

Stefano Siboni
Corso di meccanica razionale

Moto di un punto materiale soggetto ad un campo di forze centrali.

Indice

Campo di forze centrali: definizione	pag. 1
Regolarità nell'origine	pag. 1
Il campo di forze centrali è posizionale e conservativo	pag. 2
Equazione del moto per un punto materiale in un campo centrale	pag. 4
Integrali primi. (i) Energia meccanica	pag. 5
Integrali primi. (ii) Momento angolare rispetto al centro del campo	pag. 5
Conseguenze dell'essere \vec{K}_O un integrale primo	pag. 6
Sistema di riferimento $Oxyz$ in cui il piano del moto coincide con il piano coordinato Oxy . Costante delle aree	pag. 7
Descrizione cinematica dei moti piani: velocità e accelerazione istantanee in coordinate polari	pag. 8
Velocità areale	pag. 11
Velocità areale e costante delle aree nei moti centrali. 2^a legge di Keplero	pag. 13
Equazioni del moto nel piano Oxy in coordinate polari	pag. 13
Riduzione a forma normale. Calcolo delle condizioni iniziali per il problema di Cauchy	pag. 14
Equazione del moto radiale. Forze fittizie	pag. 15
Analisi di Weierstrass del moto radiale	pag. 16
Conseguenze dell'essere $c \neq 0$	pag. 17
Formule di Binet	pag. 19
Equazione differenziale delle orbite in coordinate polari	pag. 19
Discussione di Weierstrass applicata all'equazione differenziale delle orbite in coordinate polari	pag. 20
Equazione differenziale delle orbite nel reciproco della distanza radiale	pag. 26
Moto in un campo newtoniano	pag. 27
Campo newtoniano con correzione inversamente proporzionale al cubo della distanza	pag. 31
Campo centrale elastico con correzione inversamente proporzionale al cubo della distanza	pag. 40
Campo centrale elastico	pag. 41

□ **Campo di forze centrali: definizione.**

Un campo di forze si definisce centrale se esiste un punto fisso O dello spazio \mathbb{E}_3 per il quale risulta che:

- (1) il vettore forza in un generico punto $P \in \mathbb{E}_3 \setminus \{O\}$ è diretto secondo la retta congiungente O con P , ovvero secondo il vettore $P - O$;
- (2) l'intensità del vettore forza in P dipende soltanto dalla distanza $|P - O|$.

Dalla definizione segue immediatamente che il più generale campo di forze centrali si scrive nella forma:

$$\vec{F}(P) = f(|P - O|) \frac{P - O}{|P - O|} = \frac{f(|P - O|)}{|P - O|} (P - O) \quad \forall P \in \mathbb{E}_3 \setminus \{O\} ,$$

essendo f una generica funzione di \mathbb{R}^+ a valori in \mathbb{R} , di conveniente regolarità — tipicamente almeno di classe C^1 . Il punto O viene detto **centro** del campo di forze centrali.

□ **Regolarità nell'origine.**

Nella precedente definizione nulla si è stabilito in relazione al valore assunto dal campo centrale nel centro O . Molti campi centrali risultano **singolari** nel centro, dove quindi il campo di forze non ha un valore definito — esempi: campo gravitazionale newtoniano generato da un punto materiale, campo elettrostatico prodotto da una carica elettrica puntiforme, secondo la legge di Coulomb. Con questo si intende che il campo non è prolungabile con continuità in O .

Viceversa, esistono campi centrali per i quali $\vec{F}(P)$ ammette un **prolungamento continuo in O** — prolungamento che è necessariamente unico per definizione. Un esempio notevole è costituito dal campo delle sollecitazioni elastiche che una molla ideale, connessa per un estremo al punto fisso O , esercita su un punto materiale P libero di muoversi nello spazio \mathbb{E}_3 ed al quale sia collegato il secondo estremo della molla.

Si verifica facilmente che nel caso di un campo centrale prolungabile con continuità nel proprio centro O deve aversi:

$$\vec{F}(O) = 0 .$$

Per il teorema di caratterizzazione della continuità in O mediante successioni, deve risultare infatti che considerata una qualsiasi successione di punti $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $P_n \in \mathbb{E} \setminus \{O\} \forall n \in \mathbb{N}$, convergente ad O :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = O ,$$

la successione delle immagini attraverso \vec{F} deve a propria volta convergere al valore del campo \vec{F} in O :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{F}(P_n) = \vec{F}(O) .$$

Indicato con $-P$ il punto simmetrico rispetto ad O di un generico punto P :

$$-P := O - (P - O) \quad \forall P \in \mathbb{E}_3 ,$$

l'avarsi $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = O$ implica che allo stesso modo $\lim_{n \rightarrow \infty} -P_n = O$, per cui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{F}(-P_n) = \vec{F}(O) .$$

D'altra parte, dalla definizione di campo centrale segue immediatamente che $\vec{F}(-P) = -\vec{F}(P) \forall P \in \mathbb{E}_3 \setminus \{O\}$ e che quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{F}(-P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\vec{F}(P_n) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{F}(P_n) = -\vec{F}(O) .$$

Dal teorema di unicità del limite si deduce pertanto che

$$\vec{F}(O) = -\vec{F}(O)$$

ossia, equivalentemente, che

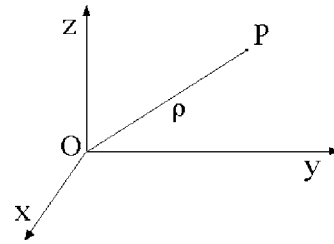
$$\vec{F}(O) = 0 .$$

□ Il campo di forze centrali è posizionale e conservativo.

La natura posizionale del campo di forze centrali è evidente dalla definizione. Si tratta di verificare che il campo ammette sempre un potenziale, almeno nell'ipotesi che f sia una funzione continua reale di \mathbb{R}^+ .

Indicate con (x, y, z) le coordinate cartesiane di un generico punto $P \in \mathbb{E}_3$ rispetto ad una terna ortogonale $Oxyz$, la distanza di P dall'origine O è data dall'espressione:

$$\rho = |P - O| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



e le componenti cartesiane del campo di forze assumono la forma:

$$F_x = f(\rho) \frac{x}{\rho} \quad F_y = f(\rho) \frac{y}{\rho} \quad F_z = f(\rho) \frac{z}{\rho} .$$

Conviene analizzare il problema dell'esistenza del potenziale distinguendo i casi in cui il centro O del campo sia o non sia un punto singolare.

(i) Campo \vec{F} continuo nel centro O

Se \vec{F} è continua in $P = O$ un potenziale è dato da:

$$U(x, y, z) = \int_0^\rho f(\rho) d\rho .$$

In $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ risulta infatti, per il teorema di derivazione delle funzioni composte:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z) = f(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = f(\rho) \frac{x}{\rho} = F_x(x, y, z)$$

e analoghe relazioni valgono per le altre componenti F_y e F_z . Nel centro $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ la continuità di f ed il teorema della media integrale implicano invece, per un $\theta_x \in (0, 1)$ opportuno:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x}(0, 0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{U(x, 0, 0) - U(0, 0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{U(x, 0, 0)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^{|x|} f(\rho) d\rho = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} |x| f(\theta_x |x|) . \end{aligned}$$

Poiché:

$$\theta_x |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

si ha che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(\theta_x |x|) = f(0) = 0$$

ed essendo poi $x/|x|$ limitata, si conclude che esiste il:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} f(\theta_x |x|) = 0$$

per cui:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(0, 0, 0) = 0 = F_x(0, 0, 0)$$

mentre analoghe espressioni valgono per $F_y(0, 0, 0)$ e $F_z(0, 0, 0)$.

(ii) Campo singolare nel centro O

Qualora \vec{F} sia singolare in $P = O$, un potenziale definito $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ si avrà per:

$$U(x, y, z) = \int_{\rho_0}^{\rho} f(\rho) d\rho , \quad \rho_0 > 0 \text{ costante} ,$$

risultando infatti, come prima:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z) &= f(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = f(\rho) \frac{x}{\rho} = F_x(x, y, z) \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x, y, z) &= f(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} = f(\rho) \frac{y}{\rho} = F_y(x, y, z) \\ \frac{\partial U}{\partial z}(x, y, z) &= f(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} = f(\rho) \frac{z}{\rho} = F_z(x, y, z) \end{aligned} \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} .$$

□ **Equazione del moto per un punto materiale in un campo centrale.**

L'equazione del moto per un punto materiale di massa m nel campo centrale $\vec{F}(P)$ si scrive:

$$m\ddot{P} = \vec{F}(P) \quad (C.1)$$

e rispetto alla terna cartesiana ortogonale $Oxyz$ si riduce all'equivalente sistema di tre equazioni scalari:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = f(\rho) \frac{x}{\rho} \\ m\ddot{y} = f(\rho) \frac{y}{\rho} \\ m\ddot{z} = f(\rho) \frac{z}{\rho} \end{cases} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

che è a sua volta riconducibile alla forma normale del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = v \\ \dot{z} = w \\ \dot{u} = \frac{1}{m} f(\rho) \frac{x}{\rho} \\ \dot{v} = \frac{1}{m} f(\rho) \frac{y}{\rho} \\ \dot{w} = \frac{1}{m} f(\rho) \frac{z}{\rho} \end{cases} \quad (C.2)$$

L'equazione differenziale ottenuta è definita per:

$$(t, x, y, z, u, v, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \times \mathbb{R}^3$$

se il centro O costituisce un punto singolare del campo di forze, mentre si avrà semplicemente:

$$(t, x, y, z, u, v, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

qualora il campo non presenti alcuna singolarità. In ogni caso il dominio di definizione delle equazioni del moto è un sottoinsieme aperto in \mathbb{R}^7 . Il problema di Cauchy associato al sistema (C.2) si ottiene assegnando le condizioni iniziali:

$$(t, x, y, z, u, v, w) = (t_0, x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \times \mathbb{R}^3$$

ovvero in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ secondo che il centro sia o meno un punto singolare. Nella discussione seguente si assumerà che le funzioni a secondo membro in (C.2) siano sufficientemente regolari da assicurare esistenza ed unicità della soluzione massimale per qualsiasi problema di Cauchy con dato iniziale distinto dal centro del campo. La condizione risulta certamente verificata se $f(\rho)$ è una funzione C^1 di $\rho > 0$. Si ricorda che, essendo aperto il dominio di definizione dell'equazione differenziale, la soluzione massimale di ogni problema di Cauchy risulta sempre definita su un intervallo **aperto** I della variabile indipendente t .

□ **Integrali primi.**

Il punto materiale in moto in un campo centrale ammette due integrali primi notevoli, l'energia meccanica ed il momento angolare calcolato rispetto al centro del campo di forze.

(i) **Energia meccanica.**

Posto per brevità $P - O = \vec{x} = x \hat{e}_1 + y \hat{e}_2 + z \hat{e}_3$ e indicato con ∇ il gradiente rispetto alle coordinate cartesiane (x, y, z) , le equazioni del moto del sistema si possono scrivere nella forma:

$$m\ddot{\vec{x}} = \frac{\partial U}{\partial \vec{x}}(\vec{x}) = \nabla U(\vec{x})$$

e moltiplicando scalarmente membro a membro per $\dot{\vec{x}}$ porgono:

$$m\ddot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}} - \nabla U(\vec{x}) \cdot \dot{\vec{x}} = 0$$

ossia:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2} |\dot{\vec{x}}|^2 - U(\vec{x}) \right] = 0 .$$

Ciò implica che lungo qualsiasi soluzione delle equazioni del moto (C.2) la funzione C^2 :

$$\frac{m}{2} |\dot{\vec{x}}|^2 - U(\vec{x}) = \frac{m}{2} |\dot{\vec{x}}|^2 + W(\vec{x})$$

si mantiene costante e costituisce dunque un integrale primo del sistema. La funzione $W(\vec{x}) = -U(\vec{x})$ è detta **energia potenziale** del sistema.

(ii) **Momento angolare rispetto al centro del campo.**

Il momento angolare del punto materiale P rispetto al polo O è dato dalla relazione:

$$\vec{K}_O = (P - O) \wedge m\dot{P} . \quad (C.3)$$

Considerato (C.3) lungo una qualsiasi soluzione delle equazioni del moto, la sua derivata rispetto al tempo diventa:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \dot{P} \wedge m\dot{P} + (P - O) \wedge m\ddot{P} = (P - O) \wedge m\ddot{P}$$

e nella terna inerziale con origine in O risulta pertanto:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = (P - O) \wedge \vec{F}(P) = (P - O) \wedge f(|P - O|) \frac{P - O}{|P - O|} = 0 .$$

Si è così provato che anche \vec{K}_O rappresenta un integrale primo per il sistema.

□ **Conseguenze dell'essere \vec{K}_O un integrale primo.**

Si distinguono i casi in cui l'integrale \vec{K}_O è nullo oppure diverso da zero.

- (i) **se $\vec{K}_O = 0$** , il moto del punto materiale è **rettilineo**. In tal caso infatti, all'istante iniziale t_0 il moto $P(t)$ deve soddisfare la condizione $(P(t_0) - O) \wedge \dot{P}(t_0) = 0$, che equivale a richiedere il parallelismo dei vettori $P(t_0) - O$ e $\dot{P}(t_0)$. Una soluzione massimale del problema di Cauchy può allora essere costruita:
- lungo la retta $P(t_0) - O$ se $P(t_0) \neq 0$;
 - lungo la retta individuata da O e $\dot{P}(t_0)$ qualora sia $P(t_0) = 0$ e $\dot{P}(t_0) \neq 0$;
 - come soluzione statica $P(t) = O \forall t \in \mathbb{R}$, nell'ipotesi che $P(t_0) = 0$ e $\dot{P}(t_0) = 0$.

Si intende che la condizione $P(t_0) = 0$ può ricorrere se e soltanto se il campo di forze non presenta singolarità nel proprio centro O . In caso contrario $P(t_0) \neq 0$ e il moto rettilineo è in realtà confinato entro la semiretta uscente dal centro e contenente $P(t_0)$. In ogni caso, **il moto che ne risulta è di tipo unidimensionale**, ed il suo andamento qualitativo può essere analizzato per mezzo della usuale discussione di Weierstrass (in \mathbb{R}^+ o in \mathbb{R} , secondo che il centro sia singolare o meno).

In effetti, se almeno uno fra $P(t_0)$ ed $\dot{P}(t_0)$ è diverso da zero, allora è definito il versore \hat{n} parallelo ad entrambi i vettori $P(t_0) - O$ e $\dot{P}(t_0)$. Si può cercare pertanto una soluzione della (C.1) della forma:

$$P(t) - O = \xi(t)\hat{n}, \quad \xi(t) \in \mathbb{R},$$

con $\xi(t)$ funzione reale di variabile reale. Si hanno le relazioni:

$$\ddot{\xi}\hat{n} = \frac{1}{m}\vec{F}(\xi\hat{n}) \quad P(t_0) - O = \xi(t_0)\hat{n} \quad \dot{P}(t_0) = \dot{\xi}(t_0)\hat{n}$$

e, essendo $\vec{F}(\xi\hat{n})$ parallelo a \hat{n} , il problema di Cauchy equivalente:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = \frac{1}{m}\vec{F}(\xi\hat{n}) \cdot \hat{n} \\ \xi(t_0) = [P(t_0) - O] \cdot \hat{n} \\ \dot{\xi}(t_0) = \dot{P}(t_0) \cdot \hat{n} \end{cases}$$

che ammette una ed una sola soluzione massimale. Dunque $P(t) - O = \xi(t)\hat{n}$ è soluzione massimale di (C.1). Per unicità quella deve essere **la** soluzione massimale di (C.1). Il moto avviene così lungo la retta passante per O e di direzione \hat{n} .

