

Esercizio. Piccole oscillazioni forzate e smorzate nell'intorno di un equilibrio.

Si consideri un sistema olonoma a vincoli ideali indipendenti dal tempo, ad n gradi di libertà, e sia

$$\mathcal{L} = T + U = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n a_{hk}(q) \dot{q}_h \dot{q}_k + U(q)$$

la sua lagrangiana espressa in termini delle coordinate generalizzate $q = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$. Il sistema, oltre che alle sollecitazioni posizionali conservative descritte dal potenziale $U(q)$, è sottoposto ad una sollecitazione di potenza non positiva della forma

$$D(q, \dot{q}) = (D_1, D_2, \dots, D_n) \in \mathbb{R}^n$$

di classe C^1 nei suoi argomenti. In tale ipotesi è noto che la sollecitazione D si annulla per $\dot{q} = 0$ e non influisce quindi sulle soluzioni statiche né sulle corrispondenti configurazioni di equilibrio del sistema. Sia $q^0 = (q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0)$ una configurazione di equilibrio stabile per la quale:

- (i) l'hessiana $H_U(q^0)$ del potenziale U nella configurazione q^0 risulti definita negativa (la configurazione è perciò un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità segue dal teorema di Lagrange-Dirichlet). Equivalentemente, l'hessiana $H_V(q^0)$ dell'energia potenziale $V = -U$ in q^0 sia definita positiva;
- (ii) la matrice B che definisce la sollecitazione D linearizzata nell'intorno della soluzione statica $(q, \dot{q}) = (q^0, 0)$:

$$\begin{aligned} D(q, \dot{q}) &= D(q^0, 0) + \frac{\partial D}{\partial q}(q^0, 0) \cdot (q - q^0) + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}}(q^0, 0) \cdot \dot{q} + O(2) = \\ &= \frac{\partial D}{\partial \dot{q}}(q^0, 0) \cdot \dot{q} + O(2) = -B[\dot{q}] + O(2) \quad (q, \dot{q}) \rightarrow (q^0, 0) \end{aligned} \quad (1.1)$$

soddisfi la condizione che la matrice reale e simmetrica $B + B^T$ sia definita positiva, avendo indicato con B^T la trasposta di B e con $[\dot{q}]$ il vettore colonna $(\dot{q}_1 \dots \dot{q}_n)^T$.

- (iii) la matrice A di elementi $a_{hk}(q^0)$, $h, k = 1, \dots, n$ sia reale, simmetrica e definita positiva.

Si supponga infine che al sistema sia applicata una sollecitazione esterna sinusoidale F , di pulsazione ω determinata e componenti lagrangiane

$$F_i = f_i \cos(\omega t + \phi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

dove $f_i \geq 0$ e $\phi_i \in \mathbb{R}$ sono costanti assegnate — ampiezze e fasi per ciascuna componente della forzante esterna.

Sotto tali ipotesi:

- (a) scrivere le equazioni lagrangiane del moto linearizzate nell'intorno della soluzione statica $(q^0, 0)$ in esame;

- (b) analizzare i piccoli moti del sistema nell'intorno della soluzione statica predetta, assumendo siano applicabili le equazioni linearizzate ricavate al punto (a);
- (c) caratterizzare i valori della pulsazione ω della forzante esterna in corrispondenza dei quali si ha risonanza per i piccoli moti del sistema nell'intorno della soluzione statica.

Soluzione

Si osservi preliminarmente come la condizione (i) sia più restrittiva rispetto alla semplice richiesta che la configurazione di equilibrio q^0 — punto critico del potenziale U — sia stabile. In particolare, l'essere q^0 configurazione di equilibrio stabile non impone che il potenziale abbia un massimo relativo proprio nello stesso punto, dal momento che il teorema di Lagrange-Dirichlet fornisce una condizione sufficiente, ma non necessaria, per la stabilità. Né d'altra parte l'eventuale presenza in q^0 di un massimo relativo proprio per U richiede che la matrice hessiana $H_U(q^0)$ debba essere definita negativa, potendo questa risultare soltanto semidefinita non definita negativa.

Anche la condizione (ii) è parimenti restrittiva, rispetto alla semplice richiesta circa la natura dissipativa della sollecitazione D . Conviene in primo luogo osservare che se si ricava l'espressione della potenza di D in termini della (1.1)

$$\pi = \dot{q} \cdot D(q, \dot{q}) = \dot{q} \cdot \left(D(q^0, 0) + \frac{\partial D}{\partial q}(q^0, 0) \cdot (q - q^0) + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}}(q^0, 0) \cdot \dot{q} + O(2) \right)$$

e la si riscrive in forma matriciale, con ovvio significato dei simboli,

$$\pi = [\dot{q}]^T [D(q^0, 0)] + [\dot{q}]^T \left[\frac{\partial D}{\partial q}(q^0, 0) \right] [q - q^0] + [\dot{q}]^T \left[\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}(q^0, 0) \right] [\dot{q}] + [\dot{q}]^T O(2)$$

si deduce immediatamente che la condizioni di potenza non positiva non può essere soddisfatta se non imponendo l'annullarsi della sollecitazione $D(q^0, 0)$ e del relativo gradiente rispetto alle coordinate lagrangiane, $(\partial D / \partial q)(q^0, 0)$. Fissato infatti $q \in \mathbb{R}^n$, per \dot{q} sufficientemente vicino a 0 e a meno di termini di ordine superiore la potenza della sollecitazione sarà data da

$$\pi = [\dot{q}]^T [D(q^0, 0)] + [\dot{q}]^T \left[\frac{\partial D}{\partial q}(q^0, 0) \right] [q - q^0]$$

che dovendo risultare sempre $\leq 0 \forall \dot{q} \in \mathbb{R}^n$ implica $[D(q^0, 0)] + \left[\frac{\partial D}{\partial q}(q^0, 0) \right] [q - q^0] = 0$.

