

# Lezioni di meccanica razionale

Dispense per il corso di Meccanica Razionale, vecchio ordinamento  
di Stefano Siboni

Note di approfondimento sui seguenti argomenti:

- Analisi di Weierstrass
- Moto di un punto in un campo di forze centrali
- Moti giroscopici
- Deviazione verso oriente dei gravi in caduta
- Pendolo di Foucault
- Moto di rotolamento di un disco su un piano orizzontale

# 1. Discussione di Weierstrass

Si considera un punto materiale di massa  $m$  vincolato a muoversi lungo una curva fissa e liscia e soggetto a sollecitazioni puramente posizionali. La posizione del punto è determinata dall'ascissa curvilinea  $x$ , mentre le forze posizionali agenti su di esso si descrivono per mezzo del potenziale  $-W(x)$ , essendo  $W(x)$  l'energia potenziale del sistema. L'equazione del moto si scrive, assumendo l'ascissa  $x$  definita sull'intervallo aperto  $I \subseteq \mathbb{R}$ :

$$m\ddot{x} = -W'(x) \quad (1.1)$$

altresì equivalente al sistema del primo ordine in forma normale:

$$\frac{d}{dt}(x, v) = \left( v, -\frac{1}{m}W'(x) \right) \quad (x, v) \in I \times \mathbb{R} . \quad (1.2)$$

Le usuali condizioni che garantiscono esistenza ed unicità della soluzione massimale per il problema di Cauchy relativo portano a richiedere che  $W'(x)$  sia continua e localmente lipschitziana (in  $x$ ). In tali ipotesi il problema di valori iniziali  $(x_0, v_0) \in I \times \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(x, v) = \left( v, -\frac{1}{m}W'(x) \right) \\ (x, v)(t_0) = (x_0, v_0) \end{cases}$$

ammette sempre una ed una sola soluzione massimale  $(x, v)(t, t_0, x_0, v_0)$ , definita su un intervallo aperto  $J(t_0, x_0, v_0) \subseteq \mathbb{R}$  ed ivi almeno di classe  $C^1$ . Per brevità la componente  $x$  di tale soluzione verrà indicata con  $x(t)$  ed in forza della relazione  $v = \dot{x}$  sarà una funzione di classe  $C^2$ . Moltiplicando membro a membro la (1.1) per  $\dot{x}$  si ha immediatamente:

$$\frac{m}{2}\dot{x}(t)^2 + W(x(t)) = E \quad (1.3)$$

con  $E$  costante lungo la soluzione massimale (energia meccanica totale del sistema). In modo del tutto equivalente si può considerare la funzione:

$$H(x, v) = \frac{m}{2}v^2 + W(x)$$

e verificare che la sua derivata lungo la soluzione,  $\dot{H}$ , è identicamente nulla sul dominio  $I \times \mathbb{R}$  di definizione del sistema (1.2). Dalla (1.3) si deduce:

$$\dot{x}(t)^2 = \frac{2}{m}[E - W(x(t))] \equiv \Phi(x(t)) ,$$

con  $\Phi(x) = -2W'(x)/m$  continua e localmente lipschitziana in  $x$ . La positività del primo membro implica che:

$$\Phi(x(t)) \geq 0 \quad \forall t \in J(t_0, x_0, v_0) \quad (1.4)$$

ed inoltre che:

$$\dot{x}(t) = \pm \sqrt{\Phi(x(t))} \quad (1.5)$$

sullo stesso intervallo di definizione della soluzione. Si osservi che  $\dot{x}(t)$  e  $\sqrt{\Phi(x(t))}$  sono continue in  $t \in J(t_0, x_0, v_0)$  in quanto composizioni di funzioni continue. Pertanto le eventuali variazioni di segno nella (1.5) possono avere luogo soltanto se  $\Phi(x(t)) = 0$ , vale a dire se  $x(t)$  è uno zero di  $\Phi$ .

Allo scopo di illustrare la discussione di Weierstrass si assumerà per fissare le idee  $v_0 \geq 0$ , il caso  $v_0 < 0$  potendosi trattare in modo analogo.

### 1.1 Teorema. Soluzioni statiche

Se  $\Phi(x_0) = 0$  e  $\Phi'(x_0) = 0$ , allora  $x(t) = x_0 \forall t \in \mathbb{R}$  è la soluzione massimale dell'equazione del moto (1.1) con dati iniziali  $(x(t_0), \dot{x}(t_0)) = (x_0, 0)$ .

#### Dimostrazione

Infatti la condizione  $\Phi(x_0) = 0$  implica che l'energia cinetica e dunque la velocità iniziale  $v_0$  siano nulle. D'altra parte  $\Phi'(x_0) = 0$  significa che  $x_0$  è punto critico dell'energia potenziale, per cui  $x(t) = x_0 \forall t \in \mathbb{R}$  è certamente soluzione della (1.1).  $\square$

### 1.2 Teorema. Moti progressivi

Sia  $v_0 > 0$  — ossia  $\Phi(x_0) > 0$  — e l'equazione  $\Phi(x) = 0$  non ammetta soluzioni per  $x > x_0$ ,  $x \in I$ . Allora la soluzione del sistema per  $t \geq t_0$ ,  $t \in J(t_0, x_0, v_0)$ , è data dall'integrale di Weierstrass:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad \forall x(t) \in I \cap [x_0, +\infty)$$

e corrisponde ad un moto progressivo del punto materiale. Indicato con  $\sup(I)$  l'estremo superiore di  $I$  — e convenendo che  $\sup(I) = +\infty$  qualora  $I$  non sia limitato superiormente —, l'estremo superiore dell'intervallo  $J(t_0, x_0, v_0)$  di definizione della soluzione massimale vale:

$$t_0 + \int_{x_0}^{\sup(I)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad (1.6)$$

a condizione che l'integrale a secondo membro esista finito.  $J(t_0, x_0, v_0)$  risulterà invece superiormente illimitato nel caso che lo stesso integrale sia generalizzato e non convergente.

#### Dimostrazione

La condizione iniziale  $v_0 > 0$  e l'assenza di zeri di  $\Phi$  in  $\{x \in I : x > x_0\}$  implicano l'equazione:

$$\dot{x}(t) = +\sqrt{\Phi(x(t))} \quad \forall t \in J(t_0, x_0, v_0) \cap [t_0, +\infty)$$

risolvibile per separazione di variabili:

$$t = t_0 + \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad \forall x(t) \in I \cap [x_0, +\infty). \quad (1.7)$$

La soluzione  $x(t)$  è una funzione monotona crescente di  $t \geq t_0$ , il che prova la natura progressiva del moto. Infine, l'estremo superiore di  $J(t_0, x_0, v_0)$  si ottiene dalla (1.7) considerando il limite  $x(t) \rightarrow \sup(I)-$ : ciò equivale precisamente al calcolo della (1.6) e comporta che l'intervallo sia superiormente illimitato se e soltanto se l'integrale generalizzato diverge.  $\square$

### 1.3 Teorema. Punti di inversione e mete asintotiche

Sia  $v_0 > 0$  — ossia  $\Phi(x_0) > 0$  — ed esista  $\vec{x} \in I$ ,  $\vec{x} > x_0$ , tale che  $\Phi(\vec{x}) = 0$  e  $\Phi(x) > 0 \forall x \in [x_0, \vec{x})$ . Si distinguono allora due casi:

- (i) se  $\vec{x}$  è uno zero semplice di  $\Phi$ , se cioè  $\Phi'(\vec{x}) \neq 0$ , si ha in  $\vec{x}$  un punto di inversione del moto del sistema;
- (ii) se  $\vec{x}$  non è uno zero semplice di  $\Phi$ , vale a dire  $\Phi'(\vec{x}) = 0$ ,  $\vec{x}$  è una meta asintotica per il moto del punto materiale.

#### Dimostrazione

Nel caso (i) si osservi preliminarmente che in effetti la condizione  $\Phi(x) > 0 \forall x \in [x_0, \vec{x})$  implica debba aversi  $\Phi'(\vec{x}) < 0$ . Per ogni  $x(t) \in [x_0, \vec{x})$  la soluzione segue dall'integrale di Weierstrass:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du$$

dove per un  $u^* \in (u, \vec{x})$  opportuno vale:

$$\frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} = \frac{1}{\sqrt{\Phi(u) - \Phi(\vec{x})}} = \frac{1}{\sqrt{(u - \vec{x})\Phi'(u^*)}}$$

e quindi:

$$\frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} \sim \frac{1}{\sqrt{\vec{x} - u}} \quad (u \rightarrow \vec{x}-) \tag{1.8}$$

avendosi  $\lim_{u \rightarrow \vec{x}-} \Phi'(u^*) = \Phi'(\vec{x}) < 0$  causa la supposta continuità di  $\Phi'$ . La relazione (1.8) implica la convergenza dell'integrale generalizzato:

$$\int_{x_0}^{\vec{x}} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du$$

per cui esiste finito l'istante  $\vec{t}$  definito da:

$$\vec{t} = t_0 + \int_{x_0}^{\vec{x}} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du$$

e  $\lim_{t \rightarrow \vec{t}-} x(t) = \vec{x}$ ; l'essere  $\Phi(\vec{x}) = 0$  comporta altresì  $\lim_{t \rightarrow \vec{t}-} \dot{x}(t) = 0$  e dal teorema di prolungabilità si deduce che la soluzione massimale del problema di Cauchy soddisfa la condizione  $x(\vec{t}) = \vec{x}$ , essendo  $(\vec{x}, 0) \in I \times \mathbb{R}$ . Dunque  $\vec{t} \in J(t_0, x_0, v_0)$ , intervallo aperto. Inoltre dall'equazione del moto (1.1) segue che  $\ddot{x}(\vec{t}) = -W'(\vec{x})/m = \Phi'(\vec{x})/2 < 0$  e per la continuità in  $t$  di  $\dot{x}(t)$  deve esistere un intorno  $(\vec{t} - \varepsilon, \vec{t} + \varepsilon) \subseteq J(t_0, x_0, v_0)$  dove  $\ddot{x}(t) < 0$ . Nello stesso intorno la funzione  $\dot{x}(t)$  sarà decrescente e poichè  $\dot{x}(\vec{t}) = 0$  si conclude che  $\dot{x}(t) < 0 \forall t \in (\vec{t}, \vec{t} + \varepsilon)$ , cioè che all'istante  $\vec{t}$  e nella posizione  $\vec{x}$  si verifica un cambiamento di segno della velocità istantanea del punto.

Nel caso (ii) si ricorda che  $\Phi'$  è una funzione localmente lipschitziana in  $x$ , cosicchè esistono un intorno  $(\vec{x} - \delta, \vec{x} + \delta)$  ed una costante positiva  $L$  tali che:

$$|\Phi'(x) - \Phi'(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in (\vec{x} - \delta, \vec{x} + \delta) .$$

In particolare  $|\Phi'(x) - \Phi'(\vec{x})| \leq L|x - \vec{x}|$  e quindi  $|\Phi'(x)| \leq L|x - \vec{x}|$ , ed essendo  $x \leq \vec{x}$ :

$$-L(\vec{x} - x) \leq \Phi'(x) \leq L(\vec{x} - x) .$$

Una integrazione membro a membro fra  $x$  ed  $\vec{x}$  porge allora:

$$-\frac{L}{2}(\vec{x} - x)^2 \leq \Phi(x) \leq \frac{L}{2}(\vec{x} - x)^2$$

da cui si deduce la maggiorazione:

$$|\Phi(x)| \leq \frac{L}{2}(\vec{x} - x)^2 \quad \forall x \in (\vec{x} - \delta, \vec{x}]$$

che conduce a:

$$\frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}} = \frac{1}{\sqrt{|\Phi(x)|}} \geq \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{1}{|\vec{x} - x|}$$

ed implica la divergenza dell'integrale di Weierstrass:

$$\int_{x_0}^{\vec{x}} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du ,$$

mentre la soluzione  $\forall x(t) \in [x_0, \vec{x}]$  è data da:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du .$$

$\vec{x}$  è dunque meta asintotica per il moto del sistema.  $\square$

## 1.4 Esempio notevole

Si consideri un punto materiale vincolato ad una curva fissa e liscia di ascissa curvilinea  $x \in \mathbb{R}$  e soggetto al potenziale  $-W(x) = |x|^{3/2}$ . La posizione del punto all'istante iniziale  $t_0$  sia individuata dal valore  $x_0 < 0$  dell'ascissa e l'energia meccanica totale  $E$  del sistema risulti nulla. Si assuma positiva la velocità iniziale  $v_0$  corrispondente. La conservazione dell'energia si scrive:

$$\frac{m}{2}\dot{x}(t)^2 - |x(t)|^{3/2} = 0 \quad \forall t \in J(t_0, x_0, v_0)$$

per cui:

$$\Phi(x) = \frac{2}{m}|x|^{3/2}$$

che è di classe  $C^1$  in  $\mathbb{R}$  ed ammette in  $\vec{x} = 0$  uno zero non semplice. Ci si aspetta che  $\vec{x} = 0$  costituisca una meta asintotica per il moto del sistema, ma in realtà non è così. In

un conveniente intorno destro di  $t_0$  si ha in effetti, tenuto conto del segno della condizione iniziale:

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2}{m}}(-x(t))^{3/4} \quad x(t) < 0$$

e quindi, separando le variabili:

$$\sqrt{\frac{2}{m}}(t - t_0) = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{(-u)^{3/4}} du \quad \forall x(t) < 0,$$

relazione dalla quale si deduce:

$$x(t) = -\left[(-x_0)^{1/4} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{m}}(t - t_0)\right]^4 \leq 0 \quad (1.9)$$

ed analoghe espressioni per le derivate prima e seconda in  $t$ :

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2}{m}}\left[(-x_0)^{1/4} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{m}}(t - t_0)\right]^3 \quad (1.10)$$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{3}{2m}\left[(-x_0)^{1/4} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{m}}(t - t_0)\right]^2. \quad (1.11)$$

Si osservi che le espressioni (1.9), (1.10) e (1.11) sono definite formalmente per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Risulta in effetti:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{1}{m}W'(x(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

con  $x(t_0) = x_0$  ed  $\dot{x}(t_0) > 0$ . Vale inoltre  $x(\vec{t}) = 0$  e  $\dot{x}(\vec{t}) = 0$  per  $\vec{t} = t_0 + 4\sqrt{m/2}(-x_0)^{1/4}$ , dunque  $\vec{x} = 0$  non è meta asintotica ma punto di inversione del moto, come segue dalla (1.9). La contraddizione è solo apparente, in quanto  $\Phi'$  non risulta lipschitziana in alcun intorno aperto dell'origine  $x = 0$ , per cui neppure l'unicità della soluzione del problema di Cauchy è assicurata. In realtà detta unicità non sussiste in quanto la (1.9) è soluzione massimale del problema a valori iniziali:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -W'(x), & W(x) = -|x|^{3/2} \\ x(\vec{t}) = 0 \\ \dot{x}(\vec{t}) = 0 \end{cases}$$

definita  $\forall t \in \mathbb{R}$ , mentre lo stesso problema di Cauchy ammette anche la soluzione di equilibrio:

$$x(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

chiaramente distinta dalla precedente.

### 1.5 Applicazione dei teoremi

Per fissare le idee sia  $I = \mathbb{R}$ . La posizione iniziale all'istante  $t = t_0$  del punto materiale sia individuata dall'ascissa  $x_0$ , e la velocità allo stesso istante sia  $v_0 > 0$ . L'energia meccanica totale sarà data dall'espressione  $E = mv_0^2/2 + W(x_0)$ . Si indichi con  $\Omega \subseteq I$  il più grande intervallo contenente  $x_0$  tale che  $\Phi(x) > 0 \forall x \in \Omega$ . L'eventuale minimo di  $\Omega$  verrà indicato con  $x_s$ , mentre  $x_D$  è il valore dell'ascissa corrispondente all'eventuale massimo. Dalla continuità di  $\Phi$  segue immediatamente che  $\Phi(x_s) = \Phi(x_D) = 0$ . Nell'ipotesi che  $\Phi'$  sia continua e localmente lipschitziana su  $I \subseteq \mathbb{R}$ , si possono distinguere i 9 casi indicati nella tabella seguente:

	Nessuno zero a destra	Zero semplice a destra	Zero doppio a destra
Nessuno zero a sinistra	caso NN 	caso NS 	caso ND 
Zero semplice a sinistra	caso SN 	caso SS 	caso SD 
Zero doppio a sinistra	caso DN 	caso DS 	caso DD 

#### 1.5.1 Caso NN — nessuno zero a sinistra e nessuno zero a destra

- Moto progressivo.
- Legge oraria data da:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du ,$$

integrale ordinario  $\forall x(t) \in \mathbb{R}$ .

- Regione accessibile:  $x \in \mathbb{R}$ .
- Intervallo  $J(t_0, x_0, v_0)$  di definizione della soluzione massimale:

$$\left( t_0 + \int_{x_0}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du, t_0 + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \right)$$

dove gli integrali impropri  $\int_{x_0}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du$  e  $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du$  possono divergere a  $-\infty$  e  $+\infty$  rispettivamente — secondo l'andamento del potenziale.

### 1.5.2 Caso NS — nessuno zero a sinistra e zero semplice a destra

- Due fasi di moto, una progressiva ed una retrograda.
- Regione accessibile:  $\{x \in \mathbb{R} : x \leq x_D\}$ , con  $x_D$  punto di inversione.
- Legge oraria:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad \forall x(t) \in (-\infty, x_D]$$

per la fase progressiva e:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x_D} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du - \int_{x_D}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad \forall x(t) \in (-\infty, x_D]$$

per quella retrograda.

- Intervallo  $J(t_0, x_0, v_0)$ :

$$\left( t_0 + \int_{x_0}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du, t_0 + \int_{x_0}^{x_D} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du + \int_{-\infty}^{x_D} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \right)$$

dove l'integrale su  $[x_0, x_D]$  è sempre convergente, mentre i due integrali generalizzati restanti possono convergere o meno a seconda del potenziale.

### 1.5.3 Caso ND — nessuno zero a sinistra e zero doppio a destra

- Moto progressivo.
- Regione accessibile:  $\{x \in \mathbb{R} : x < x_D\}$ , con  $x_D$  meta asintotica.
- Legge oraria data da:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad \forall x(t) \in (-\infty, x_D)$$

- Intervallo  $J(t_0, x_0, v_0)$ :

$$\left( t_0 + \int_{x_0}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du, +\infty \right)$$

**1.5.4 Caso SN — zero semplice a sinistra e nessuno zero a destra**

- Due fasi di moto, una retrograda ed una progressiva.
- Regione accessibile  $\{x \in \mathbb{R} : x \geq x_s\}$ , con  $x_s$  punto di inversione.
- Legge oraria data dall'integrale di Weierstrass:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad \forall x(t) \in [x_s, +\infty)$$

per la fase progressiva del moto, e da:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x_s} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du - \int_{x_s}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad \forall x(t) \in [x_s, +\infty)$$

per quella retrograda.

- Intervallo  $J(t_0, x_0, v_0)$  di definizione della soluzione massimale:

$$\left( t_0 - \int_{x_s}^{x_0} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du - \int_{x_s}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du, t_0 + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \right)$$

in cui il solo integrale certamente convergente è quello su  $[x_s, x_0]$ .

**1.5.5 Caso SS — zero semplice a sinistra e zero semplice a destra**

- Moto periodico.
- Regione accessibile  $\{x \in \mathbb{R} : x_s \leq x \leq x_D\}$ , con  $x_s$  ed  $x_D$  punti di inversione del moto.
- Intervallo  $J(t_0, x_0, v_0) = \mathbb{R}$ .
- Legge oraria in forma standard:

$$x(t) = x_s + (x_D - x_s) \sin^2 \left[ \frac{1}{2} Q(t - t_0 + c) \right] \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

dove  $Q$  è una funzione trascendente definita da:

$$z = \int_0^{Q(z)} \frac{(x_D - x_s) |\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)|}{\sqrt{\Phi[x_s + (x_D - x_s) \sin^2(\lambda/2)]}} d\lambda, \quad Q(z) \in \mathbb{R}, \quad (1.12)$$

sul dominio:

$$\left( - \int_0^{+\infty} \frac{(x_D - x_s) |\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)|}{\sqrt{\Phi[x_s + (x_D - x_s) \sin^2(\lambda/2)]}} d\lambda, + \int_0^{+\infty} \frac{(x_D - x_s) |\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)|}{\sqrt{\Phi[x_s + (x_D - x_s) \sin^2(\lambda/2)]}} d\lambda \right)$$

e con immagine  $\mathbb{R}$  — l'applicazione è ovviamente invertibile —. La costante  $c$  è determinata da  $x_0$ :

$$c = Q^{-1} \left[ 2 \arcsin \left( \frac{x_0 - x_s}{x_D - x_s} \right)^{1/2} \right].$$

### Dimostrazione

La prima fase di moto — nel futuro — è progressiva, con:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad \forall x(t) \in [x_s, x_D].$$

Si ponga  $u = x_s + (x_D - x_s) \sin^2(\lambda/2)$ ,  $\lambda \in [0, \pi]$ , ottenendo:

$$t - t_0 = \int_{\lambda(x_0)}^{\lambda[x(t)]} \frac{x_D - x_s}{\sqrt{\Phi[u(\lambda)]}} \sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2) d\lambda$$

dove  $u(\lambda) = x_s + (x_D - x_s) \sin^2(\lambda/2)$ , definita in  $[0, \pi]$  con immagine  $[x_s, x_D]$ , e  $\lambda(u)$  è la sua funzione inversa. Poichè  $\sin(\lambda/2) \geq 0$  e  $\cos(\lambda/2) \geq 0 \forall \lambda \in [0, \pi]$ , si può anche scrivere:

$$t - t_0 = \int_{\lambda(x_0)}^{\lambda[x(t)]} \frac{x_D - x_s}{\sqrt{\Phi[u(\lambda)]}} |\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)| d\lambda.$$

La seconda fase di moto è retrograda, con legge oraria:

$$t - t_0 = \int_{\lambda(x_0)}^{\pi} \frac{x_D - x_s}{\sqrt{\Phi[u(\lambda)]}} |\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)| d\lambda - \int_{x_D}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad x(t) \in [x_s, x_D]. \quad (1.13)$$

Nel secondo integrale si pone ancora  $u = x_s + (x_D - x_s) \sin^2(\lambda/2)$ , ma questa volta con  $\lambda \in [\pi, 2\pi]$ . Si ha perciò:

$$\begin{aligned} - \int_{x_D}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du &= - \int_{\pi}^{\lambda[x(t)]} \frac{x_D - x_s}{\sqrt{\Phi[u(\lambda)]}} \sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2) d\lambda = \\ &= \int_{\pi}^{\lambda[x(t)]} \frac{x_D - x_s}{\sqrt{\Phi[u(\lambda)]}} |\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)| d\lambda \end{aligned}$$

e la (1.13) diventa:

$$t - t_0 = \int_{\lambda(x_0)}^{\lambda[x(t)]} \frac{x_D - x_s}{\sqrt{\Phi[u(\lambda)]}} |\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)| d\lambda, \quad (1.14)$$

essendo  $\lambda(x_0) \in [0, \pi]$  e  $\lambda[x(t)] \in [\pi, 2\pi]$ . In modo analogo, alla  $n$ -esima fase di moto si potrà scrivere la stessa relazione (1.14) con  $\lambda(x_0) \in [0, \pi]$  e  $\lambda[x(t)] \in [(n-1)\pi, n\pi]$ , esprimibile anche nella forma:

$$t - t_0 + c = \int_0^{\lambda[x(t)]} \frac{x_D - x_s}{\sqrt{\Phi[u(\lambda)]}} |\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)| d\lambda \quad (1.15)$$

con  $c$  costante opportuna. Se si introduce la funzione crescente  $Q$  data dalla (1.12), con immagine  $\mathbb{R}$ , l'equazione (1.15) si inverte formalmente:

$$\lambda[x(t)] = Q(t - t_0 + c)$$

per cui:

$$x(t) = x_s + (x_D - x_s) \sin^2 \left[ \frac{1}{2} Q(t - t_0 + c) \right] \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

In particolare:

$$x_0 = x_s + (x_D - x_s) \sin^2 \left[ \frac{Q(c)}{2} \right]$$

e quindi:

$$c = Q^{-1} \left[ 2 \arcsin \left( \frac{x_0 - x_s}{x_D - x_s} \right)^{1/2} \right] ,$$

il che completa la dimostrazione.  $\square$

### 1.5.6 Caso SD — zero semplice a sinistra e zero doppio a destra

- Due fasi di moto, una retrograda ed una progressiva.
- Regione accessibile:  $\{x \in \mathbb{R} : x_s \leq x < x_D\}$  con  $x_s$  punto di inversione ed  $x_D$  meta asintotica.
- Legge oraria definita dagli integrali di Weierstrass:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad \forall x(t) \in [x_s, x_D)$$

nella fase progressiva e:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x_s} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du - \int_{x_s}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad \forall x(t) \in [x_s, x_D)$$

in quella retrograda.

- Intervallo  $J(t_0, x_0, v_0) = \mathbb{R}$ .

### 1.5.7 Caso DN — zero doppio a sinistra e nessuno zero a destra

- Moto progressivo.
- Regione accessibile:  $\{x \in \mathbb{R} : x > x_s\}$ , con  $x_s$  meta asintotica.
- Legge oraria:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad \forall x(t) \in (x_s, +\infty) .$$

- Intervallo  $J(t_0, x_0, v_0)$  di definizione della soluzione massimale:

$$\left( -\infty, t_0 + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \right) ,$$

in cui l'integrale generalizzato può essere o meno convergente.

### 1.5.8 Caso DS — zero doppio a sinistra e zero semplice a destra

- Due fasi di moto, una retrograda ed una progressiva.
- Regione accessibile:  $\{x \in \mathbb{R} : x_s < x \leq x_D\}$ , con meta asintotica in  $x_s$  e punto di inversione in  $x_D$ .
- Legge oraria:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad \forall x(t) \in (x_s, x_D]$$

nella fase progressiva, e:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x_D} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du - \int_{x_D}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad \forall x(t) \in (x_s, x_D]$$

in quella retrograda.

- Intervallo  $J(t_0, x_0, v_0) = \mathbb{R}$ .

### 1.5.9 Caso DD — zero doppio a sinistra e zero doppio a destra

- Moto progressivo.
- Regione accessibile  $\{x \in \mathbb{R} : x_s < x < x_D\}$ , con  $x_s$  ed  $x_D$  mete asintotiche.
- Legge oraria:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad \forall x(t) \in (x_s, x_D).$$

- Intervallo di definizione della soluzione massimale:  $J(t_0, x_0, v_0) = \mathbb{R}$ .

## 1.6 Osservazione. Soluzioni su intervalli limitati

Si osservi che il caso in cui  $I \subset \mathbb{R}$  si tratta in modo del tutto analogo. L'unica differenza rispetto a quanto esposto consiste nel fatto che gli estremi di integrazione  $-\infty$  e  $+\infty$  devono essere sostituiti con  $\inf(I)$  e  $\sup(I)$  rispettivamente. Si conviene al solito di porre  $\inf(I) = -\infty$  qualora l'intervallo  $I$  risulti inferiormente illimitato, e  $\sup(I) = +\infty$  nell'ipotesi che  $I$  sia superiormente illimitato. La verifica è immediata. Si illustra, a titolo di esempio, il caso seguente.