- (ii) **per $\vec{K}_O \neq 0$** il moto del punto materiale avviene in un piano contenente il centro O e ortogonale a \vec{K}_O . Lungo il moto $P(t)$, definito sull'intervallo aperto J di t , vale infatti:

$$(P - O) \cdot \vec{K}_O = (P - O) \cdot (P - O) \wedge m\dot{P} = 0$$

e quindi:

$$(P - O) \cdot \vec{K}_O = 0$$

che scritta in coordinate cartesiane ortogonale rappresenta precisamente l'equazione di un piano passante per l'origine ed ortogonale al vettore \vec{K}_O . Si osservi che l'orbita

$$\{P(t), t \in J\}$$

non contiene il centro del campo; se ciò avvenisse, ad un qualche istante $t^* \in J$ dovrebbe risultare $P(t^*) = O$ e dunque

$$\vec{K}_O = (P(t_0) - O) \wedge m\dot{P}(t_0) = (P(t^*) - O) \wedge m\dot{P}(t^*) = 0 \wedge m\dot{P}(t^*) = 0$$

contro l'ipotesi. **È questo il caso più interessante di moto nel campo centrale.**

Di qui in poi si assumerà sempre soddisfatta la condizione $\vec{K}_O \neq 0$.

□ **Sistema di riferimento $Oxyz$ in cui il piano del moto coincide con il piano coordinato Oxy . Costante delle aree.**

Assegnate che siano le condizioni iniziali in modo che risulti $\vec{K}_O \neq 0$, il piano del moto $P(t)$ è determinato univocamente. Appare quindi del tutto ragionevole, al fine di semplificare l'analisi, introdurre la terna di riferimento cartesiana ortogonale destra $Oxyz$ in modo che il piano coordinato Oxy venga a coincidere con il piano del moto. Tale scelta comporta che il vettore momento angolare \vec{K}_O sia diretto secondo l'asse Oz :

$$\vec{K}_O = mc\hat{e}_3 \tag{C.4}$$

essendo $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ la cosiddetta **costante delle aree**, avente le dimensioni di un'area per unità di tempo. Della relazione (C.4) si può fornire una espressione cartesiana esplicita ricordando che, per la scelta della terna di riferimento, lungo il moto deve aversi:

$$P - O = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 \quad \dot{P} = \dot{x}\hat{e}_1 + \dot{y}\hat{e}_2$$

cosicché:

$$\vec{K}_O = (x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2) \wedge m(\dot{x}\hat{e}_1 + \dot{y}\hat{e}_2) = m(xy - y\dot{x})$$

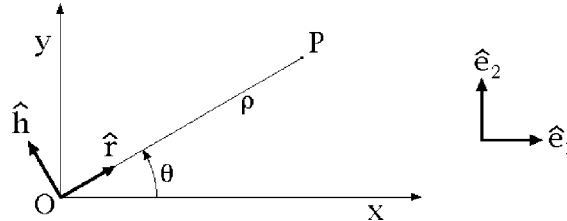
e pertanto:

$$c = xy - y\dot{x} . \tag{C.5}$$

In questa terna di coordinate il moto del punto materiale, soluzione massimale di un assegnato problema di Cauchy relativo alle equazioni del moto (C.2), è descritto da funzioni $x(t)$, $y(t)$ **almeno di classe C^2** su un intervallo aperto I di t , oltre che da $z(t) = 0 \forall t \in I$. Vale inoltre $(x(t), y(t)) \neq (0, 0) \forall t \in I$, mentre $c \neq 0$.

□ **Descrizione cinematica dei moti piani: velocità e accelerazione istantanee in coordinate polari.**

Nel piano Oxy della terna di riferimento cartesiana ortogonale scelta come descritto al punto precedente, si introduce il sistema di coordinate polari piane di polo O , coordinata radiale ρ e anomalia θ misurata fra il semiasse Ox positivo e il raggio vettore $P - O$, positivamente orientata rispetto all'asse Oz — cioè crescente per rotazioni antiorarie, come rappresentato in figura.



Poiché si suppone che $\vec{K}_O \neq 0$ e che di conseguenza le traiettorie del sistema non passino per l'origine, è sufficiente considerare valori strettamente positivi $\rho > 0$ della coordinata radiale, mentre θ può assumere qualsiasi valore reale. Dato un generico punto $P \neq O$ nel piano Oxy , il corrispondente **versore radiale** è parallelo e concorde a $P - O$ e si scrive nella forma:

$$\hat{r} = \cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2$$

in termini dei versori \hat{e}_1 ed \hat{e}_2 della terna cartesiana. La derivata in θ del versore radiale definisce un secondo versore, ortogonale al precedente, detto **versore trasverso**:

$$\hat{h} = -\sin \theta \hat{e}_1 + \cos \theta \hat{e}_2 .$$

La relazione fra le coordinate polari (ρ, θ) e quelle cartesiane (x, y) di P è data da:

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta \tag{C.6}$$

per cui il moto regolare $P(t)$, descritto in coordinate cartesiane dalle funzioni C^2 $x(t)$ e $y(t)$, in coordinate polari si rappresenterà per mezzo di opportune funzioni $\theta(t)$, $\rho(t)$:

$$x(t) = \rho(t) \cos \theta(t) \quad y(t) = \rho(t) \sin \theta(t) \quad t \in I .$$

Moto regolare in coordinate polari

Ci si può convincere facilmente che le funzioni $t \in I \rightarrow \theta(t) \in \mathbb{R}$ e $t \in I \rightarrow \rho \in \mathbb{R}^+$ sono a loro volta di classe C^2 , o comunque della stessa regolarità di $x(t)$, $y(t)$. A questo proposito si osservi che l'applicazione:

$$\varphi : (\theta, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow (x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

definita dalle (C.6) **non** costituisce un diffeomorfismo C^2 di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Benché suriettiva e di classe C^∞ , infatti, l'applicazione φ non è iniettiva in quanto:

$$\varphi(\theta + 2\pi n, \rho) = \varphi(\theta, \rho) \quad \forall (\theta, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{Z} .$$

Nondimeno, comunque si fissino $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, tali che $\theta_1 < \theta_2$ e $\theta_2 - \theta_1 < 2\pi$, la restrizione alla striscia $\Sigma := \{(\theta, \rho) : \theta_1 < \theta < \theta_2, \rho > 0\}$:

$$\varphi_{\theta_1\theta_2} : (\theta, \rho) \in \Sigma := (\theta_1, \theta_2) \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow (x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

gode delle seguenti proprietà:

- (i) ha come codominio il settore aperto Ω compreso fra le semirette uscenti dall'origine O e di equazione $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2$ — vedi figura;
- (ii) è C^∞ al pari di φ ;
- (iii) risulta iniettiva da Σ in Ω ;
- (iv) il suo determinante jacobiano vale infine

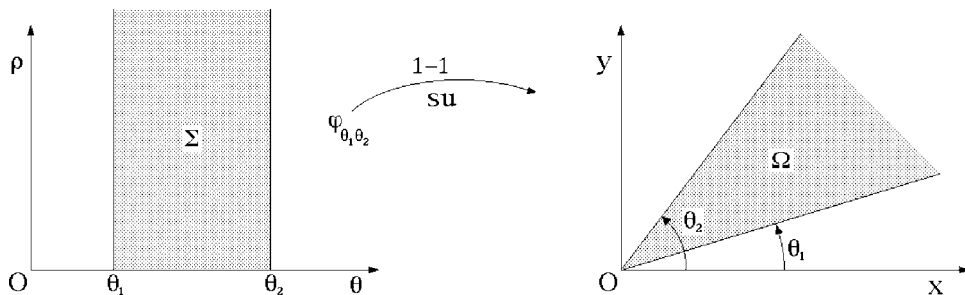
$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \rho)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \rho} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho \sin \theta & \cos \theta \\ \rho \cos \theta & \sin \theta \end{vmatrix} = -\rho$$

e si mantiene quindi diverso da zero per ogni $(\theta, \rho) \in \Sigma$.

Dal teorema delle funzioni implicite segue che la funzione inversa:

$$\varphi_{\theta_1\theta_2}^{-1} : \Omega \longrightarrow \Sigma$$

è di classe C^∞ sul suo intero dominio di definizione Σ . L'applicazione $\varphi_{\theta_1\theta_2}$ costituisce perciò un diffeomorfismo C^∞ di Σ su Ω .



Si consideri ora una sequenza bi-infinita di intervalli aperti $(\theta_{1,i}, \theta_{2,i})$, $i \in \mathbb{Z}$, tali che:

$$0 < \theta_{2,i} - \theta_{1,i} < 2\pi \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

$$\theta_{1,i} < \theta_{1,i+1} < \theta_{2,i} < \theta_{2,i+1} \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

$$\bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} (\theta_{1,i}, \theta_{2,i}) = \mathbb{R}.$$

I diffeomorfismi $\varphi_{\theta_{1,i}, \theta_{2,i}}$ definiscono un atlante per il dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ del piano Oxy , che si configura quindi come una 2-varietà C^∞ di \mathbb{R}^2 ; essi consentono di convertire il moto

regolare descritto da $x(t)$, $y(t)$ in un moto regolare in coordinate polari $\theta(t)$, $\rho(t)$, come richiesto.

Allo stesso risultato si può pervenire anche facendo uso dell'identità complessa:

$$\rho(t)e^{i\theta(t)} = x(t) + iy(t)$$

la quale porge:

$$\rho(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \quad (C.7)$$

e:

$$\theta(t) = i \ln \rho(t) - i \ln [x(t) + iy(t)] \quad (C.8)$$

con:

$$\dot{\theta}(t) = [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)] \rho(t)^{-2} .$$

Velocità e accelerazione

Nello studio del moto di un punto in un campo centrale è conveniente determinare l'espressione di velocità ed accelerazione istantanee in coordinate polari, ovvero delle loro proiezioni lungo i predetti versori \hat{r} e \hat{h} . Il vettore posizione di un generico $P \in Oxy \setminus \{O\}$ si scrive:

$$P - O = \rho \hat{r}$$

e dato un moto regolare definito da opportune funzioni $\rho(t) > 0$ e $\theta(t)$, di classe C^2 , la velocità istantanea di P al tempo generico t risulterà:

$$\dot{P} = \dot{\rho} \hat{r} + \rho \frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\rho} \hat{r} + \rho \dot{\theta} \frac{d\hat{r}}{d\theta} = \dot{\rho} \hat{r} + \rho \dot{\theta} \hat{h}$$

dove:

- $\dot{\rho}$ è la **velocità radiale** del punto P ,
- $\rho \dot{\theta}$ si dice **velocità trasversa** di P ed infine
- $\dot{\theta}$ rappresenta la **velocità angolare scalare di trascinamento** dello stesso P , identificabile con la velocità angolare scalare di una qualsiasi terna cartesiana di origine O rispetto alla quale il moto di P risulti puramente radiale — ovvero l'anomalia θ costante nel tempo.

Una ulteriore derivazione rispetto al tempo conduce all'espressione per l'accelerazione:

$$\begin{aligned} \ddot{P} &= \ddot{\rho} \hat{r} + \dot{\rho} \dot{\theta} \frac{d\hat{r}}{d\theta} + \frac{d}{dt}(\rho \dot{\theta}) \hat{h} + \rho \dot{\theta}^2 \frac{d\hat{h}}{d\theta} = \ddot{\rho} \hat{r} + \dot{\rho} \dot{\theta} \frac{d\hat{r}}{d\theta} + \frac{d}{dt}(\rho \dot{\theta}) \hat{h} + \rho \dot{\theta}^2 (-\hat{r}) = \\ &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \hat{r} + \left[\dot{\rho} \dot{\theta} + \frac{d}{dt}(\rho \dot{\theta}) \right] \hat{h} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \hat{r} + \frac{1}{\rho} \left[\dot{\rho} \rho \dot{\theta} + \rho \frac{d}{dt}(\rho \dot{\theta}) \right] \hat{h} = \\ &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \hat{r} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\theta}) \hat{h} \end{aligned}$$

in cui si distinguono un termine di accelerazione radiale:

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 \tag{C.9}$$

e uno di accelerazione trasversa:

$$a_\theta = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) . \tag{C.10}$$

□ Velocità areale.

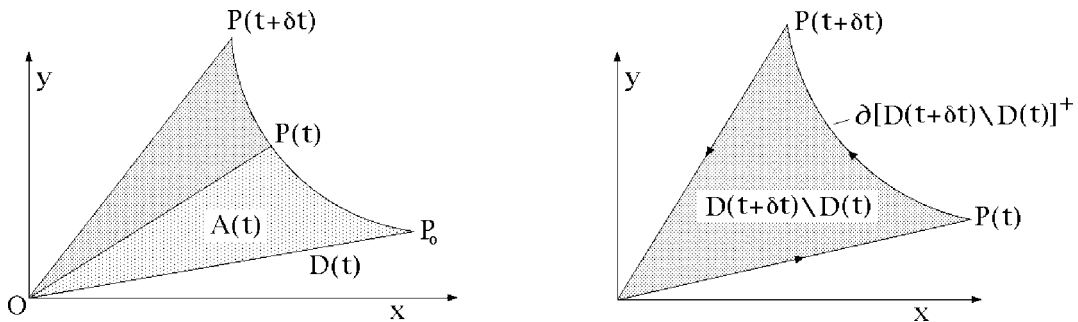
Dato un moto regolare $P(t)$, al trascorrere del tempo il raggio vettore $P(t) - O$ spazza una regione del piano Oxy . Se si indica con $P_0 = P(t_0)$ la posizione del punto P all'istante iniziale t_0 , l'area $A(t)$ della regione $D(t)$ compresa fra i raggi vettori $P_0 - O$ e $P(t) - O$ e la traiettoria percorsa da P dall'istante t_0 all'istante t è data dall'integrale di superficie:

$$A(t) = \int_{D(t)} 1 dxdy = \frac{1}{2} \int_{D(t)} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -y & x \end{vmatrix} dxdy$$

che in forza del teorema di Gauss-Green si riscrive in termini dell'equivalente integrale curvilineo:

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_{\partial D(t)^+} (-y dx + x dy)$$

lungo la frontiera $\partial D(t)^+$ di $D(t)$, orientata positivamente — secondo l'usuale convenzione di Stokes.



