

1. Giroscopi.

Un corpo rigido con punto fisso O si dice **dotato di struttura giroscopica rispetto ad O** se il corrispondente operatore d'inerzia L_O ha momenti principali d'inerzia — autovalori — A_1, A_2, A_3 con $A_1 = A_2 = A \neq A_3$. Gli autovettori associati all'autovalore A_3 costituiscono un sottospazio vettoriale unidimensionale di \mathbb{R}^3 ed individuano quindi una ed una sola retta passante per il punto fisso O . Tale retta dicesi **asse di figura** del corpo rigido a struttura giroscopica ed appartiene allo spazio solidale al corpo rigido stesso. Nella discussione del moto del giroscopio conviene introdurre, al solito, una terna di riferimento principale d'inerzia, con origine nel punto fisso O e versori ortogonali \hat{e}_1, \hat{e}_2 — autovettori dell'autovalore A — ed \hat{e}_3 — autovettore associato ad A_3 .

Per **giroscopio** si intende un corpo rigido avente struttura giroscopica rispetto al proprio baricentro G ; i momenti centrali d'inerzia risultano perciò $A_1 = A_2 = A \neq A_3$ e l'asse di figura coincide con l'asse centrale d'inerzia associato ad A_3 . Tale asse è anche noto come **asse giroscopico**. Si introduce la terna di riferimento solidale al giroscopio in modo che l'origine coincida con G , il versore \hat{e}_3 sia diretto secondo l'asse di figura e i versori \hat{e}_1, \hat{e}_2 risultino ortogonali al precedente e fra di loro.

2. Sulla tendenza dei giroscopi a mantenere invariata l'orientazione del loro asse di figura (asse giroscopico) rispetto ad una terna di riferimento inerziale.

Si consideri un giroscopio di baricentro G , massa totale m e momenti centrali A, A_3 , costituito da un sistema di punti materiali (P_i, m_i) , $i = 1, \dots, N$. Si supponga che all'istante iniziale $t = 0$ il vettore velocità angolare istantanea sia diretto secondo l'asse di figura:

$$\vec{\omega}(0) = \omega_3(0) \hat{e}_3(0) \neq 0$$

e che di conseguenza il vettore momento angolare rispetto a G sia a sua volta parallelo allo stesso asse:

$$\vec{K}_G(0) = L_G[\omega_3(0) \hat{e}_3(0)] = A_3 \omega_3(0) \hat{e}_3(0) \neq 0 .$$

Se dall'istante $t = 0$ in poi il giroscopio viene sottoposto a sollecitazioni esterne di risultante $\vec{R}(t)$, l'equazione cardinale della quantità di moto implica che si abbia

$$m\ddot{G} = \vec{R}(t) .$$

Se poi $\vec{M}_G(t)$ è il momento risultante in G delle stesse sollecitazioni, l'equazione cardinale del momento angolare scritta in un sistema di riferimento baricentrale i cui assi si mantengano fissi rispetto ad una terna inerziale assume la forma

$$\frac{d\vec{K}_G}{dt}(t) = \vec{M}_G(t) + \sum_{i=1}^N (P_i - G) \wedge (-m_i \ddot{G}) = \vec{M}_G(t) \quad (2.1)$$

in quanto il momento in G delle forze fittizie di trascinamento $-m_i \ddot{G}$ è banalmente nullo:

$$\sum_{i=1}^N (P_i - G) \wedge (-m_i \ddot{G}) = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i (P_i - G) \wedge m \ddot{G} = -(G - G) \wedge m \ddot{G} .$$

Rispetto a tale terna baricentrale (come pure rispetto a quella inerziale) il vettore velocità angolare istantanea varierà nel tempo in modo che posto

$$\vec{M}_G(t) = M_1(t) \hat{e}_1(t) + M_2(t) \hat{e}_2(t) + M_3(t) \hat{e}_3(t)$$

e

$$\vec{\omega}(t) = \omega_1(t) \hat{e}_1(t) + \omega_2(t) \hat{e}_2(t) + \omega_3(t) \hat{e}_3(t) ,$$

siano soddisfatte le equazioni di Eulero

$$\begin{cases} A_1 \dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2) \omega_2 \omega_3 = M_1 \\ A_2 \dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3) \omega_3 \omega_1 = M_2 \\ A_3 \dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1) \omega_1 \omega_2 = M_3 \end{cases} \quad A_1 = A_2 = A \neq A_3$$

ossia

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 + \frac{A_3 - A}{A} \omega_2 \omega_3 = \frac{1}{A} M_1 \\ \dot{\omega}_2 + \frac{A - A_3}{A} \omega_3 \omega_1 = \frac{1}{A} M_2 \\ \dot{\omega}_3 = \frac{1}{A_3} M_3 . \end{cases} \quad (2.2)$$

Variazioni relative di velocità angolare istantanea e momento angolare in G .

Si vuole stimare la massima variazione relativa subita da $\vec{\omega}$ e da \vec{K}_G per effetto di \vec{M}_G in un intervallo di tempo $[0, \tau]$, con $\tau > 0$. A questo proposito, integrando in $t \in [0, \tau]$ la terza equazione del sistema (2.2), si può scrivere

$$\omega_3(\tau) - \omega_3(0) = \frac{1}{A_3} \int_0^\tau M_3(t) dt$$

e quindi

$$\begin{aligned} |\omega_3(\tau) - \omega_3(0)| &= \frac{1}{A_3} \left| \int_0^\tau M_3(t) dt \right| \leq \frac{1}{A_3} \int_0^\tau |M_3(t)| dt \leq \\ &\leq \frac{1}{A_3} \int_0^\tau |\vec{M}_G(t)| dt = \frac{1}{A_3} \mu(\tau) \end{aligned} \quad (2.3)$$

essendosi posto

$$\mu(\tau) = \int_0^\tau |\vec{M}_G(t)| dt . \quad (2.4)$$

La variazione relativa del vettore velocità angolare istantanea rispetto al suo valore iniziale si stima con l'espressione

$$\frac{|\omega_3(\tau) - \omega_3(0)|}{|\omega_3(0)|} \leq \frac{\mu(\tau)}{A_3 |\omega_3(0)|} = \frac{\mu(\tau)}{|\vec{K}_G(0)|} . \quad (2.5)$$

Per le componenti $\omega_1(\tau)$, $\omega_2(\tau)$ si procede in maniera analoga, moltiplicando le prime due equazioni di Eulero (2.2) rispettivamente per ω_1 ed ω_2 e sommando le due relazioni così ottenute:

$$\omega_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \dot{\omega}_2 = \frac{1}{A} [M_1 \omega_1 + M_2 \omega_2]$$

in modo che risulta

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\omega_1^2 + \omega_2^2] = \frac{1}{A} [M_1 \omega_1 + M_2 \omega_2] \leq \frac{1}{A} |M_1 \omega_1 + M_2 \omega_2|$$

ed applicando la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz a secondo membro

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\omega_1^2 + \omega_2^2] \leq \frac{1}{A} [M_1^2 + M_2^2]^{1/2} [\omega_1^2 + \omega_2^2]^{1/2}$$

da cui si deduce infine l'ulteriore maggiorazione

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\omega_1^2 + \omega_2^2] \leq \frac{1}{A} |\vec{M}_G| [\omega_1^2 + \omega_2^2 + \varepsilon]^{1/2}$$

valida per ogni $\varepsilon > 0$. L'introduzione della costante positiva arbitraria ε consente di dividere membro a membro per $[\omega_1^2 + \omega_2^2 + \varepsilon]^{1/2} > \varepsilon^{1/2} > 0$

$$\frac{1}{2} [\omega_1^2 + \omega_2^2 + \varepsilon]^{-1/2} \frac{d}{dt} [\omega_1^2 + \omega_2^2] \leq \frac{1}{A} |\vec{M}_G|$$

e di dedurre quindi la maggiorazione

$$\frac{d}{dt} [\omega_1^2 + \omega_2^2 + \varepsilon]^{1/2} \leq \frac{1}{A} |\vec{M}_G|$$

che integrata nell'intervallo $[0, \tau]$ conduce a

$$[\omega_1^2(\tau) + \omega_2^2(\tau) + \varepsilon]^{1/2} - \varepsilon^{1/2} \leq \frac{1}{A} \int_0^\tau \frac{1}{A} |\vec{M}_G(t)| dt = \frac{\mu(\tau)}{A}.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, è lecito considerare il limite $\varepsilon \rightarrow 0+$ della precedente relazione, ottenendo

$$[\omega_1^2(\tau) + \omega_2^2(\tau)]^{1/2} \leq \frac{\mu(\tau)}{A}. \quad (2.6)$$

Dalle disequazioni (2.3) ed (2.6) si deduce il modulo quadro della variazione di $\vec{\omega}$:

$$\omega_1^2(\tau) + \omega_2^2(\tau) + |\omega_3(\tau) - \omega_3(0)|^2 \leq \frac{\mu(\tau)^2}{A^2} + \frac{\mu(\tau)^2}{A_3^2} = \left(1 + \frac{A_3^2}{A^2}\right) \frac{\mu(\tau)^2}{A_3^2}$$

e quindi la variazione relativa dello stesso vettore nell'intervallo $[0, \tau]$:

$$\frac{|\vec{\omega}(\tau) - \vec{\omega}(0)|}{|\vec{\omega}(0)|} \leq \left(1 + \frac{A_3^2}{A^2}\right)^{1/2} \frac{\mu(\tau)}{A_3 |\omega_3(0)|} = \left(1 + \frac{A_3^2}{A^2}\right)^{1/2} \frac{\mu(\tau)}{|\vec{K}_G(0)|}. \quad (2.7)$$

Per quanto riguarda infine la variazione di \vec{K}_G conviene riprendere l'equazione cardinale del momento angolare (2.1) rispetto al polo G e integrarla membro a membro in $t \in [0, \tau]$:

$$\vec{K}_G(\tau) - \vec{K}_G(0) = \int_0^\tau \vec{M}_G(t) dt$$

per ricavare

$$|\vec{K}_G(\tau) - \vec{K}_G(0)| = \left| \int_0^\tau \vec{M}_G(t) dt \right| \leq \int_0^\tau |\vec{M}_G(t)| dt = \mu(\tau)$$

e dedurre infine la variazione relativa di \vec{K}_G rispetto al suo valore iniziale:

$$\frac{|\vec{K}_G(\tau) - \vec{K}_G(0)|}{|\vec{K}_G(0)|} \leq \frac{\mu(\tau)}{|\vec{K}_G(0)|}. \quad (2.8)$$

Dalle disequazioni (2.7) e (2.8) si conclude che se il prodotto fra la massima intensità del momento applicato e il tempo d'azione caratteristico delle sollecitazioni esterne risulta molto piccolo rispetto a $|\vec{K}_G(0)|$, se cioè, in virtù della definizione (2.4),

$$\mu(\tau) = \int_0^\tau |\vec{M}_G(t)| dt \leq \max_{t \in [0, \tau]} |\vec{M}_G(t)| \tau \ll |\vec{K}_G(0)|,$$

allora le variazioni di $\vec{\omega}(\tau)$ e $\vec{K}_G(\tau)$ relative ai rispettivi valori iniziali $\vec{\omega}(0)$ e $\vec{K}_G(0)$ sono molto piccole.