L'arbitrarietà di $q - q^0 \in \mathbb{R}^n$ comporterà poi che si abbia separatamente

$$[D(q^0, 0)] = 0 \quad \text{e} \quad \left[\frac{\partial D}{\partial q}(q^0, 0) \right] = 0 .$$

L'espressione linearizzata di $[D(q, \dot{q})]$ si riduce così a

$$[D(q, \dot{q})] = \left[\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}(q^0, 0) \right] [\dot{q}] + O(2)$$

per cui la matrice B si identifica con

$$B = - \left[\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}(q^0, 0) \right]$$

ed affinché la potenza abbia segno definito — negativo — deve soddisfare la condizione

$$[\dot{q}]^T B [\dot{q}] \geq 0 \quad \forall [\dot{q}] \in \mathbb{R}^n . \tag{1.2}$$

La matrice B è certamente reale, ma non necessariamente simmetrica; tuttavia, trasponendo membro a membro la (1.2) si ottiene

$$[\dot{q}]^T B^T [\dot{q}] \geq 0 \quad \forall [\dot{q}] \in \mathbb{R}^n$$

e sommando questa relazione con la precedente si perviene alla diseuguaglianza

$$[\dot{q}]^T (B + B^T) [\dot{q}] \geq 0 \quad \forall [\dot{q}] \in \mathbb{R}^n \tag{1.3}$$

nella quale $B + B^T$ è reale e simmetrica. Le condizioni (1.2) e (1.3) sono in tutto e per tutto equivalenti, potendosi scrivere

$$[\dot{q}]^T (B + B^T) [\dot{q}] = [\dot{q}]^T B [\dot{q}] + [\dot{q}]^T B^T [\dot{q}] = 2[\dot{q}]^T B [\dot{q}] .$$

Di conseguenza, la condizione sulla potenza π implica la semidefinitezza positiva di $B + B^T$. **La condizione richiesta che vuole $B + B^T$ definita positiva è dunque più forte** di quanto imposto dall'essere D una sollecitazione a potenza non positiva.

Quanto infine alla (iii), la matrice A non è altro che la matrice rappresentativa dell'energia cinetica — che per un sistema a vincoli indipendenti dal tempo si riduce ad una forma quadratica definita positiva di \dot{q} , comunque si fissi q — calcolata nella configurazione di equilibrio $q = q^0$. Risulta quindi evidente che A è sempre una matrice reale simmetrica definita positiva, esattamente come richiesto.

(a) Equazioni linearizzate

Le equazioni di Lagrange del sistema sono

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = D_h + F_h \quad h = 1, \dots, n$$

e il metodo più semplice per linearizzarle nell'intorno della soluzione statica $(q, \dot{q}) = (q^0, 0)$ consiste nel calcolare una lagrangiana \mathcal{L}_{po} delle piccole oscillazioni per mezzo di uno sviluppo di Taylor al secondo ordine nelle variabili (q, \dot{q}) . Si ha, precisamente, l'espressione:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n a(q^0)_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k + U(q^0) + \sum_{h=1}^n \frac{\partial U(q^0)}{\partial q_h} (q_h - q_h^0) + \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n \frac{\partial^2 U(q^0)}{\partial q_h \partial q_k} (q_h - q_h^0) (q_k - q_k^0)$$

che, omissa la costante additiva inessenziale $U(q^0)$ e ricordata la condizione $(\partial U/\partial q)(q^0) = 0$ sulla configurazione di equilibrio, equivale a

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n a(q^0)_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n \frac{\partial^2 U(q^0)}{\partial q_h \partial q_k} (q_h - q_h^0)(q_k - q_k^0) .$$

Quest'ultima, in notazione matriciale, assume la forma

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2} [\dot{q}]^T A [\dot{q}] + \frac{1}{2} [q - q^0]^T H_U(q^0) [q - q^0]$$

e con il cambiamento di variabili $[q - q^0] = \xi \in \mathbb{R}^n$ diventa

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2} \dot{\xi}^T A \dot{\xi} + \frac{1}{2} \xi^T H_U(q^0) \xi \quad (1.4)$$

in cui si è introdotta la matrice hessiana del potenziale in q^0 , $H_U(q^0)$. Nelle nuove variabili le equazioni linearizzate si scrivono

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{po}}{\partial \dot{\xi}_h} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{po}}{\partial \xi_h} \right) = - \sum_{k=1}^n B_{hk} \dot{\xi}_k + F_h \quad h = 1, \dots, n$$

e sostituendo la (1.4) assumono la forma

$$\sum_{k=1}^n A_{hk} \ddot{\xi}_k - \sum_{k=1}^n H_U(q^0)_{hk} \xi_k = - \sum_{k=1}^n B_{hk} \dot{\xi}_k + F_h \quad h = 1, \dots, n$$

equivalente a quella matriciale

$$A \ddot{\xi} - H_U(q^0) \xi = -B \dot{\xi} + F ,$$

ovvero a

$$A \ddot{\xi} + B \dot{\xi} + H_V(q^0) \xi = F \quad (1.5)$$

per via dell'ovvia identità $H_V(q^0) = -H_U(q^0)$. D'ora innanzi, per brevità, si converrà di indicare con H_V la matrice hessiana dell'energia potenziale nella configurazione di equilibrio, omettendo l'indicazione specifica della configurazione. Il sistema (1.5) delle equazioni linearizzate può facilmente ricondursi alla forma normale del primo ordine, introducendo la variabile vettoriale $\eta = \dot{\xi}$:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \eta \\ A \dot{\eta} = -B \eta - H_V \xi + F \end{cases}$$

in modo che si ha

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \eta \\ \dot{\eta} = -A^{-1} B \eta - A^{-1} H_V \xi + A^{-1} F \end{cases}$$

e quindi, con ovvio significato dei simboli \mathbb{O} , \mathbb{I} , \mathbb{D} ,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ -A^{-1} H_V & -A^{-1} B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ A^{-1} F \end{pmatrix} := \mathbb{D} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ A^{-1} F \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

per il fatto che la matrice A è certamente non singolare in quanto definita positiva.