### 1.6.1 Proposizione

*Sia l'intervallo  $I$  limitato. Siano inoltre  $\inf(I)$  e  $\sup(I)$  tali che:*

$$\lim_{x \rightarrow \inf(I)^+} \Phi(x) = \lim_{x \rightarrow \sup(I)^-} \Phi(x) = 0.$$

*Si supponga infine che  $\Phi(x) > 0 \forall x \in I$  e che la condizione iniziale sia del tipo  $(x(t_0), \dot{x}(t_0)) = (x_0, v_0)$ , con  $x_0 \in I$  e  $v_0 > 0$ . Allora la soluzione massimale del corrispondente problema*

di Cauchy è individuata da:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \quad \forall x(t) \in I. \quad (1.16)$$

**Dimostrazione**

Poichè  $I$  è aperto per ipotesi,  $\inf(I) \notin I$  e  $\sup(I) \notin I$ . Dunque NON è lecito porre:

$$x_s \equiv \inf(I) \quad \text{e} \quad x_D \equiv \sup(I).$$

$\Phi$  non ha zeri nel proprio intervallo di definizione  $I$ . Inoltre, la scelta del segno positivo nella (1.16) si giustifica in forza dell'ipotesi  $v_0 > 0$ . Ciò premesso, consideriamo il moto nel futuro ( $t > t_0$ ), per  $x(t) \rightarrow \sup(I)-$ . Il moto per  $x(t) \rightarrow \inf(I)+$  si tratta in modo analogo. Si distinguono due casi:

- (a) se  $\int_{x_0}^{\sup(I)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du$  diverge, allora l'intervallo di definizione della soluzione (1.16) non è superiormente limitato. La soluzione non risulta dunque prolungabile nel futuro;
- (b) se viceversa  $\int_{x_0}^{\sup(I)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du$  converge a  $\vec{t} - t_0$ , con  $\vec{t} \in \mathbb{R}$  opportuno, la soluzione  $x(t)$  è definita su un intervallo superiormente limitato di estremo superiore  $\vec{t}$ .  $\vec{t}$  non appartiene a tale intervallo. Poichè infatti

$$\lim_{t \rightarrow \vec{t}-} x(t) = \sup(I)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \vec{t}-} \dot{x}(t)^2 = \lim_{t \rightarrow \vec{t}-} \Phi[x(t)] = 0,$$

per la continuità della soluzione dell'equazione differenziale dovrebbe aversi:

$$(x(\vec{t}), \dot{x}(\vec{t})) = \lim_{t \rightarrow \vec{t}-} (x(t), \dot{x}(t)) = (\sup(I), 0)$$

e siccome  $(\sup(I), 0) \notin I \times \mathbb{R}$  ciò contraddice la definizione di soluzione. In conclusione  $x(t)$  non è prolungabile nel futuro.

In modo del tutto analogo si prova che  $x(t)$  non può prolungarsi nel passato. Dunque  $x(t)$  data dalla (1.16) è massimale, il che completa la dimostrazione. Si osserva incidentalmente che l'intervallo di definizione di tale soluzione massimale assume la forma:

$$\left( t_0 + \int_{x_0}^{\inf(I)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du, t_0 + \int_{x_0}^{\sup(I)} \frac{1}{\sqrt{\Phi(u)}} du \right). \quad \square$$

## 2. Discussione di Weierstrass per alcuni potenziali notevoli

L'integrale di Weierstrass si intende scritto nella forma

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{E + U(x)}} dx$$

dove  $m$  è la massa del punto materiale,  $U(x)$  il potenziale ed  $E$  il livello di energia fissato.  $t$  rappresenta l'intervallo di tempo trascorso dall'istante iniziale 0 ed  $x(0)$   $x(t)$  le ascisse del punto materiale agli istanti iniziale e finale rispettivamente — che si considerano comprese entro un'unica regione accessibile, in base al fissato valore dell'energia  $E$  —.

### 2.1 Potenziale quartico attrattivo $U(x) = -k \frac{x^4}{4}$ , $k > 0$

Verificare che:

- (i) valori negativi dell'energia  $E$  non sono permessi;
- (ii) per  $E = 0$  si ha un punto di equilibrio del sistema in  $x = 0$ ;
- (iii) per ogni  $E > 0$  fissato si determina un moto oscillatorio con punti di inversione  $x_{\pm} \equiv \pm(4E/k)^{1/4}$ . In tal caso l'integrale di Weierstrass si riduce alla forma standard:

$$t = \mp \left( \frac{m^2}{4kE} \right)^{1/4} \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta}} d\theta$$

per mezzo della sostituzione  $x = (4E/k)^{1/4} \cos \theta$ , con  $x_- \leq x \leq x_+$  e  $\theta \in [0, \pi]$ . Inoltre il periodo di oscillazione è espresso da:

$$T = 4 \left( \frac{m^2}{4kE} \right)^{1/4} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta}} d\theta \equiv 4 \left( \frac{m^2}{4kE} \right)^{1/4} F \left( 1/\sqrt{2} \right),$$

dove, come nel seguito, si è indicato con  $F(z)$  l'integrale ellittico completo di prima specie:

$$F(z) \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - z^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \quad z \in [0, 1].$$

## 2.2 Potenziale quartico repulsivo $U(x) = k \frac{x^4}{4}$ , $k > 0$

Si verifichi che:

- (i) tutti i valori dell'energia sono permessi;
- (ii) per  $E > 0$  è definita un'unica regione accessibile e l'integrale di W. si riduce in forma standard:

$$t = \pm \frac{1}{2} \left( \frac{m^2}{kE} \right)^{1/4} \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta}} d\theta$$

per mezzo della trasformazione  $x = (4E/k)^{1/4} \text{tg}(\theta/2)$ , con  $x \in \mathbb{R}$  e  $\theta \in [-\pi, \pi]$ . Il moto non è legato ed il punto materiale raggiunge l'infinito in un intervallo di tempo finito. Se ad esempio  $x(0) = 0$  tale intervallo risulta  $t_\infty \equiv (m^2/(kE))^{1/4} F(1/\sqrt{2})$ ;

- (iii) se  $E < 0$  esistono due regioni accessibili distinte, per  $x \geq (4|E|/k)^{1/4}$  ed  $x \leq -(4|E|/k)^{1/4}$ . Con il cambiamento di variabili  $x = (4|E|/k)^{1/4} \text{cotg}\theta$ , essendo  $\theta \in (0, \pi/4)$  nella prima regione e  $\theta \in (3\pi/4, \pi)$  nella seconda, l'integrale di W. diventa:

$$t = \mp \left( \frac{m^2}{k|E|} \right)^{1/4} \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \sin^2 \theta}} d\theta$$

L'ulteriore sostituzione  $\sqrt{2} \sin \theta = \sin \lambda$ ,  $\lambda \in (0, \pi/2)$ , definita per ciascuna delle due regioni accessibili, conduce alla forma standard:

$$t = \mp q \left( \frac{m^2}{4k|E|} \right)^{1/4} \int_{\lambda(0)}^{\lambda(t)} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \lambda}} d\lambda,$$

essendo  $q = +1$  nella prima regione e  $q = -1$  nell'altra. Il punto materiale raggiunge l'infinito in un intervallo di tempo finito;

- (iv) per  $E = 0$  il punto  $x = 0$  è un punto di equilibrio del sistema. Esistono inoltre due regioni accessibili —  $x < 0$  ed  $x > 0$  — per le quali  $x = 0$  è meta asintotica.

## 2.3 Potenziale di Lennard-Jones $U(x) = -\frac{a}{x^{12}} + \frac{b}{x^6}$ , $a, b > 0$ — modello di potenziale interatomico

Verificare, assumendo  $x > 0$ , che:

- (i) l'energia meccanica totale deve soddisfare la condizione  $E \geq -b^2/(4a)$ ;
- (ii) per  $E = -b^2/(4a)$  il sistema non può che trovarsi all'equilibrio in  $x = (2a/b)^{1/6}$ ;
- (iii) se  $-b^2/(4a) < E < 0$  il sistema oscilla fra i punti di inversione:

$$x_{\pm} \equiv \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a|E|}}{2|E|}.$$

In tal caso, con la sostituzione definita da  $x^6 = x_- + (x_+ - x_-) \sin^2 \theta$ ,  $x > 0$ ,  $\theta \in [0, \pi/2]$ , l'integrale di W. si riduce alla forma desingularizzata — integrale di Riemann in senso ordinario:

$$t = \pm \frac{1}{3} \left( \frac{m}{2|E|} \right)^{1/2} \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} [x_- + (x_+ - x_-) \sin^2 \theta]^{\frac{1}{6}} d\theta .$$

Il periodo di oscillazione è pari al doppio del precedente integrale calcolato fra gli estremi 0 e  $\pi/2$ ;

- (iv) per  $E > 0$  il moto non è oscillatorio ed il sistema raggiunge l'infinito, ma non in tempi finiti;
- (v) quale che sia il valore di  $E$ , il sistema non ha accesso alla regione  $x \leq 0$ .

### 2.4 Potenziale cubico $U(x) = -(ax^3 + bx^2 + cx + d)$ , $a > 0$ — attrattivo a $+\infty$

Indicati con  $W^-$  ed  $W^+$  rispettivamente i valori del minimo e del massimo relativo dell'energia potenziale  $W(x) = -U(x)$ , verificare che:

- (i) tutti i valori reali dell'energia  $E$  sono ammessi;
- (ii)  $\forall E > W^+$  il sistema raggiunge  $x = -\infty$  in un intervallo di tempo finito, qualunque sia il dato iniziale  $x(0)$ . Lo stesso comportamento ricorre per  $E < W^-$ ;
- (iii) qualora  $W^- < E < W^+$  si determinano due regioni accessibili distinte, l'una inferiormente illimitata, in cui  $\forall x(0)$  il punto materiale raggiunge  $x = -\infty$  in un tempo finito, e l'altra limitata, caratterizzata da moto periodico. L'equazione  $E + U(x)$  ammette tre radici reali distinte,  $x_1 < x_2 < x_3$ . Nel caso periodico l'integrale di W. assume la forma standard:

$$t = \mp \left( \frac{2m}{a(x_3 - x_1)} \right)^{1/2} \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \left[ 1 - \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \sin^2 \theta \right]^{-1/2} d\theta$$

mediante la trasformazione  $x = x_3 - (x_3 - x_2) \sin^2 \theta$ ,  $x \in [x_2, x_3]$ ,  $\theta \in [0, \pi/2]$  (ricordare il teorema fondamentale dell'algebra);

- (iv) per  $E = W^+$  il sistema ammette un punto di equilibrio nel punto  $x_+$  di massimo relativo dell'energia potenziale. Sono inoltre definite due regioni accessibili, una delle quali inferiormente illimitata, per le quali  $x = x_+$  è meta asintotica.
- (v) per  $E = W^-$  si ha equilibrio in  $x = x_-$ , punto di minimo relativo di  $W(x)$ . È inoltre definita una regione accessibile inferiormente illimitata il cui estremo superiore è punto di inversione del moto. In tale regione il punto materiale raggiunge  $x = -\infty$  in un intervallo di tempo finito.

**2.5 Potenziale cubico**  $U(x) = -(ax^3 + bx^2 + cx + d)$ ,  $a < 0$   
 — **repulsivo a**  $+\infty$

Con le stesse notazioni dell'esercizio precedente, si accerti che:

- (i) tutti i valori reali dell'energia  $E$  sono ammessi;
- (ii)  $\forall E > W^+$  il sistema raggiunge  $x = +\infty$  in un intervallo di tempo finito, qualunque sia il dato iniziale  $x(0)$ . Lo stesso comportamento ricorre per  $E < W^-$ ;
- (iii) qualora  $W^- < E < W^+$  si determinano due regioni accessibili distinte, l'una superiormente illimitata, in cui  $\forall x(0)$  il punto materiale raggiunge  $x = +\infty$  in un tempo finito, e l'altra limitata, caratterizzata da moto periodico. L'equazione  $E + U(x)$  ammette tre radici reali distinte,  $x_1 < x_2 < x_3$ . Nel caso periodico l'integrale di W. assume la forma standard:

$$t = \pm \left( \frac{2m}{|a|(x_3 - x_1)} \right)^{1/2} \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \left[ 1 - \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \sin^2 \theta \right]^{-1/2} d\theta$$

mediante la trasformazione  $x = x_1 + (x_2 - x_1) \sin^2 \theta$ ,  $x \in [x_1, x_2]$ ,  $\theta \in [0, \pi/2]$  (si usi ancora il teorema fondamentale dell'algebra);

- (iv) per  $E = W^+$  il sistema ammette un punto di equilibrio in  $x = x_+$ . Sono inoltre definite due regioni accessibili, una delle quali superiormente illimitata, per le quali  $x = x^+$  è meta asintotica.
- (v) per  $E = W^-$  si ha equilibrio nel punto  $x = x_-$ , di minimo relativo di  $W(x)$ . Esiste infine una regione accessibile superiormente illimitata con punto di inversione nell'estremo inferiore, il punto materiale raggiungendo  $x = +\infty$  in un intervallo di tempo finito, come in precedenza.

**2.6 Potenziale del tipo**  $U(x) = x^s$ , con  $s > 0$  e  $x > 0$

Dimostrare che:

- (i)  $\forall E < 0$  è definita un'unica regione accessibile, superiormente illimitata, con punto di inversione in  $x_{\text{inv}} = |E|^{1/s}$ . Comunque assegnato sia  $x(0)$ , il moto del sistema è non legato: l'infinito viene raggiunto in un intervallo di tempo finito se e soltanto se  $s > 2$ ;
- (ii) se  $E = 0$  si ha un'unica regione accessibile in  $x > 0$ . Per quest'ultima  $x = 0$  è meta asintotica se  $s \geq 2$ . L'integrale di W. diviene infatti:

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x(0)}^{x(t)} x^{-s/2} dx .$$

Se  $s < 2$  la soluzione tende a  $x = 0$  in un intervallo di tempo finito e non è ulteriormente prolungabile in virtù del teorema di prolungabilità. Si osservi che per un moto

retrogrado del punto materiale  $x = 0$  non è punto di inversione, non appartenendo al dominio di definizione dell'equazione differenziale del moto;

- (iii) per  $E > 0$  si determina un'unica regione accessibile in  $x > 0$  e per il moto all'infinito valgono i risultati di cui al capo (i). Nel caso retrogrado il punto materiale tende a  $x = 0$  in un intervallo di tempo finito. Come nel precedente capo (ii) non si verifica inversione, poiché la soluzione non risulta ulteriormente prolungabile.

## 2.7 Esempio di potenziale quadratico a tratti:

$$U(x) = \begin{cases} -a + b\frac{x^2}{2} & \text{per } x \leq 0 \\ -a - b\frac{x^2}{2} & \text{per } x \geq 0 \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}, b > 0.$$

Si verifichi che:

- (i)  $U(x)$  è una funzione derivabile in  $\mathbb{R}$ , con derivata ivi continua;
- (ii) tutti i valori dell'energia  $E$  sono consentiti;
- (iii)  $\forall E \neq a$  è definita una sola regione accessibile, con punto di inversione in  $x_{\text{inv}} = \sqrt{2|E - a|/b}$  per  $E > a$ , in  $x_{\text{inv}} = -\sqrt{2|E - a|/b}$  per  $E < a$ . Se  $E = a$  si ha il punto di equilibrio  $x = 0$ , che è anche meta asintotica per la regione accessibile  $x < 0$ ;

Con  $a = 0$  e  $b = 1$  si calcoli inoltre l'intervallo di tempo occorrente affinché una particella di massa  $m = 1$  ed energia totale  $E = 4$ , situata inizialmente nel punto di ascissa  $x = -3$ , transiti per lo stesso punto — risposta:

$$t = \sqrt{2} \int_{-3}^0 \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{2}x^2}} dx + \sqrt{2} \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4 - \frac{1}{2}x^2}} dx = \pi + 2 \operatorname{arcsinh} \left( \frac{3}{2\sqrt{2}} \right)$$

## 2.8 Discussione di Weierstrass per un potenziale centrale

In coordinate polari  $(r, \theta)$ , le equazioni del moto per una particella di massa  $m$  in un campo centrale di potenziale  $U(r)$  sono date da:

$$\begin{cases} mr^2 \frac{d\theta}{dt} = K & K = \text{costante} \\ m \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{K^2}{mr^3} - U'(r) = 0 \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R}, r \in (0, +\infty),$$

in cui  $K$  è la componente costante del momento angolare ortogonale al piano del moto, legata alla costante delle aree  $c$  dalla relazione  $K = mc$ . Nel caso  $K = 0$  il problema risulta puramente unidimensionale e si tratta in modo ovvio. Il caso interessante si ha quindi per  $K \neq 0$ .

Si dimostri che:

(i) il moto radiale  $r = r(t)$  può essere ricondotto alla discussione di Weierstrass:

$$\frac{m}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = E + U_{\text{eff}}(r) \quad r > 0,$$

con  $U_{\text{eff}}(r) \equiv U(r) - \frac{K^2}{2m} \frac{1}{r^2}$  **potenziale efficace** del sistema;

(ii) la dipendenza della coordinata radiale dall'angolo,  $r = r(\theta)$  è descritta dal problema di Weierstrass:

$$\frac{K^2}{2m} \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{K^2}{2m} u^2 - U(1/u) = E,$$

essendo  $u \equiv 1/r > 0$ . L'integrale di W. si scrive in tal caso:

$$\theta = \pm \frac{|K|}{\sqrt{2m}} \int_{u(0)}^{u(\theta)} \frac{1}{\sqrt{E - \frac{K^2}{2m} u^2 + U(1/u)}} du.$$

Il moto “periodico” in  $\theta$  si interpreta come moto di rivoluzione della massa  $m$  attorno al centro di forza, con la coordinata radiale che varia fra un valore minimo ed un valore massimo, corrispondenti ai punti di inversione. Il “periodo” in  $\theta$  —  $\Delta\theta$  — rappresenta l'angolo spazzato dal raggio congiungente la particella con il centro di forza (raggio vettore) nell'intervallo fra due passaggi successivi della particella alla stessa distanza, massima o minima, dal centro (per es. perielio o afelio nel caso del campo gravitazionale solare). Le orbite si richiudono su loro stesse se e soltanto se  $\Delta\theta = 2\pi n/m$ , con  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $m \neq 0$  — N.B. Se  $n, m$  sono primi fra loro, l'orbita si richiude su sè stessa esattamente in  $n$  rivoluzioni complete — .

Il punto  $u = 0$  **non è mai** accessibile al sistema, in quanto esso corrisponde ad un valore non definito della coordinata radiale,  $r = +\infty$  (si consideri, per esempio il caso del moto nel campo gravitazionale newtoniano);

(iii) il precedente problema di Weierstrass ammette una integrazione esplicita in termini di funzioni elementari per potenziali  $U(r)$  della forma seguente:

$$U(r) = \frac{a}{r^2} + \frac{b}{r} \quad U(r) = \frac{a}{r^2} + br^2$$

con  $a$  e  $b$  costanti reali arbitrarie, eventualmente nulle.

## 2.9 Discussione di Weierstrass per moti vincolati ad una curva fissa liscia, in presenza di un potenziale

Sia data una curva regolare di  $\mathbb{R}^3$ , di parametrizzazione  $\gamma : \xi \in [0, 1] \longrightarrow \gamma(\xi) \in \mathbb{R}^3$ . Su un aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^3$ , tale che  $\gamma([0, 1]) \subseteq \Omega$ , sia inoltre definito un campo di forze conservativo, di potenziale  $U : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ . Sulla curva è vincolata a muoversi, senza attrito, una particella materiale di massa  $m$ . Dall'equazione del moto:

$$m \left[ \frac{d^2 s}{dt^2} \hat{\tau}(s) + \frac{1}{\rho(s)} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \hat{n}(s) \right] = \Psi + \frac{\partial U}{\partial x}(x(s))$$

in cui  $s$  è l'ascissa curvilinea,  $\Psi$  la reazione vincolare, e  $\hat{\tau}(s)$ ,  $\hat{n}(s)$ ,  $\rho(s)$  rispettivamente i versori tangente e normale alla curva e il raggio di curvatura nel punto di ascissa curvilinea  $s$ , dedurre il problema di W.:

$$\frac{m}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 - U(x(s)) = E$$

Equivalentemente, facendo uso della parametrizzazione  $\gamma$  assegnata, si provi che:

$$\frac{m}{2} \left| \frac{d\gamma}{d\xi}(\xi) \right|^2 \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 - \tilde{U}(\xi) = E$$

in cui si è posto  $\tilde{U}(\xi) = U(\gamma(\xi)) \forall \xi \in [0, 1]$ . Si verifichi che l'integrale di W. assume la forma:

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\xi(0)}^{\xi(t)} \left| \frac{d\gamma}{d\xi}(\xi) \right| \frac{1}{\sqrt{E + \tilde{U}(\xi)}} d\xi$$

la cui convergenza dipende **esclusivamente** dal termine usuale  $[E + \tilde{U}(\xi)]^{-1/2}$  dell'integrando — per una parametrizzazione regolare è  $\left| \frac{d\gamma}{d\xi}(\xi) \right| > 0 \forall \xi \in [0, 1]$  —.

(Il vantaggio consiste nel fatto di poter applicare la discussione qualitativa di Weierstrass senza dover determinare l'ascissa curvilinea  $s$ , in genere non esprimibile esplicitamente in termini di funzioni elementari).

### 2.9.1 Esempio

Nel piano  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  sono dati il potenziale  $U(x, y) = -gy - ax^2$  e la parabola di parametrizzazione (regolare)  $\gamma(\xi) = (\xi, \xi^2)$ . Assumendo  $a, g > 0$ , si dimostri che l'integrale di W. diviene

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\xi(0)}^{\xi(t)} \sqrt{\frac{1 + 4\xi^3}{E - (a + g)\xi^2}} d\xi$$

e si studi l'andamento qualitativo delle traiettorie per i valori permessi dell'energia  $E$  — si osservi come persino in questo caso relativamente semplice la valutazione esplicita degli integrali in gioco risulti tutt'altro che banale —.

### 3. Moto di un punto materiale soggetto ad un campo di forze centrali

Si affronta qui il problema del moto di un punto materiale in un campo di forze centrali, usualmente noto come **problema di Keplero**, benchè questa denominazione debba a rigore riservarsi al solo caso del moto nel campo gravitazionale newtoniano — caso particolarissimo, sebbene molto importante, di campo centrale.

#### 3.1 Campo di forze centrali: definizione

Un campo di forze si definisce centrale se esiste un punto fisso  $O$  dello spazio  $\mathbb{E}_3$  per il quale risulta che:

- (1) il vettore forza in un generico punto  $P \in \mathbb{E}_3 \setminus \{O\}$  è diretto secondo la retta congiungente  $O$  con  $P$ , ovvero secondo il vettore  $P - O$ ;
- (2) l'intensità del vettore forza in  $P$  dipende soltanto dalla distanza  $|P - O|$ .

Dalla definizione segue immediatamente che il più generale campo di forze centrali si scrive nella forma:

$$\vec{F}(P) = f(|P - O|) \frac{P - O}{|P - O|} = \frac{f(|P - O|)}{|P - O|} (P - O) \quad \forall P \in \mathbb{E}_3 \setminus \{O\},$$

essendo  $f$  una generica funzione di  $\mathbb{R}^+$  a valori in  $\mathbb{R}$ , di conveniente regolarità — tipicamente almeno di classe  $C^1$ . Il punto  $O$  viene detto **centro** del campo di forze centrali.

#### 3.2 Regolarità nell'origine

Nella precedente definizione nulla si è stabilito in relazione al valore assunto dal campo centrale nel centro  $O$ . Molti campi centrali risultano **singolari** nel centro, dove quindi il campo di forze non ha un valore definito — esempi: campo gravitazionale newtoniano generato da un punto materiale, campo elettrostatico prodotto da una carica elettrica puntiforme, secondo la legge di Coulomb. Con questo si intende che il campo non è prolungabile con continuità in  $O$ .

Viceversa, esistono campi centrali per i quali  $\vec{F}(P)$  ammette un **prolungamento continuo in  $O$**  — prolungamento che è necessariamente unico per definizione. Un esempio notevole è costituito dal campo delle sollecitazioni elastiche che una molla ideale, connessa per un estremo al punto fisso  $O$ , esercita su un punto materiale  $P$  libero di muoversi nello spazio  $\mathbb{E}_3$  ed al quale sia collegato il secondo estremo della molla.

Si verifica facilmente che nel caso di un campo centrale prolungabile con continuità nel proprio centro  $O$  deve aversi:

$$\vec{F}(O) = 0.$$

Per il teorema di caratterizzazione della continuità in  $O$  mediante successioni, deve risultare infatti che considerata una qualsiasi successione di punti  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $P_n \in \mathbb{E} \setminus \{O\} \forall n \in \mathbb{N}$ , convergente ad  $O$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = O,$$

la successione delle immagini attraverso  $\vec{F}$  deve a propria volta convergere al valore del campo  $\vec{F}$  in  $O$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{F}(P_n) = \vec{F}(O) .$$

Indicato con  $-P$  il punto simmetrico rispetto ad  $O$  di un generico punto  $P$ :

$$-P := O - (P - O) \quad \forall P \in \mathbb{E}_3 ,$$

l'avarsi  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = O$  implica che allo stesso modo  $\lim_{n \rightarrow \infty} -P_n = O$ , per cui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{F}(-P_n) = \vec{F}(O) .$$

D'altra parte, dalla definizione di campo centrale segue immediatamente che  $\vec{F}(-P) = -\vec{F}(P) \forall P \in \mathbb{E}_3 \setminus \{O\}$  e che quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{F}(-P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\vec{F}(P_n) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{F}(P_n) = -\vec{F}(O) .$$

Dal teorema di unicità del limite si deduce pertanto che

$$\vec{F}(O) = -\vec{F}(O)$$

ossia, equivalentemente, che

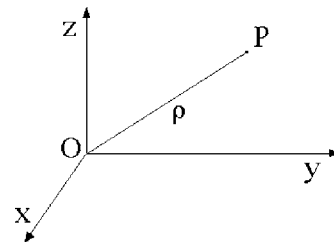
$$\vec{F}(O) = 0 .$$

### 3.3 Il campo di forze centrali è posizionale e conservativo

La natura posizionale del campo di forze centrali è evidente dalla definizione. Si tratta di verificare che il campo ammette sempre un potenziale, almeno nell'ipotesi che  $f$  sia una funzione continua reale di  $\mathbb{R}^+$ .

Indicate con  $(x, y, z)$  le coordinate cartesiane di un generico punto  $P \in \mathbb{E}_3$  rispetto ad una terna ortogonale  $Oxyz$ , la distanza di  $P$  dall'origine  $O$  è data dall'espressione:

$$\rho = |P - O| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



e le componenti cartesiane del campo di forze assumono la forma:

$$F_x = f(\rho) \frac{x}{\rho} \quad F_y = f(\rho) \frac{y}{\rho} \quad F_z = f(\rho) \frac{z}{\rho} .$$

Conviene analizzare il problema dell'esistenza del potenziale distinguendo i casi in cui il centro  $O$  del campo sia o non sia un punto singolare.

### 3.3.1 Campo $\vec{F}$ continuo nel centro $O$

Se  $\vec{F}$  è continua in  $P = O$  un potenziale è dato da:

$$U(x, y, z) = \int_0^\rho f(\rho) d\rho .$$

In  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  risulta infatti, per il teorema di derivazione delle funzioni composte:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z) = f(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = f(\rho) \frac{x}{\rho} = F_x(x, y, z)$$

e analoghe relazioni valgono per le altre componenti  $F_y$  e  $F_z$ . Nel centro  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  la continuità di  $f$  ed il teorema della media integrale implicano invece, per un  $\theta_x \in (0, 1)$  opportuno:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x}(0, 0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{U(x, 0, 0) - U(0, 0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{U(x, 0, 0)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^{|x|} f(\rho) d\rho = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} |x| f(\theta_x |x|) . \end{aligned}$$

Poiché:

$$\theta_x |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

si ha che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(\theta_x |x|) = f(0) = 0$$

ed essendo poi  $x/|x|$  limitata, si conclude che esiste il:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} f(\theta_x |x|) = 0$$

per cui:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(0, 0, 0) = 0 = F_x(0, 0, 0)$$

mentre analoghe espressioni valgono per  $F_y(0, 0, 0)$  e  $F_z(0, 0, 0)$ .

