

Deviazione verso oriente di un grave in caduta libera in un sistema di riferimento terrestre.

Si vuole dimostrare che un grave in caduta libera in prossimità della superficie terrestre non cade lungo la verticale locale, ma subisce una piccola deviazione verso l'oriente geografico. Tale deviazione, dopo un intervallo di tempo t dall'inizio del moto, corrisponde ad una distanza percorsa verso Est approssimativamente data da

$$g \cos \lambda \frac{\omega}{3} t^3 ,$$

in cui g , λ e ω sono rispettivamente il modulo dell'accelerazione gravitazionale locale, la latitudine locale e la velocità angolare scalare della Terra (nel suo moto sidereo, relativo cioè alle stelle lontane).

Premessa

Nella discussione del fenomeno si introducono una serie di assunti che se da un lato semplificano la trattazione, dall'altro consentono di ottenere risultati di precisione comunque adeguata per tutti gli scopi pratici.

- **1^a Ipotesi.** *La Terra è una sfera di centro C .* Benché non essenziale per gli scopi del presente studio, l'ipotesi non risulta corretta, in quanto il globo terrestre presenta un leggero schiacciamento ai poli dovuto al moto di rotazione attorno al suo asse; una migliore approssimazione consiste nel descrivere la superficie della Terra come un ellissoide di rotazione, con il semiasse polare leggermente più piccolo di quello equatoriale (circa 6357 km contro 6378).
- **2^a Ipotesi.** *La terna di riferimento $Cx'y'z'$ con l'origine nel centro C e gli assi coordinati Cx' , Cy' , Cz' diretti verso le stelle distanti è inerziale.* L'osservazione astronomica dimostra che un'ottima terna galileiana è quella la cui origine si situa nel centro S del Sole ed i cui assi risultano orientati secondo le stelle lontane (o loro equivalenti, quali galassie o quasar). Si ha allora dal teorema di Coriolis che il riferimento $Cx'y'z'$ non può essere inerziale se non per tempi piuttosto brevi, stimabili nell'ordine di qualche giorno solare. Ciò per il fatto che il centro C è animato da moto accelerato rispetto alla terna centrata in S : in prima approssimazione infatti, il centro della Terra è identificabile con il suo baricentro e si muove attorno al Sole secondo le leggi di Keplero; a questo si aggiunga poi che in realtà la Terra e la Luna ruotano su orbite pressoché ellittiche attorno al comune baricentro, e che è tale baricentro — non C — a compiere il moto kepleriano di rivoluzione attorno al Sole. Tutti i moti descritti implicano una accelerazione di C rispetto ad S e, di conseguenza, una non inerzialità della terna $Cx'y'z'$, nella quale insorgono corrispondenti forze fittizie di trascinamento. Si ricorda, per completezza, che le sollecitazioni responsabili del moto accelerato di C rispetto ad S sono le forze gravitazionali esercitate sulla Terra dal Sole e dalla Luna, e che le stesse sollecitazioni gravitazionali lunisolari tendono parzialmente ad elidere quelle fittizie. Le forze in gioco si compensano esattamente nel solo baricentro C , mentre altrove la cancellazione è soltanto parziale, risultando in generale tanto più incompleta al crescere della distanza da C . Le forze nette residue sono responsabili, tra l'altro, dei fenomeni di marea che si registrano sulla superficie della Terra e vengono perciò denominate **forze mareali**.

– **3^a Ipotesi.** *Il moto della Terra rispetto alla terna $Cx'y'z'$ è di pura rotazione, con velocità angolare costante attorno ad un asse fisso. L'asse fisso di rotazione si identifica con il cosiddetto asse terrestre e le sue intersezioni con la sfera terrestre individuano i poli geografici Nord e Sud.* In realtà anche supponendo, il che non è del tutto lecito, che la Terra possa essere descritta come un sistema rigido con punto fisso C , il suo vettore velocità angolare istantanea rispetto a $Cx'y'z'$ — $\vec{\omega}$ — non risulta affatto costante. Il primo luogo, la Terra esegue moti di **libera precessione**, come qualsiasi corpo rigido con punto fisso non soggetto a sollecitazioni esterne (moto per inerzia) e dotato di struttura giroscopica rispetto a tale punto; in conseguenza di ciò l'asse terrestre si muove descrivendo una sorta di doppio cono ideale, con vertice in C , in un intervallo di tempo pari a circa 433 giorni (si ricorda a questo proposito che il periodo delle precessioni libere stimabile in base al modello della Terra rigida — 305 giorni circa — differisce sensibilmente da quello stabilito per mezzo dell'osservazione astronomica. L'usuale interpretazione della discrepanza consiste precisamente nel riconoscere come scorretto l'assunto della rigidità del pianeta, che al proprio interno risulta in larga parte costituito da fluidi molto viscosi (mantello, nucleo esterno).

In secondo luogo, se la Terra fosse un corpo rigido perfettamente sferico e con distribuzione perfettamente sferica di massa il campo di forze mareali agente sul pianeta avrebbe momento risultante pressoché nullo rispetto al centro C , per cui il moto del pianeta in $Cx'y'z'$ risulterebbe inerziale, limitandosi ad una semplice rotazione stazionaria. In realtà la presenza del rigonfiamento equatoriale, oltre ad essere responsabile dei moti di libera precessione, fa sì che il momento in C delle forze di marea non sia trascurabile ed induca sulla Terra un ulteriore moto di precessione e nutazione: la posizione dell'asse terrestre è determinata dalla sovrapposizione di due moti, il primo dei quali (precessione) vede l'asse mantenere costante la propria inclinazione sul piano dell'eclittica, ma ruotare uniformemente attorno alla normale a tale piano in un periodo di circa 25'780 anni (moto responsabile della cosiddetta **precessione degli equinozi**), mentre il secondo consiste in una oscillazione periodica dell'inclinazione dello stesso asse rispetto all'eclittica, con un periodo caratteristico di 18.6133 anni circa (nutazione)⁽¹⁾.

I moti di precessione, libera o mareale, e di nutazione non modificano in modo significativo il modulo del vettore $\vec{\omega}$. Tuttavia la non perfetta rigidità della Terra dà luogo a fenomeni dissipativi che tendono a ridurre progressivamente tale modulo, e con esso la durata del giorno siderale $2\pi/|\vec{\omega}|$. Si tratta di fenomeni legati all'effetto combinato delle maree oceaniche e della rotazione terrestre: semplificando al massimo, i sollevamenti mareali degli oceani, causa l'inerzia e la viscosità delle acque, vengono parzialmente trascinati nel moto di rotazione del pianeta e l'attrazione gravitazionale che su di essi esercitano il Sole e la Luna determina una sorta di azione di “frenamento” sulle masse d'acqua e di conseguenza sull'intero pianeta. L'alterazione del periodo di

(1) In realtà il moto di nutazione viene descritto come una sovrapposizione di moti periodici, il cui periodo varia da un massimo di 18.6133 anni per il moto di maggiore ampiezza a circa 14 giorni per quello meno pronunciato. Il ciclo principale di 18.6133 anni è associato all'azione gravitazionale della luna e coincide con quello che governa le eclissi del satellite (c.d. ciclo di Saros). L'effetto è infatti attribuibile all'inclinazione del piano orbitale della luna rispetto al piano dell'eclittica.

rotazione della Terra (giorno siderale) che ne segue è tuttavia molto piccola, dell'ordine di $2 \cdot 10^{-3}$ secondi per secolo.