(b) Piccoli moti nell'intorno della soluzione statica

Le (1.6) costituiscono un sistema lineare a coefficienti costanti non omogeneo. È ben noto dall'analisi matematica che la soluzione generale di tale sistema si scrive sommando ad una sua soluzione particolare la soluzione generale del sistema omogeneo associato:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ -A^{-1}H_V & -A^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \mathbb{D} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} .$$

Tale soluzione generale è una combinazione lineare di funzioni a valori vettoriali linearmente indipendenti del tipo $P(t)e^{\lambda t}$, dove $P(t)$ è un polinomio di grado conveniente e λ un autovalore della matrice \mathbb{D} :

$$\det(\mathbb{D} - \lambda\mathbb{I}) = 0 .$$

Si verifica la seguente:

Proposizione

Gli autovalori di \mathbb{D} sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\det(\lambda^2 A + \lambda B + H_V) = 0 .$$

Dimostrazione

Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $\det(\lambda^2 A + \lambda B + H_V) = 0$. Esiste allora un vettore $a \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tale che

$$(\lambda^2 A + \lambda B + H_V)a = 0$$

ed il vettore

$$\begin{pmatrix} a \\ \lambda a \end{pmatrix} ,$$

certamente non nullo in quanto $a \neq 0$, è autovettore di \mathbb{D} con autovalore λ . Infatti:

$$\begin{aligned} \mathbb{D} \begin{pmatrix} a \\ \lambda a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ -A^{-1}H_V & -A^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \lambda a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ -A^{-1}H_V a - \lambda A^{-1}B a \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a \\ -A^{-1}(H_V + \lambda B)a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ -A^{-1}(-\lambda^2 A)a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda^2 a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ \lambda a \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Viceversa, sia $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore di \mathbb{D} e

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

un autovettore ad esso associato. Vale allora:

$$\mathbb{D} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ -A^{-1}H_V & -A^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \neq 0 ,$$

ossia

$$\begin{pmatrix} v \\ -A^{-1}H_V u - A^{-1}B v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u \\ \lambda v \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{cases} v = \lambda u \\ -A^{-1}H_V u - A^{-1}B \lambda u = \lambda^2 u \end{cases}$$

da cui si deduce infine

$$\begin{cases} v = \lambda u \\ (\lambda^2 A + \lambda B + H_V)u = 0 . \end{cases}$$

Si osservi che deve essere necessariamente $u \neq 0$, poiché in caso contrario si avrebbe $v = \lambda u = \lambda 0 = 0$ e dunque $(u, v) = 0$, contro l'ipotesi. Di conseguenza la matrice $\lambda^2 A + \lambda B + H_V$ deve essere singolare:

$$\det(\lambda^2 A + \lambda B + H_V) = 0 ,$$

il che completa la dimostrazione. \square

Un secondo utile risultato è il seguente.

Proposizione

Le soluzioni dell'equazione caratteristica $\det(\lambda^2 A + \lambda B + H_V) = 0$ hanno tutte parte reale strettamente negativa.

Dimostrazione

Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ una soluzione dell'equazione caratteristica. La matrice $\lambda^2 A + \lambda B + H_V$ risulta singolare ed esiste un vettore $a \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tale che

$$(\lambda^2 A + \lambda B + H_V)a = 0 .$$

Indicato con a^+ il trasposto coniugato del vettore colonna a , dall'equazione precedente si deduce

$$\lambda^2 a^+ A a + \lambda a^+ B a + a^+ H_V a = 0 \tag{1.7}$$

che per quanto già osservato — $a^+ B a = a^+ B^T a$ — è equivalente a

$$\lambda^2 a^+ A a + \lambda a^+ \frac{B + B^T}{2} a + a^+ H_V a = 0 .$$

Basta poi evidenziare le parti reale ed immaginaria del vettore a :

$$a = u + iv , \quad u, v \in \mathbb{R}^n ,$$

per ottenere:

$$a^+ A a = (u^T - iv^T)A(u + iv) = u^T A u + iu^T A v - iv^T A u + v^T A v = u^T A u + v^T A v$$

$$a^+ H_V a = u^T H_V u + v^T H_V v$$

$$a^+ \frac{B + B^T}{2} a = u^T \frac{B + B^T}{2} u + v^T \frac{B + B^T}{2} v$$

I coefficienti $a^+ A a$, $a^+ H_V a$ e $a^+ (B + B^T) a$ sono numeri reali strettamente positivi, in quanto i vettori reali u e v non possono assumere valori simultaneamente nulli, e le matrici A , H_V , $B + B^T$ sono per ipotesi reali simmetriche e definite positive. L'equazione (1.7) implica allora

$$\lambda = \frac{1}{2a^+ A a} \left[-a^+ \frac{B + B^T}{2} a \pm \sqrt{\left(a^+ \frac{B + B^T}{2} a \right)^2 - 4 a^+ A a a^+ H_V a} \right]$$