### 3.3.2 Campo singolare nel centro $O$

Qualora  $\vec{F}$  sia singolare in  $P = O$ , un potenziale definito  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  si avrà per:

$$U(x, y, z) = \int_{\rho_0}^\rho f(\rho) d\rho , \quad \rho_0 > 0 \text{ costante} ,$$

risultando infatti, come prima:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z) &= f(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = f(\rho) \frac{x}{\rho} = F_x(x, y, z) \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x, y, z) &= f(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial y} = f(\rho) \frac{y}{\rho} = F_y(x, y, z) \\ \frac{\partial U}{\partial z}(x, y, z) &= f(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial z} = f(\rho) \frac{z}{\rho} = F_z(x, y, z) \end{aligned} \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} .$$

### 3.4 Equazione del moto per un punto materiale in un campo centrale

L'equazione del moto per un punto materiale di massa  $m$  nel campo centrale  $\vec{F}(P)$  si scrive:

$$m\ddot{P} = \vec{F}(P) \quad (3.1)$$

e rispetto alla terna cartesiana ortogonale  $Oxyz$  si riduce all'equivalente sistema di tre equazioni scalari:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = f(\rho) \frac{x}{\rho} \\ m\ddot{y} = f(\rho) \frac{y}{\rho} \\ m\ddot{z} = f(\rho) \frac{z}{\rho} \end{cases} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

che è a sua volta riconducibile alla forma normale del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = v \\ \dot{z} = w \\ \dot{u} = \frac{1}{m} f(\rho) \frac{x}{\rho} \\ \dot{v} = \frac{1}{m} f(\rho) \frac{y}{\rho} \\ \dot{w} = \frac{1}{m} f(\rho) \frac{z}{\rho} \end{cases} \quad (3.2)$$

L'equazione differenziale ottenuta è definita per:

$$(t, x, y, z, u, v, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \times \mathbb{R}^3$$

se il centro  $O$  costituisce un punto singolare del campo di forze, mentre si avrà semplicemente:

$$(t, x, y, z, u, v, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

qualora il campo non presenti alcuna singolarità. In ogni caso il dominio di definizione delle equazioni del moto è un sottoinsieme aperto in  $\mathbb{R}^7$ . Il problema di Cauchy associato al sistema (3.2) si ottiene assegnando le condizioni iniziali:

$$(t, x, y, z, u, v, w) = (t_0, x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \times \mathbb{R}^3$$

ovvero in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  secondo che il centro sia o meno un punto singolare. Nella discussione seguente si assumerà che le funzioni a secondo membro in (3.2) siano sufficientemente regolari da assicurare esistenza ed unicità della soluzione massimale per qualsiasi problema di Cauchy con dato iniziale distinto dal centro del campo. La condizione risulta certamente verificata se  $f(\rho)$  è una funzione  $C^1$  di  $\rho > 0$ . Si ricorda che, essendo aperto il dominio di definizione dell'equazione differenziale, la soluzione massimale di ogni problema di Cauchy risulta sempre definita su un intervallo **aperto**  $I$  della variabile indipendente  $t$ .

### 3.5 Integrali primi

Il punto materiale in moto in un campo centrale ammette due integrali primi notevoli, l'energia meccanica ed il momento angolare calcolato rispetto al centro del campo di forze.

#### 3.5.1 Energia meccanica

Posto per brevità  $P - O = \vec{x} = x \hat{e}_1 + y \hat{e}_2 + z \hat{e}_3$  e indicato con  $\nabla$  il gradiente rispetto alle coordinate cartesiane  $(x, y, z)$ , le equazioni del moto del sistema si possono scrivere nella forma:

$$m\ddot{\vec{x}} = \frac{\partial U}{\partial \vec{x}}(\vec{x}) = \nabla U(\vec{x})$$

e moltiplicando scalarmente membro a membro per  $\dot{\vec{x}}$  porgono:

$$m\ddot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}} - \nabla U(\vec{x}) \cdot \dot{\vec{x}} = 0$$

ossia:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{m}{2} |\dot{\vec{x}}|^2 - U(\vec{x}) \right] = 0 .$$

Ciò implica che lungo qualsiasi soluzione delle equazioni del moto (3.2) la funzione  $C^2$ :

$$\frac{m}{2} |\dot{\vec{x}}|^2 - U(\vec{x}) = \frac{m}{2} |\dot{\vec{x}}|^2 + W(\vec{x})$$

si mantiene costante e costituisce dunque un integrale primo del sistema. La funzione  $W(\vec{x}) = -U(\vec{x})$  è detta **energia potenziale** del sistema.

#### 3.5.2 Momento angolare rispetto al centro del campo

Il momento angolare del punto materiale  $P$  rispetto al polo  $O$  è dato dalla relazione:

$$\vec{K}_O = (P - O) \wedge m\dot{P} . \quad (3.3)$$

Considerato (3.3) lungo una qualsiasi soluzione delle equazioni del moto, la sua derivata rispetto al tempo diventa:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \dot{P} \wedge m\dot{P} + (P - O) \wedge m\ddot{P} = (P - O) \wedge m\ddot{P}$$

e nella terna inerziale con origine in  $O$  risulta pertanto:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = (P - O) \wedge \vec{F}(P) = (P - O) \wedge f(|P - O|) \frac{P - O}{|P - O|} = 0 .$$

Si è così provato che anche  $\vec{K}_O$  rappresenta un integrale primo per il sistema.

### 3.6 Conseguenze dell'essere $\vec{K}_O$ un integrale primo

Si distinguono i casi in cui l'integrale  $\vec{K}_O$  è nullo oppure diverso da zero.

- (i) **se**  $\vec{K}_O = 0$ , il moto del punto materiale è **rettilineo**. In tal caso infatti, all'istante iniziale  $t_0$  il moto  $P(t)$  deve soddisfare la condizione  $(P(t_0) - O) \wedge \dot{P}(t_0) = 0$ , che equivale a richiedere il parallelismo dei vettori  $P(t_0) - O$  e  $\dot{P}(t_0)$ . Una soluzione massimale del problema di Cauchy può allora essere costruita:
- lungo la retta  $P(t_0) - O$  se  $P(t_0) \neq 0$ ;
  - lungo la retta individuata da  $O$  e  $\dot{P}(t_0)$  qualora sia  $P(t_0) = 0$  e  $\dot{P}(t_0) \neq 0$ ;
  - come soluzione statica  $P(t) = O \forall t \in \mathbb{R}$ , nell'ipotesi che  $P(t_0) = 0$  e  $\dot{P}(t_0) = 0$ .

Si intende che la condizione  $P(t_0) = 0$  può ricorrere se e soltanto se il campo di forze non presenta singolarità nel proprio centro  $O$ . In caso contrario  $P(t_0) \neq 0$  e il moto rettilineo è in realtà confinato entro la semiretta uscente dal centro e contenente  $P(t_0)$ . In ogni caso, **il moto che ne risulta è di tipo unidimensionale**, ed il suo andamento qualitativo può essere analizzato per mezzo della usuale discussione di Weierstrass (in  $\mathbb{R}^+$  o in  $\mathbb{R}$ , secondo che il centro sia singolare o meno).

In effetti, se almeno uno fra  $P(t_0)$  ed  $\dot{P}(t_0)$  è diverso da zero, allora è definito il versore  $\hat{n}$  parallelo ad entrambi i vettori  $P(t_0) - O$  e  $\dot{P}(t_0)$ . Si può cercare pertanto una soluzione della (3.1) della forma:

$$P(t) - O = \xi(t)\hat{n}, \quad \xi(t) \in \mathbb{R},$$

con  $\xi(t)$  funzione reale di variabile reale. Si hanno le relazioni:

$$\ddot{\xi}\hat{n} = \frac{1}{m}\vec{F}(\xi\hat{n}) \quad P(t_0) - O = \xi(t_0)\hat{n} \quad \dot{P}(t_0) = \dot{\xi}(t_0)\hat{n}$$

e, essendo  $\vec{F}(\xi\hat{n})$  parallelo a  $\hat{n}$ , il problema di Cauchy equivalente:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = \frac{1}{m}\vec{F}(\xi\hat{n}) \cdot \hat{n} \\ \xi(t_0) = [P(t_0) - O] \cdot \hat{n} \\ \dot{\xi}(t_0) = \dot{P}(t_0) \cdot \hat{n} \end{cases}$$

che ammette una ed una sola soluzione massimale. Dunque  $P(t) - O = \xi(t)\hat{n}$  è soluzione massimale di (3.1). Per unicità quella deve essere **la** soluzione massimale di (3.1). Il moto avviene così lungo la retta passante per  $O$  e di direzione  $\hat{n}$ .

- (ii) **per**  $\vec{K}_O \neq 0$  il moto del punto materiale avviene in un piano contenente il centro  $O$  e ortogonale a  $\vec{K}_O$ . Lungo il moto  $P(t)$ , definito sull'intervallo aperto  $J$  di  $t$ , vale infatti:

$$(P - O) \cdot \vec{K}_O = (P - O) \cdot (P - O) \wedge m\dot{P} = 0$$

e quindi:

$$(P - O) \cdot \vec{K}_O = 0$$

che scritta in coordinate cartesiane ortogonale rappresenta precisamente l'equazione di un piano passante per l'origine ed ortogonale al vettore  $\vec{K}_O$ . Si osservi che l'orbita

$$\{P(t), t \in J\}$$

non contiene il centro del campo; se ciò avvenisse, ad un qualche istante  $t^* \in J$  dovrebbe risultare  $P(t^*) = O$  e dunque

$$\vec{K}_O = (P(t_0) - O) \wedge m\dot{P}(t_0) = (P(t^*) - O) \wedge m\dot{P}(t^*) = 0 \wedge m\dot{P}(t^*) = 0$$

contro l'ipotesi. **È questo il caso più interessante di moto nel campo centrale.**

Di qui in poi si assumerà sempre soddisfatta la condizione  $\vec{K}_O \neq 0$ .

### 3.7 Sistema di riferimento Oxyz in cui il piano del moto coincide con il piano coordinato Oxy. Costante delle aree

Assegnate che siano le condizioni iniziali in modo che risulti  $\vec{K}_O \neq 0$ , il piano del moto  $P(t)$  è determinato univocamente. Appare quindi del tutto ragionevole, al fine di semplificare l'analisi, introdurre la terna di riferimento cartesiana ortogonale destra  $Oxyz$  in modo che il piano coordinato  $Oxy$  venga a coincidere con il piano del moto. Tale scelta comporta che il vettore momento angolare  $\vec{K}_O$  sia diretto secondo l'asse  $Oz$ :

$$\vec{K}_O = mc \hat{e}_3 \tag{3.4}$$

essendo  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  la cosiddetta **costante delle aree**, avente le dimensioni di un'area per unità di tempo. Della relazione (3.4) si può fornire una espressione cartesiana esplicita ricordando che, per la scelta della terna di riferimento, lungo il moto deve aversi:

$$P - O = x \hat{e}_1 + y \hat{e}_2 \quad \dot{P} = \dot{x} \hat{e}_1 + \dot{y} \hat{e}_2$$

cosicché:

$$\vec{K}_O = (x \hat{e}_1 + y \hat{e}_2) \wedge m(\dot{x} \hat{e}_1 + \dot{y} \hat{e}_2) = m(xy - y\dot{x})$$

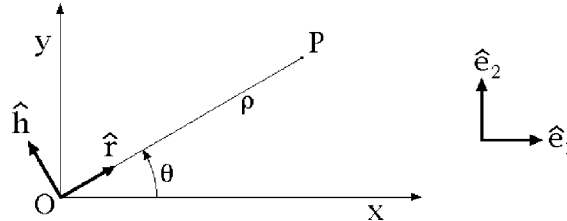
e pertanto:

$$c = xy - y\dot{x} . \tag{3.5}$$

In questa terna di coordinate il moto del punto materiale, soluzione massimale di un assegnato problema di Cauchy relativo alle equazioni del moto (3.2), è descritto da funzioni  $x(t), y(t)$  **almeno di classe  $C^2$**  su un intervallo aperto  $I$  di  $t$ , oltre che da  $z(t) = 0 \forall t \in I$ . Vale inoltre  $(x(t), y(t)) \neq (0, 0) \forall t \in I$ , mentre  $c \neq 0$ .

### 3.8 Descrizione cinematica dei moti piani: velocità e accelerazione istantanee in coordinate polari

Nel piano  $Oxy$  della terna di riferimento cartesiana ortogonale scelta come descritto al punto precedente, si introduce il sistema di coordinate polari piane di polo  $O$ , coordinata radiale  $\rho$  e anomalia  $\theta$  misurata fra il semiasse  $Ox$  positivo e il raggio vettore  $P - O$ , positivamente orientata rispetto all'asse  $Oz$  — cioè crescente per rotazioni antiorarie, come rappresentato in figura.



Poiché si suppone che  $\vec{K}_O \neq 0$  e che di conseguenza le traiettorie del sistema non passino per l'origine, è sufficiente considerare valori strettamente positivi  $\rho > 0$  della coordinata radiale, mentre  $\theta$  può assumere qualsiasi valore reale. Dato un generico punto  $P \neq O$  nel piano  $Oxy$ , il corrispondente **versore radiale** è parallelo e concorde a  $P - O$  e si scrive nella forma:

$$\hat{r} = \cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2$$

in termini dei versori  $\hat{e}_1$  ed  $\hat{e}_2$  della terna cartesiana. La derivata in  $\theta$  del versore radiale definisce un secondo versore, ortogonale al precedente, detto **versore trasverso**:

$$\hat{h} = -\sin \theta \hat{e}_1 + \cos \theta \hat{e}_2 .$$

La relazione fra le coordinate polari  $(\rho, \theta)$  e quelle cartesiane  $(x, y)$  di  $P$  è data da:

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta \tag{3.6}$$

per cui il moto regolare  $P(t)$ , descritto in coordinate cartesiane dalle funzioni  $C^2$   $x(t)$  e  $y(t)$ , in coordinate polari si rappresenterà per mezzo di opportune funzioni  $\theta(t)$ ,  $\rho(t)$ :

$$x(t) = \rho(t) \cos \theta(t) \quad y(t) = \rho(t) \sin \theta(t) \quad t \in I .$$

#### 3.8.1 Moto regolare in coordinate polari

Ci si può convincere facilmente che le funzioni  $t \in I \rightarrow \theta(t) \in \mathbb{R}$  e  $t \in I \rightarrow \rho \in \mathbb{R}^+$  sono a loro volta di classe  $C^2$ , o comunque della stessa regolarità di  $x(t)$ ,  $y(t)$ . A questo proposito si osservi che l'applicazione:

$$\varphi : (\theta, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow (x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

definita dalle (3.6) **non** costituisce un diffeomorfismo  $C^2$  di  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  su  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Benché suriettiva e di classe  $C^\infty$ , infatti, l'applicazione  $\varphi$  non è iniettiva in quanto:

$$\varphi(\theta + 2\pi n, \rho) = \varphi(\theta, \rho) \quad \forall (\theta, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad n \in \mathbb{Z} .$$

Nondimeno, comunque si fissino  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ , tali che  $\theta_1 < \theta_2$  e  $\theta_2 - \theta_1 < 2\pi$ , la restrizione alla striscia  $\Sigma := \{(\theta, \rho) : \theta_1 < \theta < \theta_2, \rho > 0\}$ :

$$\varphi_{\theta_1\theta_2} : (\theta, \rho) \in \Sigma := (\theta_1, \theta_2) \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow (x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

gode delle seguenti proprietà:

- (i) ha come immagine il settore aperto  $\Omega$  compreso fra le semirette uscenti dall'origine  $O$  e di equazione  $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2$  — vedi figura;
- (ii) è  $C^\infty$  al pari di  $\varphi$ ;
- (iii) risulta iniettiva da  $\Sigma$  in  $\Omega$ ;
- (iv) il suo determinante jacobiano vale infine

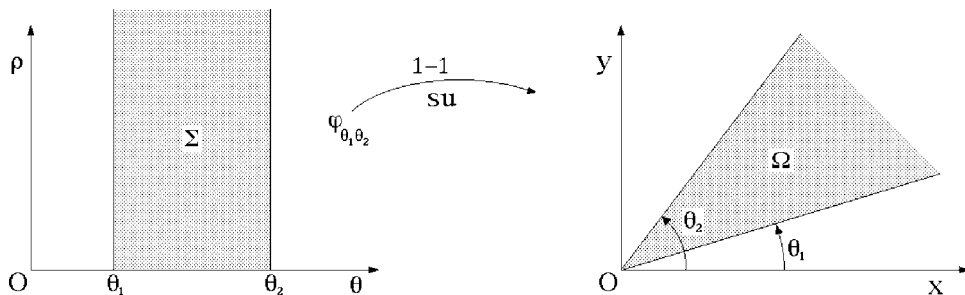
$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \rho)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \rho} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho \sin \theta & \cos \theta \\ \rho \cos \theta & \sin \theta \end{vmatrix} = -\rho$$

e si mantiene quindi diverso da zero per ogni  $(\theta, \rho) \in \Sigma$ .

Dal teorema delle funzioni implicite segue che la funzione inversa:

$$\varphi_{\theta_1\theta_2}^{-1} : \Omega \longrightarrow \Sigma$$

è di classe  $C^\infty$  sul suo intero dominio di definizione  $\Sigma$ . L'applicazione  $\varphi_{\theta_1\theta_2}$  costituisce perciò un diffeomorfismo  $C^\infty$  di  $\Sigma$  su  $\Omega$ .



Si consideri ora una sequenza bi-infinita di intervalli aperti  $(\theta_{1,i}, \theta_{2,i})$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , tali che:

$$0 < \theta_{2,i} - \theta_{1,i} < 2\pi \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

$$\theta_{1,i} < \theta_{1,i+1} < \theta_{2,i} < \theta_{2,i+1} \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

$$\bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} (\theta_{1,i}, \theta_{2,i}) = \mathbb{R}.$$

I diffeomorfismi  $\varphi_{\theta_{1,i}, \theta_{2,i}}$  definiscono un atlante per il dominio  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  del piano  $Oxy$ , che si configura quindi come una 2-varietà  $C^\infty$  di  $\mathbb{R}^2$ ; essi consentono di convertire il moto

regolare descritto da  $x(t)$ ,  $y(t)$  in un moto regolare in coordinate polari  $\theta(t)$ ,  $\rho(t)$ , come richiesto.

Allo stesso risultato si può pervenire anche facendo uso dell'identità complessa:

$$\rho(t)e^{i\theta(t)} = x(t) + iy(t)$$

la quale porge:

$$\rho(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \quad (3.7)$$

e:

$$\theta(t) = i \ln \rho(t) - i \ln [x(t) + iy(t)] \quad (3.8)$$

con:

$$\dot{\theta}(t) = [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)] \rho(t)^{-2}.$$

### 3.8.2 Velocità e accelerazione

Nello studio del moto di un punto in un campo centrale è conveniente determinare l'espressione di velocità ed accelerazione istantanee in coordinate polari, ovvero delle loro proiezioni lungo i predetti versori  $\hat{r}$  e  $\hat{h}$ . Il vettore posizione di un generico  $P \in Oxy \setminus \{O\}$  si scrive:

$$P - O = \rho \hat{r}$$

e dato un moto regolare definito da opportune funzioni  $\rho(t) > 0$  e  $\theta(t)$ , di classe  $C^2$ , la velocità istantanea di  $P$  al tempo generico  $t$  risulterà:

$$\dot{P} = \dot{\rho} \hat{r} + \rho \frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\rho} \hat{r} + \rho \dot{\theta} \frac{d\hat{r}}{d\theta} = \dot{\rho} \hat{r} + \rho \dot{\theta} \hat{h}$$

dove:

- $\dot{\rho}$  è la **velocità radiale** del punto  $P$ ,
- $\rho \dot{\theta}$  si dice **velocità trasversa** di  $P$  ed infine
- $\dot{\theta}$  rappresenta la **velocità angolare scalare di trascinamento** dello stesso  $P$ , identificabile con la velocità angolare scalare di una qualsiasi terna cartesiana di origine  $O$  rispetto alla quale il moto di  $P$  risulti puramente radiale — ovvero l'anomalia  $\theta$  costante nel tempo.

Una ulteriore derivazione rispetto al tempo conduce all'espressione per l'accelerazione:

$$\begin{aligned} \ddot{P} &= \ddot{\rho} \hat{r} + \dot{\rho} \dot{\theta} \frac{d\hat{r}}{d\theta} + \frac{d}{dt}(\rho \dot{\theta}) \hat{h} + \rho \dot{\theta}^2 \frac{d\hat{h}}{d\theta} = \ddot{\rho} \hat{r} + \dot{\rho} \dot{\theta} \frac{d\hat{r}}{d\theta} + \frac{d}{dt}(\rho \dot{\theta}) \hat{h} + \rho \dot{\theta}^2 (-\hat{r}) = \\ &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \hat{r} + \left[ \dot{\rho} \dot{\theta} + \frac{d}{dt}(\rho \dot{\theta}) \right] \hat{h} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \hat{r} + \frac{1}{\rho} \left[ \dot{\rho} \rho \dot{\theta} + \rho \frac{d}{dt}(\rho \dot{\theta}) \right] \hat{h} = \\ &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \hat{r} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\theta}) \hat{h} \end{aligned}$$

in cui si distinguono un termine di accelerazione radiale:

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 \tag{3.9}$$

e uno di accelerazione trasversa:

$$a_\theta = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) . \tag{3.10}$$

### 3.9 Velocità areale

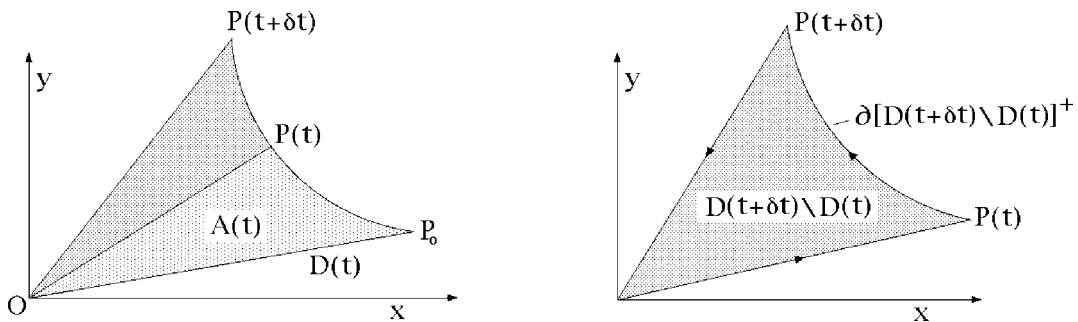
Dato un moto regolare  $P(t)$ , al trascorrere del tempo il raggio vettore  $P(t) - O$  spazza una regione del piano  $Oxy$ . Se si indica con  $P_0 = P(t_0)$  la posizione del punto  $P$  all'istante iniziale  $t_0$ , l'area  $A(t)$  della regione  $D(t)$  compresa fra i raggi vettori  $P_0 - O$  e  $P(t) - O$  e la traiettoria percorsa da  $P$  dall'istante  $t_0$  all'istante  $t$  è data dall'integrale di superficie:

$$A(t) = \int_{D(t)} 1 dx dy = \frac{1}{2} \int_{D(t)} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -y & x \end{vmatrix} dx dy$$

che in forza del teorema di Gauss-Green si riscrive in termini dell'equivalente integrale curvilineo:

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_{\partial D(t)^+} (-y dx + x dy)$$

lungo la frontiera  $\partial D(t)^+$  di  $D(t)$ , orientata positivamente — secondo l'usuale convenzione di Stokes.



L'area spazzata dal raggio vettore fra gli istanti  $t$  e  $t + \delta t$  si potrà allora esprimere come:

$$A(t + \delta t) - A(t) = \int_{D(t+\delta t) \setminus D(t)} 1 dx dy = \frac{1}{2} \int_{\partial[D(t+\delta t) \setminus D(t)]^+} (-y dx + x dy) .$$

Basterà poi porre:

$$P(t) - O = x \hat{e}_1 + y \hat{e}_2 \quad P(t + \delta t) - O = (x + \delta x) \hat{e}_1 + (y + \delta y) \hat{e}_2$$

e introdurre le parametrizzazioni dei raggi vettori  $P(t) - O$  e  $P(t + \delta t) - O$ :

$$\begin{aligned} P(s) - O &= sx \hat{e}_1 + sy \hat{e}_2 \\ P(s) - O &= (1-s)(x + \delta x) \hat{e}_1 + (1-s)(y + \delta y) \hat{e}_2, \quad s \in [0, 1], \end{aligned}$$

per ottenere:

$$\begin{aligned} A(t + \delta t) - A(t) &= \frac{1}{2} \int_0^1 (-yxs \, ds + xys \, ds) + \frac{1}{2} \int_t^{t+\delta t} [-y(t)\dot{x}(t) \, dt + x(t)\dot{y}(t) \, dt] + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^1 [(y + \delta y)(x + \delta x)(1-s) \, ds - (x + \delta x)(y + \delta y)(1-s) \, ds] = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 0 \, ds + \frac{1}{2} \int_t^{t+\delta t} [-y(t)\dot{x}(t) + x(t)\dot{y}(t)] \, dt + \frac{1}{2} \int_0^1 0 \, ds = \\ &= \frac{1}{2} \int_t^{t+\delta t} [-y(t)\dot{x}(t) + x(t)\dot{y}(t)] \, dt. \end{aligned}$$

La supposta regolarità di  $P(t)$  assicura, per quest'ultimo integrale, l'esistenza del limite:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{A(t + \delta t) - A(t)}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \frac{1}{2} \int_t^{t+\delta t} [-y(t)\dot{x}(t) + x(t)\dot{y}(t)] \, dt = \frac{1}{2} [x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)]$$

come conseguenza della continuità in  $t$  dell'integrando e del teorema della media:

$$\int_t^{t+\delta t} [-y(t)\dot{x}(t) + x(t)\dot{y}(t)] \, dt = \delta t [-y(t + \alpha \delta t)\dot{x}(t + \alpha \delta t) + x(t + \alpha \delta t)\dot{y}(t + \alpha \delta t)], \quad \alpha \in (0, 1).$$

La **velocità areale** del punto  $P$  all'istante  $t$  è quindi data dall'equazione:

$$\frac{dA}{dt}(t) = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) \quad (3.11)$$

e si interpreta come l'area spazzata nell'unità di tempo dal raggio vettore  $P(t) - O$ , valutata all'istante  $t$ . La stessa relazione può essere riespressa in coordinate polari, ricordando che:

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta$$

e che di conseguenza, avendo le funzioni  $\rho(t)$ ,  $\theta(t)$  la stessa regolarità di  $x(t)$ ,  $y(t)$ :

$$\dot{x} = \dot{\rho} \cos \theta - \rho \sin \theta \dot{\theta} \quad \dot{y} = \dot{\rho} \sin \theta + \rho \cos \theta \dot{\theta}$$

per cui risulta:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} [\rho \dot{\rho} \sin \theta \cos \theta + \rho^2 \cos^2 \theta \dot{\theta} - \rho \dot{\rho} \sin \theta \cos \theta + \rho^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}] = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\theta}.$$

### 3.10 Velocità areale e costante delle aree nei moti centrali. Seconda legge di Keplero

Nel piano del moto di un punto materiale in un campo centrale — con  $\vec{K}_O \neq 0$  — la costante delle aree definita dalla (3.5) è un integrale primo. Dal confronto con la (3.11) si deduce quindi che in un moto centrale la velocità areale è costante:

$$\frac{dA}{dt}(t) = \frac{1}{2}(xy - yx) = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta} = \frac{c}{2}.$$

La velocità areale coincide con la metà della costante delle aree, che in coordinate polari assume la forma:

$$c = \rho^2\dot{\theta}.$$

Le funzioni  $\dot{A}$  e  $c$  sono integrali primi — linearmente dipendenti — delle equazioni del moto ed implicano la seconda legge di Keplero, o legge delle aree uguali:

*“Durante il moto di un punto materiale in un campo centrale, il raggio vettore congiungente la posizione del punto con il centro del campo spazza aree uguali in tempi uguali.”*

Si osservi come, nonostante questo aspetto non venga di solito sottolineato in modo esplicito, la legge presupponga il carattere **planare** del moto, già dimostrato in precedenza ed in tutta generalità.

### 3.11 Equazioni del moto nel piano Oxy in coordinate polari

Le equazioni del moto, dedotte dalla seconda legge della dinamica nell'ipotesi che il sistema di riferimento  $Oxyz$  sia inerziale, possono essere proiettate lungo i versori radiale e trasverso:

$$\begin{cases} ma_\rho = f(\rho) \\ ma_\theta = 0 \end{cases}$$

e con la sostituzione delle espressioni (3.9) e (3.10) si riducono a:

$$\begin{cases} m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = f(\rho) \\ m\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Dalla seconda equazione si ritrova la costante delle aree  $\rho^2\dot{\theta} = c$ . Si ricordi che  $c \neq 0$  per ipotesi.