Con questo risultato si dimostra facilmente che per $|\omega_3(0)|$ abbastanza grande l'asse di figura all'istante τ non si discosta troppo da quello all'istante $t = 0$, che cioè gli assi

$$G \hat{e}_3(\tau) \quad \text{e} \quad G \hat{e}_3(0)$$

sono approssimativamente paralleli.

Variatione dell'asse di figura.

Per $\omega_3(0)$ abbastanza grande si potrà certamente scrivere che

$$\left| \frac{1}{A} \vec{K}_G(0) \right| \gg |\vec{\omega}(0)| \quad \text{se} \quad A_3 > A$$

ovvero che

$$\left| \frac{1}{A} \vec{K}_G(0) \right| \ll |\vec{\omega}(0)| \quad \text{se all'opposto} \quad A_3 < A.$$

Si supponga, per fissare le idee, che ricorra la prima delle due condizioni. Si avrà allora

$$\left| \frac{1}{A} \vec{K}_G(\tau) \right| \gg |\vec{\omega}(\tau)| \quad (2.9)$$

in quanto valgono la (2.7) e la diseuguaglianza:

$$\frac{|\vec{K}_G(\tau)/A - \vec{K}_G(0)/A|}{|\vec{K}_G(0)/A|} = \frac{|\vec{K}_G(\tau) - \vec{K}_G(0)|}{|\vec{K}_G(0)|} \leq \frac{\mu(\tau)}{|\vec{K}_G(0)|} \ll 1 .$$

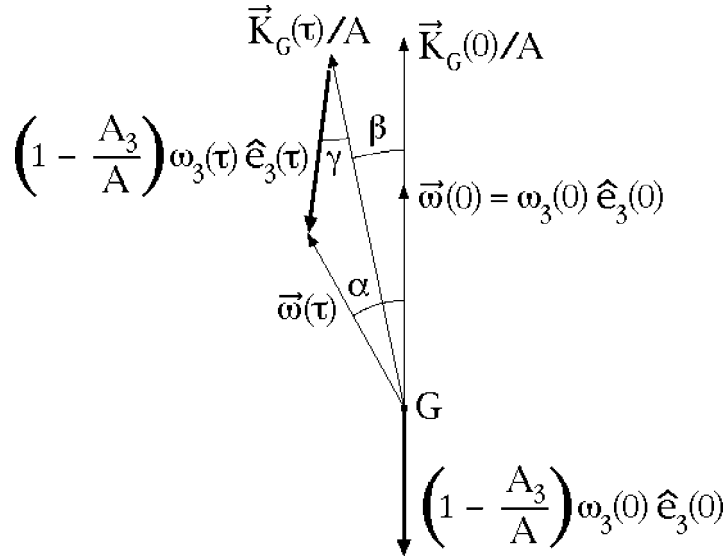
La direzione dell'asse di figura all'istante τ , la stessa del versore \hat{e}_3 al medesimo istante, si determina ricordando che per un corpo a struttura giroscopica vale sempre

$$\vec{\omega} = \frac{1}{A}\vec{K}_G + \left(1 - \frac{A_3}{A}\right)\omega_3\hat{e}_3$$

e quindi per $t = \tau$:

$$\vec{\omega}(\tau) = \frac{1}{A}\vec{K}_G(\tau) + \left(1 - \frac{A_3}{A}\right)\omega_3(\tau)\hat{e}_3(\tau) .$$

La situazione è illustrata nella figura seguente,



dove i vettori:

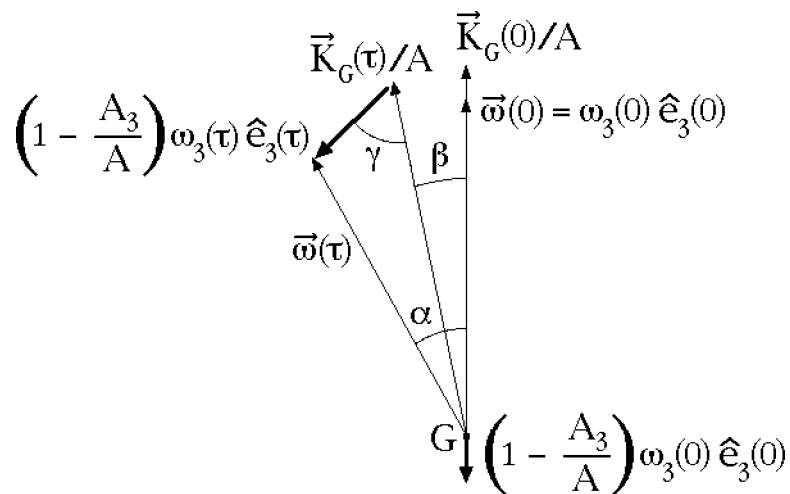
$$\left(1 - \frac{A_3}{A}\right)\omega_3(0)\hat{e}_3(0) \quad \text{e} \quad \left(1 - \frac{A_3}{A}\right)\omega_3(\tau)\hat{e}_3(\tau)$$

individuano gli assi di figura $G\hat{e}_3(0)$ e $G\hat{e}_3(\tau)$ rispettivamente. In forza delle piccole variazioni di $\vec{\omega}(\tau)$ e $\vec{K}_G(\tau)/A$ relativamente ai rispettivi valori iniziali, l'angolo α fra $\vec{\omega}(\tau)$ e $\vec{\omega}(0)$ e l'angolo β che $\vec{K}_G(\tau)/A$ forma con $\vec{K}_G(0)/A$ sono entrambi di piccola ampiezza. Ne segue che anche l'angolo compreso fra $\vec{K}_G(\tau)/A$ e $\vec{\omega}(\tau)$ è piccolo. Grazie alla condizione (2.9) si deduce allora che l'angolo γ compreso fra $\vec{K}_G(\tau)/A$ e $(1 - A_3/A)\omega_3(\tau)\hat{e}_3(\tau)$ è a sua volta prossimo a zero, e che di conseguenza tale risulta pure l'angolo compreso fra gli assi di figura individuati da $(1 - A_3/A)\omega_3(\tau)\hat{e}_3(\tau)$ e da $(1 - A_3/A)\omega_3(0)\hat{e}_3(0)$ rispettivamente. **La variazione subita dall'asse di figura per effetto delle sollecitazioni esterne applicate è piccola nelle ipotesi anzidette.** Tale proprietà è detta **tenacia** dell'asse giroscopico.

Un risultato analogo si stabilisce nel caso che sia $A_3 < A$, a patto di assumere $\omega_3(0)$ abbastanza grande da soddisfare la condizione

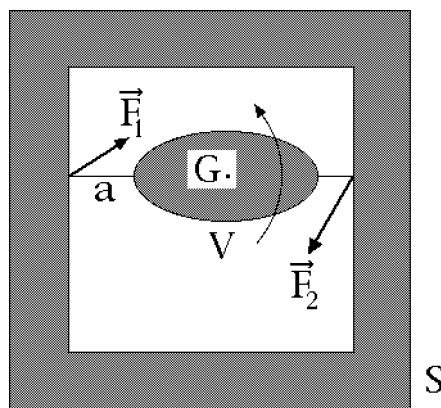
$$\left| \frac{1}{A} \vec{K}_G(0) \right| \ll |\vec{\omega}(0)| .$$

Si osservi l'importanza di assumere $\omega_3(0)$ sufficientemente grande in modo che i vettori $\vec{\omega}(0)$ e $\vec{K}_G(0)$ siano molto diversi in modulo. Qualora così non fosse, infatti, dalla piccola ampiezza degli angoli α e β **non sarebbe possibile dedurre la piccola ampiezza dell'angolo γ** e la conseguente prossimità degli assi di figura all'istante τ e all'istante 0. La figura sottoriportata illustra questa circostanza.



3. Uso dei giroscopi per la stabilizzazione del moto dei sistemi.

Si consideri un sistema rigido S al quale sia stato connesso un giroscopio V , di massa m , baricentro G e momenti centrali $A \neq A_3$, in rapida rotazione attorno al proprio asse di figura a , che si assume fisso rispetto ad S . Si vuole determinare l'effetto prodotto dal giroscopio sul moto del sistema rigido.