L'area spazzata dal raggio vettore fra gli istanti t e $t + \delta t$ si potrà allora esprimere come:

$$A(t + \delta t) - A(t) = \int_{D(t+\delta t) \setminus D(t)} 1 dxdy = \frac{1}{2} \int_{\partial[D(t+\delta t) \setminus D(t)]^+} (-y dx + x dy) .$$

Basterà poi porre:

$$P(t) - O = x \hat{e}_1 + y \hat{e}_2 \quad P(t + \delta t) - O = (x + \delta x) \hat{e}_1 + (y + \delta y) \hat{e}_2$$

e introdurre le parametrizzazioni dei raggi vettori $P(t) - O$ e $P(t + \delta t) - O$:

$$\begin{aligned} P(s) - O &= sx \hat{e}_1 + sy \hat{e}_2 \\ P(s) - O &= (1-s)(x + \delta x) \hat{e}_1 + (1-s)(y + \delta y) \hat{e}_2, \quad s \in [0, 1], \end{aligned}$$

per ottenere:

$$\begin{aligned} A(t + \delta t) - A(t) &= \frac{1}{2} \int_0^1 (-yxs \, ds + xys \, ds) + \frac{1}{2} \int_t^{t+\delta t} [-y(t)\dot{x}(t) \, dt + x(t)\dot{y}(t) \, dt] + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^1 [(y + \delta y)(x + \delta x)(1-s) \, ds - (x + \delta x)(y + \delta y)(1-s) \, ds] = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 0 \, ds + \frac{1}{2} \int_t^{t+\delta t} [-y(t)\dot{x}(t) + x(t)\dot{y}(t)] \, dt + \frac{1}{2} \int_0^1 0 \, ds = \\ &= \frac{1}{2} \int_t^{t+\delta t} [-y(t)\dot{x}(t) + x(t)\dot{y}(t)] \, dt. \end{aligned}$$

La supposta regolarità di $P(t)$ assicura, per quest'ultimo integrale, l'esistenza del limite:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{A(t + \delta t) - A(t)}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \frac{1}{2} \int_t^{t+\delta t} [-y(t)\dot{x}(t) + x(t)\dot{y}(t)] \, dt = \frac{1}{2} [x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)]$$

come conseguenza della continuità in t dell'integrando e del teorema della media:

$$\int_t^{t+\delta t} [-y(t)\dot{x}(t) + x(t)\dot{y}(t)] \, dt = \delta t [-y(t + \alpha \delta t)\dot{x}(t + \alpha \delta t) + x(t + \alpha \delta t)\dot{y}(t + \alpha \delta t)], \quad \alpha \in (0, 1).$$

La **velocità areale** del punto P all'istante t è quindi data dall'equazione:

$$\frac{dA}{dt}(t) = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) \quad (C.11)$$

e si interpreta come l'area spazzata nell'unità di tempo dal raggio vettore $P(t) - O$, valutata all'istante t . La stessa relazione può essere riespressa in coordinate polari, ricordando che:

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta$$

e che di conseguenza, avendo le funzioni $\rho(t)$, $\theta(t)$ la stessa regolarità di $x(t)$, $y(t)$:

$$\dot{x} = \dot{\rho} \cos \theta - \rho \sin \theta \dot{\theta} \quad \dot{y} = \dot{\rho} \sin \theta + \rho \cos \theta \dot{\theta}$$

per cui risulta:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} [\rho \dot{\rho} \sin \theta \cos \theta + \rho^2 \cos^2 \theta \dot{\theta} - \rho \dot{\rho} \sin \theta \cos \theta + \rho^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}] = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\theta}.$$

□ **Velocità areale e costante delle aree nei moti centrali. 2^a legge di Keplero.**

Nel piano del moto di un punto materiale in un campo centrale — con $\vec{K}_O \neq 0$ — la costante delle aree definita dalla (C.5) è un integrale primo. Dal confronto con la (C.11) si deduce quindi che in un moto centrale la velocità areale è costante:

$$\frac{dA}{dt}(t) = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta} = \frac{c}{2}.$$

La velocità areale coincide con la metà della costante delle aree, che in coordinate polari assume la forma:

$$c = \rho^2\dot{\theta}.$$

Le funzioni \dot{A} e c sono integrali primi — linearmente dipendenti — delle equazioni del moto ed implicano la seconda legge di Keplero, o legge delle aree uguali:

“Durante il moto di un punto materiale in un campo centrale, il raggio vettore congiungente la posizione del punto con il centro del campo spazza aree uguali in tempi uguali.”

Si osservi come, nonostante questo aspetto non venga di solito sottolineato in modo esplicito, la legge presupponga il carattere **planare** del moto, già dimostrato in precedenza ed in tutta generalità.

□ **Equazioni del moto nel piano Oxy in coordinate polari.**

Le equazioni del moto, dedotte dalla seconda legge della dinamica nell'ipotesi che il sistema di riferimento $Oxyz$ sia inerziale, possono essere proiettate lungo i versori radiale e trasverso:

$$\begin{cases} ma_\rho = f(\rho) \\ ma_\theta = 0 \end{cases}$$

e con la sostituzione delle espressioni (C.9) e (C.10) si riducono a:

$$\begin{cases} m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = f(\rho) \\ m\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) = 0. \end{cases} \quad (C.12)$$

Dalla seconda equazione si ritrova la costante delle aree $\rho^2\dot{\theta} = c$. Si ricordi che $c \neq 0$ per ipotesi.

□ **Riduzione a forma normale. Calcolo delle condizioni iniziali per il problema di Cauchy.**

Le equazioni del moto (C.12) si possono scrivere in una forma più esplicita eseguendo la derivata in t :

$$\begin{cases} m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = f(\rho) \\ m(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) = 0 \end{cases} \quad (C.13)$$

e poiché per l'ipotesi di $\vec{K}_O \neq 0$ si ha sempre $\rho > 0$, esse equivalgono al sistema del primo ordine in forma normale:

$$\begin{cases} \dot{u}_\rho = \frac{1}{m}f(\rho) + \rho u_\theta^2 \\ \dot{u}_\theta = -\frac{2}{\rho}u_\rho u_\theta \\ \dot{\rho} = u_\rho \\ \dot{\theta} = u_\theta \end{cases}$$

in cui si è ovviamente posto $u_\rho = \dot{\rho}$ e $u_\theta = \dot{\theta}$. Le condizioni iniziali in coordinate polari:

$$\rho(t_0) = \rho_0 \quad \theta(t_0) = \theta_0 \quad u_\rho(t_0) = u_{\rho 0} \quad u_\theta(t_0) = u_{\theta 0}$$

si possono ricavare facilmente da quelle assegnate in coordinate cartesiane:

$$x(t_0) = x_0 \quad y(t_0) = y_0 \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0 \ .$$

Il valore di ρ_0 coincide con la distanza del punto materiale dal centro O del campo all'istante iniziale t_0 e viene quindi calcolata per mezzo della (C.7):

$$\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \ .$$

La coordinata angolare allo stesso istante si ottiene utilizzando uno dei diffeomorfismi $\varphi_{\theta_{1,i}\theta_{2,i}}^{-1}$, scelto in modo che (x_0, y_0) appartenga al suo dominio di definizione, oppure direttamente per mezzo della (C.8):

$$\theta_0 = i \ln \rho_0 - i \ln [x_0 + iy_0] \ .$$

Quanto a $u_{\rho 0}$ e $u_{\theta 0}$, la prima è semplicemente la velocità radiale di P all'istante t_0 e viene quindi determinata per mezzo della relazione:

$$u_{\rho 0} = \dot{P} \cdot \frac{P - O}{|P - O|} \Big|_{t=t_0} = (\dot{x}_0 \hat{e}_1 + \dot{y}_0 \hat{e}_2) \cdot \frac{x_0 \hat{e}_1 + y_0 \hat{e}_2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} (\dot{x}_0 x_0 + \dot{y}_0 y_0) \ ,$$

mentre la seconda si identifica con il quoziente fra la velocità trasversa di P a $t = t_0$ e la distanza radiale ρ_0 :

$$u_{\theta 0} = \dot{P} \cdot \hat{e}_3 \wedge \frac{P - O}{|P - O|} \Big|_{t=t_0} \frac{1}{\rho_0} = (\dot{x}_0 \hat{e}_1 + \dot{y}_0 \hat{e}_2) \cdot \hat{e}_3 \wedge \frac{x_0 \hat{e}_1 + y_0 \hat{e}_2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \frac{1}{\rho_0} = \frac{-\dot{x}_0 y_0 + \dot{y}_0 x_0}{x_0^2 + y_0^2} \ .$$

□ **Equazione del moto radiale. Forze fittizie.**

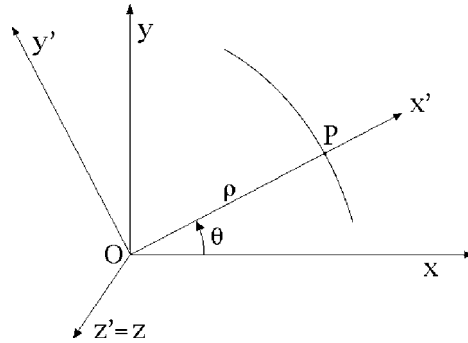
Dalla seconda equazione del moto in coordinate polari (C.12) si deduce che $\rho^2\dot{\theta} = c$ e che pertanto:

$$\dot{\theta} = \frac{c}{\rho^2}.$$

Questa equazione, sostituita nella prima delle (C.12), consente di eliminare la dipendenza da θ e di ottenere la seguente equazione nella sola variabile ρ :

$$m\ddot{\rho} = \frac{mc^2}{\rho^3} + f(\rho) \quad (C.14)$$

nota come **equazione del moto radiale** e semplicemente **equazione radiale**. Si osservi come il secondo membro della (C.14) non contenga la sola componente radiale della forza centrale $f(\rho)$, ma anche un termine addizionale mc^2/ρ^3 . Di quest'ultimo termine di forza è possibile dare una interpretazione notevole. L'equazione (C.14) descrive infatti il moto puramente radiale di P , ossia il moto del punto materiale quale appare **in un sistema di riferimento co-rotante con il raggio vettore $P - O$** . Si consideri pertanto una terna di riferimento cartesiana ortogonale $Ox'y'z'$ il cui piano coordinato $Ox'y'$ coincida con Oxy e rispetto al quale il punto P si mantenga localizzato lungo l'asse Ox' . Questa terna di riferimento — vedi figura — ruota di un angolo θ rispetto alla terna galileiana $Oxyz$ ed ha quindi natura non inerziale.



Accanto alla forza reale $f(\rho)\hat{r}$, in essa si manifestano anche le forze fittizie di Coriolis e di trascinamento, per le quali vale l'espressione:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{inerziali}} &= -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r - m\dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O) - m\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)] = \\ &= -2m\dot{\theta}\hat{e}_3 \wedge \dot{\rho}\hat{r} - m\ddot{\theta}\hat{e}_3 \wedge \rho\hat{r} + m\dot{\theta}^2\rho\hat{r} = -m(\ddot{\theta}\rho + 2\dot{\theta}\dot{\rho})\hat{h} + m\rho\dot{\theta}^2\hat{r} \end{aligned}$$

considerato che la velocità angolare di trascinamento risulta ovviamente $\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{e}_3$, mentre la velocità \vec{v}_r del punto P relativa alla terna co-rotante $Ox'y'z'$ si riduce al solo termine radiale $\dot{\rho}\hat{r}$. Basta poi osservare che:

$$\ddot{\theta}\rho + 2\dot{\theta}\dot{\rho} = \frac{1}{\rho}(\ddot{\theta}\rho^2 + 2\dot{\theta}\rho\dot{\rho}) = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) = \frac{1}{\rho}\frac{dc}{dt} = 0$$

per concludere che il risultante delle forze inerziali agenti su P assume la forma:

$$\vec{F}_{\text{inerziali}} = m\rho\dot{\theta}^2 \hat{r} = \frac{mc^2}{\rho^3} \hat{r}$$

ed è perciò identificabile con il solo termine centrifugo $-m\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)]$. Questo termine coincide con quello addizionale a secondo membro nell'equazione radiale (C.14), che risulta così completamente giustificata come equazione del moto **relativa alla terna co-rotante con il raggio vettore $P - O$** .

□ Analisi di Weierstrass del moto radiale.

Si tratta di applicare la discussione di Weierstrass direttamente all'equazione del moto radiale (C.14), mantenendo il tempo t come variabile indipendente. Lo scopo è quello di avere informazioni sull'andamento qualitativo della soluzione radiale $\rho(t)$, $t \in I$. Che l'analisi di Weierstrass sia applicabile è evidente. Basta infatti moltiplicare membro a membro la relazione per $\dot{\rho}$ per ottenere:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2} \dot{\rho}^2 + \frac{mc^2}{2} \frac{1}{\rho^2} + W(\rho) \right] = 0 \quad \forall t \in I$$

ossia:

$$\frac{m}{2} \dot{\rho}^2 + \frac{mc^2}{2} \frac{1}{\rho^2} + W(\rho) = E \quad \forall t \in I .$$

Introducendo l'**energia potenziale efficace**:

$$W_{\text{eff}}(\rho) = W(\rho) + \frac{mc^2}{2} \frac{1}{\rho^2} \tag{C.15}$$

segue infine che:

$$\frac{m}{2} \dot{\rho}^2 + W_{\text{eff}}(\rho) = E \quad \forall t \in I . \tag{C.16}$$

Si osservi che W_{eff} dipende dalla costante delle aree c . Si tratta, al solito, del teorema di conservazione dell'energia, avendo la costante E il significato fisico di energia meccanica totale del sistema. Alla (C.16) è applicabile la consueta discussione di Weierstrass dalla quale si deduce la legge oraria radiale $\rho = \rho(t)$, tipicamente per inversione dell'integrale:

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\rho(t_0)}^{\rho(t)} \frac{1}{\sqrt{E - W_{\text{eff}}(\rho)}} d\rho .$$

La legge oraria angolare si ricava infine da:

$$\theta(t) = \theta(t_0) + c \int_{t_0}^t \frac{1}{\rho(\tau)^2} d\tau \tag{C.17}$$

senza dover ricorrere ad inversioni ulteriori.

Dati $\dot{\rho}(t_0)$, $\dot{\theta}(t_0)$, $\rho(t_0)$ e $\theta(t_0)$, l'energia della soluzione vale:

$$E = \frac{m}{2} [\dot{\rho}(t_0)^2 + \rho(t_0)^2 \dot{\theta}(t_0)^2] + W[\rho(t_0)]$$

mentre la costante delle aree si scrive:

$$c = \rho(t_0)^2 \dot{\theta}(t_0) \neq 0 .$$

Il problema di Weierstrass (C.16) conduce alla soluzione $\rho(t)$ noti che siano $\rho(t_0)$ e $\dot{\rho}(t_0)$, dopodichè la (C.17) fornisce $\theta(t)$ noto $\theta(t_0)$.

□ **Conseguenze dell'essere $c \neq 0$.**

Nell'ipotesi di $c \neq 0$ è dato fare uso della **variabile angolare θ come variabile indipendente in luogo del tempo t** , ricavando l'espressione per l'orbita completa in coordinate polari.

Data una soluzione massimale delle equazioni del moto in coordinate polari, definita nell'intervallo aperto I e per la quale si abbia $c \neq 0$, dalla relazione:

$$\rho^2 \dot{\theta} = c$$

segue che $\rho(t) > 0 \forall t \in I$ e che conseguentemente:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{c}{\rho(t)^2} \quad \forall t \in I .$$

Una integrazione nella variabile indipendente t porge allora:

$$\theta(t) = \theta(t_0) + c \int_{t_0}^t \frac{1}{\rho(\tau)^2} d\tau \quad \forall t \in I \quad (C.18)$$

e poichè l'integrando è una funzione continua priva di zeri, se ne deduce che la $\theta(t)$ è funzione monotona — crescente o decrescente a seconda che il segno di c risulti positivo o negativo — e dunque invertibile su I . L'inversa corrispondente si indicherà con $t(\theta)$ e sarà definita sull'intervallo $\theta(I)$.