con

$$-a^+ \frac{B + B^T}{2} a < 0 \quad \text{e} \quad \left(a^+ \frac{B + B^T}{2} a \right)^2 - 4 a^+ A a a^+ H_V a < \left(a^+ \frac{B + B^T}{2} a \right)^2$$

per cui λ — sia esso reale o complesso — ha sempre parte reale negativa. \square

Un immediato corollario di questo risultato è la

Proposizione

Comunque si assegni la pulsazione ω della forzante F , le equazioni linearizzate del secondo ordine (1.5) ammettono una soluzione particolare della forma

$$\xi_i(t) = a_i \cos(\omega t + \alpha_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad , \quad (1.8)$$

per una opportuna scelta delle costanti reali $a_i \geq 0$ ed α_i , $i = 1, \dots, n$. Ad essa corrisponde la soluzione particolare

$$\xi_i(t) = a_i \cos(\omega t + \alpha_i) \quad \eta_i(t) = -\omega a_i \sin(\omega t + \alpha_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad ,$$

del sistema (1.6).

Dimostrazione

Siccome H_V è definita positiva e dunque non singolare, per $\omega = 0$ la proposizione risulta banalmente verificata assegnando $a = H_V^{-1} F$ e la soluzione particolare è costante in t . Ci si può quindi limitare a considerare il caso di $\omega \neq 0$. In tale ipotesi, si riscriva il primo membro della (1.5) nella forma di un operatore differenziale vettoriale applicato a ξ :

$$\left[A \frac{d^2}{dt^2} + B \frac{d}{dt} + H_V \right] \xi = F \quad . \quad (1.9)$$

Posto $\xi_i(t) = a_i \cos(\omega t + \alpha_i) \quad \forall i = 1, \dots, n$ ed applicato membro a membro l'operatore differenziale complesso

$$\Delta := \mathbb{I} \left(1 - \frac{i}{\omega} \frac{d}{dt} \right) \quad ,$$

si ottiene

$$\Delta \left[A \frac{d^2}{dt^2} + B \frac{d}{dt} + H_V \right] \xi = \Delta F$$

che equivale a

$$\left[A \frac{d^2}{dt^2} + B \frac{d}{dt} + H_V \right] \Delta \xi = \Delta F . \quad (1.10)$$

D'altra parte valgono $\forall h = 1, \dots, n$ le ovvie relazioni

$$(\Delta \xi)_h = \left(1 - \frac{i}{\omega} \frac{d}{dt} \right) a_h \cos(\omega t + \alpha_h) = a_h [\cos(\omega t + \alpha_h) + i \sin(\omega t + \alpha_h)] = a_h e^{i\alpha_h} e^{i\omega t}$$

$$(\Delta F)_h = \left(1 - \frac{i}{\omega} \frac{d}{dt} \right) f_h \cos(\omega t + \phi_h) = f_h [\cos(\omega t + \phi_h) + i \sin(\omega t + \phi_h)] = f_h e^{i\phi_h} e^{i\omega t}$$

e di conseguenza le identità vettoriali

$$\Delta \xi = \tilde{a} e^{i\omega t} \quad \Delta F = \tilde{F} e^{i\omega t}$$

in cui si sono introdotti i vettori complessi:

$$\tilde{a} = \begin{pmatrix} a_1 e^{i\alpha_1} \\ \dots \\ a_n e^{i\alpha_n} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{F} = \begin{pmatrix} f_1 e^{i\phi_1} \\ \dots \\ f_n e^{i\phi_n} \end{pmatrix} . \quad (1.11)$$

La funzione complessa $\tilde{a} e^{i\omega t}$ è soluzione di (1.10) se e soltanto se (1.8) lo è della (1.9). Sostituendo le espressioni complesse di $\Delta \xi$ e ΔF nell'equazione (1.10) si ottiene perciò

$$(-\omega^2 A + i\omega B + H_V) \tilde{a} e^{i\omega t} = \tilde{F} e^{i\omega t}$$

ovvero, semplificando il fattore di fase $e^{i\omega t}$,

$$(-\omega^2 A + i\omega B + H_V) \tilde{a} = \tilde{F} .$$

Questa equazione algebrica complessa ammette l'unica soluzione

$$\tilde{a} = (-\omega^2 A + i\omega B + H_V)^{-1} \tilde{F} \quad (1.12)$$

dal momento che la matrice $\lambda^2 A + \lambda B + H_V$ può essere singolare soltanto per valori di λ con parte reale strettamente negativa, e per $\lambda = i\omega$ risulta quindi certamente invertibile. Dall'equazione

$$\begin{pmatrix} a_1 e^{i\alpha_1} \\ \dots \\ a_n e^{i\alpha_n} \end{pmatrix} = (-\omega^2 A + i\omega B + H_V)^{-1} \begin{pmatrix} f_1 e^{i\phi_1} \\ \dots \\ f_n e^{i\phi_n} \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

si deducono infine le costanti $a_h \geq 0$ ed $\alpha_h \in \mathbb{R}$, $\forall h = 1, \dots, n$.

La seconda parte della proposizione segue banalmente per il modo in cui il sistema (1.6) è stato ricavato dalla (1.5). \square

Le proposizioni dimostrate consentono di affermare che la soluzione generale delle equazioni delle piccole oscillazioni — (1.5) o (1.6) — consiste della somma di una soluzione particolare di tipo sinusoidale:

$$\xi_h(t) = a_h \cos(\omega t + \alpha_h) \quad , \quad h = 1, \dots, n \quad ,$$

i cui coefficienti di ampiezza — $a_h \geq 0$ — e di fase — $\alpha_h \in \mathbb{R}$ — sono determinati dalla (1.13), e della soluzione generale dell'omogenea associata, la quale tende esponenzialmente a zero per $t \rightarrow +\infty$. Una volta trascorso il transiente iniziale, che peraltro reca tutta la dipendenza dalle condizioni iniziali, il moto asintotico del sistema è dunque descritto dalla sola soluzione di tipo sinusoidale, con pulsazione uguale a quella della forzante sinusoidale esterna.