Ai moti sopradescritti se ne sovrappongono altri, di entità assai modesta e sostanzialmente irregolari, dovuti alla variazione nella distribuzione di massa all'interno e sulla superficie della Terra (modifiche nella distribuzione delle coltri glaciali, sollevamenti isostatici postglaciali, derivate continentali e processi tettonici in genere).

- **4^a Ipotesi.** *I moti di caduta considerati hanno carattere locale rispetto ad una terna di riferimento solidale alla Terra.* Ciò significa che fissato un sistema di riferimento solidale alla Terra, di regola con l'origine O sulla superficie del pianeta, i soli moti presi in esame sono quelli che avvengono nell'intorno di O e conseguentemente su intervalli di tempo abbastanza brevi da non violare tale condizione.

Equazione fondamentale della meccanica terrestre

Fatte queste premesse, si consideri una qualsiasi terna di riferimento $Oxyz$ solidale alla Terra, di versori $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$, ed un punto materiale P di massa m . Se x_1, x_2, x_3 sono le coordinate cartesiane di P relative ad $Oxyz$, vale l'identità vettoriale:

$$P - C = P - O + O - C = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i + O - C$$

che derivata rispetto al tempo porge il teorema dei moti relativi:

$$\dot{P} = \dot{O} + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{d\hat{e}_i}{dt} + \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \hat{e}_i = \vec{v}_T + \vec{v}_R$$

essendo $\vec{v}_R = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \hat{e}_i$ la velocità di P relativa ad $Oxyz$ e \vec{v}_T la velocità di trascinamento dello stesso punto. Una ulteriore derivazione in t conduce al teorema di Coriolis:

$$\ddot{P} = \ddot{O} + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{d^2 \hat{e}_i}{dt^2} + 2 \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \frac{d\hat{e}_i}{dt} + \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_i \hat{e}_i = \vec{a}_T + \vec{a}_C + \vec{a}_R$$

in cui sono state evidenziate le espressioni dell'accelerazione di trascinamento, complementare e relativa ad $Oxyz$ del punto P , rispettivamente:

$$\vec{a}_T = \ddot{O} + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{d^2 \hat{e}_i}{dt^2} \quad \vec{a}_C = 2 \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \frac{d\hat{e}_i}{dt} \quad \vec{a}_R = \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_i \hat{e}_i .$$

Tenuto conto delle formule di Poisson

$$\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_i \quad i = 1, 2, 3,$$

che definiscono il vettore velocità angolare istantanea $\vec{\omega}$ della terna rotante rispetto a quella fissa $Cxyz$ — ovvero, equivalentemente, della Terra rispetto a $Cxyz$ —, si ottiene per le derivate seconde in t dei versori \hat{e}_i l'espressione equivalente:

$$\frac{d^2 \hat{e}_i}{dt^2} = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \wedge \hat{e}_i) = \dot{\vec{\omega}} \wedge \hat{e}_i + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \hat{e}_i)$$

in modo che l'accelerazione di Coriolis e quella di trascinamento di P assumono la forma

$$\vec{a}_C = 2 \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \vec{\omega} \wedge \hat{e}_i = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R$$

e

$$\begin{aligned} \vec{a}_T &= \ddot{O} + \sum_{i=1}^3 x_i [\dot{\vec{\omega}} \wedge \hat{e}_i + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \hat{e}_i)] = \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (O - C)] + \sum_{i=1}^3 x_i [\dot{\vec{\omega}} \wedge \hat{e}_i + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \hat{e}_i)] \\ &= \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (O - C)] + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)] . \end{aligned}$$

Se \vec{F} indica il risultante delle sollecitazioni agenti su P , la seconda legge della dinamica per tale punto si scrive

$$m\ddot{P} = \vec{F}$$

ovvero, applicando il teorema di Coriolis ed evidenziando il termine contenente l'accelerazione relativa,

$$\vec{F} = m\vec{a}_T + m\vec{a}_C + m\vec{a}_R \quad \implies \quad m\vec{a}_R = \vec{F} - m\vec{a}_T - m\vec{a}_C .$$

Quella ottenuta non è altro che l'equazione del moto di P relativa alla terna non inerziale $Oxyz$, nella quale si identificano le forze fittizie di trascinamento $-m\vec{a}_T$ e di Coriolis $-m\vec{a}_C$; si ha pertanto:

$$m\vec{a}_R = \vec{F} - m\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (O - C)] - m[\dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)]] - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R .$$

Nella fattispecie, indicata con M la massa della Terra e con G la costante gravitazionale, la sola forza applicata a P è quella gravitazionale dovuta alla Terra:

$$\vec{F} = -\frac{mMG}{|P - C|^3}(P - C)$$

per cui l'equazione del moto di P si riduce a

$$m\vec{a}_R = -\frac{mMG}{|P - C|^3}(P - C) - m\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (O - C)] - m[\dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)]] - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R .$$

L'equazione ottenuta si semplifica drasticamente in virtù delle ipotesi assunte sul moto della Terra e sulla natura "locale" dei moti di P considerati, tenuto conto che l'origine O è un punto appartenente alla superficie terrestre. A questo proposito si premettono alcune osservazioni.

(i) L'ipotesi che $\vec{\omega}$ sia costante implica che si abbia $\dot{\vec{\omega}} = 0$ e conseguentemente:

$$-m\dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O) = 0 \wedge (P - O) = 0 ;$$

vale la pena di notare come anche in assenza di questa ipotesi il vettore $\dot{\vec{\omega}}$ risulti comunque estremamente piccolo in modulo, in quanto assai lentamente variabile nel

tempo. Per piccoli moti nell'intorno dell'origine O il termine $-m\dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O)$ assumerebbe dunque valori trascurabili e potrebbe essere ugualmente ignorato nell'equazione del moto. Più precisamente si avrebbe, considerando con buona approssimazione le sole precessioni libere dell'asse terrestre

$$|\dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O)| \leq |\dot{\vec{\omega}}||P - O| = |\vec{\omega}_{prec.lib.} \wedge \vec{\omega}||P - O| \leq |\vec{\omega}_{prec.lib.}||\vec{\omega}||P - O|$$

e poiché la velocità angolare siderale⁽²⁾ della Terra ha modulo

$$|\vec{\omega}| = \frac{2\pi}{86164} = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$$

mentre per quella delle precessioni libere⁽³⁾ vale

$$|\vec{\omega}_{prec.lib.}| = \frac{2\pi}{433 \cdot 86164} = 1.68 \cdot 10^{-7} \text{ rad s}^{-1},$$

risulterebbe

$$|\dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O)| \leq 7.29 \cdot 10^{-5} \cdot 1.68 \cdot 10^{-7} |P - O| = 1.23 \cdot 10^{-11} |P - O|$$

con $|P - O|$ espresso in metri.

