tipo  $U(x) = x^s$ , con  $s > 0$  e  $x > 0$**

Dimostrare che:

- (i)  $\forall E < 0$  è definita un'unica regione accessibile, superiormente illimitata, con punto di inversione in  $x_{\text{inv}} = |E|^{1/s}$ . Comunque assegnato sia  $x(0)$ , il moto del sistema è non legato: l'infinito viene raggiunto in un intervallo di tempo finito se e soltanto se  $s > 2$ ;
- (ii) se  $E = 0$  si ha un'unica regione accessibile in  $x > 0$ . Per quest'ultima  $x = 0$  è meta asintotica se  $s \geq 2$ . L'integrale di W. diviene infatti:

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x(0)}^{x(t)} x^{-s/2} dx .$$

Se  $s < 2$  la soluzione tende a  $x = 0$  in un intervallo di tempo finito e non è ulteriormente prolungabile in virtù del teorema di prolungabilità. Si osservi che per un moto retrogrado del punto materiale  $x = 0$  non è punto di inversione, non appartenendo al dominio di definizione dell'equazione differenziale del moto;

- (iii) per  $E > 0$  si determina un'unica regione accessibile in  $x > 0$  e per il moto all'infinito valgono i risultati di cui al capo i). Nel caso retrogrado il punto materiale tende a  $x = 0$  in un intervallo di tempo finito. Come nel precedente capo ii) non si verifica inversione, poiché la soluzione non risulta ulteriormente prolungabile.

**(7) Esempio di potenziale quadratico a tratti:**

$$U(x) = \begin{cases} -a + b\frac{x^2}{2} & \text{per } x \leq 0 \\ -a - b\frac{x^2}{2} & \text{per } x \geq 0 \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}, b > 0.$$

Si verifichi che:

- (i)  $U(x)$  è una funzione derivabile in  $\mathbb{R}$ , con derivata ivi continua;
- (ii) tutti i valori dell'energia  $E$  sono consentiti;
- (iii)  $\forall E \neq a$  è definita una sola regione accessibile, con punto di inversione in  $x_{\text{inv}} = \sqrt{2|E - a|/b}$  per  $E > a$ , in  $x_{\text{inv}} = -\sqrt{2|E - a|/b}$  per  $E < a$ . Se  $E = a$  si ha il punto di equilibrio  $x = 0$ , che è anche meta asintotica per la regione accessibile  $x < 0$ ;

Con  $a = 0$  e  $b = 1$  si calcoli inoltre l'intervallo di tempo occorrente affinché una particella di massa  $m = 1$  ed energia totale  $E = 4$ , situata inizialmente nel punto di ascissa  $x = -3$ ,

transiti per lo stesso punto — risposta:

$$t = \sqrt{2} \int_{-3}^0 \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{2}x^2}} dx + \sqrt{2} \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4 - \frac{1}{2}x^2}} dx = \pi + 2 \operatorname{arcsinh} \left( \frac{3}{2\sqrt{2}} \right)$$

**(8) La discussione di Weierstrass per un potenziale centrale**

In coordinate polari  $(r, \theta)$ , le equazioni del moto per una particella di massa  $m$  in un campo centrale di potenziale  $U(r)$  sono date da:

$$\begin{cases} mr^2 \frac{d\theta}{dt} = K & K = \text{costante} \\ m \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{K^2}{mr^3} - U'(r) = 0 \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R}, r \in (0, +\infty),$$

in cui  $K$  è la componente costante del momento angolare ortogonale al piano del moto, legata alla costante delle aree  $c$  dalla relazione  $K = mc$ . Nel caso  $K = 0$  il problema risulta puramente unidimensionale e si tratta in modo ovvio. Il caso interessante si ha quindi per  $K \neq 0$ .

Si dimostri che:

(i) il moto radiale  $r = r(t)$  può essere ricondotto alla discussione di W.:

$$\frac{m}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = E + U_{\text{eff}}(r) \quad r > 0,$$

con  $U_{\text{eff}}(r) \equiv U(r) - \frac{K^2}{2m} \frac{1}{r^2}$  **potenziale efficace** del sistema;

(ii) la dipendenza della coordinata radiale dall'angolo,  $r = r(\theta)$  è descritta dal problema di W.:

$$\frac{K^2}{2m} \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{K^2}{2m} u^2 - U(1/u) = E ,$$

essendo  $u \equiv 1/r > 0$ . L'integrale di W. si scrive in tal caso:

$$\theta = \pm \frac{|K|}{\sqrt{2m}} \int_{u(0)}^{u(\theta)} \frac{1}{\sqrt{E - \frac{K^2}{2m} u^2 + U(1/u)}} du .$$

Il moto “periodico” in  $\theta$  si interpreta come moto di rivoluzione della massa  $m$  attorno al centro di forza, con la coordinata radiale che varia fra un valore minimo ed un valore massimo, corrispondenti ai punti di inversione. Il “periodo” in  $\theta$  —  $\Delta\theta$  — rappresenta l'angolo spazzato dal raggio congiungente la particella con il centro di forza (raggio vettore) nell'intervallo fra due passaggi successivi della particella alla

stessa distanza, massima o minima, dal centro (per es. perielio o afelio nel caso del campo gravitazionale solare). Le orbite si richiudono su loro stesse se e soltanto se  $\Delta\theta = 2\pi n/m$ , con  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $m \neq 0$  — N.B. Se  $n, m$  sono primi fra loro, l'orbita si richiude su sè stessa esattamente in  $n$  rivoluzioni complete — .