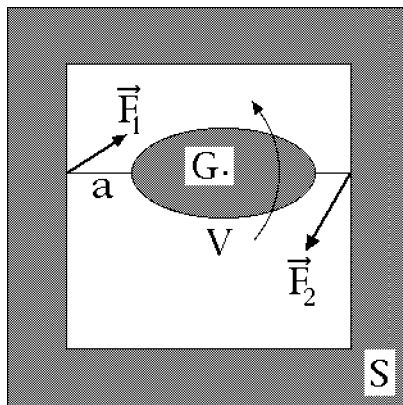
L'interazione del giroscopio con il sistema S darà luogo ad opportune sollecitazioni $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$ applicate all'asse di figura del giroscopio, cui si aggiungeranno eventuali sollecitazioni agenti su V ma esterne al sistema $S \cup V$. Si indicherà con \vec{R} il risultante di tutte queste sollecitazioni, mentre \vec{M}_G sarà il momento risultante delle stesse rispetto al baricentro G . Il risultante \vec{R} non ha altro effetto se non quello di determinare una accelerazione del baricentro del giroscopio secondo l'equazione cardinale della quantità di moto:

$$m\ddot{G} = \vec{R}$$

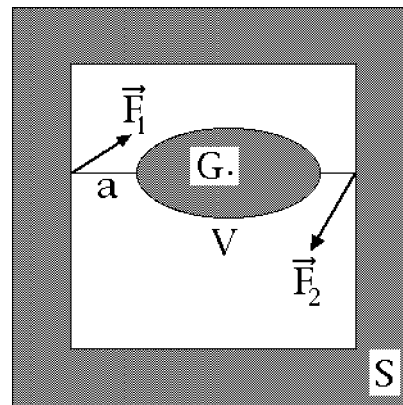
e quindi **il giroscopio V non influenza il moto traslatorio del sistema complessivo $S \cup V$ se non in virtù della propria inerzia m e delle sollecitazioni esterne ad $S \cup V$ applicate a V , indipendentemente dal proprio moto di rotazione attorno all'asse di figura**. Poiché infatti le sollecitazioni dovute all'interazione fra V ed S sono interne al sistema $S \cup V$, se si indica con M la massa di S , con B il baricentro di $S \cup V$ e con \vec{R}_{est} il risultante delle forze esterne applicate a $S \cup V$, l'accelerazione di B rispetto ad una terna inerziale è governata dall'equazione cardinale della quantità di moto:

$$(M + m)\ddot{B} = \vec{R}_{est},$$

in cui compaiono esclusivamente la massa totale $M + m$ del sistema $S \cup V$ e l'eventuale contributo a \vec{R}_{est} delle forze esterne ad $S \cup V$ agenti su V . Un giroscopio in quiete relativa rispetto ad S produrrebbe su $S \cup V$ esattamente lo stesso effetto, per quanto concerne l'accelerazione del baricentro complessivo B del sistema ed il suo conseguente moto di traslazione rispetto ad una terna di riferimento inerziale.



giroscopio in rotazione
rispetto ad S



giroscopio in quiete
rispetto ad S



stesso moto di traslazione del baricentro complessivo B
rispetto ad una terna inerziale

Se viceversa il giroscopio V viene posto in rapida rotazione attorno al proprio asse di figura in modo che all'istante $t = 0$ valga

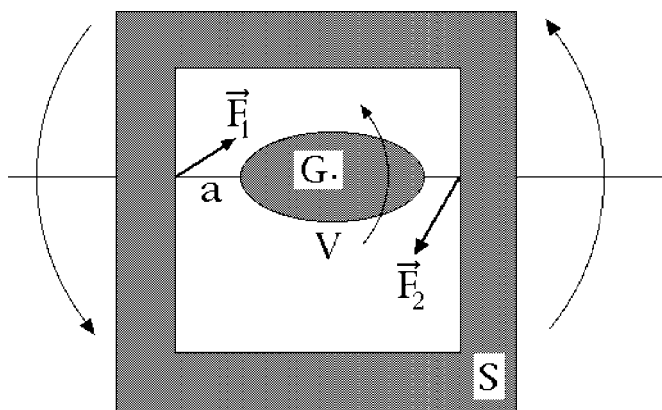
$$\left| \frac{\vec{K}_G(0)}{A} \right| \gg |\vec{\omega}(0)| \quad \text{oppure} \quad \left| \frac{\vec{K}_G(0)}{A} \right| \ll |\vec{\omega}(0)|$$

e durante un certo intervallo di tempo $[0, \tau]$ il momento delle forze applicate a V soddisfa la condizione

$$\tau \max_{t \in [0, \tau]} |\vec{M}_G(t)| \leq |\vec{K}_G(0)| ,$$

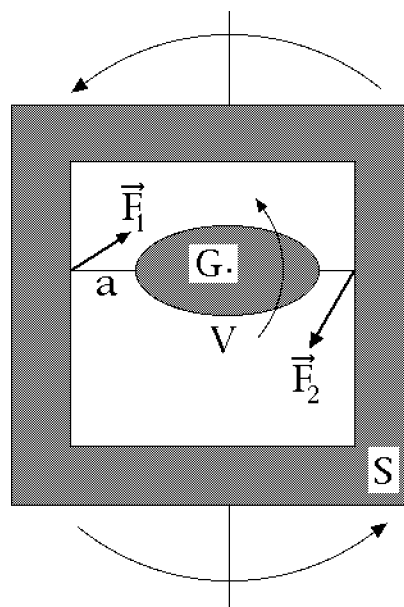
allora l'asse di figura a non può variare in modo significativo e tenderà quindi a mantenere sostanzialmente inalterata la propria direzione durante lo stesso intervallo $[0, \tau]$.

La presenza del giroscopio tende a contrastare i moti di $S \cup V$ che comportino variazioni apprezzabili della direzione dell'asse di figura, mentre i moti attorno a tale asse non vengono inibiti in modo particolare.



Moto di $S \cup V$ che lascia inalterato l'asse di figura del giroscopio V

SI



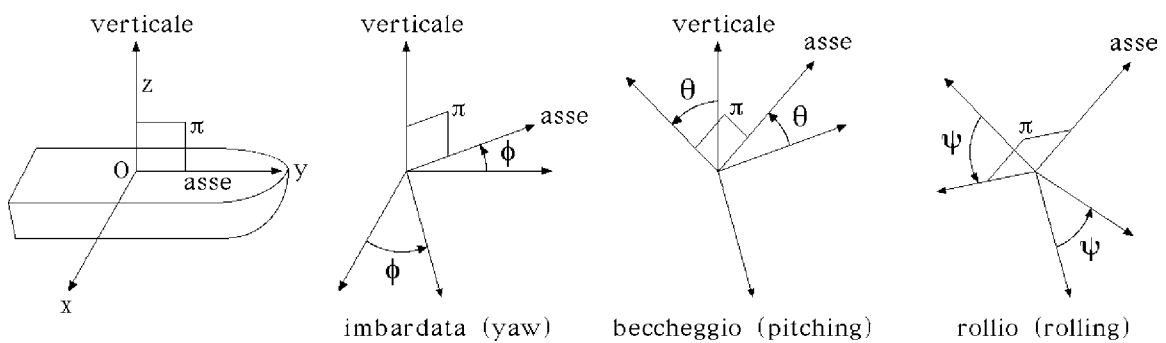
Moto di $S \cup V$ che tende a modificare l'asse di figura del giroscopio V

NO

L'effetto può essere utilizzato per stabilizzare o regolarizzare il moto di sistemi meccanici particolari.

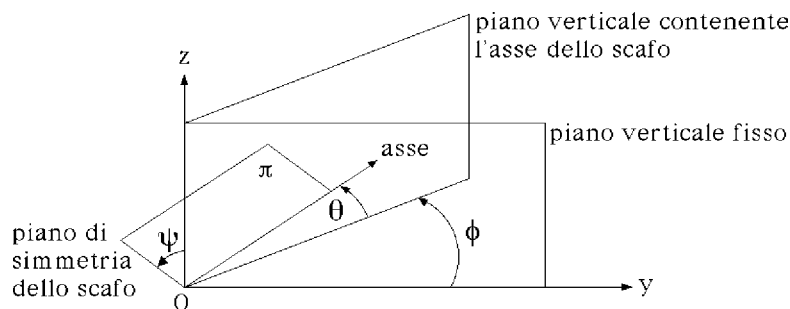
Imbarcazioni

L'orientamento nello spazio di una imbarcazione, rispetto ad un riferimento che vede il piano coordinato Oxy coincidere con il piano dell'orizzonte e l'asse Oz con la direzione verticale, viene completamente specificato mediante l'assegnazione di tre coordinate angolari, ϕ , θ e ψ . Il parametro ϕ , detto angolo di **imbardata** (o **yaw**), è l'angolo che l'asse dello scafo forma con l'asse coordinato Oy per effetto di una rotazione attorno all'asse verticale Oz ; l'angolo di **beccheggio** (o **pitching**) θ descrive una ulteriore rotazione attorno al nuovo asse Ox individuato dall'imbardata (vedi figura). Infine, l'angolo di **rollio** (**rolling**) ψ specifica una eventuale rotazione addizionale attorno alla nuova direzione dell'asse dello scafo determinata da imbardata e beccheggio.



I parametri ϕ , θ , ψ sono quindi analoghi agli angoli di Eulero, salvo l'ultimo, che rappresenta una rotazione attorno ad un asse delle ordinate anziché ad un asse delle quote.

ψ può anche interpretarsi come l'angolo diedro compreso fra il piano di simmetria π dello scafo (individuato in figura da un quadratino) ed il piano determinato dall'asse verticale Oz e dall'asse di simmetria dello scafo. L'angolo θ è quello formato fra l'asse dello scafo ed il piano orizzontale Oxy , mentre ϕ è compreso infine fra Oyz ed il piano verticale su cui giace l'asse dello scafo.



I moti di imbardata e di beccheggio possono essere controllati e limitati disponendo un giroscopio con l'asse di figura orientato secondo l'asse di simmetria dell'imbarcazione, una soluzione che tuttavia non consente alcun controllo sul rollio. L'attenuazione del rollio

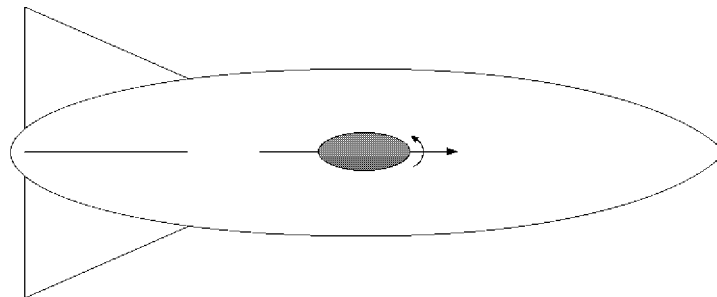
può ottenersi disponendo entro lo scafo un secondo giroscopio il cui asse sia orientato, ad esempio, ortogonalmente a quello del primo. La disposizione di giroscopi utile a contrastare gli eccessivi movimenti di imbardata, beccheggio e rollio è illustrata nella figura seguente.