(ii) Il termine $-\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (P - O))$ si stima in modo analogo:

$$|-\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (P - O))| \leq |\vec{\omega}|^2 |P - O| = (7.29 \cdot 10^{-5})^2 |P - O| = 5.31 \cdot 10^{-9} |P - O|.$$

(iii) Il termine di interazione gravitazionale si approssima con una espressione indipendente da P :

$$-\frac{mMG}{|P - C|^3}(P - C) \simeq -\frac{mMG}{|O - C|^3}(O - C)$$

per $|P - O|$ piccolo. Posto $x = O - C$, $\varepsilon = P - O$ ed assunto $|\varepsilon| \ll |x|$ vale infatti:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x + \varepsilon}{|x + \varepsilon|^3} - \frac{x}{|x|^3} \right| &= \left| \frac{x + \varepsilon}{|x + \varepsilon|^3} - \frac{x}{|x + \varepsilon|^3} + \frac{x}{|x + \varepsilon|^3} - \frac{x}{|x|^3} \right| \leq \\ &\leq \frac{|\varepsilon|}{|x + \varepsilon|^3} + |x| \left| \frac{1}{|x + \varepsilon|^3} - \frac{1}{|x|^3} \right| \leq \frac{|\varepsilon|}{(|x| - |\varepsilon|)^3} + |x| \left[\frac{1}{(|x| - |\varepsilon|)^3} - \frac{1}{|x|^3} \right] \end{aligned}$$

dove per $\theta \in (0, 1)$ opportuno, applicando il teorema del valor medio, risulta

$$\frac{1}{(|x| - |\varepsilon|)^3} - \frac{1}{|x|^3} = -3 \frac{1}{(|x| - \theta|\varepsilon|)^4} (-|\varepsilon|) = \frac{3|\varepsilon|}{(|x| - \theta|\varepsilon|)^4}$$

(2) La durata del giorno siderale è di circa 86164 secondi

(3) Una precessione libera completa si compie in 433 giorni siderei circa

e quindi

$$\begin{aligned} \left| \frac{x + \varepsilon}{|x + \varepsilon|^3} - \frac{x}{|x|^3} \right| &\leq \frac{|\varepsilon|}{(|x| - |\varepsilon|)^3} + \frac{3|\varepsilon||x|}{(|x| - \theta|\varepsilon|)^4} \leq \frac{|\varepsilon|}{(|x| - |\varepsilon|)^3} + \frac{3|\varepsilon||x|}{(|x| - |\varepsilon|)^4} = \\ &= |\varepsilon| \frac{4|x| - |\varepsilon|}{(|x| - |\varepsilon|)^4} = \frac{1}{|x|^2} \left(4 - \frac{|\varepsilon|}{|x|}\right) \left(1 - \frac{|\varepsilon|}{|x|}\right)^{-4} \frac{|\varepsilon|}{|x|}. \end{aligned}$$

Di qui, posto per brevità $\xi = |\varepsilon|/|x| \ll 1$, si deduce che

$$\left| -\frac{MG}{|P-C|^3}(P-C) + \frac{MG}{|O-C|^3}(O-C) \right| \leq \frac{MG}{|O-C|^2} (4 - \xi)(1 - \xi)^{-4} \xi$$

in cui $|O-C| = 6.37 \cdot 10^6$ è il raggio medio della Terra espresso in metri, $MG/|O-C|^2 \simeq 9.81 \text{ m s}^{-2}$ e $\xi = 1.57 \cdot 10^{-7} |P-O|$.

(iv) Per l'accelerazione di Coriolis vale infine la stima

$$|2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R| \leq 2|\vec{\omega}||\vec{v}_R| = 1.46 \cdot 10^{-4} |\vec{v}_R|,$$

mentre il termine residuo nell'equazione del moto soddisfa

$$\left| -\frac{MG}{|O-C|^3}(O-C) - \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (O-C)] \right| \simeq 9.81 \text{ m s}^{-2}.$$

In virtù delle precedenti maggiorazioni, è ora immediato verificare che per moti localizzati in prossimità dell'origine O :

$$|P-O| \leq 10^2 \text{ m}$$

una buona approssimazione dell'equazione del moto è data da

$$m\vec{a}_R = -\frac{mMG}{|O-C|^3}(O-C) - m\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (O-C)] - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R$$

ovvero da

$$m\vec{a}_R = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R \quad (1)$$

a patto di definire l'accelerazione gravitazionale locale come

$$\vec{g} = -\frac{MG}{|O-C|^3}(O-C) - \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (O-C)]. \quad (2)$$

L'equazione del moto ottenuta (1) è nota come **equazione fondamentale della meccanica terrestre**. Si sottolinea come per velocità \vec{v}_R piccole — qualche metro al secondo — la forza di Coriolis $-2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R$ e la correzione posizionale

$$-\frac{mMG}{|P-C|^3}(P-C) + \frac{mMG}{|O-C|^3}(O-C) \quad (3)$$

hanno intensità fra loro confrontabili, sicché il modello può non essere perfettamente adatto a descrivere questo tipo di situazione.

Scelta del sistema di riferimento terrestre

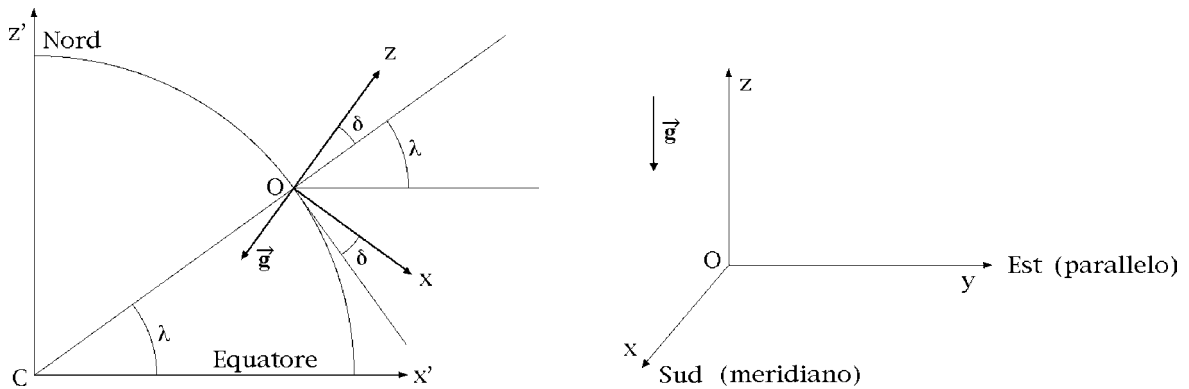
La terna di riferimento $Oxyz$ viene scelta di regola disponendo gli assi coordinati nel modo sottoindicato:

- l’asse Oz secondo la verticale locale ascendente passante per O ;
- l’asse Oy tangenzialmente al parallelo locale passante per O ed orientato verso l’Est geografico;
- l’asse Ox determinato in modo che la terna risultante sia ortogonale e destrorsa, per cui esso risulta complanare al meridiano locale passante per O ed orientato verso il Sud geografico, come è immediato verificare.

Si osservi che a causa della correzione di trascinamento $-\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (O - C)]$ nella definizione (2), l’accelerazione gravitazionale \vec{g} che definisce la verticale locale non è diretta verso il centro C della Terra, ma forma un piccolo angolo δ con la congiungente $O - C$, in modo che risulta

$$(O - C) \cdot (-\vec{g}) = |O - C| |\vec{g}| \cos \delta .$$

In conseguenza di ciò l’asse Ox della terna terrestre non è esattamente tangente al meridiano in O , formando con esso un angolo di uguale ampiezza δ . In particolare, il piano coordinato “orizzontale” Oxy **non coincide con il piano tangente alla superficie sferica della Terra in O** , ma forma con questo un angolo diedro di ampiezza δ .