Si vuole ora discutere la **regolarità** dell'applicazione $t(\theta)$. A tale scopo si osserva preliminarmente che le equazioni del moto (C.12) possono risciversi nella forma normale equivalente del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{u}_\rho = \frac{1}{m} f(\rho) + \rho u_\theta^2 \\ \dot{u}_\theta = -\frac{2}{\rho} u_\rho u_\theta \\ \dot{\rho} = u_\rho \\ \dot{\theta} = u_\theta \end{cases} \quad (C.19)$$

dove $(u_\rho, u_\theta, \rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ e $f(\rho)$ è una funzione almeno continua del proprio argomento ρ . Dalla definizione di soluzione di (C.19) segue immediatamente che $u_\rho(t)$, $u_\theta(t)$, $\rho(t)$ e $\theta(t)$ sono funzioni C^1 in $t \in I$, cosicché $\rho(t)$ e $\theta(t)$ risultano almeno C^2 .
Ciò premesso, sull'aperto $\mathbb{R} \times I \subseteq \mathbb{R}^2$ si consideri l'applicazione definita da:

$$G(\theta, t) \equiv -\theta + \theta(t_0) + c \int_{t_0}^t \frac{1}{\rho(\tau)^2} d\tau \quad \forall (\theta, t) \in \mathbb{R} \times I .$$

Si ha che:

(1) G è almeno di classe C^2 in $\mathbb{R} \times I$. Per ogni $(\theta, t) \in \mathbb{R} \times I$ vale infatti:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2}(\theta, t) = 0 \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \theta \partial t}(\theta, t) = 0 \quad \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(\theta, t) = c \frac{d}{dt}(\rho(t)^{-2}) = -2c\dot{\rho}(t)\rho(t)^{-3} ,$$

le quali sono tutte funzioni continue in $\mathbb{R} \times I$;

(2) per ogni $\bar{t} \in I$ risulta $G(\theta(\bar{t}), \bar{t}) = 0$, per definizione di $\theta(t)$ e $G(\theta, t)$;

(3) $\forall (\theta, t) \in \mathbb{R} \times I$ vale:

$$\frac{\partial G}{\partial t}(\theta, t) = c\rho(t)^{-2} \neq 0$$

— in effetti il segno si mantiene costante.

Dal teorema delle funzioni implicite si deduce che $\forall (\theta(\bar{t}), \bar{t})$, $\bar{t} \in I$, esistono un intorno aperto $J \subseteq \mathbb{R}$ di $\theta(\bar{t})$ ed una applicazione C^2 :

$$\psi : J \longrightarrow I$$

tali che $\psi(\theta(\bar{t})) = \bar{t}$ e $G(\theta, \psi(\theta)) = 0 \quad \forall \theta \in J$, vale a dire:

$$-\theta + \theta(t_0) + c \int_{t_0}^{\psi(\theta)} \frac{1}{\rho(\tau)^2} d\tau = 0 .$$

Ma per l'unicità della funzione inversa $t(\theta)$, la cui esistenza sull'intero intervallo $\theta(I)$ è già stata stabilita, ψ non può allora essere che la restrizione di $t(\theta)$ all'intorno J :

$$\psi(\theta) = t \Big|_J(\theta) \quad \forall \theta \in J ,$$

per cui $t(\theta)$ risulta almeno di classe C^2 sull'intervallo $\theta(I)$ — potendosi scegliere $\theta(\bar{t})$ a piacere in $\theta(I)$.

È quindi possibile utilizzare la θ in luogo di t quale variabile indipendente, per studiare un qualsiasi moto con costante delle aree diversa da zero. Questo significa determinare l'equazione dell'orbita completa in coordinate polari, $\rho = \rho_o(\theta)$, per poi procedere al calcolo della legge oraria angolare $\theta = \theta(t)$ invertendo la relazione:

$$c(t - t_0) = \int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} \rho_o^2(\theta) d\theta \quad t \in I .$$

La legge oraria radiale sarà infine $\rho(t) = \rho_o(\theta(t)) \quad \forall t \in I$.

In alternativa, si mantiene t come variabile indipendente e si ricavano la legge oraria radiale $\rho(t)$ direttamente dall'equazione (C.14) e quindi quella angolare $\theta(t)$ per mezzo della (C.18).

□ **Formule di Binet.**

Come stabilito al punto precedente, nell'ipotesi che la costante delle aree c sia diversa da zero la funzione che descrive l'orbita del punto materiale in coordinate polari:

$$\rho_o(\theta) = \rho(t(\theta))$$

è certamente definita e almeno di classe C^2 , quale composizione di due applicazioni C^2 — $\rho(t)$ e $t(\theta)$.

Una immediata applicazione del teorema di derivazione delle funzioni composte permette allora di riscrivere le derivate prima e seconda di $\rho(t)$ nella forma seguente:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \dot{\theta} \frac{d\rho_o}{d\theta}(\theta) = \frac{c}{\rho_o^2} \frac{d\rho_o}{d\theta} = -c \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\rho_o} \right) \\ \ddot{\rho} &= \dot{\theta} \frac{d}{d\theta} \left[-c \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\rho_o} \right) \right] = -\frac{c^2}{\rho_o^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho_o} \right).\end{aligned}\tag{C.20}$$

in modo che l'accelerazione radiale diventa:

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = -\frac{c^2}{\rho_o^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho_o} \right) - \rho_o \left(\frac{c}{\rho_o^2} \right)^2 = -\frac{c^2}{\rho_o^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho_o} \right) - \frac{c^2}{\rho_o^3}.\tag{C.21}$$

Le relazioni (C.20) e (C.21) sono note come **formule del Binet** e rivestono grande importanza nella derivazione dell'equazione differenziale delle orbite in coordinate polari.

□ **Equazione differenziale delle orbite in coordinate polari.**

L'equazione differenziale delle orbite in coordinate polari si ottiene semplicemente sostituendo la formula di Binet (C.21) nella prima delle equazioni del moto in coordinate polari (C.13):

$$-\frac{mc^2}{\rho_o^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho_o} \right) - \frac{mc^2}{\rho_o^3} = f(\rho_o).\tag{C.22}$$

L'equazione può porsi in forma normale del secondo ordine nella variabile dipendente $1/\rho_o$:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho_o} \right) = -\frac{\rho_o^2}{mc^2} f(\rho_o) - \frac{1}{\rho_o}$$

e deve essere risolta assegnando le condizioni iniziali:

$$\rho_o(\theta_0) = \rho_0 \quad \frac{d\rho_o}{d\theta}(\theta_0) = \frac{\dot{\rho}(t_0)}{\dot{\theta}(t_0)} = \frac{u_{\rho 0}}{c/\rho_0^2} = \frac{u_{\rho 0} \rho_0^2}{c},$$

ovvero:

$$\frac{1}{\rho_o}(\theta_0) = \frac{1}{\rho_0} \quad \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\rho_o} \right)(\theta_0) = -\frac{1}{\rho_0^2} \frac{d\rho_o}{d\theta}(\theta_0) = -\frac{u_{\rho 0}}{c}.$$

□ **Discussione di Weierstrass applicata all'equazione differenziale delle orbite in coordinate polari.**

Moltiplicando membro a membro l'equazione differenziale delle orbite (C.22) per $d\rho_o/d\theta$ si ha:

$$mc^2 \left(-\frac{1}{\rho_o^2} \frac{d\rho_o}{d\theta} \right) \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho_o} \right) + mc^2 \frac{1}{\rho_o} \left(-\frac{1}{\rho_o^2} \frac{d\rho_o}{d\theta} \right) = f(\rho_o) \frac{d\rho_o}{d\theta}$$

da cui segue l'equazione equivalente:

$$mc^2 \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\rho_o} \right) \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho_o} \right) + mc^2 \frac{1}{\rho_o} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\rho_o} \right) - f(\rho_o) \frac{d\rho_o}{d\theta} = 0$$

che può anche porsi nella forma:

$$\frac{d}{d\theta} \left[\frac{mc^2}{2} \left[\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\rho_o} \right) \right]^2 + \frac{mc^2}{2} \frac{1}{\rho_o^2} + W(\rho_o) \right] = 0$$

ed implica la costanza, lungo l'orbita, dell'espressione:

$$\frac{mc^2}{2} \left[\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\rho_o} \right) \right]^2 + \frac{mc^2}{2} \frac{1}{\rho_o^2} + W(\rho_o) ,$$

essendosi indicata con $W(\rho) = -U(\rho)$ l'energia potenziale del campo centrale, definita da $f(\rho) = -W'(\rho)$. Detta funzione, che è associata ovviamente ad un integrale primo dell'equazione (C.22), assume lungo l'orbita prescelta $\rho_o(\theta)$ lo stesso valore costante E assunto dall'energia meccanica lungo la corrispondente soluzione $(\theta(t), \rho(t))$ dell'equazione del moto in coordinate polari. L'integrale dell'energia meccanica, scritto in coordinate polari, vale infatti:

$$H(u_\rho, u_\theta, \rho, \theta) = \frac{m}{2} (u_\rho^2 + \rho^2 u_\theta^2) + W(\rho)$$

e lungo la soluzione $(u_\rho(t), u_\theta(t), \rho(t), \theta(t))$ diventa

$$\begin{aligned} H(u_\rho, u_\theta, \rho, \theta) &= \frac{m}{2} (u_\rho^2 + \rho^2 u_\theta^2) + W(\rho) = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) + W(\rho) = \\ &= \frac{m}{2} \left[\left(\frac{d\rho_o}{d\theta} \right)^2 \dot{\theta}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 \right] + W(\rho) = \frac{m}{2} \left[\frac{c^2}{\rho^4} \left(\frac{d\rho_o}{d\theta} \right)^2 + \frac{c^2}{\rho^2} \right] + W(\rho) = \\ &= \left\{ \frac{mc^2}{2} \left[\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\rho_o} \right) \right]^2 + \frac{mc^2}{2\rho_o^2} + W(\rho_o) \right\} \Bigg|_{\theta=\theta(t)} = E . \end{aligned}$$

Le soluzioni dell'equazione (C.22) sono quindi analizzabili attraverso il **problema di Weierstrass**:

$$\left(\frac{d\rho_o}{d\theta} \right)^2 = \Phi(\rho_o)$$

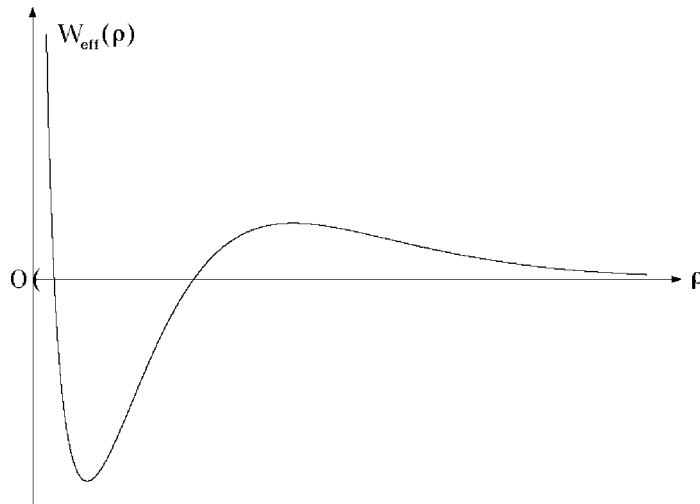
in cui per un assegnato valore E dell'energia meccanica totale la **funzione di Weierstrass** assume la forma:

$$\Phi(\rho_o) = \rho_o^4 \frac{2}{mc^2} \left[E - \frac{mc^2}{\rho_o^2} - W(\rho_o) \right]. \quad (C.23)$$

Il problema di Weierstrass ottenuto è formalmente analogo a quello consueto per il moto di un punto materiale lungo una traiettoria prestabilita e in presenza di sollecitazioni posizionali — conservative. Giova tuttavia sottolineare alcune differenze di rilievo:

- (i) la coordinata radiale ρ è strettamente positiva per definizione, per cui la discussione di Weierstrass viene svolta sulla sola semiretta dei reali positivi — $\rho > 0$;
- (ii) l'energia potenziale da considerare nell'analisi di Weierstrass non si identifica semplicemente con quella del campo centrale, $W(\rho)$, ma è data dall'energia potenziale efficace (C.15);
- (iii) la variabile indipendente è rappresentata dall'anomalia θ e non dal tempo t . Quest'ultima proprietà ha conseguenze rilevanti circa l'interpretazione geometrica dei risultati ottenibili dall'analisi di Weierstrass.

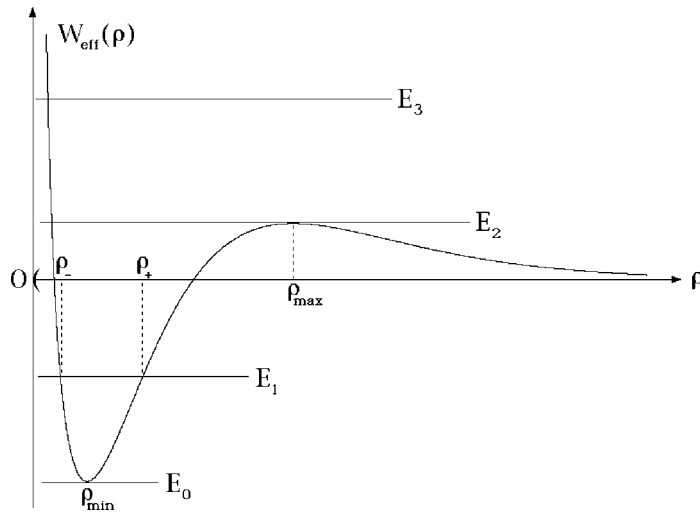
Per illustrare il significato delle precedenti osservazioni, si consideri un potenziale efficace il cui grafico abbia l'andamento riportato nella figura seguente:



L'analisi di Weierstrass consente di ottenere informazioni sull'andamento qualitativo delle funzioni $\rho_o(\theta)$, soluzioni dell'equazione differenziale delle orbite (C.22). Al solito, l'andamento delle soluzioni dipende dal livello dell'energia meccanica E prefissato. Nella fattispecie i livelli notevoli di energia che conviene considerare sono:

- (i) $E = E_0$, corrispondente al minimo assoluto $\rho = \rho_{\min}$ dell'energia potenziale efficace;
- (ii) $E = E_1$, livello negativo di energia distinto da E_0 , in modo che la retta $E = E_1$ intersechi il grafico di $W_{\text{eff}}(\rho)$ in due soli punti $\rho = \rho_-$ e $\rho = \rho_+$;

- (iii) $E = E_2$, associato al massimo relativo proprio $\rho = \rho_{\max}$ di $W_{\text{eff}}(\rho)$;
- (iv) $E = E_3$, maggiore di E_2 .



Si esaminano i singoli casi così individuati.

(i) **Caso** $E = E_0$

Dai criteri di Weierstrass segue che in corrispondenza del valore iniziale di θ — arbitrario — deve necessariamente aversi $\rho_o = \rho_{\min}$ e $d\rho_o/d\theta = 0$ e che la soluzione dell'equazione delle orbite deve ridursi a

$$\rho_o(\theta) = \rho_{\min} \quad \forall \theta \in \mathbb{R} .$$

L'orbita del punto materiale è quindi una circonferenza di centro O e raggio ρ_{\min} , percorsa peraltro di moto uniforme, essendo

$$c(t - t_0) = \int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} \rho_o^2(\theta) d\theta = \int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} \rho_{\min}^2 d\theta = \rho_{\min}^2 [\theta(t) - \theta(t_0)]$$

e dunque

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \frac{c}{\rho_{\min}^2} (t - t_0)$$

con $t_0 \in \mathbb{R}$ istante iniziale del moto.