Il punto  $u = 0$  NON è MAI accessibile al sistema, in quanto esso corrisponde ad un valore non definito della coordinata radiale,  $r = +\infty$  (si consideri, per esempio il caso del moto nel campo gravitazionale newtoniano);

(iii) il precedente problema di Weierstrass ammette una integrazione esplicita in termini di funzioni elementari per potenziali  $U(r)$  della forma seguente:

$$U(r) = \frac{a}{r^2} + \frac{b}{r} \quad U(r) = \frac{a}{r^2} + br^2$$

con  $a$  e  $b$  costanti reali arbitrarie, eventualmente nulle.

**(9) Discussione di Weierstrass per moti vincolati ad una curva fissa liscia, in presenza di un potenziale**

Sia data una curva regolare di  $\mathbb{R}^3$ , di parametrizzazione  $\gamma : \xi \in [0, 1] \longrightarrow \gamma(\xi) \in \mathbb{R}^3$ . Su un aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^3$ , tale che  $\gamma([0, 1]) \subseteq \Omega$ , sia inoltre definito un campo di forze conservativo, di potenziale  $U : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ . Sulla curva è vincolata a muoversi, senza attrito, una particella materiale di massa  $m$ . Dall'equazione del moto:

$$m \left[ \frac{d^2 s}{dt^2} \hat{\tau}(s) + \frac{1}{\rho(s)} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \hat{n}(s) \right] = \Psi + \frac{\partial U}{\partial x}(x(s))$$

in cui  $s$  è l'ascissa curvilinea,  $\Psi$  la reazione vincolare, e  $\hat{\tau}(s)$ ,  $\hat{n}(s)$ ,  $\rho(s)$  rispettivamente i versori tangente e normale alla curva e il raggio di curvatura nel punto di ascissa curvilinea  $s$ , dedurre il problema di W.:

$$\frac{m}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 - U(x(s)) = E$$

Equivalentemente, facendo uso della parametrizzazione  $\gamma$  assegnata, si provi che:

$$\frac{m}{2} \left| \frac{d\gamma}{d\xi}(\xi) \right|^2 \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 - \tilde{U}(\xi) = E$$

in cui si è posto  $\tilde{U}(\xi) = U(\gamma(\xi)) \forall \xi \in [0, 1]$ . Si verifichi che l'integrale di W. assume la forma:

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\xi(0)}^{\xi(t)} \left| \frac{d\gamma}{d\xi}(\xi) \right| \frac{1}{\sqrt{E + \tilde{U}(\xi)}} d\xi$$

la cui convergenza dipende ESCLUSIVAMENTE dal termine usuale  $[E + \tilde{U}(\xi)]^{-1/2}$  dell'integrando — per una parametrizzazione regolare è  $\left| \frac{d\gamma}{d\xi}(\xi) \right| > 0 \forall \xi \in [0, 1]$  —.

(Il vantaggio consiste nel fatto di poter applicare la discussione qualitativa di Weierstrass senza dover determinare l'ascissa curvilinea  $s$ , in genere non esprimibile esplicitamente in termini di funzioni elementari).

**Esempio**

Nel piano  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  sono dati il potenziale  $U(x, y) = -gy - ax^2$  e la parabola di parametrizzazione (regolare)  $\gamma(\xi) = (\xi, \xi^2)$ . Assumendo  $a, g > 0$ , si dimostri che l'integrale di W. diviene

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\xi(0)}^{\xi(t)} \sqrt{\frac{1 + 4\xi^3}{E - (a + g)\xi^2}} d\xi$$

e si studi l'andamento qualitativo delle traiettorie per i valori permessi dell'energia  $E$  — si osservi come persino in questo caso relativamente semplice la valutazione esplicita degli integrali in gioco risulti tutt'altro che banale —.

**Indice degli argomenti**

1. Discussione di Weierstrass .....	1
Teorema 1 .....	2
Teorema 2 .....	2
Teorema 3 .....	3
Esempio notevole .....	4
Applicazione dei teoremi .....	5
2. Discussione di Weierstrass per alcuni potenziali notevoli .....	12
Potenziale quartico attrattivo .....	13
Potenziale quartico repulsivo .....	13
Potenziale di Lennard-Jones (modello di potenziale interatomico) .....	14
Potenziale cubito attrattivo a $+\infty$ .....	14
Potenziale cubito repulsivo a $+\infty$ .....	15
Potenziale del tipo $U(x) = x^s$ , con $s > 0$ e $x > 0$ .....	16
Esempio di potenziale quadratico a tratti .....	16
La discussione di Weierstrass per un potenziale centrale .....	17
Discussione di Weierstrass per moti vincolati ad una curva fissa liscia, in presenza di un potenziale .....	18