L’angolo δ dipende dalla latitudine λ di O e può essere calcolato agevolmente con un poco di trigonometria. A questo scopo conviene riscrivere in una forma più comoda il termine di trascinamento:

$$\begin{aligned} -\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (O - C)] &= \vec{\omega} \wedge [(O - C) \wedge \vec{\omega}] = (O - C)|\vec{\omega}|^2 - \vec{\omega} \vec{\omega} \cdot (O - C) = \\ &= |O - C|(\cos \lambda \hat{n} + \sin \lambda \hat{e}'_3) |\vec{\omega}|^2 - |\vec{\omega}| \hat{e}'_3 |\vec{\omega}| |O - C| \sin \lambda = |O - C| |\vec{\omega}|^2 \cos \lambda \hat{n} , \end{aligned}$$

dove \hat{e}'_3 indica il versore associato all’asse di rotazione della Terra, mentre il versore \hat{n} è diretto secondo la congiungente di O con la sua proiezione ortogonale sull’asse di rotazione

terrestre Cz' , ed orientato in senso opposto. In modo analogo, il termine di interazione gravitazionale diventa:

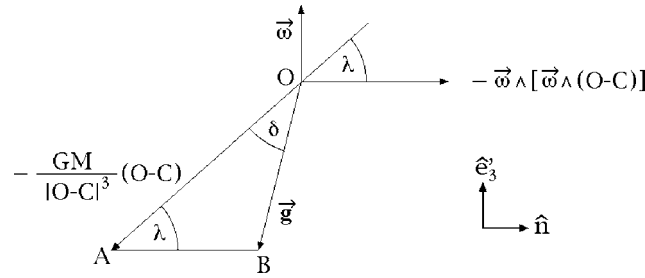
$$-\frac{MG}{|O-C|^3}(O-C) = -\frac{MG}{|O-C|^2}(\cos \lambda \hat{n} + \sin \lambda \hat{e}'_3),$$

per cui il vettore accelerazione gravitazionale locale si riscrive come

$$\begin{aligned} \vec{g} &= -\frac{MG}{|O-C|^2}(\cos \lambda \hat{n} + \sin \lambda \hat{e}'_3) + |O-C||\vec{\omega}|^2 \cos \lambda \hat{n} = \\ &= -\left(\frac{MG}{|O-C|^2} - |O-C||\vec{\omega}|^2\right) \cos \lambda \hat{n} - \frac{MG}{|O-C|^2} \sin \lambda \hat{e}'_3 \end{aligned}$$

ed ha modulo

$$|\vec{g}| = \left[\left(\frac{MG}{|O-C|^2} - |O-C||\vec{\omega}|^2 \right)^2 \cos^2 \lambda + \left(\frac{MG}{|O-C|^2} \right)^2 \sin^2 \lambda \right]^{1/2}.$$



Osservato che $AB = |-\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (O-C)]| = |O-C||\vec{\omega}|^2 \cos \lambda$ e che $OB = |\vec{g}|$, dal teorema dei seni applicato al triangolo OAB si deduce

$$\frac{\sin \delta}{AB} = \frac{\sin \lambda}{OB}$$

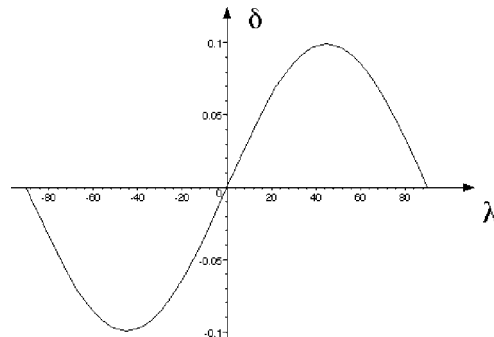
e quindi

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \frac{AB}{OB} \sin \lambda = \frac{\sin \lambda \cos \lambda |O-C||\vec{\omega}|^2}{|\vec{g}|} = \\ &= \sin \lambda \cos \lambda |O-C||\vec{\omega}|^2 \left[\left(\frac{MG}{|O-C|^2} - |O-C||\vec{\omega}|^2 \right)^2 \cos^2 \lambda + \left(\frac{MG}{|O-C|^2} \right)^2 \sin^2 \lambda \right]^{-1/2} \end{aligned}$$

che consente il calcolo di δ . Inserendo i valori misurati di $|\vec{\omega}|$ e $MG/|O-C|^2$ si ottiene

$$|O-C||\vec{\omega}|^2 \simeq 0.03387 \text{ m s}^{-2} \quad \text{e} \quad \frac{MG}{|O-C|^2} = 9.80665 \text{ m s}^{-2}$$

in modo che può essere calcolato esplicitamente per ogni valore della latitudine $\lambda \in [-\pi/2, \pi/2]$ — in radianti. Il grafico di δ in funzione di λ mostra che l'angolo δ ha sempre ampiezza molto piccola — per comodità di lettura gli angoli sono rappresentati in gradi sessagesimali:



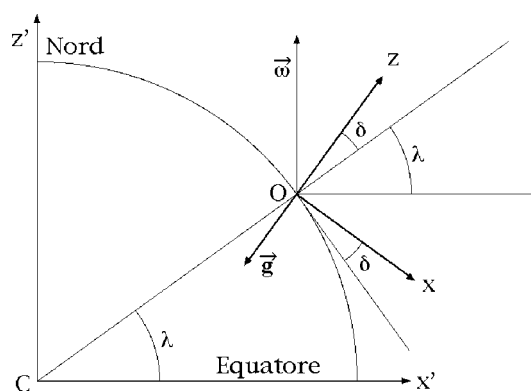
Equazioni del moto scritte nella terna di riferimento terrestre

Si vuole ora scrivere l'equazione fondamentale della meccanica terrestre, equazione (1), sotto forma di sistema di equazioni scalari secondo gli assi della terna di riferimento terrestre descritta in precedenza. A questo scopo, indicati con $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$, rispettivamente i versori associati agli assi coordinati Ox, Oy, Oz , si osserva che:

- (i) per il modo in cui è stato definito l'asse Oz risulta $\vec{g} = -g\hat{e}_3$;
- (ii) le componenti cartesiane della velocità angolare terrestre $\vec{\omega}$ si calcolano mediante semplici proiezioni ortogonali, in modo che $\vec{\omega}$ può scriversi

$$\vec{\omega} = -\omega \cos \lambda_0 \hat{e}_1 + \omega \sin \lambda_0 \hat{e}_3$$

essendosi posto, per brevità, $\omega = |\vec{\omega}|$ e $\lambda_0 = \lambda + \delta$. Da ricordare che, per quanto detto in precedenza circa il valore di δ , è $\lambda_0 \sim \lambda$ e quindi la sostituzione $\lambda_0 \rightarrow \lambda$ costituisce comunque un'ottima approssimazione;



- (iii) indicate con $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ le componenti di \vec{v}_R rispetto alla terna $Oxyz$, si ha

$$\vec{v}_R = \dot{x} \hat{e}_1 + \dot{y} \hat{e}_2 + \dot{z} \hat{e}_3$$

e di conseguenza

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R = \omega \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -\cos \lambda_0 & 0 & \sin \lambda_0 \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \omega [-\sin \lambda_0 \dot{y} \hat{e}_1 + (\sin \lambda_0 \dot{x} + \cos \lambda_0 \dot{z}) \hat{e}_2 - \cos \lambda_0 \dot{y} \hat{e}_3]$$

per cui l'espressione della forza di Coriolis diventa

$$-2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R = 2m\omega [\sin \lambda_0 \dot{y} \hat{e}_1 - (\sin \lambda_0 \dot{x} + \cos \lambda_0 \dot{z}) \hat{e}_2 + \cos \lambda_0 \dot{y} \hat{e}_3] .$$

Posto infine $\vec{a}_R = \ddot{x} \hat{e}_1 + \ddot{y} \hat{e}_2 + \ddot{z} \hat{e}_3$, la proiezione ortogonale lungo gli assi Ox , Oy , Oz , porge le equazioni del moto richieste

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega \sin \lambda_0 \dot{y} \\ \ddot{y} = -2\omega(\sin \lambda_0 \dot{x} + \cos \lambda_0 \dot{z}) \\ \ddot{z} = -g + 2\omega \cos \lambda_0 \dot{y} \end{cases} , \quad (4)$$

nelle quali è stato ovunque omissso il comune fattore m , costante inessenziale. È evidente che le equazioni (4) costituiscono un sistema lineare del secondo ordine in forma normale, non omogeneo, a coefficienti costanti e con termine noto costante a sua volta. Tale sistema, come ben noto dall'analisi matematica, può essere risolto esattamente ed in modo esplicito. Tuttavia, la particolare natura dei moti che si vuole esaminare, moti di caduta libera che si compiono necessariamente in intervalli di tempo molto brevi, rende vantaggioso il ricorso a metodi di integrazione approssimata che consentono di ottenere risultati sufficientemente accurati per tutti gli scopi pratici. Per procedere oltre è quindi necessaria una breve digressione su uno dei metodi abitualmente utilizzati per la soluzione di questo tipo di problema, il metodo ricorsivo o delle approssimazioni successive di Picard.