(ii) **Caso** $E = E_1$

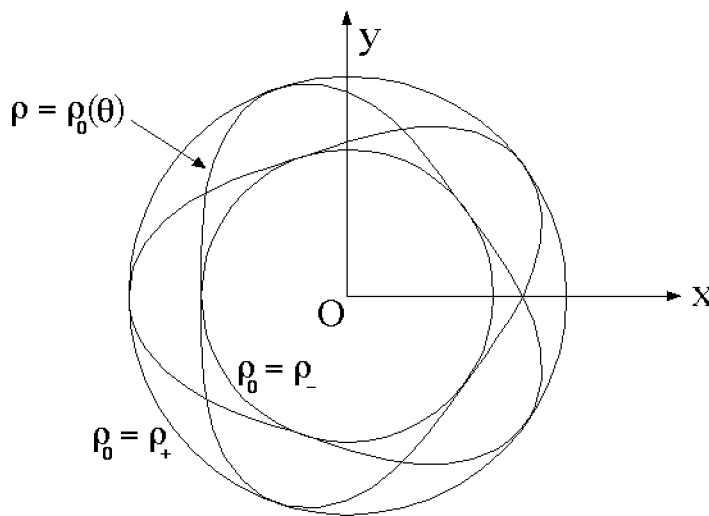
I valori ρ_- e ρ_+ della coordinata radiale sono **punti di inversione** della soluzione $\rho_o(\theta)$. Al crescere di θ la soluzione $\rho_o(\theta)$ alterna tratti **creascenti** — ‘progressivi’ — a tratti **decreascenti** — ‘retrogradi’ — mantenendosi comunque compresa fra il valore minimo ρ_- e il valore massimo ρ_+ , in corrispondenza dei quali $d\rho_o/d\theta = 0$. Gli intervalli di definizione dei tratti crescenti e decreascenti hanno la stessa lunghezza:

$$\int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{1}{\sqrt{\Phi(\rho)}} d\rho = \int_{\rho_+}^{\rho_-} \left[-\frac{1}{\sqrt{\Phi(\rho)}} \right] d\rho$$

espressa in termini della funzione di Weierstrass (C.23). La soluzione è dunque periodica nella variabile θ , con **periodo angolare**

$$\Delta\theta = \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{1}{\sqrt{\Phi(\rho)}} d\rho + \int_{\rho_+}^{\rho_-} \left[-\frac{1}{\sqrt{\Phi(\rho)}} \right] d\rho = 2 \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{1}{\sqrt{\Phi(\rho)}} d\rho ,$$

in modo che $\rho_o(\theta + \Delta\theta) = \rho_o(\theta) \forall \theta \in \mathbb{R}$. Nei punti per i quali $\rho_o = \rho_-$ — noti come **pericentri** — l'orbita risulta tangente alla circonferenza di centro O e raggio ρ_- , mentre negli **apocentri** $\rho_o = \rho_+$ l'orbita è tangente alla circonferenza di uguale centro e raggio ρ_+ ; l'angolo al centro compreso fra un apocentro e il pericentro immediatamente successivo lungo l'orbita — o viceversa — è costante e vale $\Delta\theta/2$; fra due apocentri o pericentri consecutivi l'elongazione coincide invece, per quanto detto sopra, con il periodo angolare $\Delta\theta$.



Le corrispondenti soluzioni $\rho(t)$, $\theta(t)$ sono definite $\forall t \in \mathbb{R}$, in quanto l'applicazione strettamente monotona in $\theta \in \mathbb{R}$:

$$t - t_0 = \frac{1}{c} \int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} \rho_o^2(\theta) d\theta \tag{C.24}$$

ha codominio \mathbb{R} per via delle diseguaglianze $\rho_-^2 \leq \rho_o(\theta)^2 \leq \rho_+^2, \forall \theta \in \mathbb{R}$, mentre ovviamente $\rho(t) = \rho_o[\theta(t)]$. Il senso di percorrenza dell'orbita dipende dal segno di c — la funzione $\theta(t)$ è crescente per $c > 0$ e decrescente per $c < 0$.

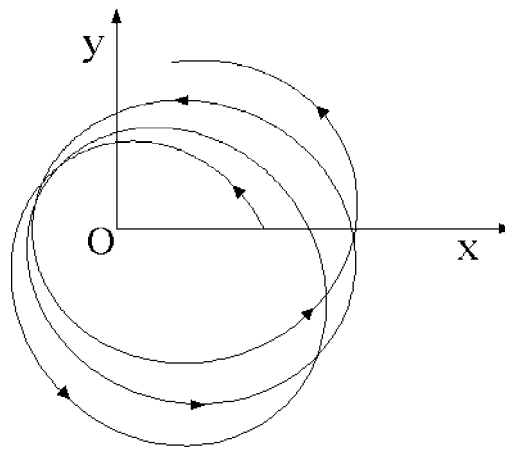
L'orbita descritta da $\rho_o(\theta)$ **non necessariamente risulta chiusa**. Ciò si verifica se e soltanto se esistono due apocentri (o pericentri) la cui separazione angolare corrisponda ad un numero intero di **rivoluzioni complete** del punto attorno al centro O ; in altre parole, affinché l'orbita sia chiusa occorre e basta che nel passaggio da un apocentro iniziale ad un apocentro finale, il raggio vettore $P-O$ spazzi un angolo giro o un multiplo intero di questo — il punto P deve ritrovarsi alla stessa distanza da O e nella stessa posizione angolare, descritta da θ a meno di multipli interi di 2π . Dal momento che l'angolo compreso fra

due apocentri successivi è $\Delta\theta$, la separazione angolare fra due apocentri assegnati non potrà che essere un multiplo intero $n\Delta\theta$ del periodo angolare, con $n \in \mathbb{N}$. La condizione necessaria e sufficiente per le orbite chiuse diviene pertanto $n\Delta\theta = 2\pi m$, ossia

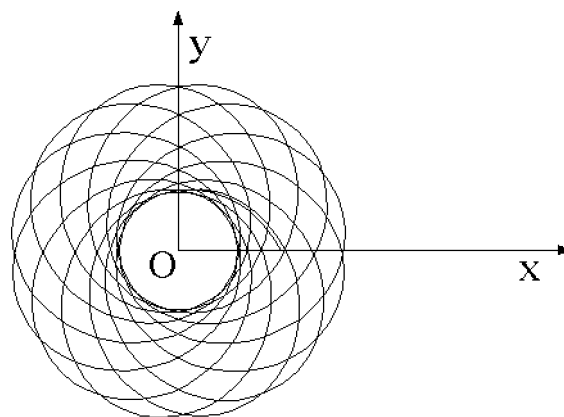
$$\frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{m}{n} \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad (C.25)$$

dove, considerati m ed n primi fra loro, m rappresenta il numero minimo di rivoluzioni complete del punto P necessario e sufficiente affinché l'orbita si richiuda, mentre n è il numero di apocentri — e pericentri — compresi nello stesso tratto di orbita.

Qualora la condizione (C.25) non sia soddisfatta, l'orbita del sistema è data da una tipica **traiettoria a rosetta**, come illustrato nella figura seguente:

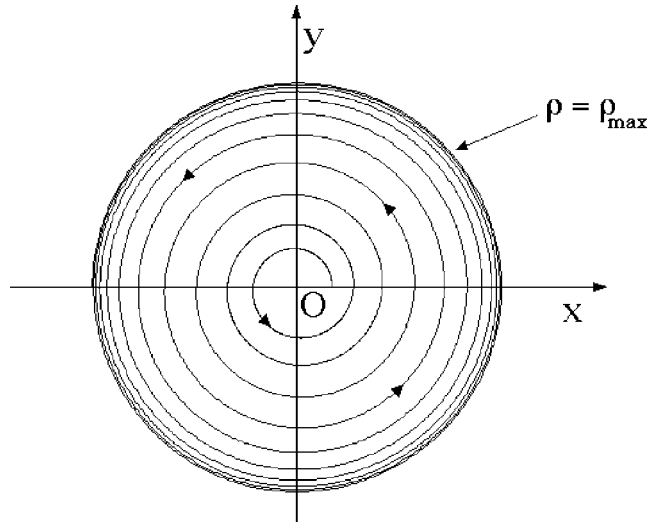


Al trascorrere del tempo, l'orbita tende a riempire **densamente** la corona circolare chiusa compresa fra le circonferenze di raggi ρ_- e ρ_+ — l'orbita passa arbitrariamente vicino a qualsiasi punto prefissato di tale corona circolare:



(iii) **Caso $E = E_2$**

Se il valore iniziale di ρ è minore di ρ_{\max} , la soluzione $\rho_o(\theta)$ è definita $\forall \theta \in \mathbb{R}$ e risulta a meta asintotica tanto per $\theta \rightarrow +\infty$ che per $\theta \rightarrow -\infty$, con meta asintotica ρ_{\max} . Per $d\rho_o/d\theta \geq 0$ al θ iniziale, la funzione $\rho_o(\theta)$ è monotona crescente dal θ iniziale a $\theta = +\infty$, con $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \rho_o(\theta) = \rho_{\max}$. L'andamento qualitativo della traiettoria viene riportato nella figura seguente:

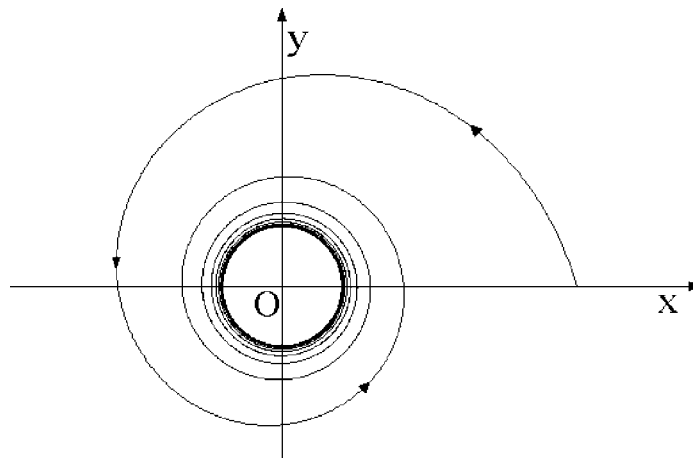


In virtù della relazione (C.24), il divergere degli integrali impropri:

$$\frac{1}{c} \int_{\theta(t_0)}^{+\infty} \rho_o^2(\theta) d\theta \quad \frac{1}{c} \int_{\theta(t_0)}^{-\infty} \rho_o^2(\theta) d\theta \tag{C.26}$$

implica che la soluzione $\theta(t)$ sia definita $\forall t \in \mathbb{R}$ — e di conseguenza anche la $\rho(t) = \rho_o[\theta(t)]$. Considerazioni analoghe valgono per $d\rho_o/d\theta < 0$ al θ iniziale.

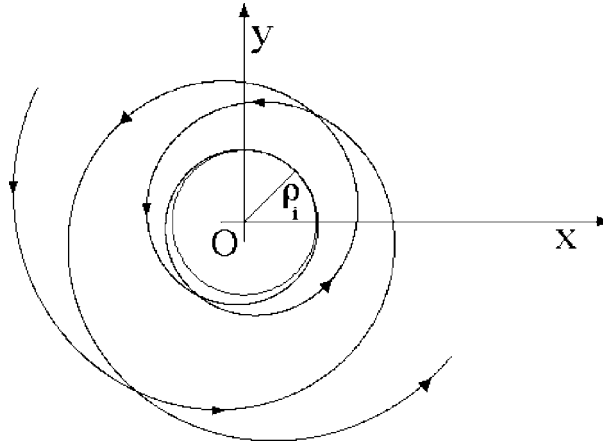
Qualora il valore iniziale di ρ coincida con il massimo relativo ρ_{\max} , deve aversi di necessità $d\rho_o/d\theta = 0$ e la soluzione massimale dell'equazione delle orbite è quella costante $\rho_o(\theta) = \rho_{\max} \forall \theta \in \mathbb{R}$, corrispondente ad una traiettoria circolare — percorsa di moto uniforme. Un'altra situazione interessante ricorre con i valori iniziali $\rho > \rho_{\max}$ e $d\rho_o/d\theta < 0$.



In tal caso la soluzione massimale è a meta asintotica per $\theta \rightarrow +\infty$, sempre con meta ρ_{\max} , e l'orbita spiraleggia tendendo alla circonferenza di centro O e raggio ρ_{\max} dall'esterno.

(iv) **Caso** $E = E_3$

Se inizialmente $d\rho_o/d\theta < 0$, la soluzione massimale $\rho_o(\theta)$ presenta un unico punto di inversione in $\rho = \rho_i$, corrispondente alla sola intersezione fra la retta orizzontale rappresentativa dell'energia meccanica e il grafico del potenziale efficace. La soluzione risulta dunque strettamente decrescente $\forall \theta < \theta_i$ tale che $\rho_o(\theta_i) = \rho_i$, crescente $\forall \theta > \theta_i$. L'orbita spiraleggia tendendo alla circonferenza di centro O e raggio ρ_i , la intercetta tangenzialmente in un unico punto e quindi torna a spiraleggiare allontanandosene indefinitamente.



Al solito, la soluzione $(\theta(t), \rho(t)) = (\theta(t), \rho_o[\theta(t)])$ risulta definita $\forall t \in \mathbb{R}$, causa l'evidente divergenza degli integrali impropri (C.26). Il caso $d\rho_o/d\theta \geq 0$ si tratta in modo analogo.

□ Equazione differenziale delle orbite nel reciproco della distanza radiale.

L'equazione differenziale delle orbite, (C.22), può essere espressa in un forma più semplice introducendo come variabile dipendente il reciproco $u = 1/\rho > 0$ della coordinata radiale, funzione incognita dell'anomalia θ ,

$$-mc^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - mc^2 u^3 = f(1/u). \quad (C.27)$$

L'equazione equivale a

$$mc^2 \left[\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right] = -\frac{1}{u^2} f(1/u) = \frac{d}{du} U(1/u)$$

ed ammette l'integrale primo dell'energia meccanica

$$\frac{mc^2}{2} \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] - U(1/u) = E \quad (C.28)$$

cui è associato il problema di Weierstrass

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 &= \frac{2}{mc^2}[E + U(1/u)] - u^2 = \frac{2}{mc^2}\left[E + U(1/u) - \frac{mc^2}{2}u^2\right] = \\ &= \frac{2}{mc^2}\left[E - W_{\text{eff}}(1/u)\right] = \frac{2}{mc^2}\left[E - \tilde{W}_{\text{eff}}(u)\right], \end{aligned}$$

essendosi posto

$$\tilde{W}_{\text{eff}}(u) = W_{\text{eff}}(1/u).$$

Il problema di Weierstrass (C.28) fornisce $u = u(\theta)$ se $u(\theta(t_0))$ e $\frac{du}{d\theta}(\theta(t_0))$ sono assegnati. In effetti, questi possono essere determinati sulla base dei dati iniziali:

$$u(\theta(t_0)) = \frac{1}{\rho_o(\theta(t_0))} = \frac{1}{\rho(t_0)}$$

e:

$$\frac{du}{d\theta}(\theta(t_0)) = -\frac{1}{\rho_o(\theta(t_0))^2} \frac{d\rho_o}{d\theta}(\theta(t_0)) = -\frac{1}{\rho(t_0)^2} \dot{\rho}(t_0) \frac{1}{\dot{\theta}(t_0)}$$

certamente definita in quanto $c \neq 0$ implica $\dot{\theta}(t_0) \neq 0$. La relazione

$$(t - t_0)c = \int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} \frac{1}{u^2(\theta)} d\theta$$

porge infine $\theta(t)$ assegnato che sia $\theta(t_0)$.