### 3.12 Riduzione a forma normale. Calcolo delle condizioni iniziali per il problema di Cauchy

Le equazioni del moto (3.12) si possono scrivere in una forma più esplicita eseguendo la derivata in  $t$ :

$$\begin{cases} m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = f(\rho) \\ m(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

e poiché per l'ipotesi di  $\vec{K}_O \neq 0$  si ha sempre  $\rho > 0$ , esse equivalgono al sistema del primo ordine in forma normale:

$$\begin{cases} \dot{u}_\rho = \frac{1}{m}f(\rho) + \rho u_\theta^2 \\ \dot{u}_\theta = -\frac{2}{\rho}u_\rho u_\theta \\ \dot{\rho} = u_\rho \\ \dot{\theta} = u_\theta \end{cases}$$

in cui si è ovviamente posto  $u_\rho = \dot{\rho}$  e  $u_\theta = \dot{\theta}$ . Le condizioni iniziali in coordinate polari:

$$\rho(t_0) = \rho_0 \quad \theta(t_0) = \theta_0 \quad u_\rho(t_0) = u_{\rho 0} \quad u_\theta(t_0) = u_{\theta 0}$$

si possono ricavare facilmente da quelle assegnate in coordinate cartesiane:

$$x(t_0) = x_0 \quad y(t_0) = y_0 \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0 .$$

Il valore di  $\rho_0$  coincide con la distanza del punto materiale dal centro  $O$  del campo all'istante iniziale  $t_0$  e viene quindi calcolata per mezzo della (3.7):

$$\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} .$$

La coordinata angolare allo stesso istante si ottiene utilizzando uno dei diffeomorfismi  $\varphi_{\theta_{1,i}, \theta_{2,i}}^{-1}$ , scelto in modo che  $(x_0, y_0)$  appartenga al suo dominio di definizione, oppure direttamente per mezzo della (3.8):

$$\theta_0 = i \ln \rho_0 - i \ln [x_0 + iy_0] .$$

Quanto a  $u_{\rho 0}$  e  $u_{\theta 0}$ , la prima è semplicemente la velocità radiale di  $P$  all'istante  $t_0$  e viene quindi determinata per mezzo della relazione:

$$u_{\rho 0} = \dot{P} \cdot \frac{P - O}{|P - O|} \Big|_{t=t_0} = (\dot{x}_0 \hat{e}_1 + \dot{y}_0 \hat{e}_2) \cdot \frac{x_0 \hat{e}_1 + y_0 \hat{e}_2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} (\dot{x}_0 x_0 + \dot{y}_0 y_0) ,$$

mentre la seconda si identifica con il quoziente fra la velocità trasversa di  $P$  a  $t = t_0$  e la distanza radiale  $\rho_0$ :

$$u_{\theta 0} = \dot{P} \cdot \hat{e}_3 \wedge \frac{P - O}{|P - O|} \Big|_{t=t_0} \frac{1}{\rho_0} = (\dot{x}_0 \hat{e}_1 + \dot{y}_0 \hat{e}_2) \cdot \hat{e}_3 \wedge \frac{x_0 \hat{e}_1 + y_0 \hat{e}_2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \frac{1}{\rho_0} = \frac{-\dot{x}_0 y_0 + \dot{y}_0 x_0}{x_0^2 + y_0^2} .$$

### 3.13 Equazione del moto radiale. Forze fittizie

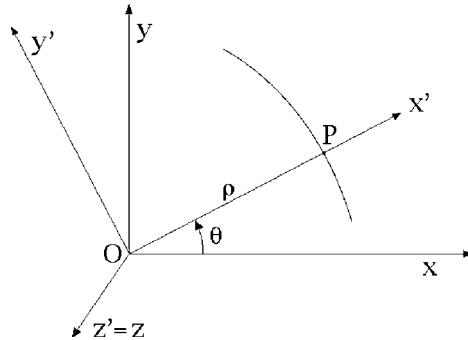
Dalla seconda equazione del moto in coordinate polari (3.12) si deduce che  $\rho^2\dot{\theta} = c$  e che pertanto:

$$\dot{\theta} = \frac{c}{\rho^2}.$$

Questa equazione, sostituita nella prima delle (3.12), consente di eliminare la dipendenza da  $\theta$  e di ottenere la seguente equazione nella sola variabile  $\rho$ :

$$m\ddot{\rho} = \frac{mc^2}{\rho^3} + f(\rho) \quad (3.14)$$

nota come **equazione del moto radiale** e semplicemente **equazione radiale**. Si osservi come il secondo membro della (3.14) non contenga la sola componente radiale della forza centrale  $f(\rho)$ , ma anche un termine addizionale  $mc^2/\rho^3$ . Di quest'ultimo termine di forza è possibile dare una interpretazione notevole. L'equazione (3.14) descrive infatti il moto puramente radiale di  $P$ , ossia il moto del punto materiale quale appare **in un sistema di riferimento co-rotante con il raggio vettore  $P - O$** . Si consideri pertanto una terna di riferimento cartesiana ortogonale  $Ox'y'z'$  il cui piano coordinato  $Ox'y'$  coincida con  $Oxy$  e rispetto al quale il punto  $P$  si mantenga localizzato lungo l'asse  $Ox'$ . Questa terna di riferimento — vedi figura — ruota di un angolo  $\theta$  rispetto alla terna galileiana  $Oxyz$  ed ha quindi natura non inerziale.



Accanto alla forza reale  $f(\rho)\hat{r}$ , in essa si manifestano anche le forze fittizie di Coriolis e di trascinamento, per le quali vale l'espressione:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{inerziali}} &= -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r - m\dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O) - m\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)] = \\ &= -2m\dot{\theta}\hat{e}_3 \wedge \dot{\rho}\hat{r} - m\ddot{\theta}\hat{e}_3 \wedge \rho\hat{r} + m\dot{\theta}^2\rho\hat{r} = -m(\ddot{\theta}\rho + 2\dot{\theta}\dot{\rho})\hat{h} + m\rho\dot{\theta}^2\hat{r} \end{aligned}$$

considerato che la velocità angolare di trascinamento risulta ovviamente  $\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{e}_3$ , mentre la velocità  $\vec{v}_r$  del punto  $P$  relativa alla terna co-rotante  $Ox'y'z'$  si riduce al solo termine radiale  $\dot{\rho}\hat{r}$ . Basta poi osservare che:

$$\ddot{\theta}\rho + 2\dot{\theta}\dot{\rho} = \frac{1}{\rho}(\ddot{\theta}\rho^2 + 2\dot{\theta}\rho\dot{\rho}) = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) = \frac{1}{\rho}\frac{dc}{dt} = 0$$

per concludere che il risultante delle forze inerziali agenti su  $P$  assume la forma:

$$\vec{F}_{\text{inerziali}} = m\rho\dot{\theta}^2 \hat{r} = \frac{mc^2}{\rho^3} \hat{r}$$

ed è perciò identificabile con il solo termine centrifugo  $-m\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P-O)]$ . Questo termine coincide con quello addizionale a secondo membro nell'equazione radiale (3.14), che risulta così completamente giustificata come equazione del moto **relativa alla terna co-rotante con il raggio vettore  $P-O$** .

### 3.14 Analisi di Weierstrass del moto radiale

Si tratta di applicare la discussione di Weierstrass direttamente all'equazione del moto radiale (3.14), mantenendo il tempo  $t$  come variabile indipendente. Lo scopo è quello di avere informazioni sull'andamento qualitativo della soluzione radiale  $\rho(t)$ ,  $t \in I$ . Che l'analisi di Weierstrass sia applicabile è evidente. Basta infatti moltiplicare membro a membro la relazione per  $\dot{\rho}$  per ottenere:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{m}{2} \dot{\rho}^2 + \frac{mc^2}{2} \frac{1}{\rho^2} + W(\rho) \right] = 0 \quad \forall t \in I$$

ossia:

$$\frac{m}{2} \dot{\rho}^2 + \frac{mc^2}{2} \frac{1}{\rho^2} + W(\rho) = E \quad \forall t \in I .$$

Introducendo l'**energia potenziale efficace**:

$$W_{\text{eff}}(\rho) = W(\rho) + \frac{mc^2}{2} \frac{1}{\rho^2} \quad (3.15)$$

segue infine che:

$$\frac{m}{2} \dot{\rho}^2 + W_{\text{eff}}(\rho) = E \quad \forall t \in I . \quad (3.16)$$

Si osservi che  $W_{\text{eff}}$  dipende dalla costante delle aree  $c$ . Si tratta, al solito, del teorema di conservazione dell'energia, avendo la costante  $E$  il significato fisico di energia meccanica totale del sistema. Alla (3.16) è applicabile la consueta discussione di Weierstrass dalla quale si deduce la legge oraria radiale  $\rho = \rho(t)$ , tipicamente per inversione dell'integrale:

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\rho(t_0)}^{\rho(t)} \frac{1}{\sqrt{E - W_{\text{eff}}(\rho)}} d\rho .$$

La legge oraria angolare si ricava infine da:

$$\theta(t) = \theta(t_0) + c \int_{t_0}^t \frac{1}{\rho(\tau)^2} d\tau \quad (3.17)$$

senza dover ricorrere ad inversioni ulteriori.

Dati  $\dot{\rho}(t_0)$ ,  $\dot{\theta}(t_0)$ ,  $\rho(t_0)$  e  $\theta(t_0)$ , l'energia della soluzione vale:

$$E = \frac{m}{2} [\dot{\rho}(t_0)^2 + \rho(t_0)^2 \dot{\theta}(t_0)^2] + W[\rho(t_0)]$$

mentre la costante delle aree si scrive:

$$c = \rho(t_0)^2 \dot{\theta}(t_0) \neq 0 .$$

Il **problema di Weierstrass** (3.16) conduce alla soluzione  $\rho(t)$  noti che siano  $\rho(t_0)$  e  $\dot{\rho}(t_0)$ , dopodichè la (3.17) fornisce  $\theta(t)$  noto  $\theta(t_0)$ .

### 3.15 Conseguenze dell'essere $c \neq 0$

Nell'ipotesi di  $c \neq 0$  è dato fare uso della **variabile angolare  $\theta$  come variabile indipendente in luogo del tempo  $t$** , ricavando l'espressione per l'orbita completa in coordinate polari.

Data una soluzione massimale delle equazioni del moto in coordinate polari, definita nell'intervallo aperto  $I$  e per la quale si abbia  $c \neq 0$ , dalla relazione:

$$\rho^2 \dot{\theta} = c$$

segue che  $\rho(t) > 0 \forall t \in I$  e che conseguentemente:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{c}{\rho(t)^2} \quad \forall t \in I .$$

Una integrazione nella variabile indipendente  $t$  porge allora:

$$\theta(t) = \theta(t_0) + c \int_{t_0}^t \frac{1}{\rho(\tau)^2} d\tau \quad \forall t \in I \quad (3.18)$$

e poichè l'integrando è una funzione continua priva di zeri, se ne deduce che la  $\theta(t)$  è funzione monotona — crescente o decrescente a seconda che il segno di  $c$  risulti positivo o negativo — e dunque invertibile su  $I$ . L'inversa corrispondente si indicherà con  $t(\theta)$  e sarà definita sull'intervallo  $\theta(I)$ .

Si vuole ora discutere la **regolarità** dell'applicazione  $t(\theta)$ . A tale scopo si osserva preliminarmente che le equazioni del moto (3.12) possono riscriversi nella forma normale equivalente del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{u}_\rho = \frac{1}{m} f(\rho) + \rho u_\theta^2 \\ \dot{u}_\theta = -\frac{2}{\rho} u_\rho u_\theta \\ \dot{\rho} = u_\rho \\ \dot{\theta} = u_\theta \end{cases} \quad (3.19)$$

dove  $(u_\rho, u_\theta, \rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  e  $f(\rho)$  è una funzione almeno continua del proprio argomento  $\rho$ . Dalla definizione di soluzione di (3.19) segue immediatamente che  $u_\rho(t)$ ,  $u_\theta(t)$ ,  $\rho(t)$  e  $\theta(t)$  sono funzioni  $C^1$  in  $t \in I$ , cosicché  $\rho(t)$  e  $\theta(t)$  risultano almeno  $C^2$ .  
 Ciò premesso, sull'aperto  $\mathbb{R} \times I \subseteq \mathbb{R}^2$  si consideri l'applicazione definita da:

$$G(\theta, t) \equiv -\theta + \theta(t_0) + c \int_{t_0}^t \frac{1}{\rho(\tau)^2} d\tau \quad \forall (\theta, t) \in \mathbb{R} \times I .$$

Si ha che:

(1)  $G$  è almeno di classe  $C^2$  in  $\mathbb{R} \times I$ . Per ogni  $(\theta, t) \in \mathbb{R} \times I$  vale infatti:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2}(\theta, t) = 0 \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \theta \partial t}(\theta, t) = 0 \quad \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(\theta, t) = c \frac{d}{dt}(\rho(t)^{-2}) = -2c\dot{\rho}(t)\rho(t)^{-3} ,$$

le quali sono tutte funzioni continue in  $\mathbb{R} \times I$ ;

(2) per ogni  $\vec{t} \in I$  risulta  $G(\theta(\vec{t}), \vec{t}) = 0$ , per definizione di  $\theta(t)$  e  $G(\theta, t)$ ;

(3)  $\forall (\theta, t) \in \mathbb{R} \times I$  vale:

$$\frac{\partial G}{\partial t}(\theta, t) = c\rho(t)^{-2} \neq 0$$

— in effetti il segno si mantiene costante.

Dal teorema delle funzioni implicite si deduce che  $\forall (\theta(\vec{t}), \vec{t})$ ,  $\vec{t} \in I$ , esistono un intorno aperto  $J \subseteq \mathbb{R}$  di  $\theta(\vec{t})$  ed una applicazione  $C^2$ :

$$\psi : J \longrightarrow I$$

tali che  $\psi(\theta(\vec{t})) = \vec{t}$  e  $G(\theta, \psi(\theta)) = 0 \quad \forall \theta \in J$ , vale a dire:

$$-\theta + \theta(t_0) + c \int_{t_0}^{\psi(\theta)} \frac{1}{\rho(\tau)^2} d\tau = 0 .$$

Ma per l'unicità della funzione inversa  $t(\theta)$ , la cui esistenza sull'intero intervallo  $\theta(I)$  è già stata stabilita,  $\psi$  non può allora essere che la restrizione di  $t(\theta)$  all'intorno  $J$ :

$$\psi(\theta) = t \Big|_J(\theta) \quad \forall \theta \in J ,$$

per cui  $t(\theta)$  risulta almeno di classe  $C^2$  sull'intervallo  $\theta(I)$  — potendosi scegliere  $\theta(\vec{t})$  a piacere in  $\theta(I)$ .

*È quindi possibile utilizzare la  $\theta$  in luogo di  $t$  quale variabile indipendente, per studiare un qualsiasi moto con costante delle aree diversa da zero. Questo significa determinare l'equazione dell'orbita completa in coordinate polari,  $\rho = \rho_o(\theta)$ , per poi procedere al calcolo della legge oraria angolare  $\theta = \theta(t)$  invertendo la relazione:*

$$c(t - t_0) = \int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} \rho_o^2(\theta) d\theta \quad t \in I .$$

La legge oraria radiale sarà infine  $\rho(t) = \rho_o(\theta(t)) \quad \forall t \in I$ .

*In alternativa, si mantiene  $t$  come variabile indipendente e si ricavano la legge oraria radiale  $\rho(t)$  direttamente dall'equazione (3.14) e quindi quella angolare  $\theta(t)$  per mezzo della (3.18).*

### 3.16 Formule di Binet

Come stabilito al punto precedente, nell'ipotesi che la costante delle aree  $c$  sia diversa da zero la funzione che descrive l'orbita del punto materiale in coordinate polari:

$$\rho_o(\theta) = \rho(t(\theta))$$

è certamente definita e almeno di classe  $C^2$ , quale composizione di due applicazioni  $C^2$  —  $\rho(t)$  e  $t(\theta)$ .

Una immediata applicazione del teorema di derivazione delle funzioni composte permette allora di riscrivere le derivate prima e seconda di  $\rho(t)$  nella forma seguente:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \dot{\theta} \frac{d\rho_o}{d\theta}(\theta) = \frac{c}{\rho_o^2} \frac{d\rho_o}{d\theta} = -c \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{\rho_o} \right) \\ \ddot{\rho} &= \dot{\theta} \frac{d}{d\theta} \left[ -c \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{\rho_o} \right) \right] = -\frac{c^2}{\rho_o^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{\rho_o} \right).\end{aligned}\tag{3.20}$$

in modo che l'accelerazione radiale diventa:

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 = -\frac{c^2}{\rho_o^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{\rho_o} \right) - \rho_o \left( \frac{c}{\rho_o^2} \right)^2 = -\frac{c^2}{\rho_o^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{\rho_o} \right) - \frac{c^2}{\rho_o^3}.\tag{3.21}$$

Le relazioni (3.20) e (3.21) sono note come **formule del Binet** e rivestono grande importanza nella derivazione dell'equazione differenziale delle orbite in coordinate polari.

### 3.17 Equazione differenziale delle orbite in coordinate polari

L'equazione differenziale delle orbite in coordinate polari si ottiene semplicemente sostituendo la formula di Binet (3.21) nella prima delle equazioni del moto in coordinate polari (3.13):

$$-\frac{mc^2}{\rho_o^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{\rho_o} \right) - \frac{mc^2}{\rho_o^3} = f(\rho_o).\tag{3.22}$$

L'equazione può porsi in forma normale del secondo ordine nella variabile dipendente  $1/\rho_o$ :

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{\rho_o} \right) = -\frac{\rho_o^2}{mc^2} f(\rho_o) - \frac{1}{\rho_o}$$

e deve essere risolta assegnando le condizioni iniziali:

$$\rho_o(\theta_0) = \rho_0 \quad \frac{d\rho_o}{d\theta}(\theta_0) = \frac{\dot{\rho}(t_0)}{\dot{\theta}(t_0)} = \frac{u_{\rho 0}}{c/\rho_0^2} = \frac{u_{\rho 0} \rho_0^2}{c},$$

ovvero:

$$\frac{1}{\rho_o}(\theta_0) = \frac{1}{\rho_0} \quad \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{\rho_o} \right)(\theta_0) = -\frac{1}{\rho_0^2} \frac{d\rho_o}{d\theta}(\theta_0) = -\frac{u_{\rho 0}}{c}.$$

### 3.18 Discussione di Weierstrass applicata all'equazione differenziale delle orbite in coordinate polari

Moltiplicando membro a membro l'equazione differenziale delle orbite (3.22) per  $d\rho_o/d\theta$  si ha:

$$mc^2 \left( -\frac{1}{\rho_o^2} \frac{d\rho_o}{d\theta} \right) \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{\rho_o} \right) + mc^2 \frac{1}{\rho_o} \left( -\frac{1}{\rho_o^2} \frac{d\rho_o}{d\theta} \right) = f(\rho_o) \frac{d\rho_o}{d\theta}$$

da cui segue l'equazione equivalente:

$$mc^2 \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{\rho_o} \right) \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{\rho_o} \right) + mc^2 \frac{1}{\rho_o} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{\rho_o} \right) - f(\rho_o) \frac{d\rho_o}{d\theta} = 0$$

che può anche porsi nella forma:

$$\frac{d}{d\theta} \left[ \frac{mc^2}{2} \left[ \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{\rho_o} \right) \right]^2 + \frac{mc^2}{2} \frac{1}{\rho_o^2} + W(\rho_o) \right] = 0$$

ed implica la costanza, lungo l'orbita, dell'espressione:

$$\frac{mc^2}{2} \left[ \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{\rho_o} \right) \right]^2 + \frac{mc^2}{2} \frac{1}{\rho_o^2} + W(\rho_o),$$

essendosi indicata con  $W(\rho) = -U(\rho)$  l'energia potenziale del campo centrale, definita da  $f(\rho) = -W'(\rho)$ . Detta funzione, che è associata ovviamente ad un integrale primo dell'equazione (3.22), assume lungo l'orbita prescelta  $\rho_o(\theta)$  lo stesso valore costante  $E$  assunto dall'energia meccanica lungo la corrispondente soluzione  $(\theta(t), \rho(t))$  dell'equazione del moto in coordinate polari. L'integrale dell'energia meccanica, scritto in coordinate polari, vale infatti:

$$H(u_\rho, u_\theta, \rho, \theta) = \frac{m}{2}(u_\rho^2 + \rho^2 u_\theta^2) + W(\rho)$$

e lungo la soluzione  $(u_\rho(t), u_\theta(t), \rho(t), \theta(t))$  diventa

$$\begin{aligned} H(u_\rho, u_\theta, \rho, \theta) &= \frac{m}{2}(u_\rho^2 + \rho^2 u_\theta^2) + W(\rho) = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) + W(\rho) = \\ &= \frac{m}{2} \left[ \left( \frac{d\rho_o}{d\theta} \right)^2 \dot{\theta}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 \right] + W(\rho) = \frac{m}{2} \left[ \frac{c^2}{\rho^4} \left( \frac{d\rho_o}{d\theta} \right)^2 + \frac{c^2}{\rho^2} \right] + W(\rho) = \\ &= \left\{ \frac{mc^2}{2} \left[ \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{\rho_o} \right) \right]^2 + \frac{mc^2}{2\rho_o^2} + W(\rho_o) \right\} \Bigg|_{\theta=\theta(t)} = E. \end{aligned}$$

Le soluzioni dell'equazione (3.22) sono quindi analizzabili attraverso il **problema di Weierstrass**:

$$\left( \frac{d\rho_o}{d\theta} \right)^2 = \Phi(\rho_o)$$

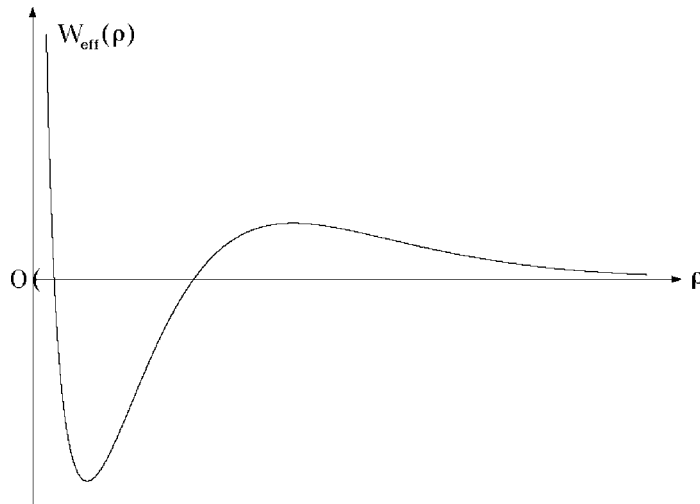
in cui per un assegnato valore  $E$  dell'energia meccanica totale la **funzione di Weierstrass** assume la forma:

$$\Phi(\rho_o) = \rho_o^4 \frac{2}{mc^2} \left[ E - \frac{mc^2}{\rho_o^2} - W(\rho_o) \right]. \quad (3.23)$$

Il problema di Weierstrass ottenuto è formalmente analogo a quello consueto per il moto di un punto materiale lungo una traiettoria prestabilita e in presenza di sollecitazioni posizionali — conservative. Giova tuttavia sottolineare alcune differenze di rilievo:

- (i) la coordinata radiale  $\rho$  è strettamente positiva per definizione, per cui la discussione di Weierstrass viene svolta sulla sola semiretta dei reali positivi —  $\rho > 0$ ;
- (ii) l'energia potenziale da considerare nell'analisi di Weierstrass non si identifica semplicemente con quella del campo centrale,  $W(\rho)$ , ma è data dall'energia potenziale efficace (3.15);
- (iii) la variabile indipendente è rappresentata dall'anomalia  $\theta$  e non dal tempo  $t$ . Quest'ultima proprietà ha conseguenze rilevanti circa l'interpretazione geometrica dei risultati ottenibili dall'analisi di Weierstrass.

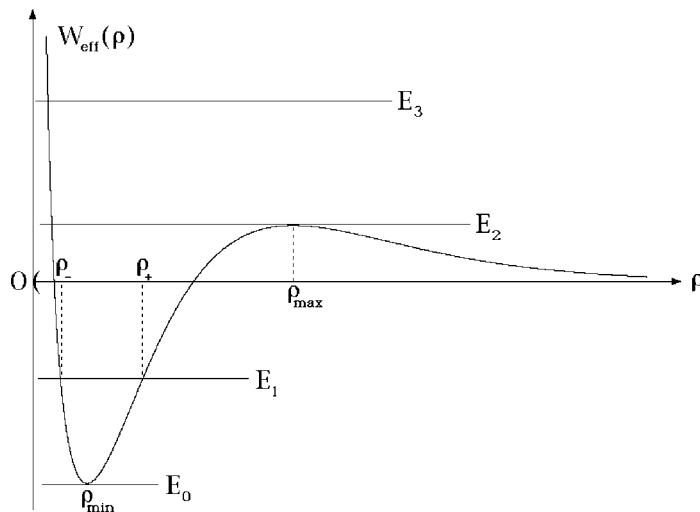
Per illustrare il significato delle precedenti osservazioni, si consideri un potenziale efficace il cui grafico abbia l'andamento riportato nella figura seguente:



L'analisi di Weierstrass consente di ottenere informazioni sull'andamento qualitativo delle funzioni  $\rho_o(\theta)$ , soluzioni dell'equazione differenziale delle orbite (3.22). Al solito, l'andamento delle soluzioni dipende dal livello dell'energia meccanica  $E$  prefissato. Nella fattispecie i livelli notevoli di energia che conviene considerare sono:

- (i)  $E = E_0$ , corrispondente al minimo assoluto  $\rho = \rho_{\min}$  dell'energia potenziale efficace;
- (ii)  $E = E_1$ , livello negativo di energia distinto da  $E_0$ , in modo che la retta  $E = E_1$  intersechi il grafico di  $W_{\text{eff}}(\rho)$  in due soli punti  $\rho = \rho_-$  e  $\rho = \rho_+$ ;

- (iii)  $E = E_2$ , associato al massimo relativo proprio  $\rho = \rho_{\max}$  di  $W_{\text{eff}}(\rho)$ ;
- (iv)  $E = E_3$ , maggiore di  $E_2$ .



Si esaminano i singoli casi così individuati.

(i) **Caso**  $E = E_0$

Dai criteri di Weierstrass segue che in corrispondenza del valore iniziale di  $\theta$  — arbitrario — deve necessariamente aversi  $\rho_o = \rho_{\min}$  e  $d\rho_o/d\theta = 0$  e che la soluzione dell'equazione delle orbite deve ridursi a

$$\rho_o(\theta) = \rho_{\min} \quad \forall \theta \in \mathbb{R} .$$

L'orbita del punto materiale è quindi una circonferenza di centro  $O$  e raggio  $\rho_{\min}$ , percorsa peraltro di moto uniforme, essendo

$$c(t - t_0) = \int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} \rho_o^2(\theta) d\theta = \int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} \rho_{\min}^2 d\theta = \rho_{\min}^2 [\theta(t) - \theta(t_0)]$$

e dunque

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \frac{c}{\rho_{\min}^2} (t - t_0)$$

con  $t_0 \in \mathbb{R}$  istante iniziale del moto.