Le stesse tecniche possono essere impiegate nel controllo di assetto delle piattaforme offshore per le trivellazioni sottomarine.

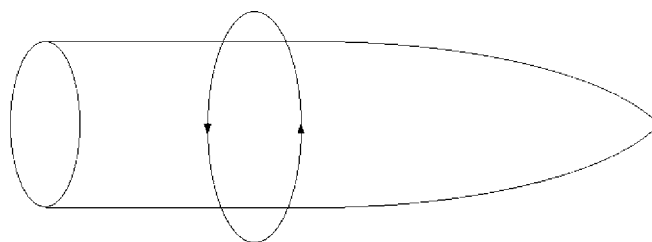
Siluri e razzi

Questo tipo di dispositivi è caratterizzato dalla presenza di un asse di simmetria cilindrica che di regola si ha interesse a mantenere orientato secondo una direzione il più possibile costante (la direzione di moto, per esempio). Poiché le eventuali rotazioni attorno all'asse di simmetria sono di massima tollerabili, la stabilizzazione del moto può essere ottenuta semplicemente munendo il sistema di un giroscopio il cui asse di figura coincida con quello di simmetria.



Proiettili

La stabilizzazione del moto dei proiettili può essere assicurata imprimendo al proiettile un moto di rotazione attorno al proprio asse di simmetria cilindrica, nel qual caso l'intero proiettile si comporta esso stesso come un giroscopio.

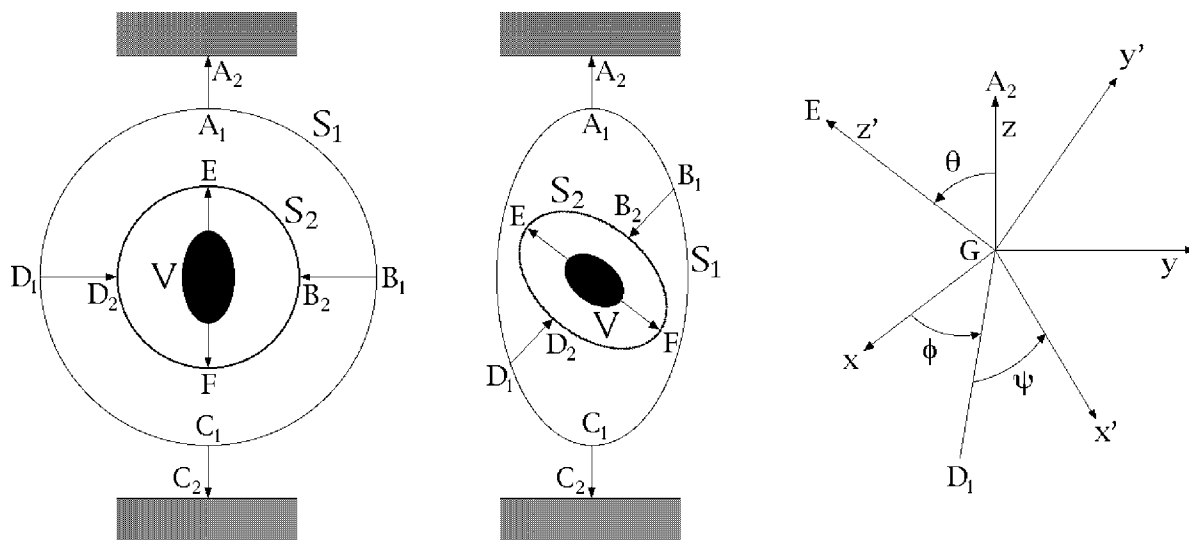


4. Dispositivi di orientamento inerziale.

Il fenomeno dell'orientamento costante dell'asse di figura in un giroscopio in rapida rotazione può essere sfruttato per la realizzazione di dispositivi di orientamento, che si caratterizzano per due proprietà distintive:

- (i) il giroscopio V è montato su guide rotanti i cui assi di rotazione sono soggetti ad attriti minimi, in modo che il momento \vec{M}_G , rispetto al baricentro G , delle sollecitazioni esterne applicate a V risulta trascurabile (si ricorda inoltre che in una qualsiasi terna baricentrale del giroscopio il momento in G delle sollecitazioni di trascinamento è nullo). L'asse di figura tende quindi a mantenere una orientazione sostanzialmente costante rispetto ad un qualunque riferimento inerziale;
- (ii) la mutua disposizione delle guide rotanti è tale da consentire al giroscopio di assumere qualsiasi configurazione rispetto ad una terna di riferimento scelta a piacere.

Una possibile configurazione di guide rotanti è illustrata nella figura seguente.



Una guida circolare rigida S_1 è libera di ruotare attorno al suo diametro A_1C_1 , in modo che il prolungamento A_2C_2 di tale diametro è un asse fisso di rotazione rispetto ad un riferimento assegnato $Gxyz$ (il riferimento di quiete dei sostegni rappresentati in figura dai rettangoli in grigio); lungo il suo diametro B_1D_1 , ortogonale a A_1C_1 , la guida S_1 si prolunga rigidamente in due aste rettilinee B_1B_2 e D_1D_2 alle cui estremità è collocata una seconda guida circolare rigida S_2 , libera di ruotare attorno al proprio diametro B_2D_2 ; l'asse di figura del giroscopio V coincide infine con il diametro EF di S_2 ortogonale a B_2D_2 . Il giroscopio può ruotare a piacere attorno ad EF rispetto alla guida S_2 . È immediato verificare che il giroscopio è in grado di assumere qualsiasi configurazione rispetto al riferimento di quiete dei sostegni, dal momento che, come la figura mette in evidenza, la configurazione della terna centrale d'inerzia di V rispetto a $Gxyz$ è individuata dagli usuali angoli euleriani, cioè a dire:

- dall'angolo di precessione ϕ , che descrive la rotazione della guida S_1 rispetto al piano

- coordinato Gxz del riferimento $Gxyz$;
- dall'angolo di nutazione θ , che in quanto compreso fra i diametri EF e A_1C_1 esprime l'inclinazione del piano di S_2 rispetto a quello di S_1 ;
 - dall'angolo di spin ψ , rappresentativo della rotazione di V attorno al proprio asse di figura EF .

Reciprocamente, anche il riferimento di quiete dei sostegni $Gxyz$ può assumere qualsiasi configurazione rispetto al giroscopio, sicché, mentre questo mantiene sostanzialmente costante l'orientamento del proprio asse di figura, la terna $Gxyz$ **si muove liberamente attorno a tale asse invariabile**, la cui orientazione può quindi essere utilizzata per monitorare i moti di rotazione di $Gxyz$ e del sistema meccanico ad esso solidale relativamente ad un qualsiasi osservatore inerziale.

Su questo principio si basa il funzionamento del cosiddetto **virosbandanometro**, più noto come **orizzonte artificiale**, uno dei principali strumenti per la navigazione aerea. In tal caso la terna di riferimento $Gxyz$ è solidale alla fusoliera e l'asse di figura del giroscopio consente di determinare con buona approssimazione l'inclinazione del velivolo rispetto alla verticale ed al piano orizzontale (angoli di beccheggio e di rollio)⁽¹⁾.

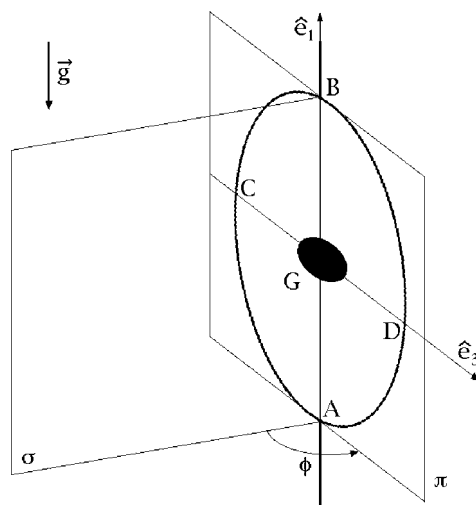
5. Tendenza al parallelismo (cenni).

Si può verificare che per un giroscopio posto in rapida rotazione attorno al proprio asse di figura e sottoposto ad una sollecitazione esterna di momento \vec{M}_G , la variazione dell'asse giroscopico — intesa come variazione del versore associato a tale asse — risulta tendenzialmente parallela ad \vec{M}_G . Questa proprietà è nota come **tendenza al parallelismo** del giroscopio e non deve essere confusa con la **tenacia**, esaminata nelle pagine precedenti, che consiste semplicemente nella tendenza del giroscopio a mantenere invariata l'orientazione del proprio asse di figura. Così ad esempio una trottola pesante appoggiata ad un piano orizzontale in un punto fisso O , inclinata e posta in rapida rotazione attorno al proprio asse di figura — che ne contiene il baricentro — tenderà a muovere detto asse attorno alla verticale passante per O , in modo che la variazione dell'asse sia diretta secondo il momento in O della forza peso. Ciò in apparente contrasto con quanto l'intuizione fisica sembrerebbe suggerire, che cioè l'asse debba tendere a coricarsi sul piano orizzontale attraversando un piano verticale, sotto l'azione della forza peso.

(1) L'uso della bussola giroscopica sui velivoli è ormai molto limitato. Tutti gli aerei più moderni, già a partire dai primi anni ottanta, sono muniti di giroscopi ottici, a laser o a fibre ottiche, che non prevedendo parti in movimento sono di più facile manutenzione e meno costosi dei loro analoghi meccanici, oltre a garantire prestazioni equivalenti quanto a precisione ed affidabilità.