Soluzione approssimata di un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine in forma normale ed a coefficienti costanti. Il metodo delle approssimazioni successive di Picard.

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti non omogenee

$$\dot{x} = Ax + v$$

dove $v \in \mathbb{R}^n$ è il termine noto costante ed A la matrice $n \times n$ dei coefficienti. Il teorema di Lagrange della variazione delle costanti consente di scrivere una soluzione particolare del sistema nella forma

$$x(t) = e^{tA} c(t)$$

la cui derivata rispetto al tempo risulta

$$\dot{x}(t) = Ae^{tA} c(t) + e^{tA} \dot{c}(t)$$

mentre

$$Ax + v = Ae^{tA} c(t) + v$$

e quindi, uguagliando le espressioni di \dot{x} e di $Ax + v$,

$$v = e^{tA} \dot{c}(t) .$$

Da quest'ultima relazione si deduce che

$$\dot{c}(t) = e^{-tA} v$$

in modo che una integrazione in t porge

$$c(t) = c(0) + \int_0^t e^{-sA} v \, ds$$

e la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $x(0) = x_0 = c(0)$ risulta

$$x(t) = e^{tA} \left[x(0) + \int_0^t e^{-sA} v \, ds \right] = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} v \, ds .$$

Si osservi come, in virtù dello sviluppo in serie di Taylor

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{(t-s)A} v \, ds &= \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-s)^n}{n!} A^n v \, ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n v \int_0^t (t-s)^n \, ds = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n v \left[-\frac{(t-s)^{n+1}}{n+1} \right]_0^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n v \frac{t^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} A^n v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^{n-1} v , \end{aligned}$$

convergente $\forall t \in \mathbb{R}$, la soluzione ottenuta possa anche porsi nella forma

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^{n-1} v = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} [A^n x_0 + A^{n-1} v] = \\ &= x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^{n-1} [Ax_0 + v] , \end{aligned} \tag{5}$$

che è di fondamentale importanza nel provare la convergenza del metodo iterativo di Picard.

Metodo delle approssimazioni successive di Picard

Si riscrive il problema di Cauchy nella forma integrale equivalente

$$x(t) = x_0 + \int_0^t [Ax(s) + v] \, ds = x_0 + A \int_0^t x(s) \, ds + tv \tag{6}$$

alla quale si applica poi il metodo delle approssimazioni successive. Questo consiste nell'assumere come livello zero di approssimazione della soluzione $x(t)$ la funzione costante uguale al valore iniziale del problema di Cauchy:

$$x_0(t) = x_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e nell'inserire tale soluzione nell'equazione integrale (6) per ottenere una approssimazione di livello successivo

$$x_1(t) = x_0 + A \int_0^t x_0(s) ds + tv = x_0 + (Ax_0 + v)t$$

che, inserita nuovamente nella (6), ne porge una ulteriore

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_0 + A \int_0^t x_1(s) ds + tv = x_0 + A \int_0^t [x_0 + (Ax_0 + v)s] ds + tv = \\ &= x_0 + A \left[x_0 t + (Ax_0 + v) \frac{t^2}{2} \right] + tv = x_0 + (Ax_0 + v)t + A(Ax_0 + v) \frac{t^2}{2} = x_0 + \left(t + \frac{t^2}{2} A \right) (Ax_0 + v) \end{aligned}$$

e così via. Si dimostra per induzione che l'approssimazione n -esima fornita dal procedimento iterativo coincide con l'espressione

$$x_n(t) = x_0 + \sum_{k=1}^n \frac{t^k}{k!} A^{k-1} (Ax_0 + v)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} x_{n+1}(t) &= x_0 + tv + A \int_0^t \left[x_0 + \sum_{k=1}^n \frac{s^k}{k!} A^{k-1} (Ax_0 + v) \right] ds = \\ &= x_0 + tv + A \left[tx_0 + \sum_{k=1}^n \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} A^{k-1} (Ax_0 + v) \right] = x_0 + tv + tAx_0 + \sum_{k=1}^n \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} A^k (Ax_0 + v) = \\ &= x_0 + t(Ax_0 + v) + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{t^k}{k!} A^{k-1} (Ax_0 + v) = x_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{t^k}{k!} A^{k-1} (Ax_0 + v) . \end{aligned}$$

Poiché inoltre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_0 + \sum_{k=1}^n \frac{t^k}{k!} A^{k-1} (Ax_0 + v) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^{k-1} (Ax_0 + v) = x(t)$$

si conclude che le approssimazioni successive di Picard convergono effettivamente, per $n \rightarrow +\infty$, all'unica soluzione $x(t)$ del problema di Cauchy, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Applicazione del metodo di Picard alla soluzione delle equazioni del moto per il grave in caduta nel riferimento terrestre

Il sistema di equazioni lineari di cui si deve determinare una soluzione approssimata è il seguente

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega \sin \lambda_0 \dot{y} \\ \ddot{y} = -2\omega (\sin \lambda_0 \dot{x} + \cos \lambda_0 \dot{z}) \\ \ddot{z} = -g + 2\omega \cos \lambda_0 \dot{y} \end{cases}$$

e con il cambiamento di variabile $\tau = \omega t$, che adimensionalizza la variabile indipendente, diventa

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{d\tau^2} = +2 \sin \lambda_0 \frac{dy}{d\tau} \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} = -2 \sin \lambda_0 \frac{dx}{d\tau} - 2 \cos \lambda_0 \frac{dz}{d\tau} \\ \frac{d^2z}{d\tau^2} = -\frac{g}{\omega^2} + 2 \cos \lambda_0 \frac{dy}{d\tau} . \end{cases}$$

Posto

$$V_x = \frac{dx}{d\tau} \quad V_y = \frac{dy}{d\tau} \quad V_z = \frac{dz}{d\tau} ,$$

l'equazione precedente assume la forma più compatta

$$\begin{cases} \frac{dV_x}{d\tau} = +2 \sin \lambda_0 V_y \\ \frac{dV_y}{d\tau} = -2 \sin \lambda_0 V_x - 2 \cos \lambda_0 V_z \\ \frac{dV_z}{d\tau} = -\frac{g}{\omega^2} + 2 \cos \lambda_0 V_y \end{cases}$$

ovvero quella matriciale equivalente

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \sin \lambda_0 & 0 \\ -2 \sin \lambda_0 & 0 & -2 \cos \lambda_0 \\ 0 & 2 \cos \lambda_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g/\omega^2 \end{pmatrix} .$$