(ii) **Caso**  $E = E_1$

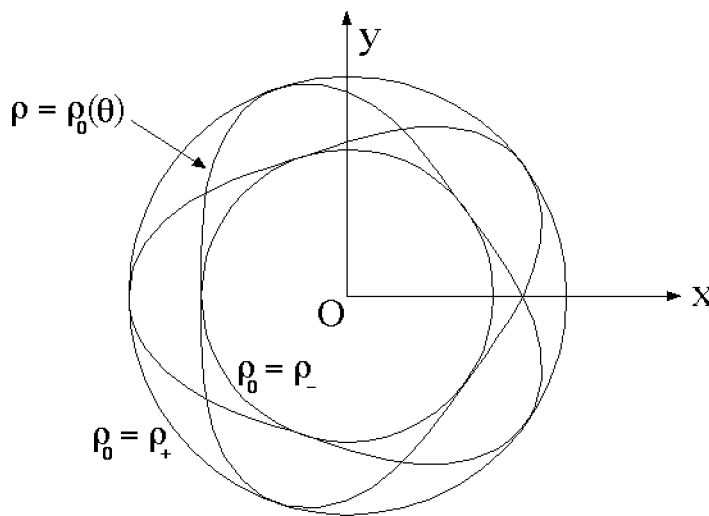
I valori  $\rho_-$  e  $\rho_+$  della coordinata radiale sono **punti di inversione** della soluzione  $\rho_o(\theta)$ . Al crescere di  $\theta$  la soluzione  $\rho_o(\theta)$  alterna tratti **crescenti** — ‘progressivi’ — a tratti **decrementi** — ‘retrogradi’ — mantenendosi comunque compresa fra il valore minimo  $\rho_-$  e il valore massimo  $\rho_+$ , in corrispondenza dei quali  $d\rho_o/d\theta = 0$ . Gli intervalli di definizione dei tratti crescenti e decrementi hanno la stessa lunghezza:

$$\int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{1}{\sqrt{\Phi(\rho)}} d\rho = \int_{\rho_+}^{\rho_-} \left[ -\frac{1}{\sqrt{\Phi(\rho)}} \right] d\rho$$

espressa in termini della funzione di Weierstrass (3.23). La soluzione è dunque periodica nella variabile  $\theta$ , con **periodo angolare**

$$\Delta\theta = \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{1}{\sqrt{\Phi(\rho)}} d\rho + \int_{\rho_+}^{\rho_-} \left[ -\frac{1}{\sqrt{\Phi(\rho)}} \right] d\rho = 2 \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{1}{\sqrt{\Phi(\rho)}} d\rho ,$$

in modo che  $\rho_o(\theta + \Delta\theta) = \rho_o(\theta) \forall \theta \in \mathbb{R}$ . Nei punti per i quali  $\rho_o = \rho_-$  — noti come **pericentri** — l'orbita risulta tangente alla circonferenza di centro  $O$  e raggio  $\rho_-$ , mentre negli **apocentri**  $\rho_o = \rho_+$  l'orbita è tangente alla circonferenza di uguale centro e raggio  $\rho_+$ ; l'angolo al centro compreso fra un apocentro e il pericentro immediatamente successivo lungo l'orbita — o viceversa — è costante e vale  $\Delta\theta/2$ ; fra due apocentri o pericentri consecutivi l'elongazione coincide invece, per quanto detto sopra, con il periodo angolare  $\Delta\theta$ .



Le corrispondenti soluzioni  $\rho(t)$ ,  $\theta(t)$  sono definite  $\forall t \in \mathbb{R}$ , in quanto l'applicazione strettamente monotona in  $\theta \in \mathbb{R}$ :

$$t - t_0 = \frac{1}{c} \int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} \rho_o^2(\theta) d\theta \tag{3.24}$$

ha immagine  $\mathbb{R}$  per via delle diseguaglianze  $\rho_-^2 \leq \rho_o(\theta)^2 \leq \rho_+^2, \forall \theta \in \mathbb{R}$ , mentre ovviamente  $\rho(t) = \rho_o[\theta(t)]$ . Il senso di percorrenza dell'orbita dipende dal segno di  $c$  — la funzione  $\theta(t)$  è crescente per  $c > 0$  e decrescente per  $c < 0$ .

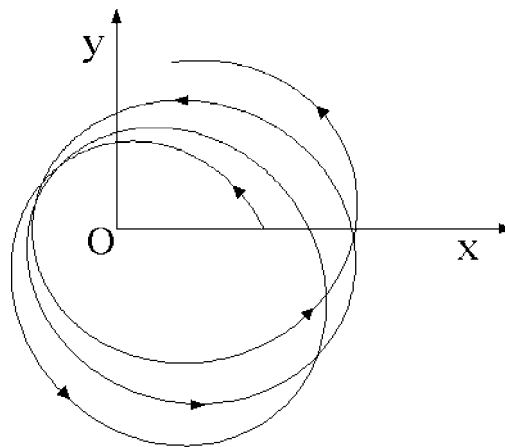
L'orbita descritta da  $\rho_o(\theta)$  **non necessariamente risulta chiusa**. Ciò si verifica se e soltanto se esistono due apocentri (o pericentri) la cui separazione angolare corrisponda ad un numero intero di **rivoluzioni complete** del punto attorno al centro  $O$ ; in altre parole, affinché l'orbita sia chiusa occorre e basta che nel passaggio da un apocentro iniziale ad un apocentro finale, il raggio vettore  $P-O$  spazzi un angolo giro o un multiplo intero di questo — il punto  $P$  deve ritrovarsi alla stessa distanza da  $O$  e nella stessa posizione angolare, descritta da  $\theta$  a meno di multipli interi di  $2\pi$ . Dal momento che l'angolo compreso fra

due apocentri successivi è  $\Delta\theta$ , la separazione angolare fra due apocentri assegnati non potrà che essere un multiplo intero  $n\Delta\theta$  del periodo angolare, con  $n \in \mathbb{N}$ . La condizione necessaria e sufficiente per le orbite chiuse diviene pertanto  $n\Delta\theta = 2\pi m$ , ossia

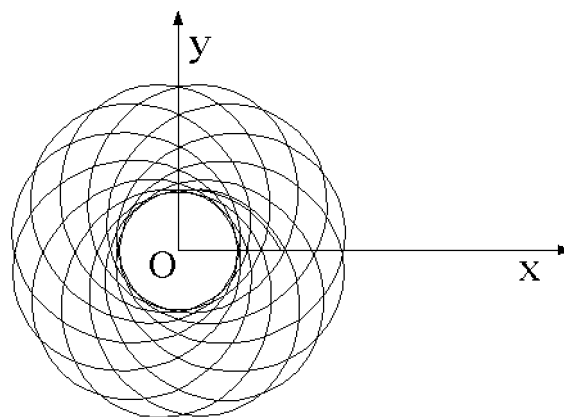
$$\frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{m}{n} \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad (3.25)$$

dove, considerati  $m$  ed  $n$  primi fra loro,  $m$  rappresenta il numero minimo di rivoluzioni complete del punto  $P$  necessario e sufficiente affinché l'orbita si richiuda, mentre  $n$  è il numero di apocentri — e pericentri — compresi nello stesso tratto di orbita.

Qualora la condizione (3.25) non sia soddisfatta, l'orbita del sistema è data da una tipica **traiettoria a rosetta**, come illustrato nella figura seguente:

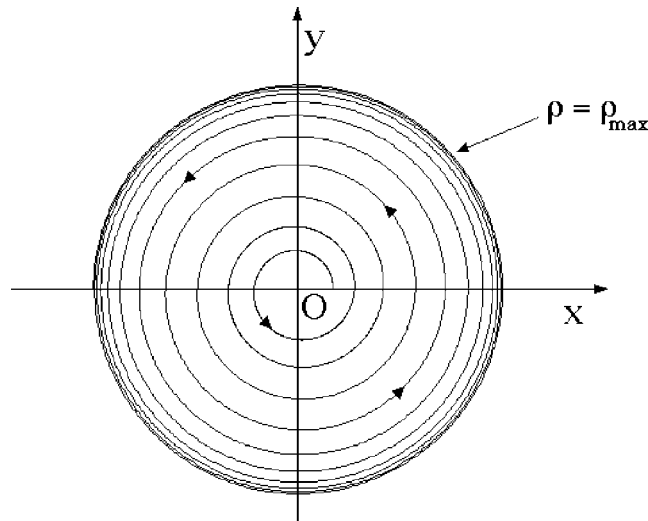


Al trascorrere del tempo, l'orbita tende a riempire **densamente** la corona circolare chiusa compresa fra le circonferenze di raggi  $\rho_-$  e  $\rho_+$  — l'orbita passa arbitrariamente vicino a qualsiasi punto prefissato di tale corona circolare:



(iii) **Caso  $E = E_2$**

Se il valore iniziale di  $\rho$  è minore di  $\rho_{\max}$ , la soluzione  $\rho_o(\theta)$  è definita  $\forall \theta \in \mathbb{R}$  e risulta a meta asintotica tanto per  $\theta \rightarrow +\infty$  che per  $\theta \rightarrow -\infty$ , con meta asintotica  $\rho_{\max}$ . Per  $d\rho_o/d\theta \geq 0$  al  $\theta$  iniziale, la funzione  $\rho_o(\theta)$  è monotona crescente dal  $\theta$  iniziale a  $\theta = +\infty$ , con  $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \rho_o(\theta) = \rho_{\max}$ . L'andamento qualitativo della traiettoria viene riportato nella figura seguente:

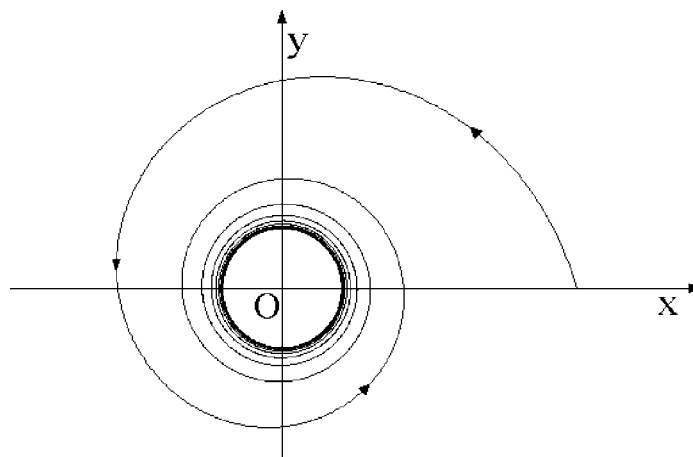


In virtù della relazione (3.24), il divergere degli integrali impropri:

$$\frac{1}{c} \int_{\theta(t_0)}^{+\infty} \rho_o^2(\theta) d\theta \quad \frac{1}{c} \int_{\theta(t_0)}^{-\infty} \rho_o^2(\theta) d\theta \quad (3.26)$$

implica che la soluzione  $\theta(t)$  sia definita  $\forall t \in \mathbb{R}$  — e di conseguenza anche la  $\rho(t) = \rho_o[\theta(t)]$ . Considerazioni analoghe valgono per  $d\rho_o/d\theta < 0$  al  $\theta$  iniziale.

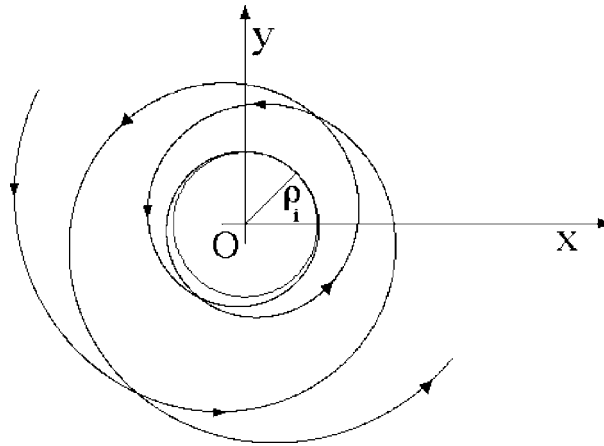
Qualora il valore iniziale di  $\rho$  coincida con il massimo relativo  $\rho_{\max}$ , deve aversi di necessità  $d\rho_o/d\theta = 0$  e la soluzione massimale dell'equazione delle orbite è quella costante  $\rho_o(\theta) = \rho_{\max} \forall \theta \in \mathbb{R}$ , corrispondente ad una traiettoria circolare — percorsa di moto uniforme. Un'altra situazione interessante ricorre con i valori iniziali  $\rho > \rho_{\max}$  e  $d\rho_o/d\theta < 0$ .



In tal caso la soluzione massimale è a meta asintotica per  $\theta \rightarrow +\infty$ , sempre con meta  $\rho_{\max}$ , e l'orbita spiraleggia tendendo alla circonferenza di centro  $O$  e raggio  $\rho_{\max}$  dall'esterno.

(iv) **Caso**  $E = E_3$

Se inizialmente  $d\rho_o/d\theta < 0$ , la soluzione massimale  $\rho_o(\theta)$  presenta un unico punto di inversione in  $\rho = \rho_i$ , corrispondente alla sola intersezione fra la retta orizzontale rappresentativa dell'energia meccanica e il grafico del potenziale efficace. La soluzione risulta dunque strettamente decrescente  $\forall \theta < \theta_i$  tale che  $\rho_o(\theta_i) = \rho_i$ , crescente  $\forall \theta > \theta_i$ . L'orbita spiraleggia tendendo alla circonferenza di centro  $O$  e raggio  $\rho_i$ , la intercetta tangenzialmente in un unico punto e quindi torna a spiraleggiare allontanandosene indefinitamente.



Al solito, la soluzione  $(\theta(t), \rho(t)) = (\theta(t), \rho_o[\theta(t)])$  risulta definita  $\forall t \in \mathbb{R}$ , causa l'evidente divergenza degli integrali impropri (3.26). Il caso  $d\rho_o/d\theta \geq 0$  si tratta in modo analogo.

### 3.19 Equazione differenziale delle orbite nel reciproco della distanza radiale

L'equazione differenziale delle orbite, (3.22), può essere espressa in un forma più semplice introducendo come variabile dipendente il reciproco  $u = 1/\rho > 0$  della coordinata radiale, funzione incognita dell'anomalia  $\theta$ ,

$$-mc^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - mc^2 u^3 = f(1/u). \quad (3.27)$$

L'equazione equivale a

$$mc^2 \left[ \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right] = -\frac{1}{u^2} f(1/u) = \frac{d}{du} U(1/u)$$

ed ammette l'integrale primo dell'energia meccanica

$$\frac{mc^2}{2} \left[ \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] - U(1/u) = E \quad (3.28)$$

cui è associato il problema di Weierstrass

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 &= \frac{2}{mc^2}[E + U(1/u)] - u^2 = \frac{2}{mc^2}\left[E + U(1/u) - \frac{mc^2}{2}u^2\right] = \\ &= \frac{2}{mc^2}\left[E - W_{\text{eff}}(1/u)\right] = \frac{2}{mc^2}\left[E - \tilde{W}_{\text{eff}}(u)\right], \end{aligned}$$

essendosi posto

$$\tilde{W}_{\text{eff}}(u) = W_{\text{eff}}(1/u).$$

Il problema di Weierstrass (3.28) fornisce  $u = u(\theta)$  se  $u(\theta(t_0))$  e  $\frac{du}{d\theta}(\theta(t_0))$  sono assegnati. In effetti, questi possono essere determinati sulla base dei dati iniziali:

$$u(\theta(t_0)) = \frac{1}{\rho_o(\theta(t_0))} = \frac{1}{\rho(t_0)}$$

e:

$$\frac{du}{d\theta}(\theta(t_0)) = -\frac{1}{\rho_o(\theta(t_0))^2} \frac{d\rho_o}{d\theta}(\theta(t_0)) = -\frac{1}{\rho(t_0)^2} \dot{\rho}(t_0) \frac{1}{\dot{\theta}(t_0)}$$

certamente definita in quanto  $c \neq 0$  implica  $\dot{\theta}(t_0) \neq 0$ . La relazione

$$(t - t_0)c = \int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} \frac{1}{u^2(\theta)} d\theta$$

porge infine  $\theta(t)$  assegnato che sia  $\theta(t_0)$ .

## 3.20 Moto in un campo newtoniano

In questo caso la legge di forza del campo centrale è descritta dalla funzione

$$f(\rho) = -\frac{MmG}{\rho^2}$$

dove  $M$  rappresenta la massa gravitazionale del corpo massiccio che genera il campo e  $G$  indica la costante della gravitazione universale — o di Cavendish,  $G = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$ .

### 3.20.1 Orbite in un campo newtoniano

L'equazione differenziale delle orbite (3.22) assume la forma

$$-\frac{mc^2}{\rho_o^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho_o}\right) - \frac{mc^2}{\rho_o^3} = -\frac{MmG}{\rho_o^2}$$

che equivale a

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho_o}\right) + \frac{1}{\rho_o} = \frac{MG}{c^2}.$$

Le soluzioni di questa equazione sono del tipo

$$\frac{1}{\rho_o} = \frac{MG}{c^2} + \zeta(\theta)$$

con la funzione incognita  $\zeta(\theta)$  che soddisfa l'equazione differenziale caratteristica del moto armonico semplice di pulsazione unitaria:

$$\frac{d^2\zeta}{d\theta^2} + \zeta = 0$$

e che di conseguenza si scrive come

$$\zeta(\theta) = A \cos(\theta - \theta_0), \quad A \geq 0, \quad \theta_0 \in \mathbb{R}.$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale delle orbite diventa pertanto

$$\frac{1}{\rho_o} = \frac{MG}{c^2} + A \cos(\theta - \theta_0)$$

ovvero

$$\rho_o(\theta) = \frac{1}{\frac{MG}{c^2} + A \cos(\theta - \theta_0)} = \frac{\frac{c^2}{MG}}{1 + \frac{Ac^2}{MG} \cos(\theta - \theta_0)} = \frac{\frac{c^2}{MG}}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad (3.29)$$

con  $e := Ac^2/MG \geq 0$  e  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ , costanti arbitrarie da determinare sulla base delle condizioni iniziali assegnate. La geometria analitica insegna che le curve descritte dalla (3.29) sono **coniche proprie di eccentricità**  $e$ , aventi un — o l'eventuale unico — fuoco nell'origine  $O$ . Precisamente:

- per  $e \in [0, 1)$  la conica è una ellisse di semiassi  $a$  e  $b$ , individuati univocamente dalle relazioni

$$b^2/a = \frac{c^2}{MG} \quad \text{e} \quad e = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Nel caso particolare di  $e = 0$ , l'ellisse ha eccentricità nulla e si riduce ad una **circonferenza di raggio**  $a = b = c^2/MG$ ;

- per  $e = 1$  l'orbita del punto materiale è una parabola con fuoco  $O$ ;
- per  $e > 1$  l'orbita è un ramo di iperbole, avente in  $O$  il relativo fuoco. In questo caso i semiassi  $a$  e  $b$  della conica possono essere determinati in modo univoco risolvendo le equazioni

$$b^2/a = \frac{c^2}{MG} \quad \text{e} \quad e = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Si perviene in questo modo ad una completa classificazione delle orbite sulla base del parametro di eccentricità  $e$ , ricavabile dalle condizioni iniziali.

### 3.20.2 Relazione fra eccentricità ed energia

Un modo più diretto per classificare le orbite del punto materiale nel campo newtoniano consiste nel calcolo dell'energia meccanica, che risulta in una relazione molto semplice con l'eccentricità  $e$ . Si ha infatti, usando l'espressione  $-MmG/\rho$  per l'energia potenziale gravitazionale:

$$\begin{aligned}
 E &= mc^2 \left[ \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{\rho_o} \right) \right]^2 + \frac{mc^2}{2} \frac{1}{\rho_o^2} - \frac{MmG}{\rho_o} \Bigg|_{\frac{1}{\rho_o} = \frac{MG}{c^2} + A \cos(\theta - \theta_0)} = \\
 &= \frac{mc^2}{2} A^2 \sin^2(\theta - \theta_0) + \frac{mc^2}{2} \left[ \left( \frac{MG}{c^2} \right)^2 + \frac{2MGA}{c^2} \cos(\theta - \theta_0) + A^2 \cos^2(\theta - \theta_0) \right] - \\
 &- MmG \left[ \frac{MG}{c^2} + A \cos(\theta - \theta_0) \right] = \\
 &= \frac{mc^2 A^2}{2} \sin^2(\theta - \theta_0) + \frac{mM^2 G^2}{2c^2} + mMGA \cos(\theta - \theta_0) + \\
 &+ \frac{mc^2 A^2}{2} \cos^2(\theta - \theta_0) - \frac{mM^2 G^2}{c^2} - mMGA \cos(\theta - \theta_0) = \\
 &= \frac{mc^2 A^2}{2} - \frac{mM^2 G^2}{2c^2} = \frac{mM^2 G^2}{2c^2} \left( \frac{c^4 A^2}{M^2 G^2} - 1 \right) = \frac{mM^2 G^2}{2c^2} (e^2 - 1) .
 \end{aligned}$$

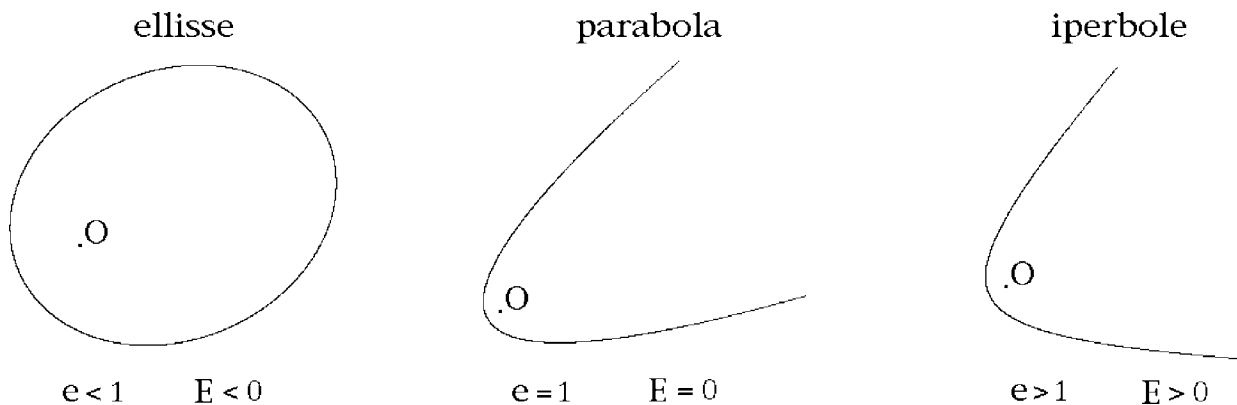
In definitiva, vale la relazione

$$E = \frac{mM^2 G^2}{2c^2} (e^2 - 1)$$

con  $mM^2 G^2 / 2c^2$  costante positiva ed  $e \geq 0$ . Perciò:

$E < 0$	$\iff$	$e < 1$	$\iff$	orbita ellittica (o circolare)
$E = 0$	$\iff$	$e = 1$	$\iff$	orbita parabolica
$E > 0$	$\iff$	$e > 1$	$\iff$	orbita iperbolica

per cui la tipologia dell'orbita può essere dedotta semplicemente dal segno dell'energia meccanica — nota in base alle condizioni iniziali.



### 3.20.3 Leggi di Keplero

I risultati precedenti possono ora essere applicati alla dimostrazione delle leggi kepleriane per il moto dei pianeti nel sistema solare. Nella dimostrazione si assume che possano essere trascurate, almeno in prima approssimazione, le interazioni gravitazionali dei vari pianeti l'uno con l'altro. Ciascun pianeta viene quindi descritto come interagente con il solo campo gravitazionale solare.

- (i) **Prima legge (o delle orbite ellittiche).** La prima legge di Keplero, secondo la quale le orbite dei pianeti sono delle ellissi con il Sole collocato in uno dei due fuochi, è già stata dimostrata in precedenza per il moto di un punto materiale in un campo newtoniano, riducendosi al caso particolare delle orbite di eccentricità minore di 1, ovvero di energia negativa. **La legge è caratteristica dei campi centrali attrattivi la cui intensità sia inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal centro.**
- (ii) **Seconda legge (o delle aree uguali).** Anche la seconda legge di Keplero, secondo cui il raggio vettore congiungente il pianeta con il centro del Sole spazza aree uguali in tempi uguali, è già stata stabilita. **Si tratta infatti di una caratteristica generale del moto in un qualsiasi campo di forze centrali**, conseguenza del teorema di conservazione del momento angolare rispetto al centro del campo.
- (iii) **Terza legge (o dei quadrati e dei cubi, o armonica).** La legge stabilisce che il quadrato del periodo orbitale  $T$  di un pianeta attorno al Sole è proporzionale al cubo del semiasse maggiore  $a$  dell'orbita, la costante di proporzionalità risultando indipendente dal pianeta. A questo risultato si perviene notando preliminarmente che

$$\frac{b^2}{a} = \frac{c^2}{MG}$$

per cui

$$\pi^2 a^2 b^2 = \frac{\pi^2 a^3 c^2}{MG}$$

e quindi l'area dell'orbita ellittica risulta

$$\pi ab = \frac{\pi |c|}{\sqrt{MG}} a^{3/2} .$$

Poiché la velocità areale costante del pianeta è data da  $|c|/2$ , il periodo orbitale si esprime nel modo seguente

$$T = \frac{\pi ab}{|c|/2} = \frac{2\pi ab}{|c|} = \frac{2}{|c|} \pi ab = \frac{2\pi}{\sqrt{MG}} a^{3/2}$$

e pertanto

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{MG}$$

a dimostrazione dell'asserto, considerato che la costante a secondo membro è indipendente dalla massa del pianeta.

### 3.21 Campo newtoniano con correzione inversamente proporzionale al cubo della distanza

L'equazione delle orbite è integrabile esplicitamente qualora il potenziale sia del tipo:

$$U(\rho) = -\frac{a}{\rho} - \frac{b}{\rho^2} \tag{3.30}$$

con  $a, b \in \mathbb{R}$  costanti arbitrarie. Nell'ipotesi che la costante delle aree sia diversa da zero, il problema di Weierstrass corrispondente assume la forma:

$$\frac{mc^2}{2} \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + \tilde{W}_{\text{eff}}(u) = E$$

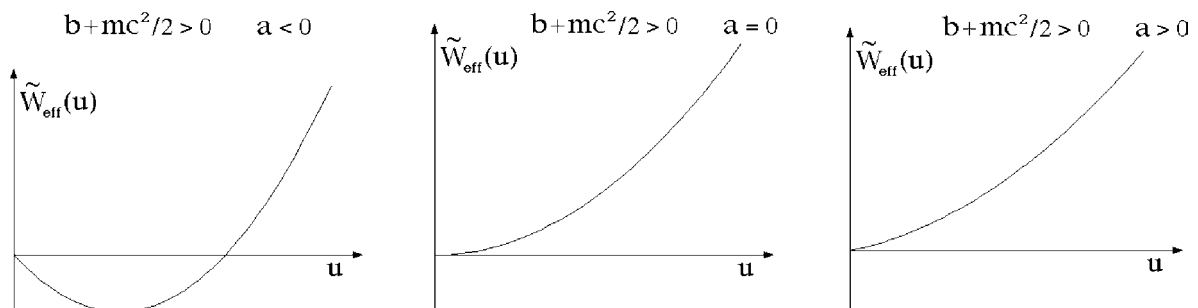
essendo  $\tilde{W}_{\text{eff}}(u) = au + (b + mc^2/2)u^2$  l'energia potenziale efficace del sistema. Si possono distinguere 9 casi diversi in relazione al segno assunto dai coefficienti  $a$  e  $b + mc^2/2$ , come specificato nel seguito. Il grafico del potenziale è illustrato nella figura allegata.

(1)  $b + mc^2/2 > 0$ . Il grafico di  $\tilde{W}_{\text{eff}}$  è una parabola passante per l'origine e con la concavità rivolta verso l'alto.

$a < 0$  Il grafico ha pendenza negativa per  $u \rightarrow 0+$ , per cui esiste una intersezione con il semiasse positivo delle ascisse in  $u = -a/(b + mc^2/2)$ . L'energia meccanica totale può assumere qualsiasi valore  $E \geq -a^2/(4b + 2mc^2)$ .

$a = 0$  La pendenza del grafico tende a zero per  $u \rightarrow 0+$  e quindi non esistono intersezioni del grafico stesso con il semiasse delle ascisse  $u > 0$ . Tutti i valori  $E > 0$  dell'energia meccanica totale sono consentiti.

$a > 0$  Il grafico ha pendenza positiva per  $u \rightarrow 0+$ ; nessuna intersezione con il semiasse positivo delle ascisse. Sono permessi tutti i valori positivi dell'energia meccanica totale.

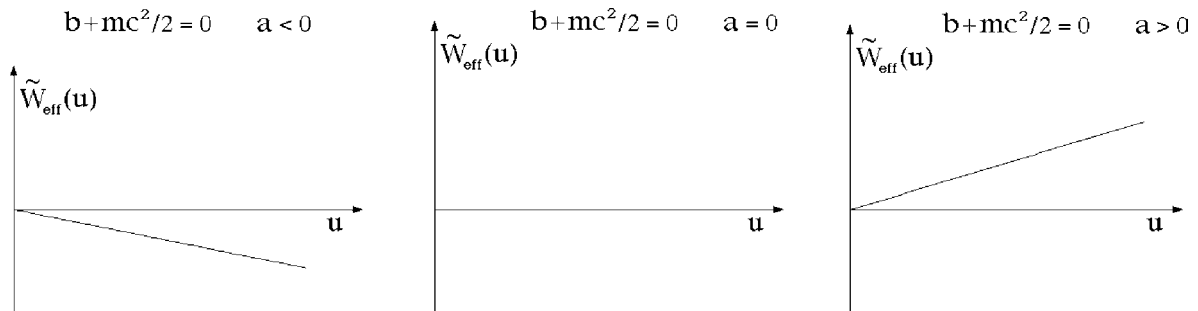


(2)  $b + mc^2/2 = 0$ .  $\tilde{W}_{\text{eff}}$  ha per grafico una semiretta condotta per l'origine.