6. Bussola giroscopica.

Una applicazione notevole dei giroscopi è costituita dalla cosiddetta bussola giroscopica, un dispositivo che collocato in un qualsiasi punto della superficie terrestre — o comunque dello spazio solidale alla Terra — consente di individuare la posizione del Nord geografico. In questo senso la bussola giroscopica risulta più accurata di quella magnetica, orientandosi secondo il polo Nord geografico e non secondo quello magnetico, circostanza questa di notevole rilievo in quanto — come ben noto — i poli magnetici e geografici della Terra **non** coincidono. La bussola giroscopica consiste in un giroscopio di baricentro G , asse giroscopico $G\hat{e}_3$ e momenti centrali d'inerzia A, A_3 , di cui $A_3 \neq A$ relativo a $G\hat{e}_3$, vincolato in modo che l'asse giroscopico possa ruotare soltanto in un piano orizzontale fisso, con il baricentro G fisso a propria volta. Una possibile realizzazione pratica di vincoli cosiffatti è illustrata nella figura seguente:



in cui il versore \hat{e}_1 individua la verticale ascendente ed i vincoli si intendono ideali. Un supporto circolare rigido giace nel piano verticale π ed è vincolato a ruotare attorno al proprio diametro verticale AB , mentre sul diametro orizzontale CD si incardina il giroscopio, il cui baricentro G coincide con il centro geometrico del supporto circolare ed il cui asse giroscopico si identifica con la retta orizzontale CD . Si denota con \hat{e}_3 il versore associato all'asse giroscopico e con ϕ l'angolo che il piano mobile π contenente la circonferenza rigida forma con un piano verticale fissato α passante per la retta AB . Se ω_3 è la componente lungo \hat{e}_3 della velocità angolare istantanea $\vec{\omega}$ del giroscopio, l'espressione di $\vec{\omega}$ assume la forma generale:

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{e}_1 + \omega_3\hat{e}_3 \quad (6.1)$$

e poiché a causa della struttura giroscopica il versore \hat{e}_1 è autovettore dell'operatore d'inerzia L_G , con autovalore A , il momento angolare del giroscopio rispetto al baricentro fisso G sarà dato da:

$$\vec{K}_G = L_G(\dot{\phi}\hat{e}_1 + \omega_3\hat{e}_3) = \dot{\phi}L_G(\hat{e}_1) + \omega_3L_G(\hat{e}_3) = A\dot{\phi}\hat{e}_1 + A_3\omega_3\hat{e}_3$$

con \hat{e}_1 indipendente dal tempo. Una derivazione rispetto al tempo del momento angolare

porge la relazione:

$$\frac{d\vec{K}_G}{dt} = A\ddot{\phi}\hat{e}_1 + A\dot{\phi}\frac{d\hat{e}_1}{dt} + A_3\dot{\omega}_3\hat{e}_3 + A_3\omega_3\frac{d\hat{e}_3}{dt} = A\ddot{\phi}\hat{e}_1 + A_3\dot{\omega}_3\hat{e}_3 + A_3\omega_3\frac{d\hat{e}_3}{dt}$$

per cui l'equazione cardinale del momento angolare diviene:

$$\frac{d\vec{K}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{peso}} + \vec{M}_G^{\text{Cor}} + \vec{M}_G^{\phi, \text{est}} = \vec{M}_G^{\text{Cor}} + \vec{M}_G^{\phi, \text{est}}$$

e quindi:

$$A\ddot{\phi}\hat{e}_1 + A_3\dot{\omega}_3\hat{e}_3 + A_3\omega_3\frac{d\hat{e}_3}{dt} = \vec{M}_G^{\text{Cor}} + \vec{M}_G^{\phi, \text{est}} \quad (6.2)$$

dove si è considerato che $\vec{M}_G^{\text{peso}} = 0$ in quanto G coincide con il polo fisso, mentre \vec{M}_G^{Cor} e $\vec{M}_G^{\phi, \text{est}}$ indicano il momento risultante in G delle forze di Coriolis e delle reazioni vincolari esterne, rispettivamente. Nell'ipotesi che il sistema sia a vincoli ideali l'espressione per la velocità virtuale di un generico punto P del giroscopio si scrive:

$$\nu_P = (\alpha \hat{e}_1 + \beta \hat{e}_3) \wedge (P - G) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

e la condizione di idealità dei vincoli diventa conseguentemente:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_P \nu_P \cdot \Phi_P = \sum_P (\alpha \hat{e}_1 + \beta \hat{e}_3) \wedge (P - G) \cdot \Phi_P = \sum_P (\alpha \hat{e}_1 + \beta \hat{e}_3) \cdot (P - G) \wedge \Phi_P = \\ &= \alpha \hat{e}_1 \cdot \sum_P (P - G) \wedge \Phi_P + \beta \hat{e}_3 \cdot \sum_P (P - G) \wedge \Phi_P = \alpha \vec{M}_G^{\phi, \text{est}} \cdot \hat{e}_1 + \beta \vec{M}_G^{\phi, \text{est}} \cdot \hat{e}_3 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ossia:

$$\vec{M}_G^{\phi, \text{est}} \cdot \hat{e}_1 = 0 \quad \vec{M}_G^{\phi, \text{est}} \cdot \hat{e}_3 = 0$$

Le equazioni del moto del sistema potranno quindi ottenersi considerando le proiezioni dell'equazione cardinale del momento angolare (6.2) lungo la direzione verticale \hat{e}_1 e lungo l'asse orizzontale giroscopico \hat{e}_3 .

Proiezione lungo \hat{e}_1

La proiezione dell'equazione cardinale (6.2) lungo il versore verticale \hat{e}_1 conduce a:

$$A\ddot{\phi} = \vec{M}_G^{\text{Cor}} \cdot \hat{e}_1 + \vec{M}_G^{\phi, \text{est}} \cdot \hat{e}_1 = \vec{M}_G^{\text{Cor}} \cdot \hat{e}_1$$

e al fine di scrivere esplicitamente l'equazione si rende necessario il calcolo della componente verticale del momento in G delle forze di Coriolis agenti sul giroscopio. Si ha così dalla formula di Coriolis, indicato con $\vec{\omega}_T$ il vettore velocità angolare — costante — della Terra:

$$\hat{e}_1 \cdot \vec{M}_G^{\text{Cor}} = \hat{e}_1 \cdot \sum_i (P_i - G) \wedge [-2m_i \vec{\omega}_T \wedge (\vec{\omega} \wedge (P_i - G))]$$

e facendo ricorso alla ben nota identità vettoriale $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$:

$$\hat{e}_1 \cdot \vec{M}_G^{\text{Cor}} = -2\hat{e}_1 \cdot \sum_i m_i [\vec{\omega}_T \vec{\omega} \wedge (P_i - G) \cdot (P_i - G) - \vec{\omega} \wedge (P_i - G) \vec{\omega}_T \cdot (P_i - G)]$$

che per l'annullarsi del primo termine entro parentesi quadre si riduce a

$$\hat{e}_1 \cdot \vec{M}_G^{\text{Cor}} = 2\hat{e}_1 \cdot \sum_i \vec{\omega} \wedge (P_i - G) m_i (P_i - G) \cdot \vec{\omega}_T .$$

Dalla proprietà di circolarità del prodotto misto segue poi:

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 \cdot \vec{M}_G^{\text{Cor}} &= 2 \sum_i \hat{e}_1 \cdot \vec{\omega} \wedge (P_i - G) m_i (P_i - G) \cdot \vec{\omega}_T = \\ &= 2 \sum_i \hat{e}_1 \wedge \vec{\omega} \cdot (P_i - G) m_i (P_i - G) \cdot \vec{\omega}_T \end{aligned}$$

che, sostituita l'espressione (6.1) della velocità angolare $\vec{\omega}$, porge la relazione equivalente:

$$\hat{e}_1 \cdot \vec{M}_G^{\text{Cor}} = -2 \sum_i \omega_3 (-\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3) \cdot (P_i - G) m_i (P_i - G) \cdot \vec{\omega}_T .$$

A questo punto conviene introdurre una terna di riferimento ausiliaria, mobile rispetto all'osservatore terrestre ma non solidale al giroscopio, i cui versori \hat{e}_1 ed \hat{e}_3 coincidano con quelli verticale ed orizzontale già introdotti, ed il versore residuo \hat{e}_2 sia orientato in modo tale da costituire con \hat{e}_1 ed \hat{e}_3 un triedro ortonormale destrorso. Si ha pertanto:

$$-\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3 = \hat{e}_2 .$$

Posto infine per un arbitrario punto P_i del giroscopio

$$P_i - G = x_i \hat{e}_1 + y_i \hat{e}_2 + z_i \hat{e}_3 ,$$

e per il vettore velocità angolare della Terra:

$$\vec{\omega}_T = \omega_{T1} \hat{e}_1 + \omega_{T2} \hat{e}_2 + \omega_{T3} \hat{e}_3 ,$$

si conclude che:

$$\hat{e}_1 \cdot \vec{M}_G^{\text{Cor}} = -2 \sum_i \omega_3 y_i m_i (x_i \omega_{T1} + y_i \omega_{T2} + z_i \omega_{T3}) .$$

A quest'ultima espressione si può dare una forma più appropriata ricordando la definizione dei prodotti d'inerzia:

$$L_{21} = - \sum_i m_i y_i x_i = 0 \quad L_{23} = - \sum_i m_i y_i z_i = 0$$

e dei momenti centrali d'inerzia:

$$L_{11} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) = A \quad L_{22} = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) = A \quad L_{33} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = A_3$$

da cui segue che

$$\sum_i m_i y_i^2 = \frac{1}{2}(L_{11} + L_{33} - L_{22}) = \frac{1}{2}(A + A_3 - A) = \frac{A_3}{2}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 \cdot \vec{M}_G^{\text{Cor}} &= -2\omega_3 \left(-L_{21}\omega_{T1} + \frac{A_3}{2}\omega_{T2} - L_{23}\omega_{T3} \right) = \\ &= -2\omega_3 \frac{A_3}{2}\omega_{T2} = -A_3\omega_3\omega_{T2} = -A_3\omega_3\vec{\omega}_T \cdot (-\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3) = A_3\omega_3\vec{\omega}_T \wedge \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 \end{aligned}$$