Volendosi esaminare un moto di libera caduta, si suppone che il grave parta dalla quiete all'istante $t = 0$, ovvero $\tau = 0$; di conseguenza, l'equazione integrale equivalente al problema di Cauchy del moto si scrive

$$\begin{cases} V_x = +2 \sin \lambda_0 \int_0^\tau V_y d\tau \\ V_y = -2 \sin \lambda_0 \int_0^\tau V_x d\tau - 2 \cos \lambda_0 \int_0^\tau V_z d\tau \\ V_z = -\frac{g\tau}{\omega^2} + 2 \cos \lambda_0 \int_0^\tau V_y d\tau \end{cases}$$

ed è a questa che deve essere applicato il metodo di Picard. La prima iterazione, con $V_x(0) = V_y(0) = V_z(0) = 0$, porge

$$\begin{cases} V_x = 0 \\ V_y = 0 \\ V_z = -\frac{g\tau}{\omega^2} . \end{cases}$$

Per la seconda iterazione si ha quindi

$$\begin{cases} V_x = 0 \\ V_y = -2 \cos \lambda_0 \int_0^\tau \left(-\frac{g\tau}{\omega^2}\right) d\tau = \frac{g}{\omega^2} \cos \lambda_0 \tau^2 \\ V_z = -\frac{g\tau}{\omega^2} \end{cases}$$

e per la terza infine

$$\begin{cases} V_x = +2 \sin \lambda_0 \int_0^\tau \frac{g}{\omega^2} \cos \lambda_0 \tau^2 d\tau = \frac{2}{3} \frac{g \sin \lambda_0 \cos \lambda_0}{\omega^2} \tau^3 \\ V_y = -2 \cos \lambda_0 \int_0^\tau \left(-\frac{g\tau}{\omega^2}\right) d\tau = \frac{g}{\omega^2} \cos \lambda_0 \tau^2 \\ V_z = -\frac{g\tau}{\omega^2} + 2 \cos \lambda_0 \int_0^\tau \frac{g}{\omega^2} \cos \lambda_0 \tau^2 d\tau = -\frac{g\tau}{\omega^2} + \frac{2g}{3\omega^2} \cos^2 \lambda_0 \tau^3 . \end{cases}$$

Di qui si deduce, tornando alla variabile indipendente t ,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \omega V_x = \frac{2}{3} \frac{g \sin \lambda_0 \cos \lambda_0}{\omega} \tau^3 \\ \frac{dy}{dt} = \omega V_y = \frac{g}{\omega} \cos \lambda_0 \tau^2 \\ \frac{dz}{dt} = \omega V_z = -\frac{g\tau}{\omega} + \frac{2g}{3\omega} \cos^2 \lambda_0 \tau^3 \end{cases}$$

e conseguentemente

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{2}{3} g \sin \lambda_0 \cos \lambda_0 \omega^2 t^3 \\ \dot{y} = g \cos \lambda_0 \omega t^2 \\ \dot{z} = -gt + \frac{2}{3} g \cos^2 \lambda_0 \omega^2 t^3 \end{cases}$$

in modo che se $x(0) = y(0) = z(0) = 0$ risulta, integrando in t ,

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{6} g \sin \lambda_0 \cos \lambda_0 \omega^2 t^4 \\ y(t) = g \cos \lambda_0 \frac{\omega}{3} t^3 \\ z(t) = -g \frac{t^2}{2} + \frac{1}{6} g \cos^2 \lambda_0 \omega^2 t^4 \end{cases} \quad (7)$$

che costituisce la soluzione approssimata richiesta, valida per piccoli valori di t .

Interpretazione del risultato

La soluzione (7) del problema di Cauchy per il grave in caduta libera nel riferimento terrestre è suscettibile di una interpretazione molto semplice, considerato che ulteriori applicazioni del metodo iterativo condurrebbero, come già sottolineato, a termini correttivi di ordine superiore in t :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{6}g \sin \lambda_0 \cos \lambda_0 \omega^2 t^4 + O(t^5) \\ y(t) = g \cos \lambda_0 \frac{\omega}{3} t^3 + O(t^5) \\ z(t) = -g \frac{t^2}{2} + \frac{1}{6}g \cos^2 \lambda_0 \omega^2 t^4 + O(t^5) . \end{cases}$$

Nel primo termine della soluzione in $z(t)$ è immediato riconoscere l'espressione galileiana della distanza verticale coperta in un intervallo t di tempo da un punto materiale partito dalla quiete ed in moto uniformemente accelerato con accelerazione $-g$. Il termine correttivo in t^4 risulta piccolo rispetto ad $y(t)$:

$$\frac{1}{6}g \cos^2 \lambda_0 \omega^2 t^4 / g \cos \lambda_0 \frac{\omega}{3} t^3 = \frac{1}{2} \cos \lambda_0 \omega t$$

poiché il modulo della velocità angolare terrestre vale circa $\omega = 7.29 \cdot 10^{-5}$ e i tempi t di osservazione sono di necessità limitati a pochi secondi. Analoga considerazione si estende anche al termine in t^4 della componente $x(t)$:

$$\frac{1}{6}g \sin \lambda_0 \cos \lambda_0 \omega^2 t^4 / g \cos \lambda_0 \frac{\omega}{3} t^3 = \frac{1}{2} \sin \lambda_0 \omega t .$$

Su intervalli di tempo di qualche secondo i termini rilevanti della soluzione approssimata si riducono dunque a

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = g \cos \lambda_0 \frac{\omega}{3} t^3 \\ z(t) = -gt^2/2 \end{cases}$$

espressione che si interpreta come la composizione del consueto moto uniformemente accelerato lungo la direzione verticale z e di una piccola “deriva” positiva e crescente lungo la direzione dell'asse coordinato Oy , che per costruzione è stato orientato verso Est. Si osservi che in questo ordine di approssimazione nessuno spostamento apprezzabile del grave avviene lungo la direzione dell'asse Ox , orientata secondo il meridiano locale — verso il Sud geografico.

Correzione lineare sul campo di gravità di \vec{g}

Nella discussione precedente si è assunto che i moti in esame siano sufficientemente localizzati nell'intorno dell'origine O in modo che l'accelerazione gravitazionale \vec{g} possa considerarsi costante nell'intera regione del moto. Si è già osservato tuttavia che per velocità \vec{v}_R

dell'ordine di qualche metro al secondo, la forza di Coriolis e la variazione (3) del campo di gravità \vec{g} hanno intensità confrontabili anche su scale di distanza dell'ordine di 10^2 m. Ciò suggerisce l'opportunità di prendere in esame un livello di approssimazione superiore, che tenga conto delle variazioni di \vec{g} lineari in $P - O$. Una descrizione più accurata si può così ricavare, nell'ipotesi che la distribuzione di massa della Terra sia dotata di simmetria perfettamente sferica e che i moti si situino all'esterno del pianeta, calcolando le correzioni lineari in $P - O$ al campo \vec{g} quale risulta dalla legge di Newton della gravitazione universale. Si osserva preliminarmente che per ogni $x, \varepsilon \in \mathbb{R}^3$, $|\varepsilon| \ll |x|$, nell'espressione

$$\frac{x + \varepsilon}{|x + \varepsilon|^3} = (x + \varepsilon)(|x|^2 + 2x \cdot \varepsilon + |\varepsilon|^2)^{-3/2} = (x + \varepsilon)|x|^{-3} \left(1 + \frac{2x \cdot \varepsilon}{|x|^2} + \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2}\right)^{-3/2}$$