□ Moto in un campo newtoniano.

In questo caso la legge di forza del campo centrale è descritta dalla funzione

$$f(\rho) = -\frac{MmG}{\rho^2}$$

dove M rappresenta la massa gravitazionale del corpo massiccio che genera il campo e G indica la costante della gravitazione universale — o di Cavendish, $G = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$.

Orbite in un campo newtoniano

L'equazione differenziale delle orbite (C.22) assume la forma

$$-\frac{mc^2}{\rho_o^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho_o}\right) - \frac{mc^2}{\rho_o^3} = -\frac{MmG}{\rho_o^2}$$

che equivale a

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho_o}\right) + \frac{1}{\rho_o} = \frac{MG}{c^2}.$$

Le soluzioni di questa equazione sono del tipo

$$\frac{1}{\rho_o} = \frac{MG}{c^2} + \zeta(\theta)$$

con la funzione incognita $\zeta(\theta)$ che soddisfa l'equazione differenziale caratteristica del moto armonico semplice di pulsazione unitaria:

$$\frac{d^2\zeta}{d\theta^2} + \zeta = 0$$

e che di conseguenza si scrive come

$$\zeta(\theta) = A \cos(\theta - \theta_0), \quad A \geq 0, \quad \theta_0 \in \mathbb{R}.$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale delle orbite diventa pertanto

$$\frac{1}{\rho_o} = \frac{MG}{c^2} + A \cos(\theta - \theta_0)$$

ovvero

$$\rho_o(\theta) = \frac{1}{\frac{MG}{c^2} + A \cos(\theta - \theta_0)} = \frac{\frac{c^2}{MG}}{1 + \frac{Ac^2}{MG} \cos(\theta - \theta_0)} = \frac{\frac{c^2}{MG}}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad (C.29)$$

con $e := Ac^2/MG \geq 0$ e $\theta_0 \in \mathbb{R}$, costanti arbitrarie da determinare sulla base delle condizioni iniziali assegnate. La geometria analitica insegna che le curve descritte dalla (C.29) sono **coniche proprie di eccentricità** e , aventi un — o l'eventuale unico — fuoco nell'origine O . Precisamente:

- per $e \in [0, 1)$ la conica è una ellisse di semiassi a e b , individuati univocamente dalle relazioni

$$b^2/a = \frac{c^2}{MG} \quad \text{e} \quad e = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Nel caso particolare di $e = 0$, l'ellisse ha eccentricità nulla e si riduce ad una **circonferenza di raggio** $a = b = c^2/MG$;

- per $e = 1$ l'orbita del punto materiale è una parabola con fuoco O ;
- per $e > 1$ l'orbita è un ramo di iperbole, avente in O il relativo fuoco. In questo caso i semiassi a e b della conica possono essere determinati in modo univoco risolvendo le equazioni

$$b^2/a = \frac{c^2}{MG} \quad \text{e} \quad e = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Si perviene in questo modo ad una completa classificazione delle orbite sulla base del parametro di eccentricità e , ricavabile dalle condizioni iniziali.

Relazione fra eccentricità ed energia

Un modo più diretto per classificare le orbite del punto materiale nel campo newtoniano consiste nel calcolo dell'energia meccanica, che risulta in una relazione molto semplice con l'eccentricità e . Si ha infatti, usando l'espressione $-MmG/\rho$ per l'energia potenziale gravitazionale:

$$\begin{aligned}
 E &= mc^2 \left[\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\rho_o} \right) \right]^2 + \frac{mc^2}{2} \frac{1}{\rho_o^2} - \frac{MmG}{\rho_o} \Bigg|_{\frac{1}{\rho_o} = \frac{MG}{c^2} + A \cos(\theta - \theta_0)} = \\
 &= \frac{mc^2}{2} A^2 \sin^2(\theta - \theta_0) + \frac{mc^2}{2} \left[\left(\frac{MG}{c^2} \right)^2 + \frac{2MGA}{c^2} \cos(\theta - \theta_0) + A^2 \cos^2(\theta - \theta_0) \right] - \\
 &- MmG \left[\frac{MG}{c^2} + A \cos(\theta - \theta_0) \right] = \\
 &= \frac{mc^2 A^2}{2} \sin^2(\theta - \theta_0) + \frac{mM^2 G^2}{2c^2} + mMGA \cos(\theta - \theta_0) + \\
 &+ \frac{mc^2 A^2}{2} \cos^2(\theta - \theta_0) - \frac{mM^2 G^2}{c^2} - mMGA \cos(\theta - \theta_0) = \\
 &= \frac{mc^2 A^2}{2} - \frac{mM^2 G^2}{2c^2} = \frac{mM^2 G^2}{2c^2} \left(\frac{c^4 A^2}{M^2 G^2} - 1 \right) = \frac{mM^2 G^2}{2c^2} (e^2 - 1) .
 \end{aligned}$$

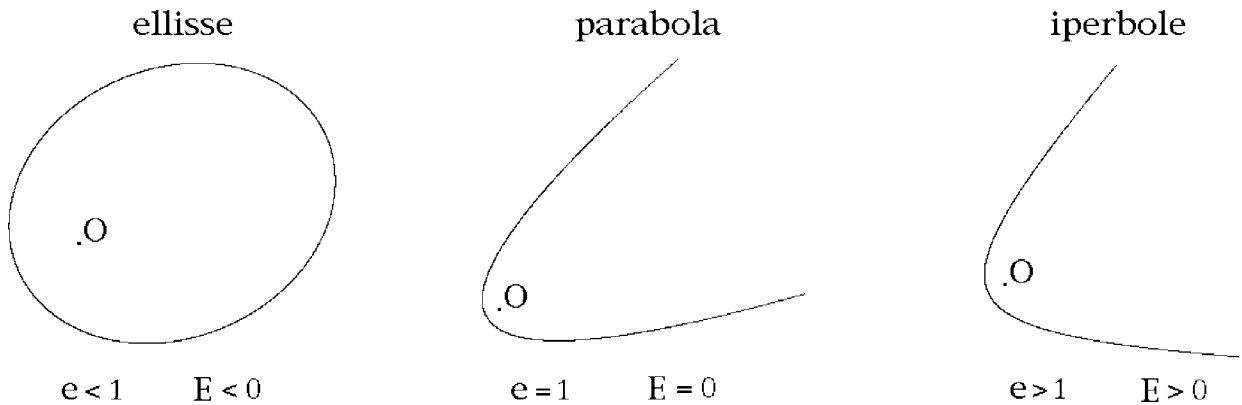
In definitiva, vale la relazione

$$E = \frac{mM^2 G^2}{2c^2} (e^2 - 1)$$

con $mM^2 G^2 / 2c^2$ costante positiva ed $e \geq 0$. Perciò:

$E < 0$	\iff	$e < 1$	\iff	orbita ellittica (o circolare)
$E = 0$	\iff	$e = 1$	\iff	orbita parabolica
$E > 0$	\iff	$e > 1$	\iff	orbita iperbolica

per cui la tipologia dell'orbita può essere dedotta semplicemente dal segno dell'energia meccanica — nota in base alle condizioni iniziali.



Leggi di Keplero

I risultati precedenti possono ora essere applicati alla dimostrazione delle leggi kepleriane per il moto dei pianeti nel sistema solare. Nella dimostrazione si assume che possano essere trascurate, almeno in prima approssimazione, le interazioni gravitazionali dei vari pianeti l'uno con l'altro. Ciascun pianeta viene quindi descritto come interagente con il solo campo gravitazionale solare.

- (i) **Prima legge (o delle orbite ellittiche).** La prima legge di Keplero, secondo la quale le orbite dei pianeti sono delle ellissi con il Sole collocato in uno dei due fuochi, è già stata dimostrata in precedenza per il moto di un punto materiale in un campo newtoniano, riducendosi al caso particolare delle orbite di eccentricità minore di 1, ovvero di energia negativa. **La legge è caratteristica dei campi centrali attrattivi la cui intensità sia inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal centro.**
- (ii) **Seconda legge (o delle aree uguali).** Anche la seconda legge di Keplero, secondo cui il raggio vettore congiungente il pianeta con il centro del Sole spazza aree uguali in tempi uguali, è già stata stabilita. **Si tratta infatti di una caratteristica generale del moto in un qualsiasi campo di forze centrali**, conseguenza del teorema di conservazione del momento angolare rispetto al centro del campo.
- (iii) **Terza legge (o dei quadrati e dei cubi, o armonica).** La legge stabilisce che il quadrato del periodo orbitale T di un pianeta attorno al Sole è proporzionale al cubo del semiasse maggiore a dell'orbita, la costante di proporzionalità risultando indipendente dal pianeta. A questo risultato si perviene notando preliminarmente che

$$\frac{b^2}{a} = \frac{c^2}{MG}$$

per cui

$$\pi^2 a^2 b^2 = \frac{\pi^2 a^3 c^2}{MG}$$

e quindi l'area dell'orbita ellittica risulta

$$\pi ab = \frac{\pi |c|}{\sqrt{MG}} a^{3/2} .$$

Poiché la velocità areale costante del pianeta è data da $|c|/2$, il periodo orbitale si esprime nel modo seguente

$$T = \frac{\pi ab}{|c|/2} = \frac{2\pi ab}{|c|} = \frac{2}{|c|} \pi ab = \frac{2\pi}{\sqrt{MG}} a^{3/2}$$

e pertanto

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{MG}$$

a dimostrazione dell'asserto, considerato che la costante a secondo membro è indipendente dalla massa del pianeta.

□ **Campo newtoniano con correzione inversamente proporzionale al cubo della distanza.**

L'equazione delle orbite è integrabile esplicitamente qualora il potenziale sia del tipo:

$$U(\rho) = -\frac{a}{\rho} - \frac{b}{\rho^2} \tag{C.30}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ costanti arbitrarie. Nell'ipotesi che la costante delle aree sia diversa da zero, il problema di Weierstrass corrispondente assume la forma:

$$\frac{mc^2}{2} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \tilde{W}_{\text{eff}}(u) = E$$

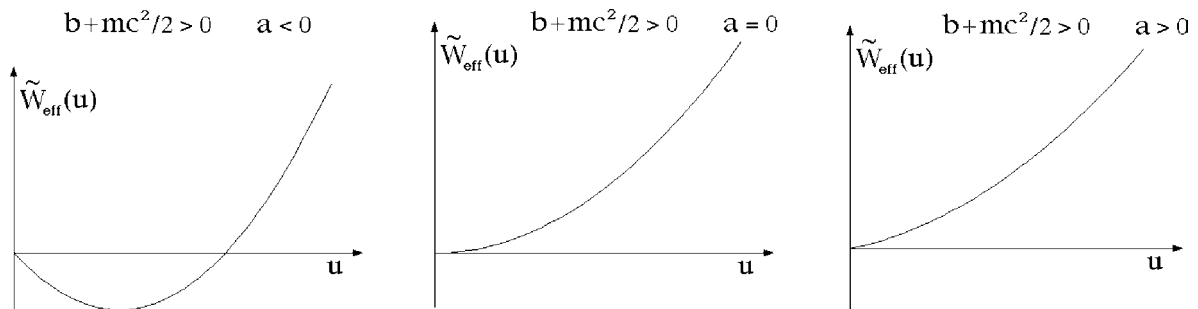
essendo $\tilde{W}_{\text{eff}}(u) = au + (b + mc^2/2)u^2$ l'energia potenziale efficace del sistema. Si possono distinguere 9 casi diversi in relazione al segno assunto dai coefficienti a e $b + mc^2/2$, come specificato nel seguito. Il grafico del potenziale è illustrato nella figura allegata.

(1) $b + mc^2/2 > 0$. Il grafico di \tilde{W}_{eff} è una parabola passante per l'origine e con la concavità rivolta verso l'alto.

$a < 0$ Il grafico ha pendenza negativa per $u \rightarrow 0+$, per cui esiste una intersezione con il semiasse positivo delle ascisse in $u = -a/(b + mc^2/2)$. L'energia meccanica totale può assumere qualsiasi valore $E \geq -a^2/(4b + 2mc^2)$.

$a = 0$ La pendenza del grafico tende a zero per $u \rightarrow 0+$ e quindi non esistono intersezioni del grafico stesso con il semiasse delle ascisse $u > 0$. Tutti i valori $E > 0$ dell'energia meccanica totale sono consentiti.

$a > 0$ Il grafico ha pendenza positiva per $u \rightarrow 0+$; nessuna intersezione con il semiasse positivo delle ascisse. Sono permessi tutti i valori positivi dell'energia meccanica totale.

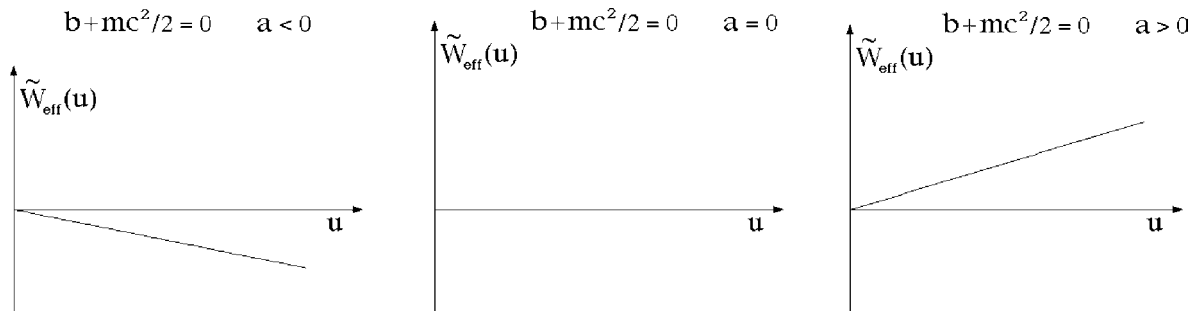


(2) $b + mc^2/2 = 0$. \tilde{W}_{eff} ha per grafico una semiretta condotta per l'origine.

$a < 0$ La semiretta ha pendenza negativa e tutti i valori di E reali sono permessi. Nessuna intersezione con il semiasse $u > 0$.

$a = 0$ Il grafico coincide con il semiasse $u > 0$. Sono consentiti soltanto valori positivi dell'energia meccanica totale E .

$a > 0$ Il grafico ha coefficiente angolare positivo. L'energia E può assumere qualsiasi valore reale positivo.