In definitiva:

$$A\ddot{\phi} = A_3\omega_3\vec{\omega}_T \wedge \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 .$$

Proiezione lungo \hat{e}_3

Poiché:

$$\frac{d\vec{K}_G}{dt} \cdot \hat{e}_3 = A\ddot{\phi}\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 + A_3\dot{\omega}_3\hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3 + A_3\omega_3 \frac{d\hat{e}_3}{dt} \cdot \hat{e}_3 = A_3\dot{\omega}_3$$

la proiezione lungo \hat{e}_3 dell'equazione cardinale del momento angolare si scrive:

$$A_3\dot{\omega}_3 = \vec{M}_G^{\text{Cor}} \cdot \hat{e}_3 + \vec{M}_G^{\phi, \text{est}} \cdot \hat{e}_3 = \vec{M}_G^{\text{Cor}} \cdot \hat{e}_3$$

dove la componente del momento in G delle forze di Coriolis si calcola in modo analogo a quanto visto nel caso precedente:

$$\begin{aligned} \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_G^{\text{Cor}} &= 2 \sum_i \hat{e}_3 \wedge \vec{\omega} \cdot (P_i - G) m_i (P_i - G) \cdot \vec{\omega}_T = \\ &= 2 \sum_i \dot{\phi}\hat{e}_3 \wedge \hat{e}_1 \cdot (P_i - G) m_i (P_i - G) \cdot \vec{\omega}_T = \\ &= 2\dot{\phi} \sum_i y_i m_i (x_i\omega_{T1} + y_i\omega_{T2} + z_i\omega_{T3}) = \\ &= 2\dot{\phi}\omega_{T2} \sum_i m_i y_i^2 = 2\dot{\phi}\omega_{T2} \frac{A_3}{2} = A_3\dot{\phi}\omega_{T2} = \\ &= A_3\dot{\phi}\vec{\omega}_T \cdot \hat{e}_3 \wedge \hat{e}_1 = -A_3\dot{\phi}\vec{\omega}_T \cdot \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3 = -A_3\dot{\phi}\vec{\omega}_T \wedge \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 \end{aligned}$$

e quindi:

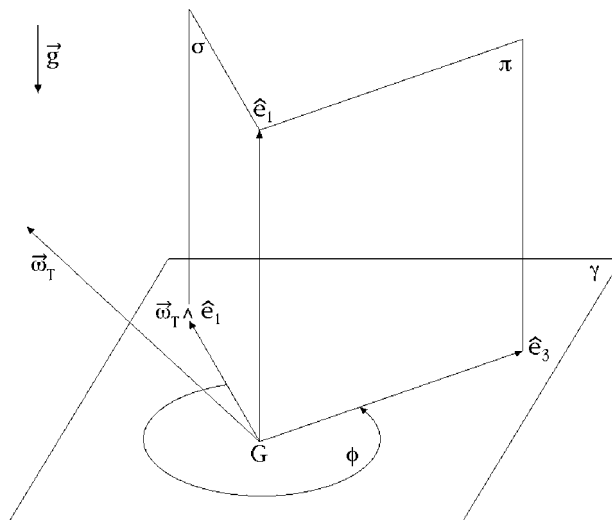
$$A_3\dot{\omega}_3 = -A_3\dot{\phi}\vec{\omega}_T \wedge \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 .$$

In conclusione, le equazioni che governano il moto del sistema sono:

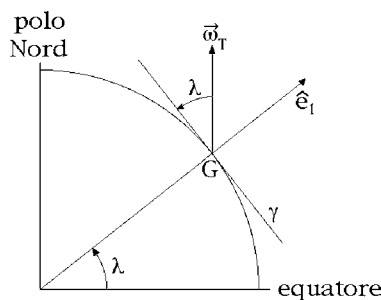
$$\begin{cases} \ddot{\phi} = \frac{A_3}{A} \omega_3 \vec{\omega}_T \wedge \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 \\ \dot{\omega}_3 = -\dot{\phi} \vec{\omega}_T \wedge \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 \end{cases}$$

ed esse valgono indipendentemente dal fatto che i piani π e σ siano verticali e che di conseguenza il versore \hat{e}_1 sia diretto secondo la verticale locale — durante il calcolo precedente non si è mai fatto uso di questa ipotesi.

In pratica, per semplificare ulteriormente le equazioni del moto, conviene scegliere verticale ed ascendente il versore \hat{e}_1 ed identificare il piano fisso σ con quello individuato da \hat{e}_1 e dal vettore orizzontale $\vec{\omega}_T \wedge \hat{e}_1$, diretto verso oriente. In tal modo l'asse giroscopico potrà spazzare un piano orizzontale γ , sul quale verrà anche misurato l'angolo ϕ , come illustrato in figura:



L'angolo compreso fra i vettori \hat{e}_1 ed $\vec{\omega}_T$ è complementare alla latitudine locale λ del punto in cui la bussola è collocata — co-latitudine:



in modo che risulta:

$$\vec{\omega}_T \wedge \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 = |\vec{\omega}_T| \sin(\pi/2 - \lambda) \cos \phi = |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \cos \phi .$$

Si ha perciò:

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = \frac{A_3}{A} |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \omega_3 \cos \phi \\ \dot{\omega}_3 = -|\vec{\omega}_T| \cos \lambda \dot{\phi} \cos \phi \end{cases} \quad (6.3)$$

che è un sistema di equazioni differenziali nelle funzioni incognite del tempo ω_3 e ϕ .

Se la bussola giroscopica è collocata ai poli, e dunque $\lambda = \pm\pi/2$, si ha $\cos \lambda = 0$ e di conseguenza $\dot{\phi}$ ed ω_3 si mantengono costanti nel tempo; il giroscopio ruota uniformemente attorno al proprio asse giroscopico, che contemporaneamente ruota di moto uniforme attorno all'asse verticale $G\hat{e}_1$, nel piano orizzontale γ . In queste condizioni, evidentemente, la "bussola" non è in grado di assolvere al proprio scopo.

Il caso interessante ricorre quando la bussola è collocata in un punto della superficie terrestre non coincidente con un polo geografico, allorquando $\cos \lambda \neq 0$. Si è interessati, in particolare, ai moti per i quali l'angolo di rotazione ϕ risulta costante in t e l'asse giroscopico mantiene conseguentemente una direzione costante rispetto all'osservatore terrestre. Posto $\phi = \text{costante}$ nelle equazioni del moto (6.3), si ricava che:

$$\begin{cases} 0 = \frac{A_3}{A} |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \omega_3 \cos \phi \\ \dot{\omega}_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = \omega_3 \cos \phi \\ \dot{\omega}_3 = 0 \end{cases}$$

in modo che anche ω_3 risulta a propria volta costante e:

$$\omega_3 = 0 \quad \phi \text{ arbitrario} \quad (6.4.a)$$

oppure:

$$\omega_3 \neq 0 \quad \phi = \pm\pi/2. \quad (6.4.b)$$

Il primo caso corrisponde al giroscopio in quiete in una configurazione arbitraria — tutte le configurazioni del sistema sono di equilibrio — e può dunque essere ignorato come irrilevante. Nel secondo caso invece si verifica una rotazione stazionaria — o permanente — del giroscopio attorno al suo asse giroscopico, ma quest'ultimo **deve necessariamente disporsi secondo il meridiano locale**, ovvero la direzione Nord-Sud, attorno alla quale la rotazione del sistema rigido può avvenire indifferentemente in senso orario o antiorario. Tutte e sole le rotazioni permanenti della bussola giroscopica individuano quindi la direzione del meridiano locale e consentono di determinare la posizione del Nord geografico. A stretto rigore, in regime di rotazione permanente l'asse giroscopico si dispone secondo la direzione Nord-Sud e non consente di stabilire univocamente la posizione del Nord geografico; questa piena specificazione è tuttavia ottenibile esaminando il senso di rotazione del giroscopio. Si può infatti dimostrare che se asse giroscopico e senso di rotazione del giroscopio vengono reciprocamente orientati secondo l'usuale convenzione sinistrorsa — regola della mano destra — allora l'asse giroscopico **orientato** punta sempre, di fatto, verso il Nord geografico.

A questo risultato si perviene analizzando la stabilità delle soluzioni costanti di (6.3) mediante il criterio di stabilità di Liapunov ed applicando la discussione di Weierstrass ad

una conveniente riscrittura delle equazioni del moto (6.3); in ambo i casi l'analisi è resa possibile dall'esistenza di due integrali primi delle stesse equazioni (6.3).