(c) Risonanza

Nell'ipotesi che le equazioni delle piccole oscillazioni siano ancora applicabili anche in presenza della forzante sinusoidale F — ipotesi ragionevole qualora le ampiezze f_h , $h = 1, \dots, n$ della forzante siano sufficientemente piccole — i fenomeni di risonanza possono essere trattati in modo analogo a quanto avviene per un oscillatore armonico unidimensionale soggetto a smorzamento viscoso e a forzante sinusoidale. La sola differenza di rilievo è rappresentata dal fatto che in un sistema ad n gradi di libertà le oscillazioni coinvolgono una pluralità di variabili, ciascuna caratterizzata da una propria ampiezza e da una propria fase di oscillazione. Si tratta quindi di introdurre un criterio ragionevole ed univoco per definire la condizione di risonanza del sistema, criterio che coinvolga simultaneamente tutti i gradi di libertà e le relative ampiezze e fasi.

Il modo più semplice e intuitivo di fare questo consiste nel considerare l'energia meccanica totale media accumulata nel sistema in un periodo di oscillazione $T = 2\pi/\omega$, una volta che sia stata superata la fase transiente e raggiunto il moto di regime.

A questo scopo, si ricorda che l'energia meccanica totale del sistema è data dall'espressione

$$H(\xi, \dot{\xi}) = \frac{1}{2} \dot{\xi}^T A \dot{\xi} + \frac{1}{2} \xi^T H_V \xi$$

in cui, a regime, risulta

$$\xi_h = a_h \cos(\omega t + \alpha_h) \quad \dot{\xi}_h = -\omega a_h \sin(\omega t + \alpha_h) \quad , \quad h = 1, 2, \dots, n \quad ,$$

e quindi

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n \omega^2 A_{hk} a_h a_k \sin(\omega t + \alpha_h) \sin(\omega t + \alpha_k) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n (H_V)_{hk} a_h a_k \cos(\omega t + \alpha_h) \cos(\omega t + \alpha_k) . \end{aligned}$$

L'energia del sistema è quindi una funzione periodica del tempo, di periodo $2\pi/\omega$, ed appare del tutto ragionevole assumerne il valore medio su un periodo come indice della

quantità media di energia meccanica accumulata nel sistema a regime. Detto valore medio si calcola come

$$\begin{aligned}\langle H \rangle &:= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} H(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n \omega^2 A_{hk} a_h a_k \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sin(\omega t + \alpha_h) \sin(\omega t + \alpha_k) dt + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n (H_V)_{hk} a_h a_k \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \cos(\omega t + \alpha_h) \cos(\omega t + \alpha_k) dt\end{aligned}$$

ed in forza delle ovvie relazioni integrali

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi/\omega} \sin(\omega t + \alpha_h) \sin(\omega t + \alpha_k) dt = \\ &= \int_0^{2\pi/\omega} \frac{\cos(\alpha_h - \alpha_k) - \cos(2\omega t + \alpha_h + \alpha_k)}{2} dt = \frac{\pi}{\omega} \cos(\alpha_h - \alpha_k) \\ &\int_0^{2\pi/\omega} \cos(\omega t + \alpha_h) \cos(\omega t + \alpha_k) dt = \\ &= \int_0^{2\pi/\omega} \frac{\cos(\alpha_h - \alpha_k) + \cos(2\omega t + \alpha_h + \alpha_k)}{2} dt = \frac{\pi}{\omega} \cos(\alpha_h - \alpha_k)\end{aligned}$$

diventa

$$\begin{aligned}\langle H \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n \omega^2 A_{hk} a_h a_k \frac{1}{2} \cos(\alpha_h - \alpha_k) + \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n (H_V)_{hk} a_h a_k \frac{1}{2} \cos(\alpha_h - \alpha_k) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{h,k=1}^n (\omega^2 A + H_V)_{hk} a_h a_k \cos(\alpha_h - \alpha_k) .\end{aligned}$$

Siccome poi, causa la simmetria della matrice $\omega^2 A + H_V$, risulta

$$\begin{aligned}&\sum_{h,k=1}^n (\omega^2 A + H_V)_{hk} a_h a_k \sin(\alpha_h - \alpha_k) = \sum_{k,h=1}^n (\omega^2 A + H_V)_{kh} a_k a_h \sin(\alpha_k - \alpha_h) = \\ &= - \sum_{k,h=1}^n (\omega^2 A + H_V)_{kh} a_k a_h \sin(\alpha_h - \alpha_k) = - \sum_{h,k=1}^n (\omega^2 A + H_V)_{hk} a_h a_k \sin(\alpha_h - \alpha_k) = 0\end{aligned}$$

l'espressione finale può essere riscritta in forma complessa come

$$\begin{aligned}\langle H \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{h,k=1}^n (\omega^2 A + H_V)_{hk} a_h a_k e^{-i\alpha_h} e^{i\alpha_k} = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{h,k=1}^n (\omega^2 A + H_V)_{hk} \tilde{a}_h^* \tilde{a}_k = \frac{1}{4} \tilde{a}^+ (\omega^2 A + H_V) \tilde{a}\end{aligned}$$

con \tilde{a} dato da (1.12). Pertanto:

$$\begin{aligned}\langle H \rangle &= \frac{1}{4} [(-\omega^2 A + i\omega B + H_V)^{-1} \tilde{F}]^+ (\omega^2 A + H_V) (-\omega^2 A + i\omega B + H_V)^{-1} \tilde{F} = \\ &= \frac{1}{4} \tilde{F}^+ (-\omega^2 A - i\omega B^T + H_V)^{-1} (\omega^2 A + H_V) (-\omega^2 A + i\omega B + H_V)^{-1} \tilde{F} .\end{aligned}$$