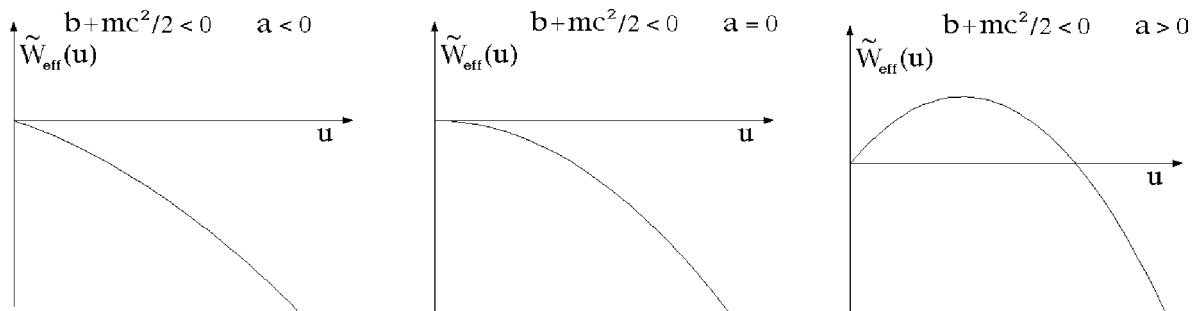


(3) $b + mc^2/2 < 0$. Il grafico di \tilde{W}_{eff} è una parabola con la concavità rivolta verso il basso, passante per l'origine.

$a < 0$ Per $u \rightarrow 0+$ la pendenza del grafico risulta negativa. Nessuna intersezione ha luogo con il semiasse $u > 0$. E assume qualsiasi valore reale.

$a = 0$ La pendenza del grafico è nulla per $u \rightarrow 0+$. Non si hanno intersezioni con il semiasse $u > 0$, mentre l'energia E può assumere anche in questo caso qualsiasi valore reale.

$a > 0$ Il grafico ha pendenza positiva per $u \rightarrow 0+$. Di conseguenza esiste una intersezione con il semiasse $u > 0$, per $u = -a/(b + mc^2/2)$. Ogni valore reale di E è permesso.



A titolo di esempio si esegue esplicitamente il calcolo dell'orbita nel caso che sia $b + mc^2/2 > 0$ ed $a < 0$. Si considerino anzitutto valori negativi dell'energia meccanica totale, cui corrispondono moti periodici nell'angolo θ . Si ha:

$$\frac{du}{d\theta} = \pm \sqrt{\frac{2}{mc^2}} \sqrt{E - au - (b + mc^2/2)u^2}$$

mentre il polinomio sotto radice $P(u) \equiv -\left(b + \frac{mc^2}{2}\right)u^2 - au + E$ si può scrivere:

$$P(u) = -\left(b + \frac{mc^2}{2}\right)(u - u_+)(u - u_-)$$

con

$$u_{\pm} = \frac{|a| \pm \sqrt{a^2 + 4E(b + mc^2/2)}}{2(b + mc^2/2)} \in \mathbb{R}_+ \quad (C.31)$$

e quindi $0 < u_- < u_+$. Se il moto è inizialmente progressivo l'integrale di Weierstrass diviene, essendo $u(\theta_0), u(\theta) \in [u_-, u_+]$:

$$\theta - \theta_0 = \sqrt{\frac{mc^2}{2b + mc^2}} \int_{u(\theta_0)}^{u(\theta)} \frac{du}{\sqrt{(u_+ - u)(u - u_-)}}. \quad (C.32)$$

Mediante il cambiamento di variabile $u = u_- + (u_+ - u_-) \sin^2(\lambda/2)$, $\lambda \in [0, \pi]$, si ottiene:

$$(\theta - \theta_0) \sqrt{\frac{2b + mc^2}{mc^2}} = \int_{\lambda(\theta_0)}^{\lambda(\theta)} \frac{(u_+ - u_-) \sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)}{(u_+ - u_-) |\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)|} d\lambda = \lambda(\theta) - \lambda(\theta_0)$$

dove $\lambda(\theta), \lambda(\theta_0) \in [0, \pi]$. Una volta raggiunto il punto di inversione $u = u_+$ l'equazione del moto si scrive:

$$\begin{aligned} (\theta - \theta_0) \sqrt{\frac{2b + mc^2}{mc^2}} &= \int_{u(\theta_0)}^{u_+} \frac{du}{\sqrt{(u_+ - u)(u - u_-)}} - \int_{u_+}^{u(\theta)} \frac{du}{\sqrt{(u_+ - u)(u - u_-)}} = \\ &= \pi - \lambda(\theta_0) - \int_{u_+}^{u(\theta)} \frac{du}{\sqrt{(u_+ - u)(u - u_-)}} \end{aligned}$$

che la sostituzione $u = u_- + (u_+ - u_-) \sin^2(\lambda/2)$, $\lambda \in [\pi, 2\pi]$, permette di porre nella forma:

$$(\theta - \theta_0) \sqrt{\frac{2b + mc^2}{mc^2}} = \pi - \lambda(\theta_0) - \int_{\pi}^{\lambda(\theta)} \frac{\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)}{|\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)|} d\lambda = \lambda(\theta) - \lambda(\theta_0)$$

con $\lambda(\theta_0) \in [0, \pi]$ e $\lambda(\theta) \in [\pi, 2\pi]$. Le successive inversioni si trattano in modo analogo. In generale, dunque:

$$\lambda(\theta) = \lambda(\theta_0) + \sqrt{\frac{2b + mc^2}{mc^2}} (\theta - \theta_0)$$

con $\lambda(\theta_0) \in [0, \pi]$ e $\lambda(\theta) \in \mathbb{R}$, per cui:

$$\begin{aligned} u(\theta) &= u_- + (u_+ - u_-) \sin^2(\lambda(\theta)/2) = \frac{u_+ - u_-}{2} - \frac{u_+ - u_-}{2} \cos \lambda(\theta) = \\ &= \frac{u_+ + u_-}{2} \left[1 - \frac{u_+ - u_-}{u_+ + u_-} \cos \left(\lambda(\theta_0) + \sqrt{\frac{2b + mc^2}{mc^2}} (\theta - \theta_0) \right) \right] \end{aligned}$$

e $\lambda(\theta_0)$ determinato da:

$$u(\theta_0) = u_- + (u_+ - u_-) \sin^2(\lambda(\theta_0)/2), \quad \lambda(\theta_0) \in [0, \pi]. \quad (C.33)$$

Se il moto è inizialmente retrogrado si ha invece l'espressione:

$$u(\theta) = \frac{u_+ + u_-}{2} \left[1 - \frac{u_+ - u_-}{u_+ + u_-} \cos\left(\lambda(\theta_0) - \sqrt{\frac{2b + mc^2}{mc^2}}(\theta - \theta_0)\right) \right].$$

In conclusione, l'equazione dell'orbita in coordinate polari è data da:

$$\rho_o(\theta) = \frac{2}{u_+ + u_-} \left[1 - \frac{u_+ - u_-}{u_+ + u_-} \cos\left(\lambda(\theta_0) + \kappa \sqrt{\frac{2b + mc^2}{mc^2}}(\theta - \theta_0)\right) \right]^{-1},$$

dove $\kappa = -1$ o $+1$ a seconda che il moto iniziale sia progressivo o retrogrado in ρ_o — ossia retrogrado o progressivo in u —. L'orbita è limitata fra le circonferenze di raggio $1/u_+$ ed $1/u_-$, ma in generale non risulta chiusa. Ciò avviene se e soltanto se esistono $k, n \in \mathbb{N}$ tali che:

$$2\pi k = 2\pi n \sqrt{\frac{2b + mc^2}{mc^2}},$$

dove n rappresenta il numero di rivoluzioni complete (intendendosi per rivoluzione completa una variazione di 2π dell'angolo θ) e k il corrispondente numero di passaggi successivi al pericentro (o all'apocentro) necessari a che l'orbita si chiuda. Se l'orbita non si chiude ad ogni rivoluzione essa assume l'usuale andamento “a rosetta”. Il periodo:

$$\Delta\theta \equiv 2\pi \sqrt{\frac{mc^2}{2b + mc^2}}$$

rappresenta l'angolo spazzato dal raggio vettore fra due passaggi consecutivi al pericentro (o all'apocentro).

Una applicazione notevole dei risultati ottenuti si ha in meccanica celeste, relativamente allo studio del moto orbitale del pianeta Mercurio. Si può infatti dimostrare che per tenere conto di particolari effetti dinamici previsti dalla teoria delle Relatività Generale di A. Einstein è necessario introdurre sull'usuale potenziale newtoniano un piccolo termine correttivo inversamente proporzionale al quadrato della distanza:

$$U(\rho) = \frac{MmG}{\rho} + \frac{\lambda}{\rho^2}$$

essendo G la costante di gravitazione universale, λ una costante reale tale che $|\lambda| \ll MmG$ ed M, m le masse del Sole e del pianeta rispettivamente. L'orbita del pianeta non risulta chiusa, per cui la legge kepleriana delle orbite ellittiche deve considerarsi solo come una prima approssimazione.

Nel caso che l'energia meccanica totale del sistema sia uguale a zero, se si assume il moto iniziale progressivo in u l'orbita fino al punto di inversione $u = u_+$ si ottiene dall'integrale di Weierstrass (C.32) con u_+ dato dalla (C.31), $u_- = 0$ e $u(\theta_0), u(\theta) \in (0, u_+]$. La sostituzione $u = u_+ \sin^2(\lambda/2)$, $\lambda \in (0, \pi]$, porge allora:

$$\sqrt{\frac{2b + mc^2}{mc^2}}(\theta - \theta_0) = \lambda(\theta) - \lambda(\theta_0).$$

La successiva fase retrograda viene invece descritta per mezzo di:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2b+mc^2}{mc^2}}(\theta-\theta_0) &= \int_{u(\theta_0)}^{u_+} \frac{du}{\sqrt{(u_+-u)(u-u_-)}} - \int_{u_+}^{u(\theta)} \frac{du}{\sqrt{(u_+-u)(u-u_-)}} = \\ &= \pi - \lambda(\theta_0) + \int_{u_+}^{u(\theta)} \frac{du}{\sqrt{(u_+-u)(u-u_-)}}\end{aligned}$$

che diventa:

$$\sqrt{\frac{2b+mc^2}{mc^2}}(\theta-\theta_0) = \pi - \lambda(\theta_0) - \int_{\pi}^{\lambda(\theta)} \frac{\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)}{|\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)|} d\lambda = \lambda(\theta) - \lambda(\theta_0)$$

con il cambiamento di variabile $u = u_+ \sin^2(\lambda/2)$, $\lambda \in [\pi, 2\pi)$. Vale in ogni caso:

$$\lambda(\theta) = \lambda(\theta_0) + \sqrt{\frac{2b+mc^2}{mc^2}}(\theta-\theta_0) \in (0, 2\pi) \quad (C.34)$$

con $\lambda(\theta_0) \in (0, \pi]$ determinato da $u(\theta_0) = u_+ \sin^2(\lambda(\theta_0)/2)$, per cui:

$$u(\theta) = u_+ \sin^2 \left[\frac{\lambda(\theta_0)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2b+mc^2}{mc^2}}(\theta-\theta_0) \right]$$

ed infine:

$$\rho_o(\theta) = \frac{1}{u_+} \sin^{-2} \left[\frac{\lambda(\theta_0)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2b+mc^2}{mc^2}}(\theta-\theta_0) \right].$$

È immediato verificare dalla (C.34) che $\theta \in (\theta_-, \theta_+)$, con:

$$\theta_- \equiv \theta_0 - \lambda(\theta_0) \sqrt{\frac{mc^2}{2b+mc^2}}, \quad \theta_+ \equiv \theta_0 + [2\pi - \lambda(\theta_0)] \sqrt{\frac{mc^2}{2b+mc^2}},$$

e che:

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_-^+} \rho_o(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \theta_+^-} \rho_o(\theta) = +\infty$$

mentre la distanza minima dal centro di forza viene raggiunta per $\theta = (\theta_+ + \theta_-)/2$:

$$\rho_o\left(\frac{\theta_+ + \theta_-}{2}\right) = \frac{1}{u_+}.$$

La variazione complessiva dell'angolo θ :

$$\Delta\theta(0) \equiv 2\pi \sqrt{\frac{mc^2}{2b+mc^2}}$$

può scriversi $\Delta\theta(0) = \pi + \varphi$, dove φ è l'angolo che misura la deflessione subita dal punto materiale mentre questo percorre la propria orbita completa.

Qualora $E > 0$ ed il moto iniziale sia progressivo in u , si procede in modo analogo. Nella fase progressiva valgono la (C.32) e la (C.31), con $u_- < 0$ e $u(\theta_0), u(\theta) \in (0, u_+]$. Posto $u = u_- + (u_+ - u_-) \sin^2(\lambda/2)$, $\lambda \in (2 \arcsin \sqrt{-u_-/(u_+ - u_-)}, \pi]$, si ha:

$$\sqrt{\frac{2b + mc^2}{mc^2}}(\theta - \theta_0) = \int_{\lambda(\theta_0)}^{\lambda(\theta)} \frac{\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)}{|\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)|} d\lambda = \lambda(\theta) - \lambda(\theta_0) .$$

Nella successiva fase retrograda è invece:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2b + mc^2}{mc^2}}(\theta - \theta_0) &= \int_{u(\theta_0)}^{u_+} \frac{du}{\sqrt{(u_+ - u)(u - u_-)}} - \int_{u_+}^{u(\theta)} \frac{du}{\sqrt{(u_+ - u)(u - u_-)}} = \\ &= \pi - \lambda(\theta_0) - \int_{u_+}^{u(\theta)} \frac{du}{\sqrt{(u_+ - u)(u - u_-)}} \end{aligned}$$

che con la sostituzione $u = u_- + (u_+ - u_-) \sin^2(\lambda/2)$, $\lambda \in [\pi, 2\pi - 2 \arcsin \sqrt{\frac{-u_-}{u_+ - u_-}})$, diventa:

$$\sqrt{\frac{2b + mc^2}{mc^2}}(\theta - \theta_0) = \pi - \lambda(\theta_0) - \int_{\pi}^{\lambda(\theta)} \frac{\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)}{|\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)|} d\lambda = \lambda(\theta) - \lambda(\theta_0) .$$

In ogni caso risulta:

$$\lambda(\theta) = \lambda(\theta_0) + \sqrt{\frac{2b + mc^2}{mc^2}}(\theta - \theta_0) \quad (C.35)$$

con $\lambda(\theta_0)$ determinato da:

$$u(\theta_0) = u_- + (u_+ - u_-) \sin^2(\lambda(\theta_0)/2) , \quad \lambda(\theta_0) \in \left(2 \arcsin \sqrt{\frac{-u_-}{u_+ - u_-}}, \pi \right]$$

e:

$$\lambda(\theta) \in \left(2 \arcsin \sqrt{\frac{-u_-}{u_+ - u_-}}, 2\pi - 2 \arcsin \sqrt{\frac{-u_-}{u_+ - u_-}} \right) . \quad (C.36)$$

Pertanto:

$$\rho_o(\theta) = \left[u_- + (u_+ - u_-) \sin^2 \left(\frac{\lambda(\theta_0)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2b + mc^2}{mc^2}}(\theta - \theta_0) \right) \right]^{-1} . \quad (C.37)$$

Dalle (C.35) e (C.36) si verifica che $\theta \in (\theta_-, \theta_+)$, essendo:

$$\begin{cases} \theta_- \equiv \theta_0 + \left(2 \arcsin \sqrt{-u_-/(u_+ - u_-)} - \lambda(\theta_0) \right) \sqrt{\frac{mc^2}{2b + mc^2}} \\ \theta_+ \equiv \theta_0 + \left(2\pi - 2 \arcsin \sqrt{-u_-/(u_+ - u_-)} - \lambda(\theta_0) \right) \sqrt{\frac{mc^2}{2b + mc^2}} \end{cases}$$

e che:

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_{-+}} \rho_o(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \theta_{+-}} \rho_o(\theta) = +\infty ,$$

mentre la distanza minima dal centro di forza viene raggiunta per $\theta = (\theta_- + \theta_+)/2$:

$$\rho_o\left(\frac{\theta_- + \theta_+}{2}\right) = \frac{1}{u_+} .$$

La variazione totale dell'angolo θ :

$$\Delta\theta(E) \equiv [2\pi - 4 \arcsin \sqrt{-u_-(u_+ - u_-)}] \sqrt{\frac{mc^2}{2b + mc^2}}$$

ha lo stesso significato già discusso per $E = 0$. Si osservi che $\Delta\theta(E_2) < \Delta\theta(E_1) \forall E_1, E_2 \geq 0, E_1 < E_2$, conformemente al fatto che punti materiali di energia maggiore subiscono una deflessione minore. L'equazione dell'orbita nel caso di un moto inizialmente retrogrado in u si ottiene dalla (C.37) per mezzo della sostituzione $(\theta - \theta_0) \rightarrow -(\theta - \theta_0)$.