Un integrale primo è quello dell'energia (cinetica), che si deduce moltiplicando la prima e la seconda equazione del moto rispettivamente per $A\dot{\phi}$ e $A_3\omega_3$ e sommando membro a membro le equazioni ottenute:

$$A\dot{\phi}\ddot{\phi} + A_3\omega_3\dot{\omega}_3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{A}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{A_3}{2}\omega_3^2 \right) = 0$$

per cui:

$$H(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = \frac{A}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{A_3}{2}\omega_3^2$$

è una costante del moto. Un ulteriore integrale primo del sistema si ricava riscrivendo la seconda equazione delle (6.3) nella forma:

$$\frac{d}{dt}(\omega_3 + |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \sin \phi) = 0$$

che implica l'esistenza dell'integrale primo:

$$\Gamma(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = \omega_3 + |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \sin \phi$$

il cui valore costante dipenderà dalle condizioni iniziali $(\omega_3(0), \phi(0))$:

$$\Gamma = \omega_3(0) + |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \sin \phi(0) . \quad (6.5)$$

Dall'integrale primo Γ si ricava ω_3 quale funzione di ϕ :

$$\omega_3 = \Gamma - |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \sin \phi$$

e sostituendo l'espressione nella prima delle (6.3) si deduce l'equazione differenziale nella sola funzione ϕ :

$$\ddot{\phi} = \frac{A_3}{A}(\Gamma - |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \sin \phi)|\vec{\omega}_T| \cos \lambda \cos \phi$$

che equivale a:

$$\ddot{\phi} = \frac{A_3}{A}|\vec{\omega}_T| \cos \lambda (\Gamma - |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \sin \phi) \cos \phi$$

e può anche esprimersi come:

$$\ddot{\phi} = \frac{A_3}{A}|\vec{\omega}_T| \cos \lambda \frac{d}{d\phi} \left(\Gamma \sin \phi - \frac{|\vec{\omega}_T| \cos \lambda}{2} \sin^2 \phi \right) . \quad (6.6)$$

Il sistema unidimensionale così ottenuto ha natura posizionale conservativa, con potenziale:

$$U(\phi) = \frac{A_3}{A}|\vec{\omega}_T| \cos \lambda \left(\Gamma \sin \phi - \frac{|\vec{\omega}_T| \cos \lambda}{2} \sin^2 \phi \right) \quad (6.7)$$

e le sue soluzioni $\phi(t)$ possono essere analizzate qualitativamente mediante i metodi di Weierstrass. Si può ora procedere alla discussione delle proprietà di stabilità delle singole soluzioni costanti (6.4.a) e (6.4.b).

La soluzione costante $(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = (\omega_3^0, \pi/2, 0)$, con $\omega_3^0 > 0$, è stabile
È sufficiente porre:

$$\Gamma_0 = \Gamma(\omega_3^0, \pi/2, 0) \quad H_0 = H(\omega_3^0, \pi/2, 0)$$

e considerare la funzione di Liapunov:

$$V(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = (H - H_0)^2 + (\Gamma - \Gamma_0)^2 \quad (6.8)$$

che è di classe C^1 in \mathbb{R}^3 e semidefinita positiva in qualsiasi intorno di $(\omega_3^0, \pi/2, 0)$ in \mathbb{R}^3 . La derivata di V lungo le soluzioni di (6.3) è chiaramente semidefinita negativa in qualsiasi intorno di $(\omega_3^0, \pi/2, 0)$, avendosi in effetti:

$$\dot{V}(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = 2(H - H_0)\dot{H} + 2(\Gamma - \Gamma_0)\dot{\Gamma} = 2(H - H_0)0 + 2(\Gamma - \Gamma_0)0 = 0$$

per via del fatto che H e Γ sono integrali primi. Per poter applicare il criterio di stabilità di Liapunov è dunque sufficiente dimostrare che V risulta definita positiva in un conveniente intorno di $(\omega_3^0, \pi/2, 0)$, per esempio nella sfera chiusa $B[\omega_3^0, \pi/2, 0; \beta]$ di centro $(\omega_3^0, \pi/2, 0)$ e raggio $\beta > 0$ opportuno. A questo scopo si deve dimostrare che per $(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) \in B[\omega_3^0, \pi/2, 0; \beta]$ l'equazione

$$V(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = 0 \quad (6.9)$$

ammette l'unica soluzione $(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = (\omega_3^0, \pi/2, 0)$. La (6.9) equivale al sistema di equazioni:

$$H(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = H_0 \quad \Gamma(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = \Gamma_0$$

ossia:

$$\frac{A}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{A_3}{2}\omega_3^2 = \frac{A_3}{2}(\omega_3^0)^2 \quad \omega_3 + |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \sin \phi = \omega_3^0 + |\vec{\omega}_T| \cos \lambda$$

da cui si deduce:

$$\dot{\phi}^2 = \frac{A_3}{A} [(\omega_3^0)^2 - \omega_3^2] \quad (6.10.a)$$

$$\sin \phi = \frac{\omega_3^0 - \omega_3}{|\vec{\omega}_T| \cos \lambda} + 1. \quad (6.10.b)$$

La (6.10.b) impone che debba aversi:

$$\omega_3 \geq \omega_3^0$$

in modo che l'angolo ϕ sia definito, mentre la (6.10.a) richiede che:

$$|\omega_3| \leq \omega_3^0$$

in quanto $\dot{\phi}^2 \geq 0$. Poiché per ipotesi $\omega_3^0 > 0$, se ne deduce che deve necessariamente risultare $\omega_3 = \omega_3^0$ e dunque:

$$\dot{\phi}^2 = 0 \quad \sin \phi = 1$$

cosicché:

$$\omega_3 = \omega_3^0 \quad \phi = \pi/2 \quad \dot{\phi} = 0 ,$$

a patto di assumere $\beta < 2\pi$ — ciò per assicurare che l'unica soluzione di $\sin \phi = 1$ in $B[\omega_3^0, \pi/2, 0; \beta]$ sia $\phi = \pi/2$. Dal criterio di stabilità di Liapunov segue quindi che la soluzione considerata è stabile.

La soluzione costante $(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = (\omega_3^0, -\pi/2, 0)$, **con** $\omega_3^0 < 0$, **è stabile**

La dimostrazione è analoga a quella esposta nel caso precedente, assumendo la stessa funzione di Liapunov (6.8) con le costanti:

$$\Gamma_0 = \Gamma(\omega_3^0, -\pi/2, 0) \quad H_0 = H(\omega_3^0, -\pi/2, 0) .$$

Per provare l'asserto basta mostrare che in un conveniente intorno sferico $B[\omega_3^0, -\pi/2, 0; \beta]$ di $(\omega_3^0, -\pi/2, 0)$ l'equazione $V(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = 0$ ammette l'unica soluzione $(\omega_3^0, -\pi/2, 0)$. L'equazione si riduce in questo caso al sistema:

$$\frac{A}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{A_3}{2} \omega_3^2 = \frac{A_3}{2} (\omega_3^0)^2 \quad \omega_3 + |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \sin \phi = \omega_3^0 - |\vec{\omega}_T| \cos \lambda$$

che porge:

$$\dot{\phi}^2 = \frac{A_3}{A} [(\omega_3^0)^2 - \omega_3^2] \tag{6.11.a}$$

$$\sin \phi = \frac{\omega_3^0 - \omega_3}{|\vec{\omega}_T| \cos \lambda} - 1 . \tag{6.11.b}$$

Di qui seguono le disuguaglianze:

$$|\omega_3| \leq |\omega_3^0| \quad \omega_3 \leq \omega_3^0$$

che in forza dell'ipotesi $\omega_3^0 < 0$ implicano:

$$-\omega_3 \leq -\omega_3^0 \quad \omega_3 \leq \omega_3^0$$

e quindi $\omega_3 = \omega_3^0$. Si avrà pertanto:

$$\dot{\phi}^2 = 0 \quad \sin \phi = -1$$

con l'unica soluzione:

$$\omega_3 = \omega_3^0 \quad \phi = -\pi/2 \quad \dot{\phi} = 0$$

a condizione di assumere, come nel caso precedente, $\beta < 2\pi$. Il criterio di stabilità di Liapunov conduce all'asserto.

La soluzione costante $(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = (\omega_3^0, \pi/2, 0)$, con $\omega_3^0 < 0$, è instabile

La prova dell'instabilità può essere ottenuta senza ricorrere ai criteri di Liapunov, dimostrando che in un qualsiasi intorno della soluzione costante $(\omega_3^0, \pi/2, 0)$ è sempre possibile scegliere una condizione iniziale la cui corrispondente soluzione esce da una sfera di raggio prefissato e sempre centrata in $(\omega_3^0, \pi/2, 0)$, a patto di attendere un intervallo di tempo sufficientemente lungo. L'idea è quella di studiare l'andamento qualitativo della componente $\phi(t)$ di opportune soluzioni perturbate di $(\omega_3^0, \pi/2, 0)$, componente governata dall'equazione unidimensionale (6.6) alla quale è consentito applicare i criteri di Weierstrass.

A questo scopo si consideri a $t = 0$ una condizione iniziale del tipo:

$$(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = (\omega_3^0 - \delta, \pi/2, \delta)$$

con $\delta > 0$ piccolo a piacere. È evidente che punti di questa forma sono contenuti in qualsiasi intorno sferico di $(\omega_3^0, \pi/2, 0)$. D'altra parte, lungo la soluzione $(\omega_3(t), \phi(t), \dot{\phi}(t))$ corrispondente a questa condizione iniziale l'integrale primo Γ assume il valore costante:

$$\Gamma(\omega_3^0 - \delta, \pi/2, \delta) = \omega_3^0 - \delta + |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \sin(\pi/2) = \omega_3^0 + |\vec{\omega}_T| \cos \lambda - \delta$$

e siccome la derivata seconda del potenziale (6.7) nel suo punto critico $\phi = \pi/2$ è sempre positiva:

$$\begin{aligned} U''(\pi/2) &= \frac{A_3}{A} |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \left[-\Gamma \sin \phi - |\vec{\omega}_T| \cos \lambda (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \right] \Big|_{\phi=\pi/2} = \\ &= \frac{A_3}{A} |\vec{\omega}_T| \cos \lambda (-\Gamma + |\vec{\omega}_T| \cos \lambda) = \frac{A_3}{A} |\vec{\omega}_T| \cos \lambda (-\omega_3^0 + \delta) > 0, \end{aligned}$$

si conclude che $\phi = \pi/2$ costituisce un massimo relativo proprio dell'energia potenziale $-U(\phi)$; tale massimo è anche assoluto, dal momento che la funzione potenziale risulta derivabile sull'intero dominio di definizione \mathbb{R} . A ciò si aggiunga che l'integrale primo, corrispondente a H/A :

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2} - U(\phi) \tag{6.12}$$

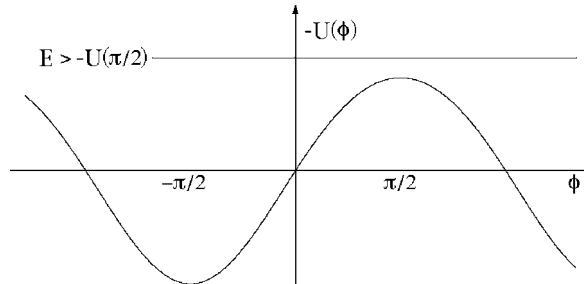
assume per $(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = (\omega_3^0 - \delta, \pi/2, \delta)$ un valore strettamente maggiore del massimo assoluto di $-U(\phi)$:

$$E = \frac{\delta^2}{2} - U(\pi/2) > -U(\pi/2),$$

mentre $\dot{\phi}(0) = \delta$. Considerato che il potenziale $U(\phi)$ è una funzione periodica del proprio argomento, dai criteri di Weierstrass segue immediatamente che la componente $\phi(t)$ della

soluzione $(\omega_3(t), \phi(t), \dot{\phi}(t))$ del problema di Cauchy risulta definita e strettamente crescente $\forall t \in \mathbb{R}$, con codominio rappresentato dall'intera retta reale:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t) = -\infty \qquad \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = +\infty .$$



L'orbita della soluzione perturbata $(\omega_3(t), \phi(t), \dot{\phi}(t))$ fuoriesce dunque da qualsiasi sfera $B[\omega_3^0, \pi/2, 0; \beta]$ per ogni raggio $\beta > 0$ fissato a piacere, a condizione che si lasci trascorrere un intervallo di tempo sufficientemente lungo. La soluzione costante $(\omega_3^0, \pi/2, 0)$ è perciò instabile nel senso di Liapunov, come si voleva dimostrare.