$a < 0$  La semiretta ha pendenza negativa e tutti i valori di  $E$  reali sono permessi. Nessuna intersezione con il semiasse  $u > 0$ .

$a = 0$  Il grafico coincide con il semiasse  $u > 0$ . Sono consentiti soltanto valori positivi dell'energia meccanica totale  $E$ .

$a > 0$  Il grafico ha coefficiente angolare positivo. L'energia  $E$  può assumere qualsiasi valore reale positivo.

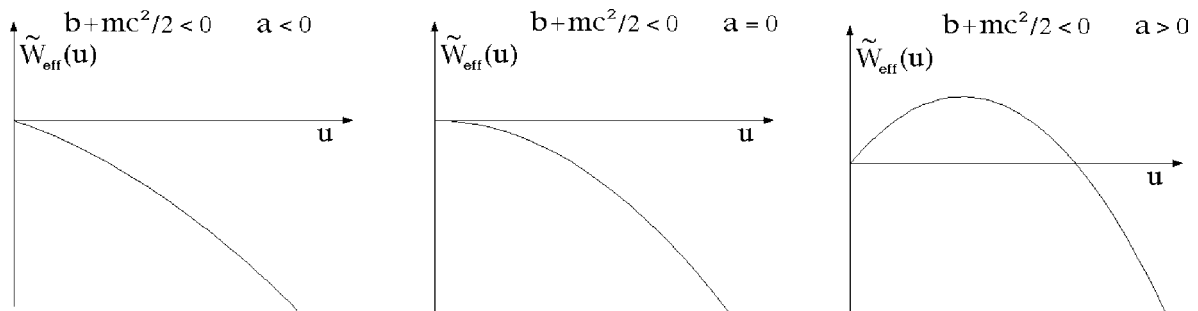


(3)  $b + mc^2/2 < 0$ . Il grafico di  $\tilde{W}_{\text{eff}}$  è una parabola con la concavità rivolta verso il basso, passante per l'origine.

$a < 0$  Per  $u \rightarrow 0+$  la pendenza del grafico risulta negativa. Nessuna intersezione ha luogo con il semiasse  $u > 0$ .  $E$  assume qualsiasi valore reale.

$a = 0$  La pendenza del grafico è nulla per  $u \rightarrow 0+$ . Non si hanno intersezioni con il semiasse  $u > 0$ , mentre l'energia  $E$  può assumere anche in questo caso qualsiasi valore reale.

$a > 0$  Il grafico ha pendenza positiva per  $u \rightarrow 0+$ . Di conseguenza esiste una intersezione con il semiasse  $u > 0$ , per  $u = -a/(b + mc^2/2)$ . Ogni valore reale di  $E$  è permesso.



A titolo di esempio si esegue esplicitamente il calcolo dell'orbita nel caso che sia  $b + mc^2/2 > 0$  ed  $a < 0$ . Si considerino anzitutto valori negativi dell'energia meccanica totale, cui corrispondono moti periodici nell'angolo  $\theta$ . Si ha:

$$\frac{du}{d\theta} = \pm \sqrt{\frac{2}{mc^2} \sqrt{E - au - (b + mc^2/2)u^2}}$$

mentre il polinomio sotto radice  $P(u) \equiv -\left(b + \frac{mc^2}{2}\right)u^2 - au + E$  si può scrivere:

$$P(u) = -\left(b + \frac{mc^2}{2}\right)(u - u_+)(u - u_-)$$

con

$$u_{\pm} = \frac{|a| \pm \sqrt{a^2 + 4E(b + mc^2/2)}}{2(b + mc^2/2)} \in \mathbb{R}_+ \quad (3.31)$$

e quindi  $0 < u_- < u_+$ . Se il moto è inizialmente progressivo l'integrale di Weierstrass diviene, essendo  $u(\theta_0), u(\theta) \in [u_-, u_+]$ :

$$\theta - \theta_0 = \sqrt{\frac{mc^2}{2b + mc^2}} \int_{u(\theta_0)}^{u(\theta)} \frac{du}{\sqrt{(u_+ - u)(u - u_-)}}. \quad (3.32)$$

Mediante il cambiamento di variabile  $u = u_- + (u_+ - u_-) \sin^2(\lambda/2)$ ,  $\lambda \in [0, \pi]$ , si ottiene:

$$(\theta - \theta_0) \sqrt{\frac{2b + mc^2}{mc^2}} = \int_{\lambda(\theta_0)}^{\lambda(\theta)} \frac{(u_+ - u_-) \sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)}{(u_+ - u_-) |\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)|} d\lambda = \lambda(\theta) - \lambda(\theta_0)$$

dove  $\lambda(\theta), \lambda(\theta_0) \in [0, \pi]$ . Una volta raggiunto il punto di inversione  $u = u_+$  l'equazione del moto si scrive:

$$\begin{aligned} (\theta - \theta_0) \sqrt{\frac{2b + mc^2}{mc^2}} &= \int_{u(\theta_0)}^{u_+} \frac{du}{\sqrt{(u_+ - u)(u - u_-)}} - \int_{u_+}^{u(\theta)} \frac{du}{\sqrt{(u_+ - u)(u - u_-)}} = \\ &= \pi - \lambda(\theta_0) - \int_{u_+}^{u(\theta)} \frac{du}{\sqrt{(u_+ - u)(u - u_-)}} \end{aligned}$$

che la sostituzione  $u = u_- + (u_+ - u_-) \sin^2(\lambda/2)$ ,  $\lambda \in [\pi, 2\pi]$ , permette di porre nella forma:

$$(\theta - \theta_0) \sqrt{\frac{2b + mc^2}{mc^2}} = \pi - \lambda(\theta_0) - \int_{\pi}^{\lambda(\theta)} \frac{\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)}{|\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)|} d\lambda = \lambda(\theta) - \lambda(\theta_0)$$

con  $\lambda(\theta_0) \in [0, \pi]$  e  $\lambda(\theta) \in [\pi, 2\pi]$ . Le successive inversioni si trattano in modo analogo. In generale, dunque:

$$\lambda(\theta) = \lambda(\theta_0) + \sqrt{\frac{2b + mc^2}{mc^2}} (\theta - \theta_0)$$

con  $\lambda(\theta_0) \in [0, \pi]$  e  $\lambda(\theta) \in \mathbb{R}$ , per cui:

$$\begin{aligned} u(\theta) &= u_- + (u_+ - u_-) \sin^2(\lambda(\theta)/2) = \frac{u_+ - u_-}{2} - \frac{u_+ - u_-}{2} \cos \lambda(\theta) = \\ &= \frac{u_+ + u_-}{2} \left[ 1 - \frac{u_+ - u_-}{u_+ + u_-} \cos \left( \lambda(\theta_0) + \sqrt{\frac{2b + mc^2}{mc^2}} (\theta - \theta_0) \right) \right] \end{aligned}$$

e  $\lambda(\theta_0)$  determinato da:

$$u(\theta_0) = u_- + (u_+ - u_-) \sin^2(\lambda(\theta_0)/2), \quad \lambda(\theta_0) \in [0, \pi]. \quad (3.33)$$

Se il moto è inizialmente retrogrado si ha invece l'espressione:

$$u(\theta) = \frac{u_+ + u_-}{2} \left[ 1 - \frac{u_+ - u_-}{u_+ + u_-} \cos\left(\lambda(\theta_0) - \sqrt{\frac{2b + mc^2}{mc^2}}(\theta - \theta_0)\right) \right].$$

In conclusione, l'equazione dell'orbita in coordinate polari è data da:

$$\rho_o(\theta) = \frac{2}{u_+ + u_-} \left[ 1 - \frac{u_+ - u_-}{u_+ + u_-} \cos\left(\lambda(\theta_0) + \kappa \sqrt{\frac{2b + mc^2}{mc^2}}(\theta - \theta_0)\right) \right]^{-1},$$

dove  $\kappa = -1$  o  $+1$  a seconda che il moto iniziale sia progressivo o retrogrado in  $\rho_o$  — ossia retrogrado o progressivo in  $u$  —. L'orbita è limitata fra le circonferenze di raggio  $1/u_+$  ed  $1/u_-$ , ma in generale non risulta chiusa. Ciò avviene se e soltanto se esistono  $k, n \in \mathbb{N}$  tali che:

$$2\pi k = 2\pi n \sqrt{\frac{2b + mc^2}{mc^2}},$$

dove  $n$  rappresenta il numero di rivoluzioni complete (intendendosi per rivoluzione completa una variazione di  $2\pi$  dell'angolo  $\theta$ ) e  $k$  il corrispondente numero di passaggi successivi al pericentro (o all'apocentro) necessari a che l'orbita si chiuda. Se l'orbita non si chiude ad ogni rivoluzione essa assume l'usuale andamento “a rosetta”. Il periodo:

$$\Delta\theta \equiv 2\pi \sqrt{\frac{mc^2}{2b + mc^2}}$$

rappresenta l'angolo spazzato dal raggio vettore fra due passaggi consecutivi al pericentro (o all'apocentro).

Una applicazione notevole dei risultati ottenuti si ha in meccanica celeste, relativamente allo studio del moto orbitale del pianeta Mercurio. Si può infatti dimostrare che per tenere conto di particolari effetti dinamici previsti dalla teoria delle Relatività Generale di A. Einstein è necessario introdurre sull'usuale potenziale newtoniano un piccolo termine correttivo inversamente proporzionale al quadrato della distanza:

$$U(\rho) = \frac{MmG}{\rho} + \frac{\lambda}{\rho^2}$$

essendo  $G$  la costante di gravitazione universale,  $\lambda$  una costante reale tale che  $|\lambda| \ll MmG$  ed  $M, m$  le masse del Sole e del pianeta rispettivamente. L'orbita del pianeta non risulta chiusa, per cui la legge kepleriana delle orbite ellittiche deve considerarsi solo come una prima approssimazione.

Nel caso che l'energia meccanica totale del sistema sia uguale a zero, se si assume il moto iniziale progressivo in  $u$  l'orbita fino al punto di inversione  $u = u_+$  si ottiene dall'integrale di Weierstrass (3.32) con  $u_+$  dato dalla (3.31),  $u_- = 0$  e  $u(\theta_0), u(\theta) \in (0, u_+]$ . La sostituzione  $u = u_+ \sin^2(\lambda/2)$ ,  $\lambda \in (0, \pi]$ , porge allora:

$$\sqrt{\frac{2b + mc^2}{mc^2}}(\theta - \theta_0) = \lambda(\theta) - \lambda(\theta_0).$$

La successiva fase retrograda viene invece descritta per mezzo di:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2b+mc^2}{mc^2}}(\theta-\theta_0) &= \int_{u(\theta_0)}^{u_+} \frac{du}{\sqrt{(u_+-u)(u-u_-)}} - \int_{u_+}^{u(\theta)} \frac{du}{\sqrt{(u_+-u)(u-u_-)}} = \\ &= \pi - \lambda(\theta_0) + \int_{u_+}^{u(\theta)} \frac{du}{\sqrt{(u_+-u)(u-u_-)}}\end{aligned}$$

che diventa:

$$\sqrt{\frac{2b+mc^2}{mc^2}}(\theta-\theta_0) = \pi - \lambda(\theta_0) - \int_{\pi}^{\lambda(\theta)} \frac{\sin(\lambda/2)\cos(\lambda/2)}{|\sin(\lambda/2)\cos(\lambda/2)|} d\lambda = \lambda(\theta) - \lambda(\theta_0)$$

con il cambiamento di variabile  $u = u_+ \sin^2(\lambda/2)$ ,  $\lambda \in [\pi, 2\pi)$ . Vale in ogni caso:

$$\lambda(\theta) = \lambda(\theta_0) + \sqrt{\frac{2b+mc^2}{mc^2}}(\theta-\theta_0) \in (0, 2\pi) \quad (3.34)$$

con  $\lambda(\theta_0) \in (0, \pi]$  determinato da  $u(\theta_0) = u_+ \sin^2(\lambda(\theta_0)/2)$ , per cui:

$$u(\theta) = u_+ \sin^2\left[\frac{\lambda(\theta_0)}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2b+mc^2}{mc^2}}(\theta-\theta_0)\right]$$

ed infine:

$$\rho_o(\theta) = \frac{1}{u_+} \sin^{-2}\left[\frac{\lambda(\theta_0)}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2b+mc^2}{mc^2}}(\theta-\theta_0)\right].$$

È immediato verificare dalla (3.34) che  $\theta \in (\theta_-, \theta_+)$ , con:

$$\theta_- \equiv \theta_0 - \lambda(\theta_0)\sqrt{\frac{mc^2}{2b+mc^2}}, \quad \theta_+ \equiv \theta_0 + [2\pi - \lambda(\theta_0)]\sqrt{\frac{mc^2}{2b+mc^2}},$$

e che:

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_-+} \rho_o(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \theta_+-} \rho_o(\theta) = +\infty$$

mentre la distanza minima dal centro di forza viene raggiunta per  $\theta = (\theta_+ + \theta_-)/2$ :

$$\rho_o\left(\frac{\theta_+ + \theta_-}{2}\right) = \frac{1}{u_+}.$$

La variazione complessiva dell'angolo  $\theta$ :

$$\Delta\theta(0) \equiv 2\pi\sqrt{\frac{mc^2}{2b+mc^2}}$$

può scriversi  $\Delta\theta(0) = \pi + \varphi$ , dove  $\varphi$  è l'angolo che misura la deflessione subita dal punto materiale mentre questo percorre la propria orbita completa.

Qualora  $E > 0$  ed il moto iniziale sia progressivo in  $u$ , si procede in modo analogo. Nella fase progressiva valgono la (3.32) e la (3.31), con  $u_- < 0$  e  $u(\theta_0), u(\theta) \in (0, u_+]$ . Posto  $u = u_- + (u_+ - u_-) \sin^2(\lambda/2)$ ,  $\lambda \in (2 \arcsin \sqrt{-u_-/(u_+ - u_-)}, \pi]$ , si ha:

$$\sqrt{\frac{2b + mc^2}{mc^2}}(\theta - \theta_0) = \int_{\lambda(\theta_0)}^{\lambda(\theta)} \frac{\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)}{|\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)|} d\lambda = \lambda(\theta) - \lambda(\theta_0).$$

Nella successiva fase retrograda è invece:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2b + mc^2}{mc^2}}(\theta - \theta_0) &= \int_{u(\theta_0)}^{u_+} \frac{du}{\sqrt{(u_+ - u)(u - u_-)}} - \int_{u_+}^{u(\theta)} \frac{du}{\sqrt{(u_+ - u)(u - u_-)}} = \\ &= \pi - \lambda(\theta_0) - \int_{u_+}^{u(\theta)} \frac{du}{\sqrt{(u_+ - u)(u - u_-)}} \end{aligned}$$

che con la sostituzione  $u = u_- + (u_+ - u_-) \sin^2(\lambda/2)$ ,  $\lambda \in [\pi, 2\pi - 2 \arcsin \sqrt{\frac{-u_-}{u_+ - u_-}})$ , diventa:

$$\sqrt{\frac{2b + mc^2}{mc^2}}(\theta - \theta_0) = \pi - \lambda(\theta_0) - \int_{\pi}^{\lambda(\theta)} \frac{\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)}{|\sin(\lambda/2) \cos(\lambda/2)|} d\lambda = \lambda(\theta) - \lambda(\theta_0).$$

In ogni caso risulta:

$$\lambda(\theta) = \lambda(\theta_0) + \sqrt{\frac{2b + mc^2}{mc^2}}(\theta - \theta_0) \quad (3.35)$$

con  $\lambda(\theta_0)$  determinato da:

$$u(\theta_0) = u_- + (u_+ - u_-) \sin^2(\lambda(\theta_0)/2), \quad \lambda(\theta_0) \in \left(2 \arcsin \sqrt{\frac{-u_-}{u_+ - u_-}}, \pi\right]$$

e:

$$\lambda(\theta) \in \left(2 \arcsin \sqrt{\frac{-u_-}{u_+ - u_-}}, 2\pi - 2 \arcsin \sqrt{\frac{-u_-}{u_+ - u_-}}\right). \quad (3.36)$$

Pertanto:

$$\rho_o(\theta) = \left[ u_- + (u_+ - u_-) \sin^2\left(\frac{\lambda(\theta_0)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2b + mc^2}{mc^2}}(\theta - \theta_0)\right) \right]^{-1}. \quad (3.37)$$

Dalle (3.35) e (3.36) si verifica che  $\theta \in (\theta_-, \theta_+)$ , essendo:

$$\begin{cases} \theta_- \equiv \theta_0 + \left(2 \arcsin \sqrt{-u_-/(u_+ - u_-)} - \lambda(\theta_0)\right) \sqrt{\frac{mc^2}{2b + mc^2}} \\ \theta_+ \equiv \theta_0 + \left(2\pi - 2 \arcsin \sqrt{-u_-/(u_+ - u_-)} - \lambda(\theta_0)\right) \sqrt{\frac{mc^2}{2b + mc^2}} \end{cases}$$

e che:

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_{-+}} \rho_o(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \theta_{+-}} \rho_o(\theta) = +\infty ,$$

mentre la distanza minima dal centro di forza viene raggiunta per  $\theta = (\theta_{-} + \theta_{+})/2$ :

$$\rho_o\left(\frac{\theta_{-} + \theta_{+}}{2}\right) = \frac{1}{u_{+}} .$$

La variazione totale dell'angolo  $\theta$ :

$$\Delta\theta(E) \equiv [2\pi - 4 \arcsin \sqrt{-u_{-}/(u_{+} - u_{-})}] \sqrt{\frac{mc^2}{2b + mc^2}}$$

ha lo stesso significato già discusso per  $E = 0$ . Si osservi che  $\Delta\theta(E_2) < \Delta\theta(E_1) \forall E_1, E_2 \geq 0, E_1 < E_2$ , conformemente al fatto che punti materiali di energia maggiore subiscono una deflessione minore. L'equazione dell'orbita nel caso di un moto inizialmente retrogrado in  $u$  si ottiene dalla (3.37) per mezzo della sostituzione  $(\theta - \theta_0) \rightarrow -(\theta - \theta_0)$ .

### 3.21.1 Analisi di Weierstrass applicata all'equazione del moto radiale

Si vuole ora applicare la discussione di Weierstrass al calcolo della soluzione  $(\rho(t), \theta(t))$  per il potenziale (3.30). Per fissare le idee e semplificare nel contempo i calcoli, si assume  $a = 0$  e  $b + mc^2/2 < 0$ , e si considerano soluzioni di energia negativa. L'equazione di conservazione dell'energia meccanica totale risulta in questo caso:

$$\frac{m}{2} \dot{\rho}(t)^2 + W_{\text{eff}}[\rho(t)] = E$$

con il potenziale efficace dato da:

$$W_{\text{eff}}(\rho) \equiv \left(b + \frac{mc^2}{2}\right) \frac{1}{\rho^2} .$$

Prima di procedere alla determinazione della soluzione radiale  $\rho(t)$  conviene sottolineare che la soluzione massimale sarà definita in un intervallo limitato. Per  $E < 0$  si ha infatti inversione del moto radiale nel punto:

$$\rho^* \equiv \sqrt{\frac{1}{E} \left(b + \frac{mc^2}{2}\right)}$$

e l'intervallo di tempo  $t^*$  necessario a che il punto materiale si sposti da  $\rho = \rho^*$  a  $\rho = 0$  si scrive:

$$t^* = -\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\rho^*}^0 \left[ E - \left(b + \frac{mc^2}{2}\right) \frac{1}{\rho^2} \right]^{-1/2} d\rho = -\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\rho^*}^0 \frac{\rho}{\sqrt{|b + mc^2/2| - |E|\rho^2}} d\rho$$

ovvero:

$$t^* = \frac{1}{|E|} \sqrt{\frac{m}{2}} \sqrt{|b + mc^2/2|}.$$

Il moto da  $\rho = \rho^*$  a  $\rho = 0$  avviene dunque in un intervallo di tempo *finito* e la soluzione non è ulteriormente prolungabile, essendo  $\rho = 0$  un punto singolare per il potenziale e per il campo di forze.

Ciò premesso, sia  $\rho(t_0) \in (0, \rho^*]$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ , la condizione iniziale e si assuma che all'istante iniziale la velocità radiale del punto abbia segno positivo. Il moto del sistema consta allora di una fase progressiva (nel passato e nel futuro) e di una retrograda (nel futuro). Per quanto concerne la fase progressiva si ha l'integrale di Weierstrass:

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\rho(t_0)}^{\rho(t)} \left[ E - \left( b + \frac{mc^2}{2} \right) \frac{1}{\rho^2} \right]^{-1/2} d\rho = \\ &= \frac{1}{|E|} \sqrt{\frac{m}{2}} \left[ \sqrt{|b + mc^2/2| - |E|\rho(t_0)^2} - \sqrt{|b + mc^2/2| - |E|\rho(t)^2} \right] \end{aligned}$$

per ogni  $\rho(t) \in (0, \rho^*]$  e quindi:

$$\begin{aligned} \forall t \in \left( t_0 - \frac{1}{|E|} \sqrt{\frac{m}{2}} \left( \sqrt{|b + mc^2/2|} - \sqrt{|b + mc^2/2| - |E|\rho(t_0)^2} \right), \right. \\ \left. t_0 + \frac{1}{|E|} \sqrt{\frac{m}{2}} \sqrt{|b + mc^2/2| - |E|\rho(t_0)^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

La soluzione radiale è quindi data dall'espressione:

$$\rho(t)^2 = \frac{1}{|E|} |b + mc^2/2| - \frac{1}{|E|} \left[ \sqrt{|b + mc^2/2| - |E|\rho(t_0)^2} - |E| \sqrt{2/m} (t - t_0) \right]^2 \quad (3.39)$$

con  $t$  variabile nell'intervallo (3.38). Quanto alla fase retrograda si scrive invece,  $\forall \rho(t) \in (0, \rho^*]$ :

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\rho(t_0)}^{\rho^*} \left[ E - \left( b + \frac{mc^2}{2} \right) \frac{1}{\rho^2} \right]^{-1/2} d\rho - \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\rho^*}^{\rho(t)} \left[ E - \left( b + \frac{mc^2}{2} \right) \frac{1}{\rho^2} \right]^{-1/2} d\rho = \\ &= \frac{1}{|E|} \sqrt{\frac{m}{2}} \left[ \sqrt{|b + mc^2/2| - |E|\rho(t_0)^2} + \sqrt{|b + mc^2/2| - |E|\rho(t)^2} \right] \end{aligned}$$

per cui:

$$\begin{aligned} t \in \left[ t_0 + \frac{1}{|E|} \sqrt{\frac{m}{2}} \sqrt{|b + mc^2/2| - |E|\rho(t_0)^2}, \right. \\ \left. t_0 + \frac{1}{|E|} \sqrt{\frac{m}{2}} \left( \sqrt{|b + mc^2/2|} + \sqrt{|b + mc^2/2| - |E|\rho(t_0)^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

e su tale intervallo vale di nuovo l'espressione (3.39). In conclusione, la legge oraria radiale è data da (3.39) sull'intervallo:

$$\left( t_0 - \frac{1}{|E|} \sqrt{\frac{m}{2}} \left( \sqrt{|b + mc^2/2|} - \sqrt{|b + mc^2/2| - |E|\rho(t_0)^2} \right), \right. \\ \left. t_0 + \frac{1}{|E|} \sqrt{\frac{m}{2}} \left( \sqrt{|b + mc^2/2|} + \sqrt{|b + mc^2/2| - |E|\rho(t_0)^2} \right) \right) \equiv (t_-, t_+).$$

e si verifica immediatamente che  $\lim_{t \rightarrow t_-+} \rho(t) = \lim_{t \rightarrow t_+-} \rho(t) = 0$ .

La legge oraria angolare segue dalla relazione:

$$\theta(t) - \theta(t_0) = c \int_{t_0}^t \frac{1}{\rho(t)^2} dt = c \int_{t_0}^t \frac{1}{\alpha - \beta[\gamma - \delta(t - t_0)]^2} dt \quad (3.40)$$

essendosi posto:

$$\alpha \equiv \frac{1}{|E|} |b + mc^2/2| \quad \beta \equiv \frac{1}{|E|} \quad \gamma \equiv \sqrt{|b + mc^2/2| - |E|\rho(t_0)^2} \quad \delta \equiv |E| \sqrt{2/m}$$

cosicchè  $t_{\pm} = t_0 + \frac{\gamma}{\delta} \pm \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$  e  $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \gamma < 1$ . Con il cambiamento di variabile  $\tau = [\gamma - \delta(t - t_0)] \sqrt{\beta/\alpha}$ ,  $\tau \in (-1, +1)$ , la (3.40) porge:

$$\theta(t) - \theta(t_0) = -\frac{c}{2\alpha\delta} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \left[ \ln \left( \frac{1 + \tau(t)}{1 - \tau(t)} \right) - \ln \left( \frac{1 + \gamma \sqrt{\beta/\alpha}}{1 - \gamma \sqrt{\beta/\alpha}} \right) \right]$$

definita  $\forall t \in (t_-, t_+)$ . Inoltre:

$$\lim_{t \rightarrow t_-+} \theta(t) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow t_+-} \theta(t) = +\infty.$$

Conclusione: in un intervallo di tempo *finito*, di durata:

$$\frac{2}{|E|} \sqrt{\frac{m}{2}} \sqrt{|b + mc^2/2|},$$

il punto materiale tende al centro del campo tanto nel futuro quanto nel passato e nel far questo compie infinite rivoluzioni complete. L'orbita è spiraliforme.

### 3.22 Campo centrale elastico con correzione inversamente proporzionale al cubo della distanza

Si tratta di un altro esempio di potenziale per il quale l'equazione delle orbite può integrarsi esplicitamente in termini di funzioni elementari.

Un altro caso in cui l'equazione delle orbite risulta integrabile per mezzo di funzioni elementari è quello del campo centrale descritto dal potenziale:

$$U(\rho) = -a\rho^2 - \frac{b}{\rho^2} \quad (3.41)$$

con  $a$  e  $b$  costanti reali arbitrarie. Nell'ipotesi che la costante delle aree sia diversa da zero, il problema di Weierstrass per le orbite diviene:

$$\frac{mc^2}{2} \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + \tilde{W}_{\text{eff}}(u) = E$$

dove  $\tilde{W}_{\text{eff}}(u) = a/u^2 + (b + mc^2/2)u^2$  è l'energia potenziale efficace del sistema e  $u \equiv 1/\rho$ . Si possono distinguere 9 casi diversi in relazione al segno assunto dai coefficienti  $a$  e  $b + mc^2/2$ . Il grafico del potenziale è illustrato nella figura allegata e la discussione di Weierstrass viene condotta come negli esempi precedenti. Ci si limita a sottolineare quanto segue:

- l'integrale di W. assume la forma:

$$\theta - \theta_0 = \sqrt{\frac{mc^2}{2}} \int_{u(0)}^{u(\theta)} \frac{1}{\sqrt{E - \tilde{W}_{\text{eff}}}} du$$

e moltiplicando numeratore e denominatore dell'integrando per  $u$ :

$$\theta - \theta_0 = \sqrt{\frac{mc^2}{2}} \int_{u(0)}^{u(\theta)} \frac{u}{\sqrt{-(b + mc^2/2)u^4 + Eu^2 - a}} du ,$$

espressione che si integra facilmente per mezzo del cambiamento di variabile  $\xi = u^2$ ,  $u > 0$ :

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{mc^2}{2}} \int_{u(0)}^{u(\theta)} \frac{1}{\sqrt{-(b + mc^2/2)\xi^2 + E\xi - a}} d\xi ;$$

- come è immediato verificare, il potenziale efficace ammette punti critici soltanto per  $b + mc^2/2 > 0$ ,  $a > 0$  e  $b + mc^2/2 < 0$ ,  $a < 0$ . In ambo i casi il punto critico è unico, trattandosi di un minimo relativo proprio per  $a > 0$  e di un massimo relativo proprio per  $a < 0$ ,

- per  $b + mc^2/2 = 0$ ,  $a = 0$ , il potenziale efficace risulta costante a zero;
- in ogni altro caso  $W_{\text{eff}}$  è funzione monotona nell'intervallo  $(0, +\infty]$ . La funzione  $\rho(\theta)$  risulta periodica soltanto per  $b + mc^2/2 > 0$ ,  $a > 0$ .