Analisi di Weierstrass applicata all'equazione del moto radiale

Si vuole ora applicare la discussione di Weierstrass al calcolo della soluzione $(\rho(t), \theta(t))$ per il potenziale (C.30). Per fissare le idee e semplificare nel contempo i calcoli, si assume $a = 0$ e $b + mc^2/2 < 0$, e si considerano soluzioni di energia negativa. L'equazione di conservazione dell'energia meccanica totale risulta in questo caso:

$$\frac{m}{2} \dot{\rho}(t)^2 + W_{\text{eff}}[\rho(t)] = E$$

con il potenziale efficace dato da:

$$W_{\text{eff}}(\rho) \equiv \left(b + \frac{mc^2}{2}\right) \frac{1}{\rho^2} .$$

Prima di procedere alla determinazione della soluzione radiale $\rho(t)$ conviene sottolineare che la soluzione massimale sarà definita in un intervallo limitato. Per $E < 0$ si ha infatti inversione del moto radiale nel punto:

$$\rho^* \equiv \sqrt{\frac{1}{E} \left(b + \frac{mc^2}{2}\right)}$$

e l'intervallo di tempo t^* necessario a che il punto materiale si sposti da $\rho = \rho^*$ a $\rho = 0$ si scrive:

$$t^* = -\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\rho^*}^0 \left[E - \left(b + \frac{mc^2}{2}\right) \frac{1}{\rho^2} \right]^{-1/2} d\rho = -\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\rho^*}^0 \frac{\rho}{\sqrt{|b + mc^2/2| - |E|\rho^2}} d\rho$$

ovvero:

$$t^* = \frac{1}{|E|} \sqrt{\frac{m}{2}} \sqrt{|b + mc^2/2|}.$$

Il moto da $\rho = \rho^*$ a $\rho = 0$ avviene dunque in un intervallo di tempo *finito* e la soluzione non è ulteriormente prolungabile, essendo $\rho = 0$ un punto singolare per il potenziale e per il campo di forze.

Ciò premesso, sia $\rho(t_0) \in (0, \rho^*]$, $t_0 \in \mathbb{R}$, la condizione iniziale e si assuma che all'istante iniziale la velocità radiale del punto abbia segno positivo. Il moto del sistema consta allora di una fase progressiva (nel passato e nel futuro) e di una retrograda (nel futuro). Per quanto concerne la fase progressiva si ha l'integrale di Weierstrass:

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\rho(t_0)}^{\rho(t)} \left[E - \left(b + \frac{mc^2}{2} \right) \frac{1}{\rho^2} \right]^{-1/2} d\rho = \\ &= \frac{1}{|E|} \sqrt{\frac{m}{2}} \left[\sqrt{|b + mc^2/2| - |E|\rho(t_0)^2} - \sqrt{|b + mc^2/2| - |E|\rho(t)^2} \right] \end{aligned}$$

per ogni $\rho(t) \in (0, \rho^*]$ e quindi:

$$\begin{aligned} \forall t \in \left(t_0 - \frac{1}{|E|} \sqrt{\frac{m}{2}} \left(\sqrt{|b + mc^2/2|} - \sqrt{|b + mc^2/2| - |E|\rho(t_0)^2} \right), \right. \\ \left. t_0 + \frac{1}{|E|} \sqrt{\frac{m}{2}} \sqrt{|b + mc^2/2| - |E|\rho(t_0)^2} \right]. \end{aligned} \quad (C.38)$$

La soluzione radiale è quindi data dall'espressione:

$$\rho(t)^2 = \frac{1}{|E|} |b + mc^2/2| - \frac{1}{|E|} \left[\sqrt{|b + mc^2/2| - |E|\rho(t_0)^2} - |E| \sqrt{2/m} (t - t_0) \right]^2 \quad (C.39)$$

con t variabile nell'intervallo (C.38). Quanto alla fase retrograda si scrive invece, $\forall \rho(t) \in (0, \rho^*]$:

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\rho(t_0)}^{\rho^*} \left[E - \left(b + \frac{mc^2}{2} \right) \frac{1}{\rho^2} \right]^{-1/2} d\rho - \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\rho^*}^{\rho(t)} \left[E - \left(b + \frac{mc^2}{2} \right) \frac{1}{\rho^2} \right]^{-1/2} d\rho = \\ &= \frac{1}{|E|} \sqrt{\frac{m}{2}} \left[\sqrt{|b + mc^2/2| - |E|\rho(t_0)^2} + \sqrt{|b + mc^2/2| - |E|\rho(t)^2} \right] \end{aligned}$$

per cui:

$$\begin{aligned} t \in \left[t_0 + \frac{1}{|E|} \sqrt{\frac{m}{2}} \sqrt{|b + mc^2/2| - |E|\rho(t_0)^2}, \right. \\ \left. t_0 + \frac{1}{|E|} \sqrt{\frac{m}{2}} \left(\sqrt{|b + mc^2/2|} + \sqrt{|b + mc^2/2| - |E|\rho(t_0)^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

e su tale intervallo vale di nuovo l'espressione (C.39). In conclusione, la legge oraria radiale è data da (C.39) sull'intervallo:

$$\left(t_0 - \frac{1}{|E|} \sqrt{\frac{m}{2}} \left(\sqrt{|b + mc^2/2|} - \sqrt{|b + mc^2/2| - |E|\rho(t_0)^2} \right), \right. \\ \left. t_0 + \frac{1}{|E|} \sqrt{\frac{m}{2}} \left(\sqrt{|b + mc^2/2|} + \sqrt{|b + mc^2/2| - |E|\rho(t_0)^2} \right) \right) \equiv (t_-, t_+).$$

e si verifica immediatamente che $\lim_{t \rightarrow t_-} \rho(t) = \lim_{t \rightarrow t_+} \rho(t) = 0$.

La legge oraria angolare segue dalla relazione:

$$\theta(t) - \theta(t_0) = c \int_{t_0}^t \frac{1}{\rho(t)^2} dt = c \int_{t_0}^t \frac{1}{\alpha - \beta[\gamma - \delta(t - t_0)]^2} dt \quad (C.40)$$

essendosi posto:

$$\alpha \equiv \frac{1}{|E|} |b + mc^2/2| \quad \beta \equiv \frac{1}{|E|} \quad \gamma \equiv \sqrt{|b + mc^2/2| - |E|\rho(t_0)^2} \quad \delta \equiv |E| \sqrt{2/m}$$

cosicchè $t_{\pm} = t_0 + \frac{\gamma}{\delta} \pm \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ e $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \gamma < 1$. Con il cambiamento di variabile $\tau = [\gamma - \delta(t - t_0)] \sqrt{\beta/\alpha}$, $\tau \in (-1, +1)$, la (C.40) porge:

$$\theta(t) - \theta(t_0) = -\frac{c}{2\alpha\delta} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \left[\ln \left(\frac{1 + \tau(t)}{1 - \tau(t)} \right) - \ln \left(\frac{1 + \gamma\sqrt{\beta/\alpha}}{1 - \gamma\sqrt{\beta/\alpha}} \right) \right]$$

definita $\forall t \in (t_-, t_+)$. Inoltre:

$$\lim_{t \rightarrow t_-} \theta(t) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow t_+} \theta(t) = +\infty.$$

Conclusione: in un intervallo di tempo *finito*, di durata:

$$\frac{2}{|E|} \sqrt{\frac{m}{2}} \sqrt{|b + mc^2/2|},$$

il punto materiale tende al centro del campo tanto nel futuro quanto nel passato e nel far questo compie infinite rivoluzioni complete. L'orbita è spiraliforme.

□ **Campo centrale elastico con correzione inversamente proporzionale al cubo della distanza.**

Si tratta di un altro esempio di potenziale per il quale l'equazione delle orbite può integrarsi esplicitamente in termini di funzioni elementari.

Un altro caso in cui l'equazione delle orbite risulta integrabile per mezzo di funzioni elementari è quello del campo centrale descritto dal potenziale:

$$U(\rho) = -a\rho^2 - \frac{b}{\rho^2} \quad (C.41)$$

con a e b costanti reali arbitrarie. Nell'ipotesi che la costante delle aree sia diversa da zero, il problema di Weierstrass per le orbite diviene:

$$\frac{mc^2}{2} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \tilde{W}_{\text{eff}}(u) = E$$

dove $\tilde{W}_{\text{eff}}(u) = a/u^2 + (b + mc^2/2)u^2$ è l'energia potenziale efficace del sistema e $u \equiv 1/\rho$. Si possono distinguere 9 casi diversi in relazione al segno assunto dai coefficienti a e $b + mc^2/2$. Il grafico del potenziale è illustrato nella figura allegata e la discussione di Weierstrass viene condotta come negli esempi precedenti. Ci si limita a sottolineare quanto segue:

- l'integrale di W. assume la forma:

$$\theta - \theta_0 = \sqrt{\frac{mc^2}{2}} \int_{u(0)}^{u(\theta)} \frac{1}{\sqrt{E - \tilde{W}_{\text{eff}}}} du$$

e moltiplicando numeratore e denominatore dell'integrando per u :

$$\theta - \theta_0 = \sqrt{\frac{mc^2}{2}} \int_{u(0)}^{u(\theta)} \frac{u}{\sqrt{-(b + mc^2/2)u^4 + Eu^2 - a}} du ,$$

espressione che si integra facilmente per mezzo del cambiamento di variabile $\xi = u^2$, $u > 0$:

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{mc^2}{2}} \int_{u(0)}^{u(\theta)} \frac{1}{\sqrt{-(b + mc^2/2)\xi^2 + E\xi - a}} d\xi ;$$

- come è immediato verificare, il potenziale efficace ammette punti critici soltanto per $b + mc^2/2 > 0$, $a > 0$ e $b + mc^2/2 < 0$, $a < 0$. In ambo i casi il punto critico è unico, trattandosi di un minimo relativo proprio per $a > 0$ e di un massimo relativo proprio per $a < 0$,
- per $b + mc^2/2 = 0$, $a = 0$, il potenziale efficace risulta costante a zero;
- in ogni altro caso W_{eff} è funzione monotona nell'intervallo $(0, +\infty]$. La funzione $\rho(\theta)$ risulta periodica soltanto per $b + mc^2/2 > 0$, $a > 0$.

□ **Campo centrale elastico.**

Il potenziale del campo centrale elastico è dato dall'espressione:

$$U(\rho) = -\frac{k}{2}\rho^2, \quad \text{con } k > 0,$$

cui corrisponde l'energia potenziale:

$$W(\rho) = \frac{k}{2}\rho^2.$$

Nell'ipotesi che la costante delle aree c sia diversa da zero, l'equazione delle orbite si ottiene risolvendo il problema di Weierstrass:

$$\frac{mc^2}{2} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{mc^2}{2} u^2 + \frac{k}{2} \frac{1}{u^2} = E$$

dove si è posto al solito $u(\theta) \equiv 1/\rho(\theta) > 0$ e la costante E rappresenta l'energia meccanica totale del sistema. L'energia potenziale efficace $\tilde{W}_{\text{eff}}(u) \equiv \frac{mc^2}{2} u^2 + \frac{k}{2} \frac{1}{u^2}$ ammette in $\{u > 0\}$ un unico punto critico $u_* = (k/mc^2)^{1/4}$, che in effetti è minimo assoluto della funzione. Dunque:

$$E \geq \tilde{W}_{\text{eff}}(u_*) = \frac{mc^2}{2} \left(\frac{k}{mc^2} \right)^{1/2} + \frac{k}{2} \left(\frac{mc^2}{2} \right)^{1/2} = (kmc^2)^{1/2}.$$

Per $E > (kmc^2)^{1/2}$ si ha immediatamente che $u(\theta)$ è una funzione periodica di θ . Indicati con θ_0 ed u_0 i valori iniziali delle variabili θ e u e supponendo che il moto iniziale sia progressivo in u , risulta:

$$\frac{du}{d\theta}(\theta) = \sqrt{\frac{2}{mc^2}} \sqrt{E - \frac{k}{2} \frac{1}{u^2} - \frac{mc^2}{2} u^2}$$

e l'integrale di Weierstrass diviene:

$$\theta - \theta_0 = \sqrt{\frac{mc^2}{2}} \int_{u_0}^u \left[E - \frac{k}{2} \frac{1}{u^2} - \frac{mc^2}{2} u^2 \right]^{-1/2} du$$

ovvero:

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{mc^2}{2}} \int_{u_0}^u \left[-\frac{mc^2}{2} u^4 + Eu^2 - \frac{k}{2} \right]^{-1/2} 2u du.$$

Con il cambiamento di variabile $u \in \mathbb{R}_+ \longrightarrow \lambda \in u^2 \in \mathbb{R}_+$ si deduce:

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{mc^2}{2}} \int_{u_0^2}^{u^2} \left[-\frac{mc^2}{2} \lambda^2 + E\lambda - \frac{k}{2} \right]^{-1/2} d\lambda$$

che può anche scriversi nella forma:

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2} \int_{u_0^2}^{u^2} \frac{1}{\sqrt{(\lambda_+ - \lambda)(\lambda - \lambda_-)}} d\lambda$$

essendo:

$$\lambda_{\pm} \equiv \frac{E}{mc^2} \pm \sqrt{\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - \frac{k}{mc^2}}$$

con $0 < \lambda_- < \lambda_+$, a causa della condizione $E > (kmc^2)^{1/2}$. L'ulteriore cambiamento di variabile $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+] \subset \mathbb{R}_+ \longrightarrow z \in [0, \pi/2]$ definito da:

$$\lambda = \lambda_- + (\lambda_+ - \lambda_-) \sin^2 z$$

porge infine:

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2} \int_{z_0}^z \frac{2(\lambda_+ - \lambda_-) \sin z \cos z}{(\lambda_+ - \lambda_-) |\sin z \cos z|} = z - z_0 .$$

Per $E = (kmc^2)^{1/2}$ la soluzione dell'equazione delle orbite risulta semplicemente $u(\theta) = u_0$ $\forall \theta \in \mathbb{R}$ e corrisponde ad un'orbita circolare di raggio $1/u_0$.