si può sostituire l'approssimazione di Taylor

$$(1 + u)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2}u + \frac{15}{8}(1 + \theta u)^{-7/2}u^2 \quad , \quad \theta \in (0, 1) \quad ,$$

con

$$u = \frac{2x \cdot \varepsilon}{|x|^2} + \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2} \quad ,$$

per ottenere

$$\begin{aligned} \frac{x + \varepsilon}{|x + \varepsilon|^3} &= (x + \varepsilon) \frac{1}{|x|^3} \left[1 - 3 \frac{x \cdot \varepsilon}{|x|^2} - \frac{3}{2} \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2} + \frac{15}{8} \left(1 + \theta \frac{2x \cdot \varepsilon}{|x|^2} + \theta \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2}\right)^{-7/2} \left(\frac{2x \cdot \varepsilon}{|x|^2} + \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2}\right)^2 \right] = \\ &= (x + \varepsilon) \frac{1}{|x|^3} \left[1 - \frac{3x \cdot \varepsilon}{|x|^2} + h(x, \varepsilon) \right] \quad , \end{aligned}$$

dove la funzione ausiliaria

$$h(x, \varepsilon) := -\frac{3}{2} \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2} + \frac{15}{8} \left(\frac{2x \cdot \varepsilon}{|x|^2} + \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2}\right)^2 \left(1 + \theta \frac{2x \cdot \varepsilon}{|x|^2} + \theta \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2}\right)^{-7/2}$$

soddisfa l'ovvia maggiorazione

$$\begin{aligned} |h(x, \varepsilon)| &\leq \frac{3}{2} \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2} + \frac{15}{8} \left(2 \frac{|\varepsilon|}{|x|} + \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2}\right)^2 \left(1 - 2 \frac{|\varepsilon|}{|x|} - \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2}\right)^{-7/2} = \\ &= \frac{3}{2} \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2} + \frac{15}{2} \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2} \left(1 + \frac{|\varepsilon|}{2|x|}\right)^2 \left(1 - 2 \frac{|\varepsilon|}{|x|} - \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2}\right)^{-7/2} = \\ &= \frac{3}{2} \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2} \left[1 + 5 \left(1 + \frac{|\varepsilon|}{2|x|}\right)^2 \left(1 - 2 \frac{|\varepsilon|}{|x|} - \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2}\right)^{-7/2} \right] . \end{aligned}$$

Vale allora:

$$\frac{x + \varepsilon}{|x + \varepsilon|^3} = \frac{1}{|x|^3} \left[x + \varepsilon - \frac{3x \cdot \varepsilon}{|x|^2} x - \frac{3x \cdot \varepsilon}{|x|^2} \varepsilon + h(x, \varepsilon) x + h(x, \varepsilon) \varepsilon \right] =$$

$$= \frac{1}{|x|^3} \left(x + \varepsilon - \frac{3\varepsilon \cdot x}{|x|^2} x \right) + R(x, \varepsilon)$$

con la funzione resto

$$R(x, \varepsilon) := \frac{1}{|x|^3} \left[-\frac{3x \cdot \varepsilon}{|x|^2} \varepsilon + h(x, \varepsilon)(x + \varepsilon) \right]$$

il cui modulo ammette la maggiorazione

$$\begin{aligned} |R(x, \varepsilon)| &\leq \frac{1}{|x|^3} \left[3 \frac{|\varepsilon|^2}{|x|} + |h(x, \varepsilon)| (|x| + |\varepsilon|) \right] = \frac{1}{|x|^2} \left[3 \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2} + |h(x, \varepsilon)| \left(1 + \frac{|\varepsilon|}{|x|} \right) \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{|x|^2} \left[3 \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2} + \frac{3}{2} \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2} \right] + \frac{1}{|x|^2} O\left(\frac{|\varepsilon|^3}{|x|^3}\right) = \frac{9}{2} \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2} \frac{1}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^2} O\left(\frac{|\varepsilon|^3}{|x|^3}\right). \end{aligned}$$

Risulta pertanto

$$\frac{MG}{|x + \varepsilon|^3} (x + \varepsilon) = \frac{MG}{|x|^3} \left(x + \varepsilon - \frac{3\varepsilon \cdot x}{|x|^2} x \right) + MGR(x, \varepsilon)$$

e posto $x = O - C$ e $\varepsilon = P - O$

$$\frac{MG}{|P - C|^3} (P - C) = \frac{MG}{|O - C|^3} \left[O - C + P - O - \frac{3(P - O) \cdot (O - C)}{|O - C|^2} (O - C) \right] + MGR(x, \varepsilon)$$

con il termine di resto che si stima come

$$|MGR(x, \varepsilon)| \lesssim \frac{9}{2} \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2} \frac{MG}{|x|^2} = \frac{9}{2} 2.464 \cdot 10^{-14} |P - O|^2 9.80665 = 1.088 \cdot 10^{-12} |P - O|^2.$$

In particolare, per $|P - O| \leq 10^2$ m si ha

$$|MGR(x, \varepsilon)| \leq 1.088 \cdot 10^{-8}$$

e un'ottima approssimazione dell'equazione del moto diventa

$$m\vec{a}_R = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R - \frac{mMG}{|O - C|^3} \left[P - O - 3 \frac{(P - O) \cdot (O - C)}{|O - C|^2} (O - C) \right] \quad (8)$$

che è ancora lineare. Si tratta di riscrivere tale equazione come sistema di equazioni scalari, eseguendo le proiezioni ortogonali secondo gli assi della terna di riferimento terrestre già introdotta in precedenza. A questo scopo, osservato che il vettore costante $O - C$ assume la forma

$$O - C = |O - C|(\sin \delta \hat{e}_1 + \cos \delta \hat{e}_3)$$

mentre per il vettore incognito $P - O$ vale, come prima,

$$P - O = x \hat{e}_1 + y \hat{e}_2 + z \hat{e}_3$$

e l'accelerazione gravitazionale risulta

$$\vec{g} = -g \hat{e}_3 ,$$

l'equazione del moto (8) si riduce alla seguente

$$\vec{a}_R = -g \hat{e}_3 - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R - \frac{MG}{|O-C|^3} [P-O - 3(x \sin \delta + z \cos \delta)(\sin \delta \hat{e}_1 + \cos \delta \hat{e}_3)] .$$

Siccome poi $\delta \sim 0$, si ha in pratica

$$\vec{a}_R = -g \hat{e}_3 - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R - \frac{MG}{|O-C|^3} (P-O - 3z \hat{e}_3)$$

ossia

$$\vec{a}_R = -g \hat{e}_3 - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R - \frac{MG}{|O-C|^3} (x \hat{e}_1 + y \hat{e}_2 - 2z \hat{e}_3)$$

che è l'equazione del moto con correzione lineare sul campo \vec{g} cercata. Posto per brevità $\alpha = MG/|O-C|^3 = 9.80665/6.37 \cdot 10^6 = 1.54 \cdot 10^{-6}$, questa stessa equazione vettoriale si riesprime come sistema di equazioni scalari proiettando lungo gli assi Ox, Oy, Oz :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega \sin \lambda_0 \dot{y} - \alpha x \\ \ddot{y} = -2\omega(\sin \lambda_0 \dot{x} + \cos \lambda_0 \dot{z}) - \alpha y \\ \ddot{z} = -g + 2\omega \cos \lambda_0 \dot{y} + 2\alpha z \end{cases}$$

che si verifica immediatamente essere equivalente al sistema del primo ordine in forma normale