### 3.23 Campo centrale elastico

Il potenziale del campo centrale elastico è dato dall'espressione:

$$U(\rho) = -\frac{k}{2}\rho^2, \quad \text{con } k > 0,$$

cui corrisponde l'energia potenziale:

$$W(\rho) = \frac{k}{2}\rho^2.$$

Nell'ipotesi che la costante delle aree  $c$  sia diversa da zero, l'equazione delle orbite si ottiene risolvendo il problema di Weierstrass:

$$\frac{mc^2}{2} \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{mc^2}{2} u^2 + \frac{k}{2} \frac{1}{u^2} = E$$

dove si è posto al solito  $u(\theta) \equiv 1/\rho(\theta) > 0$  e la costante  $E$  rappresenta l'energia meccanica totale del sistema. L'energia potenziale efficace  $\tilde{W}_{\text{eff}}(u) \equiv \frac{mc^2}{2} u^2 + \frac{k}{2} \frac{1}{u^2}$  ammette in  $\{u > 0\}$  un unico punto critico  $u_* = (k/mc^2)^{1/4}$ , che in effetti è minimo assoluto della funzione. Dunque:

$$E \geq \tilde{W}_{\text{eff}}(u_*) = \frac{mc^2}{2} \left( \frac{k}{mc^2} \right)^{1/2} + \frac{k}{2} \left( \frac{mc^2}{2} \right)^{1/2} = (kmc^2)^{1/2}.$$

Per  $E > (kmc^2)^{1/2}$  si ha immediatamente che  $u(\theta)$  è una funzione periodica di  $\theta$ . Indicati con  $\theta_0$  ed  $u_0$  i valori iniziali delle variabili  $\theta$  e  $u$  e supponendo che il moto iniziale sia progressivo in  $u$ , risulta:

$$\frac{du}{d\theta}(\theta) = \sqrt{\frac{2}{mc^2}} \sqrt{E - \frac{k}{2} \frac{1}{u^2} - \frac{mc^2}{2} u^2}$$

e l'integrale di Weierstrass diviene:

$$\theta - \theta_0 = \sqrt{\frac{mc^2}{2}} \int_{u_0}^u \left[ E - \frac{k}{2} \frac{1}{u^2} - \frac{mc^2}{2} u^2 \right]^{-1/2} du$$

ovvero:

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{mc^2}{2}} \int_{u_0}^u \left[ -\frac{mc^2}{2} u^4 + Eu^2 - \frac{k}{2} \right]^{-1/2} 2u \, du .$$

Con il cambiamento di variabile  $u \in \mathbb{R}_+ \longrightarrow \lambda \in u^2 \in \mathbb{R}_+$  si deduce:

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{mc^2}{2}} \int_{u_0^2}^{u^2} \left[ -\frac{mc^2}{2} \lambda^2 + E\lambda - \frac{k}{2} \right]^{-1/2} d\lambda$$

che può anche scriversi nella forma:

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2} \int_{u_0^2}^{u^2} \frac{1}{\sqrt{(\lambda_+ - \lambda)(\lambda - \lambda_-)}} d\lambda$$

essendo:

$$\lambda_{\pm} \equiv \frac{E}{mc^2} \pm \sqrt{\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - \frac{k}{mc^2}}$$

con  $0 < \lambda_- < \lambda_+$ , a causa della condizione  $E > (kmc^2)^{1/2}$ . L'ulteriore cambiamento di variabile  $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+] \subset \mathbb{R}_+ \longrightarrow z \in [0, \pi/2]$  definito da:

$$\lambda = \lambda_- + (\lambda_+ - \lambda_-) \sin^2 z$$

porge infine:

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2} \int_{z_0}^z \frac{2(\lambda_+ - \lambda_-) \sin z \cos z}{(\lambda_+ - \lambda_-) |\sin z \cos z|} = z - z_0 .$$

Per  $E = (kmc^2)^{1/2}$  la soluzione dell'equazione delle orbite risulta semplicemente  $u(\theta) = u_0 \forall \theta \in \mathbb{R}$  e corrisponde ad un'orbita circolare di raggio  $1/u_0$ .

## 4. Giroscopi

Questa sezione è dedicata allo studio di alcune caratteristiche notevoli dei moti giroscopici, in particolare la tendenza a mantenere invariata l'orientazione dell'asse di figura — asse giroscopico. Questa proprietà è suscettibile di applicazioni notevoli alla stabilizzazione del moto dei sistemi e alla realizzazione di dispositivi di orientamento inerziale utili per la navigazione degli aereomobili. Completa la discussione l'analisi del moto di un sistema giroscopico notevole — la bussola giroscopica.

### 4.1 Definizione di solido a struttura giroscopica

Un corpo rigido con punto fisso  $O$  si dice **dotato di struttura giroscopica rispetto ad  $O$**  se il corrispondente operatore d'inerzia  $L_O$  ha momenti principali d'inerzia — autovalori —  $A_1, A_2, A_3$  con  $A_1 = A_2 = A \neq A_3$ . Gli autovettori associati all'autovalore  $A_3$  costituiscono un sottospazio vettoriale unidimensionale di  $\mathbb{R}^3$  ed individuano quindi una ed una sola retta passante per il punto fisso  $O$ . Tale retta dicesi **asse di figura** del corpo rigido a struttura giroscopica ed appartiene allo spazio solidale al corpo rigido stesso. Nella discussione del moto del giroscopio conviene introdurre, al solito, una terna di riferimento principale d'inerzia, con origine nel punto fisso  $O$  e versori ortogonali  $\hat{e}_1, \hat{e}_2$  — autovettori dell'autovalore  $A$  — ed  $\hat{e}_3$  — autovettore associato ad  $A_3$ .

Per **giroscopio** si intende un corpo rigido avente struttura giroscopica rispetto al proprio baricentro  $G$ ; i momenti centrali d'inerzia risultano perciò  $A_1 = A_2 = A \neq A_3$  e l'asse di figura coincide con l'asse centrale d'inerzia associato ad  $A_3$ . Tale asse è anche noto come **asse giroscopico**. Si introduce la terna di riferimento solidale al giroscopio in modo che l'origine coincida con  $G$ , il versore  $\hat{e}_3$  sia diretto secondo l'asse di figura e i versori  $\hat{e}_1, \hat{e}_2$  risultino ortogonali al precedente e fra di loro.

### 4.2 Sulla tendenza dei giroscopi a mantenere invariata l'orientazione del loro asse di figura (asse giroscopico) rispetto ad una terna di riferimento inerziale

Si consideri un giroscopio di baricentro  $G$ , massa totale  $m$  e momenti centrali  $A, A_3$ , costituito da un sistema di punti materiali  $(P_i, m_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Si supponga che all'istante iniziale  $t = 0$  il vettore velocità angolare istantanea sia diretto secondo l'asse di figura:

$$\vec{\omega}(0) = \omega_3(0) \hat{e}_3(0) \neq 0$$

e che di conseguenza il vettore momento angolare rispetto a  $G$  sia a sua volta parallelo allo stesso asse:

$$\vec{K}_G(0) = L_G[\omega_3(0) \hat{e}_3(0)] = A_3 \omega_3(0) \hat{e}_3(0) \neq 0 .$$

Se dall'istante  $t = 0$  in poi il giroscopio viene sottoposto a sollecitazioni esterne di risultante  $\vec{R}(t)$ , l'equazione cardinale della quantità di moto implica che si abbia

$$m\ddot{G} = \vec{R}(t) .$$

Se poi  $\vec{M}_G(t)$  è il momento risultante in  $G$  delle stesse sollecitazioni, l'equazione cardinale del momento angolare scritta in un sistema di riferimento baricentrale i cui assi si mantengano fissi rispetto ad una terna inerziale assume la forma

$$\frac{d\vec{K}_G}{dt}(t) = \vec{M}_G(t) + \sum_{i=1}^N (P_i - G) \wedge (-m_i \ddot{G}) = \vec{M}_G(t) \quad (4.1)$$

in quanto il momento in  $G$  delle forze fittizie di trascinamento  $-m_i \ddot{G}$  è banalmente nullo:

$$\sum_{i=1}^N (P_i - G) \wedge (-m_i \ddot{G}) = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i (P_i - G) \wedge m \ddot{G} = -(G - G) \wedge m \ddot{G} .$$

Rispetto a tale terna baricentrale (come pure rispetto a quella inerziale) il vettore velocità angolare istantanea varierà nel tempo in modo che posto

$$\vec{M}_G(t) = M_1(t) \hat{e}_1(t) + M_2(t) \hat{e}_2(t) + M_3(t) \hat{e}_3(t)$$

e

$$\vec{\omega}(t) = \omega_1(t) \hat{e}_1(t) + \omega_2(t) \hat{e}_2(t) + \omega_3(t) \hat{e}_3(t) ,$$

siano soddisfatte le equazioni di Eulero

$$\begin{cases} A_1 \dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2) \omega_2 \omega_3 = M_1 \\ A_2 \dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3) \omega_3 \omega_1 = M_2 \\ A_3 \dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1) \omega_1 \omega_2 = M_3 \end{cases} \quad A_1 = A_2 = A \neq A_3$$

ossia

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 + \frac{A_3 - A}{A} \omega_2 \omega_3 = \frac{1}{A} M_1 \\ \dot{\omega}_2 + \frac{A - A_3}{A} \omega_3 \omega_1 = \frac{1}{A} M_2 \\ \dot{\omega}_3 = \frac{1}{A_3} M_3 . \end{cases} \quad (4.2)$$

#### 4.2.1 Variazioni relative di velocità angolare istantanea e momento angolare in $G$

Si vuole stimare la massima variazione relativa subita da  $\vec{\omega}$  e da  $\vec{K}_G$  per effetto di  $\vec{M}_G$  in un intervallo di tempo  $[0, \tau]$ , con  $\tau > 0$ . A questo proposito, integrando in  $t \in [0, \tau]$  la terza equazione del sistema (4.2), si può scrivere

$$\omega_3(\tau) - \omega_3(0) = \frac{1}{A_3} \int_0^\tau M_3(t) dt$$

e quindi

$$|\omega_3(\tau) - \omega_3(0)| = \frac{1}{A_3} \left| \int_0^\tau M_3(t) dt \right| \leq \frac{1}{A_3} \int_0^\tau |M_3(t)| dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{A_3} \int_0^\tau |\vec{M}_G(t)| dt = \frac{1}{A_3} \mu(\tau) \quad (4.3)$$

essendosi posto

$$\mu(\tau) = \int_0^\tau |\vec{M}_G(t)| dt. \quad (4.4)$$

La variazione relativa del vettore velocità angolare istantanea rispetto al suo valore iniziale si stima con l'espressione

$$\frac{|\omega_3(\tau) - \omega_3(0)|}{|\omega_3(0)|} \leq \frac{\mu(\tau)}{A_3 |\omega_3(0)|} = \frac{\mu(\tau)}{|\vec{K}_G(0)|}. \quad (4.5)$$

Per le componenti  $\omega_1(\tau)$ ,  $\omega_2(\tau)$  si procede in maniera analoga, moltiplicando le prime due equazioni di Eulero (4.2) rispettivamente per  $\omega_1$  ed  $\omega_2$  e sommando le due relazioni così ottenute:

$$\omega_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \dot{\omega}_2 = \frac{1}{A} [M_1 \omega_1 + M_2 \omega_2]$$

in modo che risulta

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\omega_1^2 + \omega_2^2] = \frac{1}{A} [M_1 \omega_1 + M_2 \omega_2] \leq \frac{1}{A} |M_1 \omega_1 + M_2 \omega_2|$$

ed applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz a secondo membro

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\omega_1^2 + \omega_2^2] \leq \frac{1}{A} [M_1^2 + M_2^2]^{1/2} [\omega_1^2 + \omega_2^2]^{1/2}$$

da cui si deduce infine l'ulteriore maggiorazione

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\omega_1^2 + \omega_2^2] \leq \frac{1}{A} |\vec{M}_G| [\omega_1^2 + \omega_2^2 + \varepsilon]^{1/2}$$

valida per ogni  $\varepsilon > 0$ . L'introduzione della costante positiva arbitraria  $\varepsilon$  consente di dividere membro a membro per  $[\omega_1^2 + \omega_2^2 + \varepsilon]^{1/2} > \varepsilon^{1/2} > 0$

$$\frac{1}{2} [\omega_1^2 + \omega_2^2 + \varepsilon]^{-1/2} \frac{d}{dt} [\omega_1^2 + \omega_2^2] \leq \frac{1}{A} |\vec{M}_G|$$

e di dedurre quindi la maggiorazione

$$\frac{d}{dt} [\omega_1^2 + \omega_2^2 + \varepsilon]^{1/2} \leq \frac{1}{A} |\vec{M}_G|$$

che integrata nell'intervallo  $[0, \tau]$  conduce a

$$[\omega_1^2(\tau) + \omega_2^2(\tau) + \varepsilon]^{1/2} - \varepsilon^{1/2} \leq \frac{1}{A} \int_0^\tau \frac{1}{A} |\vec{M}_G(t)| dt = \frac{\mu(\tau)}{A}.$$

Per l'arbitrarietà di  $\varepsilon > 0$ , è lecito considerare il limite  $\varepsilon \rightarrow 0+$  della precedente relazione, ottenendo

$$[\omega_1^2(\tau) + \omega_2^2(\tau)]^{1/2} \leq \frac{\mu(\tau)}{A}. \quad (4.6)$$

Dalle disequazioni (4.3) ed (4.6) si deduce il modulo quadro della variazione di  $\vec{\omega}$ :

$$\omega_1^2(\tau) + \omega_2^2(\tau) + |\omega_3(\tau) - \omega_3(0)|^2 \leq \frac{\mu(\tau)^2}{A^2} + \frac{\mu(\tau)^2}{A_3^2} = \left(1 + \frac{A_3^2}{A^2}\right) \frac{\mu(\tau)^2}{A_3^2}$$

e quindi la variazione relativa dello stesso vettore nell'intervallo  $[0, \tau]$ :

$$\frac{|\vec{\omega}(\tau) - \vec{\omega}(0)|}{|\vec{\omega}(0)|} \leq \left(1 + \frac{A_3^2}{A^2}\right)^{1/2} \frac{\mu(\tau)}{A_3|\omega_3(0)|} = \left(1 + \frac{A_3^2}{A^2}\right)^{1/2} \frac{\mu(\tau)}{|\vec{K}_G(0)|}. \quad (4.7)$$

Per quanto riguarda infine la variazione di  $\vec{K}_G$  conviene riprendere l'equazione cardinale del momento angolare (4.1) rispetto al polo  $G$  e integrarla membro a membro in  $t \in [0, \tau]$ :

$$\vec{K}_G(\tau) - \vec{K}_G(0) = \int_0^\tau \vec{M}_G(t) dt$$

per ricavare

$$|\vec{K}_G(\tau) - \vec{K}_G(0)| = \left| \int_0^\tau \vec{M}_G(t) dt \right| \leq \int_0^\tau |\vec{M}_G(t)| dt = \mu(\tau)$$

e dedurre infine la variazione relativa di  $\vec{K}_G$  rispetto al suo valore iniziale:

$$\frac{|\vec{K}_G(\tau) - \vec{K}_G(0)|}{|\vec{K}_G(0)|} \leq \frac{\mu(\tau)}{|\vec{K}_G(0)|}. \quad (4.8)$$

Dalle disequazioni (4.7) e (4.8) si conclude che se il prodotto fra la massima intensità del momento applicato e il tempo d'azione caratteristico delle sollecitazioni esterne risulta molto piccolo rispetto a  $|\vec{K}_G(0)|$ , se cioè, in virtù della definizione (4.4),

$$\mu(\tau) = \int_0^\tau |\vec{M}_G(t)| dt \leq \max_{t \in [0, \tau]} |\vec{M}_G(t)| \tau \ll |\vec{K}_G(0)|,$$

allora le variazioni di  $\vec{\omega}(\tau)$  e  $\vec{K}_G(\tau)$  relative ai rispettivi valori iniziali  $\vec{\omega}(0)$  e  $\vec{K}_G(0)$  sono molto piccole.

Con questo risultato si dimostra facilmente che per  $|\omega_3(0)|$  abbastanza grande l'asse di figura all'istante  $\tau$  non si discosta troppo da quello all'istante  $t = 0$ , che cioè gli assi

$$G \hat{e}_3(\tau) \quad \text{e} \quad G \hat{e}_3(0)$$

sono approssimativamente paralleli.

**4.2.2 Variazione dell'asse di figura.**

Per  $\omega_3(0)$  abbastanza grande si potrà certamente scrivere che

$$\left| \frac{1}{A} \vec{K}_G(0) \right| \gg |\vec{\omega}(0)| \quad \text{se } A_3 > A$$

ovvero che

$$\left| \frac{1}{A} \vec{K}_G(0) \right| \ll |\vec{\omega}(0)| \quad \text{se all'opposto } A_3 < A .$$

Si supponga, per fissare le idee, che ricorra la prima delle due condizioni. Si avrà allora

$$\left| \frac{1}{A} \vec{K}_G(\tau) \right| \gg |\vec{\omega}(\tau)| \tag{4.9}$$

in quanto valgono la (4.7) e la diseuguaglianza:

$$\frac{|\vec{K}_G(\tau)/A - \vec{K}_G(0)/A|}{|\vec{K}_G(0)/A|} = \frac{|\vec{K}_G(\tau) - \vec{K}_G(0)|}{|\vec{K}_G(0)|} \leq \frac{\mu(\tau)}{|\vec{K}_G(0)|} \ll 1 .$$

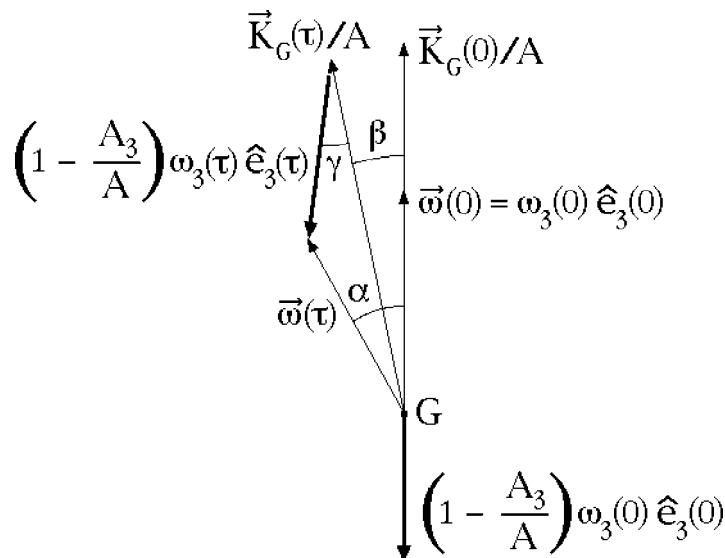
La direzione dell'asse di figura all'istante  $\tau$ , la stessa del versore  $\hat{e}_3$  al medesimo istante, si determina ricordando che per un corpo a struttura giroscopica vale sempre

$$\vec{\omega} = \frac{1}{A} \vec{K}_G + \left( 1 - \frac{A_3}{A} \right) \omega_3 \hat{e}_3$$

e quindi per  $t = \tau$ :

$$\vec{\omega}(\tau) = \frac{1}{A} \vec{K}_G(\tau) + \left( 1 - \frac{A_3}{A} \right) \omega_3(\tau) \hat{e}_3(\tau) .$$

La situazione è illustrata nella figura seguente,



dove i vettori:

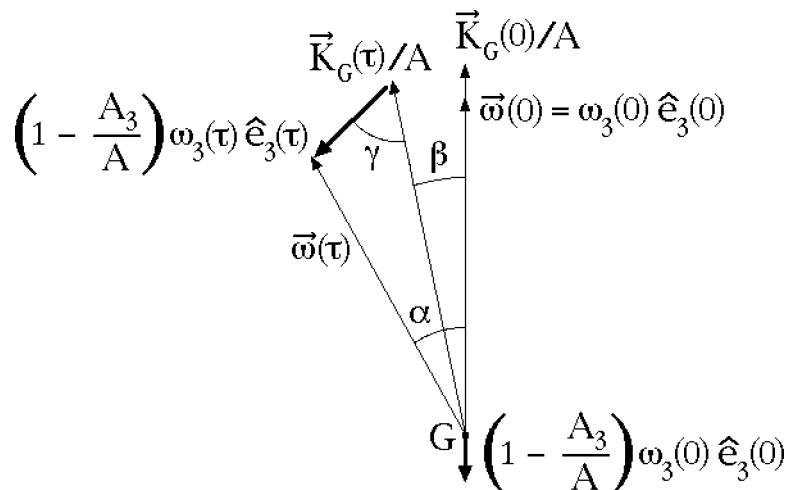
$$\left(1 - \frac{A_3}{A}\right)\omega_3(0)\hat{e}_3(0) \quad \text{e} \quad \left(1 - \frac{A_3}{A}\right)\omega_3(\tau)\hat{e}_3(\tau)$$

individuano gli assi di figura  $G\hat{e}_3(0)$  e  $G\hat{e}_3(\tau)$  rispettivamente. In forza delle piccole variazioni di  $\vec{\omega}(\tau)$  e  $\vec{K}_G(\tau)/A$  relativamente ai rispettivi valori iniziali, l'angolo  $\alpha$  fra  $\vec{\omega}(\tau)$  e  $\vec{\omega}(0)$  e l'angolo  $\beta$  che  $\vec{K}_G(\tau)/A$  forma con  $\vec{K}_G(0)/A$  sono entrambi di piccola ampiezza. Ne segue che anche l'angolo compreso fra  $\vec{K}_G(\tau)/A$  e  $\vec{\omega}(\tau)$  è piccolo. Grazie alla condizione (4.9) si deduce allora che l'angolo  $\gamma$  compreso fra  $\vec{K}_G(\tau)/A$  e  $(1 - A_3/A)\omega_3(\tau)\hat{e}_3(\tau)$  è a sua volta prossimo a zero, e che di conseguenza tale risulta pure l'angolo compreso fra gli assi di figura individuati da  $(1 - A_3/A)\omega_3(\tau)\hat{e}_3(\tau)$  e da  $(1 - A_3/A)\omega_3(0)\hat{e}_3(0)$  rispettivamente. *La variazione subita dall'asse di figura per effetto delle sollecitazioni esterne applicate è piccola nelle ipotesi anzidette.* Tale proprietà è detta **tenacia** dell'asse giroscopico.

Un risultato analogo si stabilisce nel caso che sia  $A_3 < A$ , a patto di assumere  $\omega_3(0)$  abbastanza grande da soddisfare la condizione

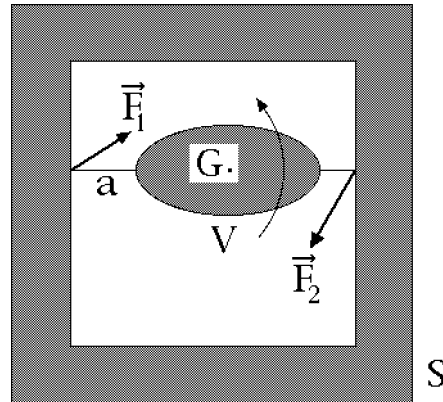
$$\left|\frac{1}{A}\vec{K}_G(0)\right| \ll |\vec{\omega}(0)| .$$

Si osservi l'importanza di assumere  $\omega_3(0)$  sufficientemente grande in modo che i vettori  $\vec{\omega}(0)$  e  $\vec{K}_G(0)$  siano molto diversi in modulo. Qualora così non fosse, infatti, dalla piccola ampiezza degli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  *non sarebbe possibile dedurre la piccola ampiezza dell'angolo  $\gamma$*  e la conseguente prossimità degli assi di figura all'istante  $\tau$  e all'istante 0. La figura sottoriportata illustra questa circostanza.



### 4.3 Uso dei giroscopi per la stabilizzazione del moto dei sistemi

Si consideri un sistema rigido  $S$  al quale sia stato connesso un giroscopio  $V$ , di massa  $m$ , baricentro  $G$  e momenti centrali  $A \neq A_3$ , in rapida rotazione attorno al proprio asse di figura  $a$ , che si assume fisso rispetto ad  $S$ . Si vuole determinare l'effetto prodotto dal giroscopio sul moto del sistema rigido.



L'interazione del giroscopio con il sistema  $S$  darà luogo ad opportune sollecitazioni  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$  applicate all'asse di figura del giroscopio, cui si aggiungeranno eventuali sollecitazioni agenti su  $V$  ma esterne al sistema  $S \cup V$ . Si indicherà con  $\vec{R}$  il risultante di tutte queste sollecitazioni, mentre  $\vec{M}_G$  sarà il momento risultante delle stesse rispetto al baricentro  $G$ . Il risultante  $\vec{R}$  non ha altro effetto se non quello di determinare una accelerazione del baricentro del giroscopio secondo l'equazione cardinale della quantità di moto:

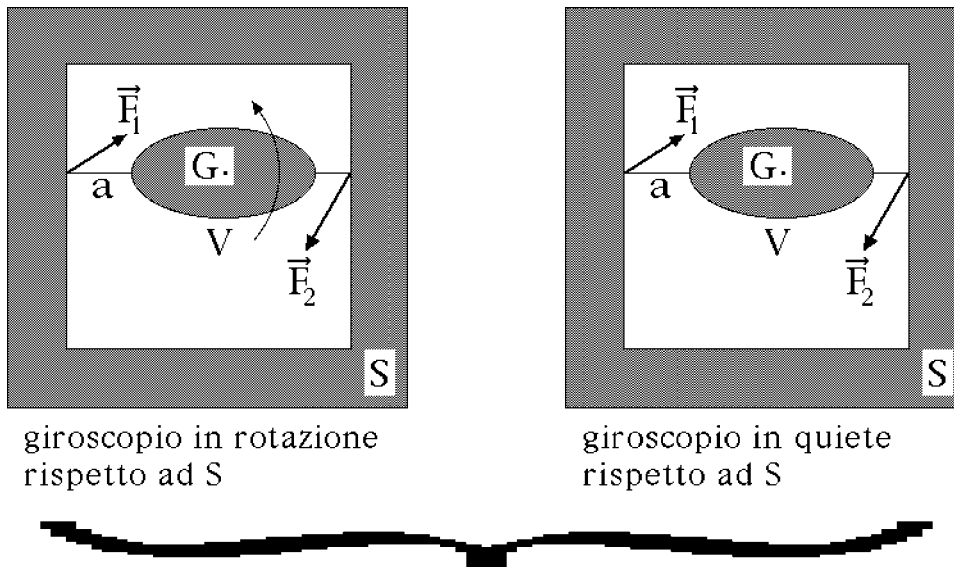
$$m\ddot{G} = \vec{R}$$

e quindi *il giroscopio  $V$  non influenza il moto traslatorio del sistema complessivo  $S \cup V$  se non in virtù della propria inerzia  $m$  e delle sollecitazioni esterne ad  $S \cup V$  applicate a  $V$ , indipendentemente dal proprio moto di rotazione attorno all'asse di figura*. Poiché infatti le sollecitazioni dovute all'interazione fra  $V$  ed  $S$  sono interne al sistema  $S \cup V$ , se si indica con  $M$  la massa di  $S$ , con  $B$  il baricentro di  $S \cup V$  e con  $\vec{R}_{\text{est}}$  il risultante delle forze esterne applicate a  $S \cup V$ , l'accelerazione di  $B$  rispetto ad una terna inerziale è governata dall'equazione cardinale della quantità di moto:

$$(M + m)\ddot{B} = \vec{R}_{\text{est}},$$

in cui compaiono esclusivamente la massa totale  $M + m$  del sistema  $S \cup V$  e l'eventuale contributo a  $\vec{R}_{\text{est}}$  delle forze esterne ad  $S \cup V$  agenti su  $V$ . Un giroscopio in quiete relativa rispetto ad  $S$  produrrebbe su  $S \cup V$  esattamente lo stesso effetto, per quanto concerne

l'accelerazione del baricentro complessivo  $B$  del sistema ed il suo conseguente moto di traslazione rispetto ad una terna di riferimento inerziale.



giroscopio in rotazione rispetto ad S

giroscopio in quiete rispetto ad S

stesso moto di traslazione del baricentro complessivo B rispetto ad una terna inerziale

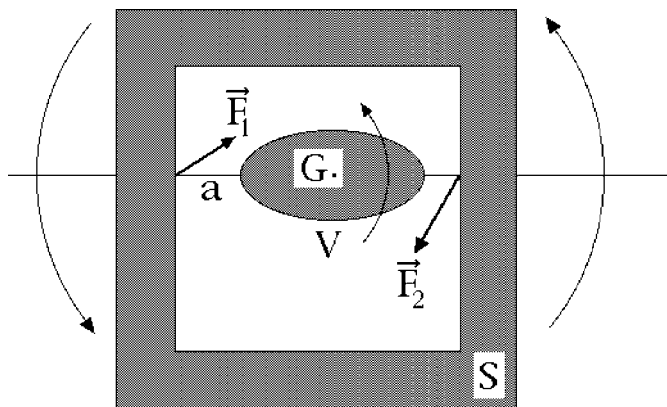
Se viceversa il giroscopio  $V$  viene posto in rapida rotazione attorno al proprio asse di figura in modo che all'istante  $t = 0$  valga

$$\left| \frac{\vec{K}_G(0)}{A} \right| \gg |\vec{\omega}(0)| \quad \text{oppure} \quad \left| \frac{\vec{K}_G(0)}{A} \right| \ll |\vec{\omega}(0)|$$

e durante un certo intervallo di tempo  $[0, \tau]$  il momento delle forze applicate a  $V$  soddisfa la condizione

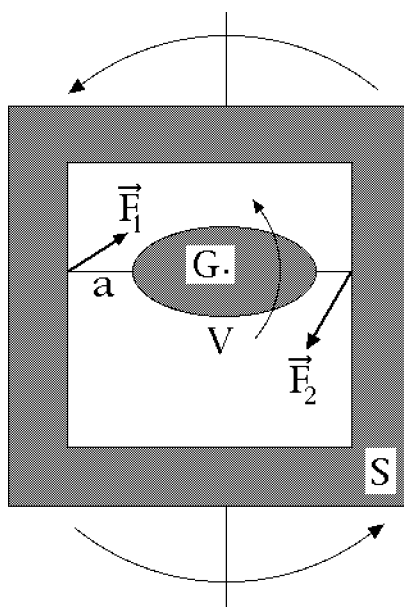
$$\tau \max_{t \in [0, \tau]} |\vec{M}_G(t)| \leq |\vec{K}_G(0)| ,$$

allora l'asse di figura  $a$  non può variare in modo significativo e tenderà quindi a mantenere sostanzialmente inalterata la propria direzione durante lo stesso intervallo  $[0, \tau]$ . *La presenza del giroscopio tende a contrastare i moti di  $S \cup V$  che comportino variazioni apprezzabili della direzione dell'asse di figura*, mentre i moti attorno a tale asse non vengono inibiti in modo particolare.