Questa funzione dipende dai parametri caratteristici del sistema libero nell'intorno della soluzione statica $(q^0, 0)$, incorporati nelle matrici A , B , H_V , e dai parametri che caratterizzano la forzante F , ossia la pulsazione ω , le ampiezze f_h e le fasi ϕ_h :

$$\langle H \rangle = \langle H \rangle(A, B, H_V; \omega, f_1, \dots, f_n, \phi_1, \dots, \phi_n) .$$

Assegnate che siano ampiezze e fasi della forzante, $\langle H \rangle$ può riguardarsi come funzione della sola variabile reale ω ed assume valori strettamente positivi per qualsiasi valore della pulsazione. Grandi valori di $\langle H \rangle$ indicano che il sistema accumula, a regime, una grande quantità di energia meccanica fornita dalla forzante esterna, mentre all'opposto piccoli valori di $\langle H \rangle$ si accompagnano ad un più ridotto accumulo di energia. Le pulsazioni di risonanza possono essere allora identificate con i massimi relativi propri di questa funzione $\omega \rightarrow \langle H \rangle(\omega)$, in corrispondenza dei quali piccole variazioni della pulsazione si traducono in una diminuzione dell'energia meccanica media accumulata nel sistema. Graficamente, le pulsazioni di risonanza sono dunque identificabili con i "picchi" della funzione $\omega \rightarrow \langle H \rangle(\omega)$. **È importante sottolineare come, sulla base della precedente definizione, le pulsazioni di risonanza dipendano, in generale, dai coefficienti di ampiezza e di fase della forzante**, circostanza questa che non si riscontra nel caso dell'oscillatore unidimensionale. Nondimeno, **tale dipendenza risulta sovente molto debole** e con buona approssimazione può essere trascurata. L'affermazione può essere meglio compresa riscrivendo convenientemente la relazione che definisce $\langle H \rangle$. A questo scopo si ricorda che se M^* indica la matrice degli aggiunti classici di una matrice quadrata M assegnata, vale $MM^* = \det M$ e, qualora M risulti invertibile, $M^{-1} = (\det M)^{-1} M^*$. Si ha allora

$$(-\omega^2 A + i\omega B + H_V)^{-1} = \frac{1}{\det(-\omega^2 A + i\omega B + H_V)} (-\omega^2 A + i\omega B + H_V)^*$$

e quindi

$$\begin{aligned}(-\omega^2 A - i\omega B^T + H_V)^{-1} &= \frac{1}{\det(-\omega^2 A - i\omega B^T + H_V)} (-\omega^2 A - i\omega B^T + H_V)^* = \\ &= \frac{1}{\det(-\omega^2 A - i\omega B + H_V)} (-\omega^2 A - i\omega B^T + H_V)^*\end{aligned}$$

per cui

$$\langle H \rangle = \frac{\tilde{F}^+ (-\omega^2 A - i\omega B^T + H_V)^* (\omega^2 A + H_V) (-\omega^2 A + i\omega B + H_V)^* \tilde{F}}{4 |\det(-\omega^2 A + H_V + i\omega B)|^2} . \quad (1.14)$$

La funzione a denominatore

$$Q(\omega) = 4 |\det(-\omega^2 A + H_V + i\omega B)|^2 = 4 \det(-\omega^2 A + H_V + i\omega B) \det(-\omega^2 A + H_V - i\omega B)$$

è un polinomio di grado $4n$ a coefficienti reali, in quanto prodotto di due polinomi caratteristici entrambi di grado $2n$, i coefficienti del primo risultando complessi coniugati di quelli del secondo. Il polinomio non ha zeri reali ed è anche una funzione pari in \mathbb{R}

$$Q(-\omega) = 4 |\det(-\omega^2 A + H_V - i\omega B)|^2 = 4 |\det(-\omega^2 A + H_V + i\omega B)|^2 = Q(\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

per cui i coefficienti dei termini di ordine dispari devono essere tutti nulli. La funzione $Q(\omega)$ può dunque riguardarsi come un polinomio di grado $2n$ in ω^2 . Essa viene determinata unicamente dalle matrici A , B , H_V , e non dipende dai parametri che caratterizzano la forzante sinusoidale F .

L'espressione a numeratore

$$P(\omega) = \tilde{F}^+(-\omega^2 A - i\omega B^T + H_V)^*(\omega^2 A + H_V)(-\omega^2 A + i\omega B + H_V)^* \tilde{F}$$

si presenta a propria volta come un polinomio in ω a coefficienti reali, ma di grado $4n - 2$. Esso reca tutta la dipendenza di $\langle H \rangle$ dai parametri di ampiezza e di fase della forzante.

Per quanto già sottolineato in precedenza, entrambi i polinomi assumono valori strettamente positivi su tutta la retta reale ed il loro quoziente

$$\langle H \rangle = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}$$

tende a zero per $\omega \rightarrow \pm\infty$, visto che il grado di $Q(\omega)$ è maggiore di quello di $P(\omega)$.