$$\begin{cases} \dot{v}_x = 2\omega \sin \lambda_0 v_y - \alpha x \\ \dot{v}_y = -2\omega(\sin \lambda_0 v_x + \cos \lambda_0 v_z) - \alpha y \\ \dot{v}_z = -g + 2\omega \cos \lambda_0 v_y + 2\alpha z \\ \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{z} = v_z \end{cases}$$

cui vanno assegnate le condizioni iniziali

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0 \quad v_x(0) = v_y(0) = v_z(0) = 0 \quad (9)$$

corrispondenti ad un grave che all'istante $t = 0$ è collocato con velocità nulla nell'origine O e viene quindi abbandonato all'azione delle sollecitazioni gravitazionali/inerziali ad esso applicate. Il problema di Cauchy così determinato risulta a sua volta equivalente al sistema

di equazioni integrali — di Volterra —

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x(t) = \int_0^t [2\omega \sin \lambda_0 v_y - \alpha x] dt \\ v_y(t) = \int_0^t [-2\omega(\sin \lambda_0 v_x + \cos \lambda_0 v_z) - \alpha y] dt \\ v_z(t) = \int_0^t [-g + 2\omega \cos \lambda_0 v_y + 2\alpha z] dt \\ x(t) = \int_0^t v_x dt \\ y(t) = \int_0^t v_y dt \\ z(t) = \int_0^t v_z dt \end{array} \right. \quad (10)$$

alla cui soluzione approssimata si procede, come nel caso precedente, con il metodo delle approssimazioni successive di Picard.

L'approssimazione del primo ordine in t viene determinata sostituendo nelle (10) le condizioni iniziali (9) per ogni $t \in \mathbb{R}$, in modo che risulta

$$\begin{aligned} v_x^{(1)}(t) &= 0 \\ v_y^{(1)}(t) &= 0 \\ v_z^{(1)}(t) &= -gt \\ x^{(1)}(t) &= 0 \\ y^{(1)}(t) &= 0 \\ z^{(1)}(t) &= 0 \end{aligned}$$

L'ulteriore inserimento di queste relazioni nelle (10) conduce al secondo ordine di approssimazione

$$\begin{aligned} v_x^{(2)}(t) &= 0 \\ v_y^{(2)}(t) &= \int_0^t [-2\omega \cos \lambda_0 (-gt)] dt = g\omega \cos \lambda_0 t^2 \\ v_z^{(2)}(t) &= -gt \\ x^{(2)}(t) &= 0 \\ y^{(2)}(t) &= 0 \\ z^{(2)}(t) &= -\frac{gt^2}{2} \end{aligned}$$

che sostituito a propria volta nelle (10) conduce alla terza approssimazione di Picard

$$v_x^{(3)}(t) = \int_0^t 2\omega \sin \lambda_0 g \omega \cos \lambda_0 t^2 dt = \frac{2}{3}g \sin \lambda_0 \cos \lambda_0 \omega^2 t^3$$

$$v_y^{(3)}(t) = \int_0^t 2\omega \cos \lambda_0 g t dt = g \omega \cos \lambda_0 t^2$$

$$v_z^{(3)}(t) = -gt + \int_0^t [2\omega \cos \lambda_0 g \omega \cos \lambda_0 t^2 - \alpha g t^2] dt = -gt + g(2\cos^2 \lambda_0 \omega^2 - \alpha) \frac{t^3}{3}$$

$$x^{(3)}(t) = 0$$

$$y^{(3)}(t) = g \omega \cos \lambda_0 \frac{t^3}{3}$$

$$z^{(3)}(t) = -\frac{gt^2}{2} .$$

Per l'approssimazione del quarto ordine in t si ha poi

$$v_x^{(4)}(t) = \int_0^t 2\omega \sin \lambda_0 g \omega \cos \lambda_0 t^2 dt = \frac{2}{3}g \sin \lambda_0 \cos \lambda_0 \omega^2 t^3$$

$$\begin{aligned} v_y^{(4)}(t) &= \int_0^t \left[-2\omega \sin \lambda_0 \frac{2}{3}g \sin \lambda_0 \cos \lambda_0 \omega^2 t^3 + 2\omega \cos \lambda_0 g t - \right. \\ &\quad \left. - 2\omega \cos \lambda_0 (2\cos^2 \lambda_0 g \omega^2 - \alpha g) \frac{t^3}{3} - \alpha g \omega \cos \lambda_0 \frac{t^3}{3} \right] dt = \\ &= g \omega \cos \lambda_0 t^2 - \int_0^t \left[\frac{4}{3}g \sin^2 \lambda_0 \cos \lambda_0 \omega^3 t^3 + \frac{4}{3}g \cos^3 \lambda_0 \omega^3 t^3 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3}\alpha g \cos \lambda_0 \omega t^3 + \frac{\alpha}{3}g \omega \cos \lambda_0 t^3 \right] dt = \\ &= g \omega \cos \lambda_0 t^2 - \int_0^t \left[\frac{4}{3}g \cos \lambda_0 \omega^3 - \frac{\alpha}{3}g \cos \lambda_0 \omega \right] t^3 dt = \\ &= g \omega \cos \lambda_0 t^2 + \frac{1}{12}(\alpha - 4\omega^2)g \cos \lambda_0 \omega t^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_z^{(4)}(t) &= -gt + \int_0^t \left[2\omega \cos \lambda_0 g \omega \cos \lambda_0 t^2 + 2\alpha \left(-\frac{gt^2}{2} \right) \right] dt = \\ &= -gt + g(2\cos^2 \lambda_0 \omega^2 - \alpha) \frac{t^3}{3} \end{aligned}$$

$$x^{(4)}(t) = \frac{1}{6}g \sin \lambda_0 \cos \lambda_0 \omega^2 t^4$$

$$y^{(4)}(t) = g \omega \cos \lambda_0 \frac{t^3}{3}$$

$$z^{(4)}(t) = -\frac{gt^2}{2} + g(2\cos^2 \lambda_0 \omega^2 - \alpha) \frac{t^4}{12}$$

e quindi

$$v_x^{(4)}(t) = \frac{2}{3}g \sin \lambda_0 \cos \lambda_0 \omega^2 t^3$$

$$v_y^{(4)}(t) = g\omega \cos \lambda_0 t^2 + \frac{1}{12}(\alpha - 4\omega^2)g \cos \lambda_0 \omega t^4$$

$$v_z^{(4)}(t) = -gt + g(2\cos^2 \lambda_0 \omega^2 - \alpha) \frac{t^3}{3}$$

$$x^{(4)}(t) = \frac{1}{6}g \sin \lambda_0 \cos \lambda_0 \omega^2 t^4$$

$$y^{(4)}(t) = g\omega \cos \lambda_0 \frac{t^3}{3}$$

$$z^{(4)}(t) = -\frac{gt^2}{2} + g(2\cos^2 \lambda_0 \omega^2 - \alpha) \frac{t^4}{12} .$$

In conclusione, si può scrivere

$$x(t) = \frac{1}{6}g \sin \lambda_0 \cos \lambda_0 \omega^2 t^4 + O(t^5)$$

$$y(t) = g\omega \cos \lambda_0 \frac{t^3}{3} + O(t^4)$$

$$z(t) = -\frac{gt^2}{2} + g(2\cos^2 \lambda_0 \omega^2 - \alpha) \frac{t^4}{12} + O(t^5) .$$

Il moto di caduta è leggermente più rapido per via dell'aumentare di \vec{g} al diminuire della quota e quindi della distanza dal centro della Terra. Gli altri termini di moto rimangono invece inalterati al livello di approssimazione richiesto. Nello studio della deviazione verso oriente la variazione lineare di \vec{g} può essere dunque ignorata.