La soluzione costante $(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = (\omega_3^0, -\pi/2, 0)$, con $\omega_3^0 > 0$, è instabile

La dimostrazione procede come nel caso precedentemente esaminato, scegliendo una condizione iniziale perturbata della forma:

$$(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = (\omega_3^0 + \delta, -\pi/2, \delta)$$

con δ positivo e piccolo a piacere. Il valore dell'integrale Γ è dato dalla relazione:

$$\Gamma(\omega_3^0 + \delta, -\pi/2, \delta) = \omega_3^0 + \delta - |\vec{\omega}_T| \cos \lambda$$

mentre la derivata seconda del potenziale (6.7) nel suo punto critico $\phi = -\pi/2$ risulta sempre positiva:

$$\begin{aligned} U''(-\pi/2) &= \frac{A_3}{A} |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \left[-\Gamma \sin \phi - |\vec{\omega}_T| \cos \lambda (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \right] \Big|_{\phi=-\pi/2} = \\ &= \frac{A_3}{A} |\vec{\omega}_T| \cos \lambda (\Gamma + |\vec{\omega}_T| \cos \lambda) = \frac{A_3}{A} |\vec{\omega}_T| \cos \lambda (\omega_3^0 + \delta) > 0 , \end{aligned}$$

in modo che $\phi = -\pi/2$ è un massimo relativo — e assoluto — proprio dell'energia potenziale $-U(\phi)$. L'integrale primo (6.12) associato all'equazione unidimensionale (6.6) assume infine il valore:

$$E = \frac{\delta^2}{2} - U(-\pi/2)$$

strettamente maggiore del valore del massimo $-U(-\pi/2)$, ed inoltre $\dot{\phi}(0) = \delta > 0$. Come nel caso precedente la componente $\phi(t)$ della soluzione massimale del problema di Cauchy

è strettamente crescente su tutta la retta dei t reali e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = +\infty$, cosicché la soluzione costante risulta instabile.

La soluzione costante $(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = (0, \phi_0, 0)$, con $\phi_0 \in \mathbb{R}$, è stabile

Si esegue l'analisi di stabilità anche in questo caso, sebbene queste soluzioni costanti corrispondano ad una condizione di quiete della bussola giroscopica e non siano rilevanti nelle applicazioni pratiche del dispositivo. Basta porre:

$$\Gamma_0 = \Gamma(0, \phi_0, 0) \quad H_0 = H(0, \phi_0, 0)$$

e considerare la funzione di Liapunov:

$$V(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = (H - H_0)^2 + (\Gamma - \Gamma_0)^2 \tag{6.13}$$

che è di classe C^1 in \mathbb{R}^3 e semidefinita positiva in qualsiasi intorno di $(0, \phi_0, 0)$ in \mathbb{R}^3 . La derivata di V lungo le soluzioni di (6.3) è chiaramente semidefinita negativa in qualsiasi intorno di $(0, \phi_0, 0)$, avendosi:

$$\dot{V}(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = 2(H - H_0)\dot{H} + 2(\Gamma - \Gamma_0)\dot{\Gamma} = 2(H - H_0)0 + 2(\Gamma - \Gamma_0)0 = 0$$

in conseguenza del fatto che H e Γ sono integrali primi. Per poter applicare il criterio di stabilità di Liapunov è dunque sufficiente dimostrare che V risulta definita positiva in un conveniente intorno di $(0, \phi_0, 0)$, per esempio nella sfera chiusa $B[0, \phi_0, 0; \beta]$ di centro $(0, \phi_0, 0)$ e raggio $\beta > 0$ opportuno. A questo scopo si deve dimostrare che per $(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) \in B[0, \phi_0, 0; \beta]$ l'equazione

$$V(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = 0 \tag{6.14}$$

ammette l'**unica** soluzione $(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = (0, \phi_0, 0)$. La (6.14) equivale al sistema di equazioni:

$$H(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = H_0 \quad \Gamma(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = \Gamma_0$$

ovvero a:

$$\frac{A}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{A_3}{2}\omega_3^2 = 0 \quad \omega_3 + |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \sin \phi = |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \sin \phi_0$$

da cui si deduce:

$$\dot{\phi} = 0 \quad \omega_3 = 0 \quad \sin \phi = \sin \phi_0 .$$

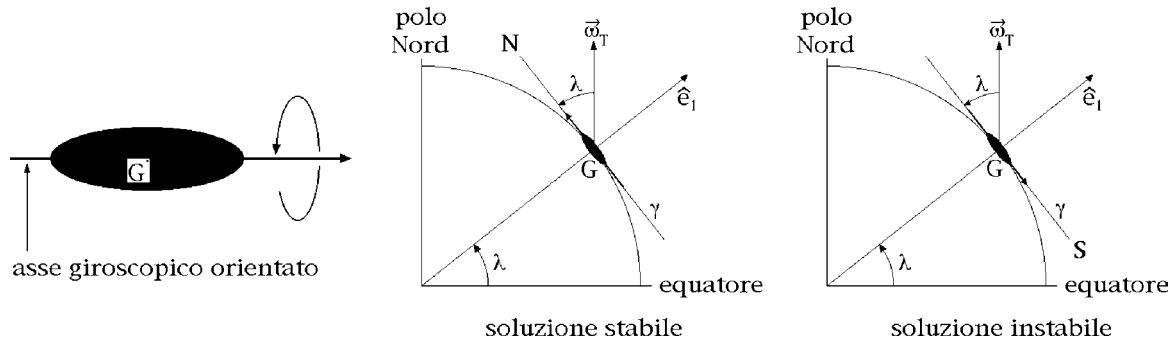
Assunto β abbastanza piccolo (in relazione alla scelta di ϕ_0), l'ultima equazione ammette l'unica soluzione:

$$\phi = \phi_0$$

cosicché V è definita positiva in $B[0, \phi_0, 0; \beta]$. Dal criterio di stabilità di Liapunov segue pertanto che la soluzione considerata è stabile.

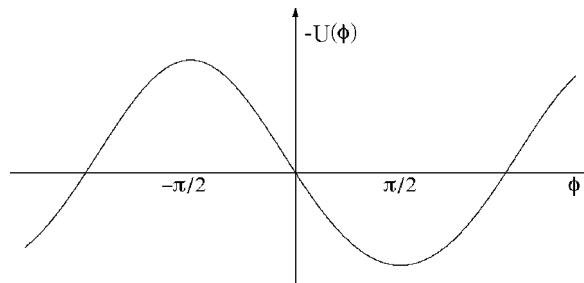
Le soluzioni costanti stabili $(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = (\omega_3^0, \pi/2, 0)$, $\omega_3^0 > 0$, e $(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = (\omega_3^0, -\pi/2, 0)$, $\omega_3^0 < 0$, sono le sole approssimativamente realizzabili nella pratica. Esse corrispondono a rotazioni permanenti per le quali l'asse giroscopico, orientato rispetto al proprio senso di rotazione secondo la convenzione sinistrorsa, risulta diretto verso il Nord geografico.

I moti di rotazione permanente in cui l'asse giroscopico è diretto in senso opposto, cioè verso il Sud geografico, corrispondono anch'essi a soluzioni costanti delle equazioni del moto, ma a causa della loro instabilità si rivelano di fatto inaccessibili al sistema.



Studio qualitativo dei moti

Per una scelta arbitraria delle condizioni iniziali $(\omega_3^0, \phi_0, \dot{\phi}_0)$ l'andamento qualitativo della funzione $\phi(t)$ si desume calcolando preliminarmente il valore dell'integrale primo Γ mediante la (6.5) ed applicando quindi l'analisi di Weierstrass al problema unidimensionale così ottenuto, tenuto conto del grafico dell'energia potenziale $-U(\phi)$:



dell'integrale dell'“energia meccanica”:

$$\frac{1}{A}H = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - \frac{A_3}{A}|\vec{\omega}_T| \cos \lambda \left(\Gamma \sin \phi - \frac{|\vec{\omega}_T| \cos \lambda}{2} \sin^2 \phi \right)$$

e del valore di detto integrale, dedotto sempre dalle condizioni iniziali:

$$E = \frac{\dot{\phi}_0^2}{2} - \frac{A_3}{A}|\vec{\omega}_T| \cos \lambda \left(\Gamma \sin \phi_0 - \frac{|\vec{\omega}_T| \cos \lambda}{2} \sin^2 \phi_0 \right).$$

Lo stesso integrale primo Γ consente poi di ricavare l'andamento della funzione $\omega_3(t)$ e di completare in tal modo l'analisi.