I coefficienti del polinomio $Q(\omega)$ sono funzioni continue degli elementi di B per cui, se considerate nel piano complesso \mathbb{C} , le radici di $Q(\omega)$ devono variare con continuità in funzione di B ; in particolare le radici di $Q(\omega)$ per $B \sim 0$ non possono discostarsi molto da quelle dello stesso polinomio per $B = 0$. Ma in assenza di smorzamento — $B = 0$ — il polinomio $Q(\omega) = 4 [\det(-\omega^2 A + H_V)]^2$ presenta esattamente $2n$ radici reali doppie, congetturate con le rispettive molteplicità; di queste, n sono positive e coincidono banalmente con le pulsazioni normali delle piccole oscillazioni del sistema conservativo nell'intorno della soluzione statica stabile considerata, mentre le restanti n risultano opposte alle precedenti:

$$-\omega_n, \quad \dots, \quad -\omega_2, \quad -\omega_1, \quad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \dots, \quad \omega_n, \quad , \quad \omega_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

L'introduzione di un piccolo termine di smorzamento rimuove, come già dimostrato, ogni radice reale del polinomio $Q(\omega)$; le $2n$ radici doppie del caso non smorzato vengono ora sostituite da $2n$ coppie di radici complesse coniugate, vicine alle pulsazioni normali delle piccole oscillazioni ed ai loro opposti. Sull'asse reale, in prossimità di queste radici, si localizzeranno i minimi relativi propri di $Q(\omega)$, i cui valori risulteranno a loro volta molto vicini a zero, ancorché strettamente positivi. Di conseguenza, per $B \sim 0$ la funzione

$$\frac{1}{Q(\omega)} = \frac{1}{4 |\det(-\omega^2 A + i\omega B + H_V)|^2}$$

sarà caratterizzata da al più $2n$ massimi relativi propri ed in corrispondenza di essi assumerà valori molto elevati. Questi intensi “picchi” della $1/Q(\omega)$ vengono per così dire “modulati” dal numeratore $P(\omega)$, che è un polinomio di grado inferiore: di norma i massimi relativi propri di $\langle H \rangle$ non ne risultano modificati in modo sensibile, sebbene i valori di $Q(\omega)$ e di $P(\omega)/Q(\omega)$ possano differire significativamente in un punto di massimo.

Si illustrano le considerazioni precedenti con un semplice esempio, considerando le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix} \quad H_V = \begin{pmatrix} 2.2 & -1.2 & 0 \\ -1.2 & 2.4 & -1.2 \\ 0 & -1.2 & 2.2 \end{pmatrix}$$

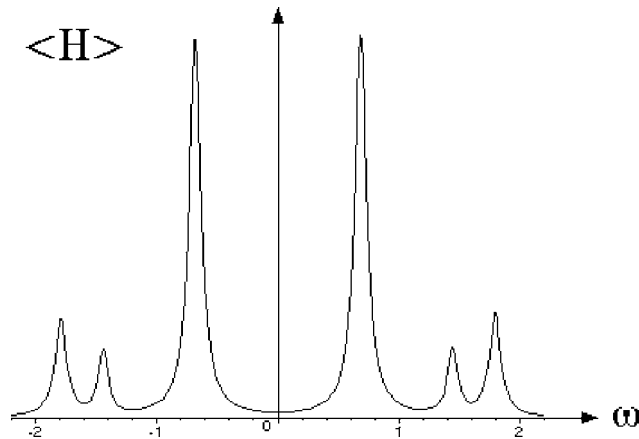
che soddisfano, come è immediato verificare, le ipotesi (i), (ii) e (iii). Per i seguenti valori di ampiezza e fase della forzante:

$$f_1 = 2 \quad f_2 = 2 \quad f_3 = 2 \quad \phi_1 = \pi/5 \quad \phi_2 = 1 \quad \phi_3 = 0 \quad (1.15)$$

l’energia media a regime è data dall’espressione

$$\begin{aligned} \langle H \rangle = & (0.27225 \omega^{12} - 3.1482875 \omega^{10} + 14.1381629 \omega^8 - 30.8403124 \omega^6 + \\ & + 33.2674736 \omega^4 - 15.9990464 \omega^2 + 2.78784) \cdot \\ & \cdot (0.70125 \omega^{10} - 5.82361819 \omega^8 + 0.038820248 \omega^7 + 18.2235627 \omega^6 - \\ & - 0.176377392 \omega^5 - 23.0346493 \omega^4 + 0.205358970 \omega^3 + 3.05428152 \omega^2 + 11.9445406) \end{aligned}$$

e presenta 6 picchi di risonanza, come illustrato dal grafico seguente:



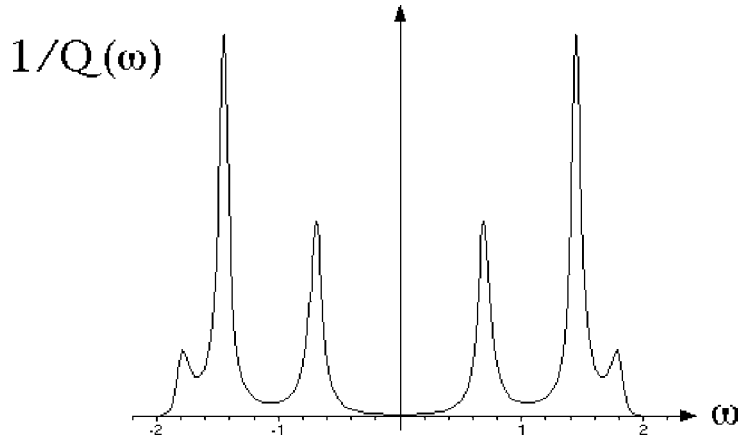
Per le pulsazioni di risonanza, massimi relativi propri di $\langle H \rangle$, non è possibile ottenere una espressione esplicita, ma una semplice indagine numerica porge i valori:

$$\begin{aligned} & 0.685134299, \quad 1.44581932, \quad 1.79735307, \\ & -0.685073381, \quad -1.44601108, \quad -1.79744576, \quad . \end{aligned} \quad (1.16)$$

Per contro, i massimi relativi propri della funzione

$$\frac{1}{Q(\omega)} = (0.27225 \omega^{12} - 3.1482875 \omega^{10} + 14.1381629 \omega^8 - 30.8403124 \omega^6 + 33.2674736 \omega^4 - 15.9990464 \omega^2 + 2.78784)^{-1}$$

il cui grafico è illustrato nella figura sottoriportata



si stimano numericamente come:

$$0.687226539, \quad 1.44657338, \quad 1.78130864 \\ -0.687226539, \quad -1.44657338, \quad -1.78130864,$$

e risultano due a due opposti in segno, come deve aversi in virtù del fatto che P è un polinomio pari. Tali massimi di fatto sono in numero di 3 e non dipendono dai parametri della forzante. Nondimeno, essi assumono valori molto prossimi alle pulsazioni di risonanza (1.16), che all'opposto sono in numero di 6, tutte distinte e dipendenti dalla scelta dei parametri della forzante. Questa osservazione potrebbe suggerire, almeno nel limite di smorzamento debole ($B \sim 0$) — di definire le pulsazioni di risonanza come i massimi relativi propri della $1/Q(\omega)$, in modo che la definizione sia indipendente dai parametri della forzante applicata al sistema. In tal caso è facile dimostrare che il numero massimo di pulsazioni di risonanza — positive — coincide con il numero n di gradi di libertà del sistema.

Se lo smorzamento B non è piccolo, tuttavia, l'approssimazione precedente in generale perde di validità. Se ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad H_V = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

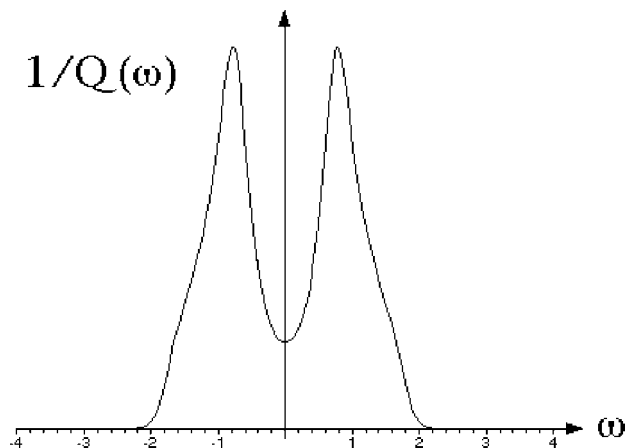
si ottiene la funzione

$$\frac{1}{Q(\omega)} = \frac{1}{4} \frac{1}{\omega^{12} - 9.99\omega^{10} + 40.94\omega^8 - 87.43\omega^6 + 102.56\omega^4 - 58.24\omega^2 + 16}$$

i cui massimi relativi propri sono in numero di due soltanto

$$-0.779920760 \quad 0.779920760 ,$$

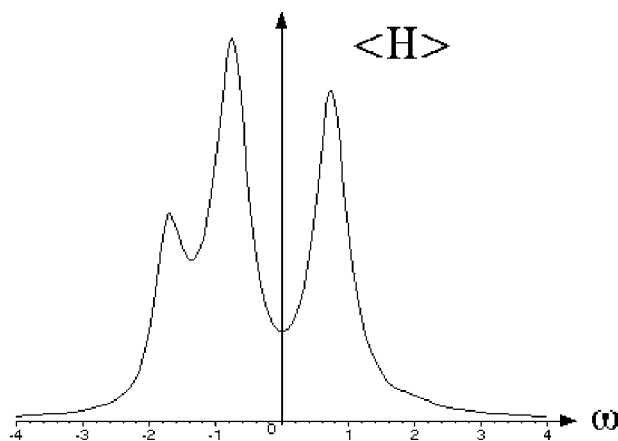
come confermato dal grafico corrispondente:



Con gli stessi valori (1.15) dei parametri della forzante si ha però

$$\langle H \rangle = (\omega^{12} - 9.99\omega^{10} + 40.94\omega^8 - 87.43\omega^6 + 102.56\omega^4 - 58.24\omega^2 + 16)^{-1} \cdot (3\omega^{10} - 22.8121217\omega^8 - 4.33675290\omega^7 + 71.0482934\omega^6 + 13.0102587\omega^5 - 90.1197972\omega^4 - 17.3470116\omega^3 + 21.5198479\omega^2 + 70.0244606)$$

cui corrispondono il grafico



e le pulsazioni di risonanza

$$-1.70351995, \quad -0.758324829 \quad 0.732932055 ,$$

che sono in numero di **tre**. I massimi relativi propri di $1/Q(\omega)$ non forniscono dunque una approssimazione adeguata per lo spettro delle pulsazioni di risonanza del sistema

forzato; in particolare, non esiste alcun massimo relativo proprio di $1/Q(\omega)$ che approssimi la pulsazione di risonanza -1.70351995 .

Come ultima osservazione, è importante sottolineare che il grafico di $\langle H \rangle$ non soltanto consente di individuare le pulsazioni di risonanza del sistema forzato, ma permette altresì di “pesare” le risonanze. A picchi di risonanza più alti corrispondono infatti stati risonanti del sistema caratterizzati da una più elevata energia media per periodo di oscillazione, mentre i picchi meno pronunciati devono intendersi associati a risonanze “deboli”, con energia media per periodo più piccola.