Moto di SUV che lascia inalterato l'asse di figura del giroscopio V

SI



Moto di SUV che tende a modificare l'asse di figura del giroscopio V

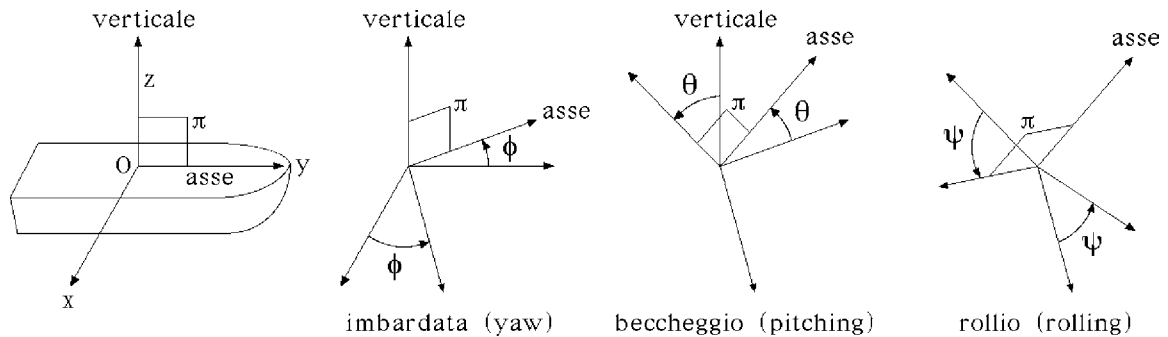
NO

L'effetto può essere utilizzato per stabilizzare o regolarizzare il moto di sistemi meccanici particolari.

### 4.3.1 Imbarcazioni

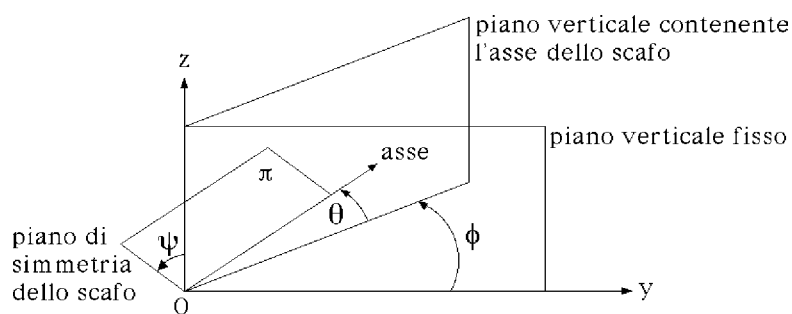
L'orientamento nello spazio di una imbarcazione, rispetto ad un riferimento che vede il piano coordinato  $Oxy$  coincidere con il piano dell'orizzonte e l'asse  $Oz$  con la direzione verticale, viene completamente specificato mediante l'assegnazione di tre coordinate angolari,  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$ . Il parametro  $\phi$ , detto angolo di **imbardata** (o **yaw**), è l'angolo che l'asse dello scafo forma con l'asse coordinato  $Oy$  per effetto di una rotazione attorno all'asse verticale  $Oz$ ; l'angolo di **beccheggio** (o **pitching**)  $\theta$  descrive una ulteriore rotazione attorno al nuovo asse  $Ox$  individuato dall'imbardata (vedi figura). Infine, l'angolo di **rollio** (**rolling**)

$\psi$  specifica una eventuale rotazione addizionale attorno alla nuova direzione dell'asse dello scafo determinata da imbardata e beccheggio.



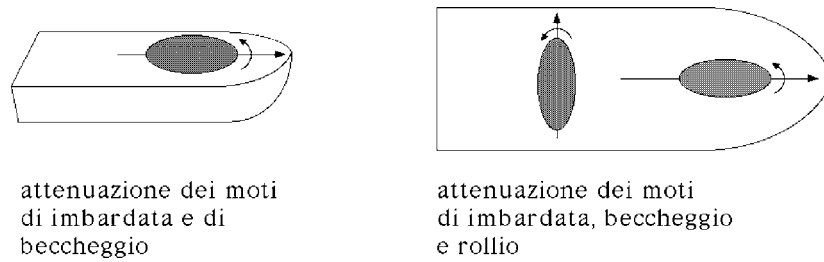
I parametri  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  sono quindi analoghi agli angoli di Eulero, salvo l'ultimo, che rappresenta una rotazione attorno ad un asse delle ordinate anziché ad un asse delle quote.

$\psi$  può anche interpretarsi come l'angolo diedro compreso fra il piano di simmetria  $\pi$  dello scafo (individuato in figura da un quadratino) ed il piano determinato dall'asse verticale  $Oz$  e dall'asse di simmetria dello scafo. L'angolo  $\theta$  è quello formato fra l'asse dello scafo ed il piano orizzontale  $Oxy$ , mentre  $\phi$  è compreso infine fra  $Oyz$  ed il piano verticale su cui giace l'asse dello scafo.



I moti di imbardata e di beccheggio possono essere controllati e limitati disponendo un giroscopio con l'asse di figura orientato secondo l'asse di simmetria dell'imbarcazione, una soluzione che tuttavia non consente alcun controllo sul rollio. L'attenuazione del rollio può ottenersi disponendo entro lo scafo un secondo giroscopio il cui asse sia orientato, ad esempio, ortogonalmente a quello del primo. La disposizione di giroscopi utile a contrastare

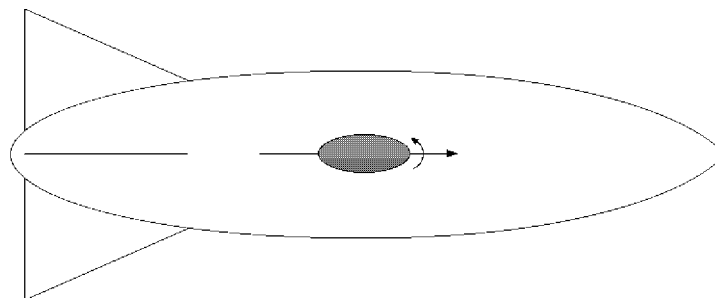
gli eccessivi movimenti di imbardata, beccheggio e rollio è illustrata nella figura seguente.



Le stesse tecniche possono essere impiegate nel controllo di assetto delle piattaforme offshore per le trivellazioni sottomarine.

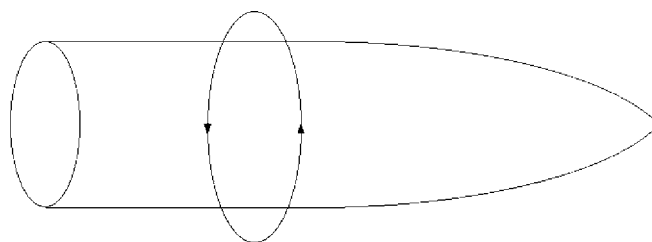
### 4.3.2 Siluri e razzi

Questo tipo di dispositivi è caratterizzato dalla presenza di un asse di simmetria cilindrica che di regola si ha interesse a mantenere orientato secondo una direzione il più possibile costante (la direzione di moto, per esempio). Poiché le eventuali rotazioni attorno all'asse di simmetria sono di massima tollerabili, la stabilizzazione del moto può essere ottenuta semplicemente munendo il sistema di un giroscopio il cui asse di figura coincida con quello di simmetria.



### 4.3.3 Proiettili

La stabilizzazione del moto dei proiettili può essere assicurata imprimendo al proiettile un moto di rotazione attorno al proprio asse di simmetria cilindrica, nel qual caso l'intero proiettile si comporta esso stesso come un giroscopio.

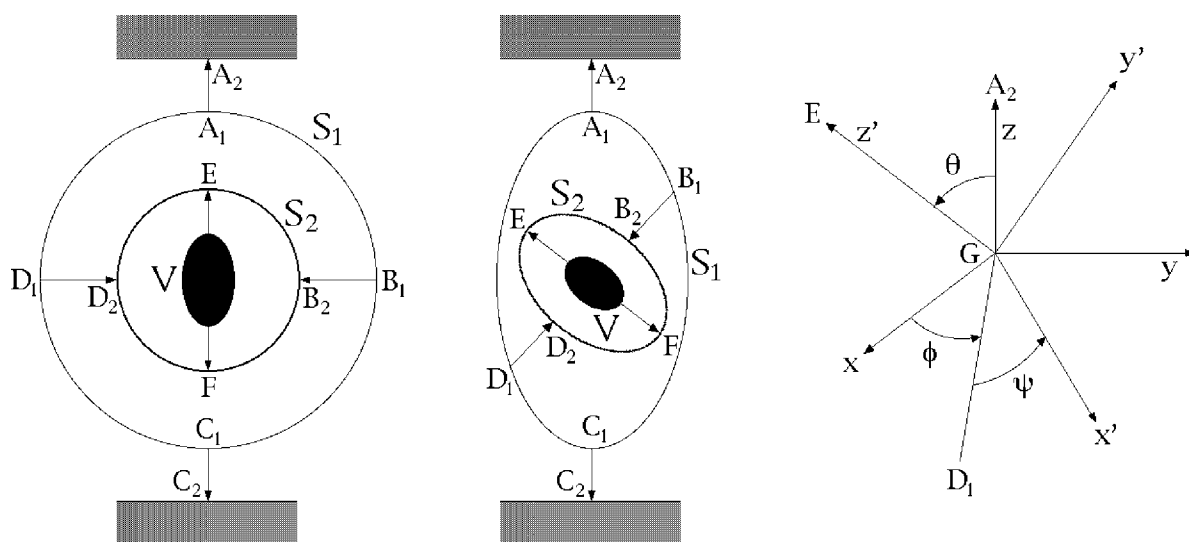


### 4.4 Dispositivi di orientamento inerziale

Il fenomeno dell'orientamento costante dell'asse di figura in un giroscopio in rapida rotazione può essere sfruttato per la realizzazione di dispositivi di orientamento, che si caratterizzano per due proprietà distintive:

- (i) il giroscopio  $V$  è montato su guide rotanti i cui assi di rotazione sono soggetti ad attriti minimi, in modo che il momento  $\vec{M}_G$ , rispetto al baricentro  $G$ , delle sollecitazioni esterne applicate a  $V$  risulta trascurabile (si ricorda inoltre che in una qualsiasi terna baricentrale del giroscopio il momento in  $G$  delle sollecitazioni di trascinamento è nullo). L'asse di figura tende quindi a mantenere una orientazione sostanzialmente costante rispetto ad un qualunque riferimento inerziale;
- (ii) la mutua disposizione delle guide rotanti è tale da consentire al giroscopio di assumere qualsiasi configurazione rispetto ad una terna di riferimento scelta a piacere.

Una possibile configurazione di guide rotanti è illustrata nella figura seguente.



Una guida circolare rigida  $S_1$  è libera di ruotare attorno al suo diametro  $A_1C_1$ , in modo che il prolungamento  $A_2C_2$  di tale diametro è un asse fisso di rotazione rispetto ad un riferimento assegnato  $Gxyz$  (il riferimento di quiete dei sostegni rappresentati in figura dai rettangoli in grigio); lungo il suo diametro  $B_1D_1$ , ortogonale a  $A_1C_1$ , la guida  $S_1$  si prolunga rigidamente in due aste rettilinee  $B_1B_2$  e  $D_1D_2$  alle cui estremità è collocata una seconda guida circolare rigida  $S_2$ , libera di ruotare attorno al proprio diametro  $B_2D_2$ ; l'asse di figura del giroscopio  $V$  coincide infine con il diametro  $EF$  di  $S_2$  ortogonale a  $B_2D_2$ . Il giroscopio può ruotare a piacere attorno ad  $EF$  rispetto alla guida  $S_2$ . È immediato verificare che il giroscopio è in grado di assumere qualsiasi configurazione rispetto al riferimento di quiete

dei sostegni, dal momento che, come la figura mette in evidenza, la configurazione della terna centrale d'inerzia di  $V$  rispetto a  $Gxyz$  è individuata dagli usuali angoli euleriani, cioè a dire:

- dall'angolo di precessione  $\phi$ , che descrive la rotazione della guida  $S_1$  rispetto al piano coordinato  $Gxz$  del riferimento  $Gxyz$ ;
- dall'angolo di nutazione  $\theta$ , che in quanto compreso fra i diametri  $EF$  e  $A_1C_1$  esprime l'inclinazione del piano di  $S_2$  rispetto a quello di  $S_1$ ;
- dall'angolo di spin  $\psi$ , rappresentativo della rotazione di  $V$  attorno al proprio asse di figura  $EF$ .

Reciprocamente, anche il riferimento di quiete dei sostegni  $Gxyz$  può assumere qualsiasi configurazione rispetto al giroscopio, sicché, mentre questo mantiene sostanzialmente costante l'orientamento del proprio asse di figura, la terna  $Gxyz$  **si muove liberamente attorno a tale asse invariabile**, la cui orientazione può quindi essere utilizzata per monitorare i moti di rotazione di  $Gxyz$  e del sistema meccanico ad esso solidale relativamente ad un qualsiasi osservatore inerziale.

Su questo principio si basa il funzionamento del cosiddetto **virobandanometro**, più noto come **orizzonte artificiale**, uno dei principali strumenti per la navigazione aerea. In tal caso la terna di riferimento  $Gxyz$  è solidale alla fusoliera e l'asse di figura del giroscopio consente di determinare con buona approssimazione l'inclinazione del velivolo rispetto alla verticale ed al piano orizzontale (angoli di beccheggio e di rollio)<sup>(1)</sup>.

## 4.5 Tendenza al parallelismo (cenni)

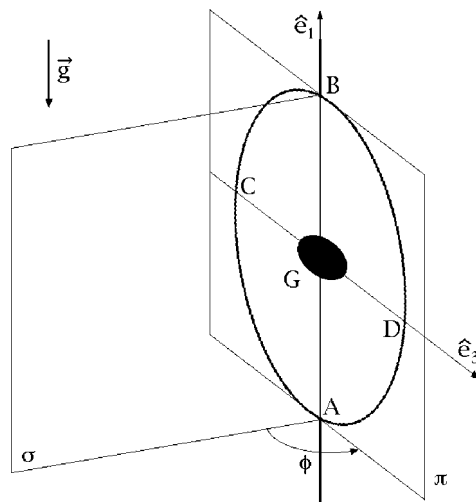
Si può verificare che per un giroscopio posto in rapida rotazione attorno al proprio asse di figura e sottoposto ad una sollecitazione esterna di momento  $\vec{M}_G$ , la variazione dell'asse giroscopico — intesa come variazione del versore associato a tale asse — risulta tendenzialmente parallela ad  $\vec{M}_G$ . Questa proprietà è nota come **tendenza al parallelismo** del giroscopio e non deve essere confusa con la **tenacia**, esaminata nelle pagine precedenti, che consiste semplicemente nella tendenza del giroscopio a mantenere invariata l'orientazione del proprio asse di figura. Così ad esempio una trottola pesante appoggiata ad un piano orizzontale in un punto fisso  $O$ , inclinata e posta in rapida rotazione attorno al proprio asse di figura — che ne contiene il baricentro — tenderà a muovere detto asse attorno alla verticale passante per  $O$ , in modo che la variazione dell'asse sia diretta secondo il momento in  $O$  della forza peso. Ciò in apparente contrasto con quanto l'intuizione fisica sembrerebbe suggerire, che cioè l'asse debba tendere a coricarsi sul piano orizzontale attraversando un piano verticale, sotto l'azione della forza peso.

---

<sup>(1)</sup> L'uso della bussola giroscopica sui velivoli è ormai molto limitato. Tutti gli aerei più moderni, già a partire dai primi anni ottanta, sono muniti di giroscopi ottici, a laser o a fibre ottiche, che non prevedendo parti in movimento sono di più facile manutenzione e meno costosi dei loro analoghi meccanici, oltre a garantire prestazioni equivalenti quanto a precisione ed affidabilità.

## 4.6 Bussola giroscopica

Una applicazione notevole dei giroscopi è costituita dalla cosiddetta bussola giroscopica, un dispositivo che collocato in un qualsiasi punto della superficie terrestre — o comunque dello spazio solidale alla Terra — consente di individuare la posizione del Nord geografico. In questo senso la bussola giroscopica risulta più accurata di quella magnetica, orientandosi secondo il polo Nord geografico e non secondo quello magnetico, circostanza questa di notevole rilievo in quanto — come ben noto — i poli magnetici e geografici della Terra **non** coincidono. La bussola giroscopica consiste in un giroscopio di baricentro  $G$ , asse giroscopico  $G\hat{e}_3$  e momenti centrali d'inerzia  $A, A_3$ , di cui  $A_3 \neq A$  relativo a  $G\hat{e}_3$ , vincolato in modo che l'asse giroscopico possa ruotare soltanto in un piano orizzontale fisso, con il baricentro  $G$  fisso a propria volta. Una possibile realizzazione pratica di vincoli cosiffatti è illustrata nella figura seguente:



in cui il versore  $\hat{e}_1$  individua la verticale ascendente ed i vincoli si intendono ideali. Un supporto circolare rigido giace nel piano verticale  $\pi$  ed è vincolato a ruotare attorno al proprio diametro verticale  $AB$ , mentre sul diametro orizzontale  $CD$  si incardina il giroscopio, il cui baricentro  $G$  coincide con il centro geometrico del supporto circolare ed il cui asse giroscopico si identifica con la retta orizzontale  $CD$ . Si denota con  $\hat{e}_3$  il versore associato all'asse giroscopico e con  $\phi$  l'angolo che il piano mobile  $\pi$  contenente la circonferenza rigida forma con un piano verticale fissato  $\alpha$  passante per la retta  $AB$ . Se  $\omega_3$  è la componente lungo  $\hat{e}_3$  della velocità angolare istantanea  $\vec{\omega}$  del giroscopio, l'espressione di  $\vec{\omega}$  assume la forma generale:

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{e}_1 + \omega_3\hat{e}_3 \quad (4.10)$$

e poiché a causa della struttura giroscopica il versore  $\hat{e}_1$  è autovettore dell'operatore d'inerzia  $L_G$ , con autovalore  $A$ , il momento angolare del giroscopio rispetto al baricentro fisso  $G$  sarà dato da:

$$\vec{K}_G = L_G(\dot{\phi}\hat{e}_1 + \omega_3\hat{e}_3) = \dot{\phi}L_G(\hat{e}_1) + \omega_3L_G(\hat{e}_3) = A\dot{\phi}\hat{e}_1 + A_3\omega_3\hat{e}_3$$

con  $\hat{e}_1$  indipendente dal tempo. Una derivazione rispetto al tempo del momento angolare porge la relazione:

$$\frac{d\vec{K}_G}{dt} = A\ddot{\phi}\hat{e}_1 + A\dot{\phi}\frac{d\hat{e}_1}{dt} + A_3\dot{\omega}_3\hat{e}_3 + A_3\omega_3\frac{d\hat{e}_3}{dt} = A\ddot{\phi}\hat{e}_1 + A_3\dot{\omega}_3\hat{e}_3 + A_3\omega_3\frac{d\hat{e}_3}{dt}$$

per cui l'equazione cardinale del momento angolare diviene:

$$\frac{d\vec{K}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{peso}} + \vec{M}_G^{\text{Cor}} + \vec{M}_G^{\phi, \text{est}} = \vec{M}_G^{\text{Cor}} + \vec{M}_G^{\phi, \text{est}}$$

e quindi:

$$A\ddot{\phi}\hat{e}_1 + A_3\dot{\omega}_3\hat{e}_3 + A_3\omega_3\frac{d\hat{e}_3}{dt} = \vec{M}_G^{\text{Cor}} + \vec{M}_G^{\phi, \text{est}} \quad (4.11)$$

dove si è considerato che  $\vec{M}_G^{\text{peso}} = 0$  in quanto  $G$  coincide con il polo fisso, mentre  $\vec{M}_G^{\text{Cor}}$  e  $\vec{M}_G^{\phi, \text{est}}$  indicano il momento risultante in  $G$  delle forze di Coriolis e delle reazioni vincolari esterne, rispettivamente. Nell'ipotesi che il sistema sia a vincoli ideali l'espressione per la velocità virtuale di un generico punto  $P$  del giroscopio si scrive:

$$\nu_P = (\alpha\hat{e}_1 + \beta\hat{e}_3) \wedge (P - G) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

e la condizione di idealità dei vincoli diventa conseguentemente:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_P \nu_P \cdot \Phi_P = \sum_P (\alpha\hat{e}_1 + \beta\hat{e}_3) \wedge (P - G) \cdot \Phi_P = \sum_P (\alpha\hat{e}_1 + \beta\hat{e}_3) \cdot (P - G) \wedge \Phi_P = \\ &= \alpha\hat{e}_1 \cdot \sum_P (P - G) \wedge \Phi_P + \beta\hat{e}_3 \cdot \sum_P (P - G) \wedge \Phi_P = \alpha\vec{M}_G^{\phi, \text{est}} \cdot \hat{e}_1 + \beta\vec{M}_G^{\phi, \text{est}} \cdot \hat{e}_3 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ossia:

$$\vec{M}_G^{\phi, \text{est}} \cdot \hat{e}_1 = 0 \quad \vec{M}_G^{\phi, \text{est}} \cdot \hat{e}_3 = 0$$

Le equazioni del moto del sistema potranno quindi ottenersi considerando le proiezioni dell'equazione cardinale del momento angolare (4.11) lungo la direzione verticale  $\hat{e}_1$  e lungo l'asse orizzontale giroscopico  $\hat{e}_3$ .

#### 4.6.1 Proiezione lungo $\hat{e}_1$

La proiezione dell'equazione cardinale (4.11) lungo il versore verticale  $\hat{e}_1$  conduce a:

$$A\ddot{\phi} = \vec{M}_G^{\text{Cor}} \cdot \hat{e}_1 + \vec{M}_G^{\phi, \text{est}} \cdot \hat{e}_1 = \vec{M}_G^{\text{Cor}} \cdot \hat{e}_1$$

e al fine di scrivere esplicitamente l'equazione si rende necessario il calcolo della componente verticale del momento in  $G$  delle forze di Coriolis agenti sul giroscopio. Si ha così dalla formula di Coriolis, indicato con  $\vec{\omega}_T$  il vettore velocità angolare — costante — della Terra:

$$\hat{e}_1 \cdot \vec{M}_G^{\text{Cor}} = \hat{e}_1 \cdot \sum_i (P_i - G) \wedge [-2m_i\vec{\omega}_T \wedge (\vec{\omega} \wedge (P_i - G))]$$

e facendo ricorso alla ben nota identità vettoriale  $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ :

$$\hat{e}_1 \cdot \vec{M}_G^{\text{Cor}} = -2\hat{e}_1 \cdot \sum_i m_i [\vec{\omega}_T \vec{\omega} \wedge (P_i - G) \cdot (P_i - G) - \vec{\omega} \wedge (P_i - G) \vec{\omega}_T \cdot (P_i - G)]$$

che per l'annullarsi del primo termine entro parentesi quadre si riduce a

$$\hat{e}_1 \cdot \vec{M}_G^{\text{Cor}} = 2\hat{e}_1 \cdot \sum_i \vec{\omega} \wedge (P_i - G) m_i (P_i - G) \cdot \vec{\omega}_T .$$

Dalla proprietà di circolarità del prodotto misto segue poi:

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 \cdot \vec{M}_G^{\text{Cor}} &= 2 \sum_i \hat{e}_1 \cdot \vec{\omega} \wedge (P_i - G) m_i (P_i - G) \cdot \vec{\omega}_T = \\ &= 2 \sum_i \hat{e}_1 \wedge \vec{\omega} \cdot (P_i - G) m_i (P_i - G) \cdot \vec{\omega}_T \end{aligned}$$

che, sostituita l'espressione (4.10) della velocità angolare  $\vec{\omega}$ , porge la relazione equivalente:

$$\hat{e}_1 \cdot \vec{M}_G^{\text{Cor}} = -2 \sum_i \omega_3 (-\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3) \cdot (P_i - G) m_i (P_i - G) \cdot \vec{\omega}_T .$$

A questo punto conviene introdurre una terna di riferimento ausiliaria, mobile rispetto all'osservatore terrestre ma non solidale al giroscopio, i cui versori  $\hat{e}_1$  ed  $\hat{e}_3$  coincidano con quelli verticale ed orizzontale già introdotti, ed il versore residuo  $\hat{e}_2$  sia orientato in modo tale da costituire con  $\hat{e}_1$  ed  $\hat{e}_3$  un triedro ortonormale destrorso. Si ha pertanto:

$$-\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3 = \hat{e}_2 .$$

Posto infine per un arbitrario punto  $P_i$  del giroscopio

$$P_i - G = x_i \hat{e}_1 + y_i \hat{e}_2 + z_i \hat{e}_3 ,$$

e per il vettore velocità angolare della Terra:

$$\vec{\omega}_T = \omega_{T1} \hat{e}_1 + \omega_{T2} \hat{e}_2 + \omega_{T3} \hat{e}_3 ,$$

si conclude che:

$$\hat{e}_1 \cdot \vec{M}_G^{\text{Cor}} = -2 \sum_i \omega_3 y_i m_i (x_i \omega_{T1} + y_i \omega_{T2} + z_i \omega_{T3}) .$$

A quest'ultima espressione si può dare una forma più appropriata ricordando la definizione dei prodotti d'inerzia:

$$L_{21} = - \sum_i m_i y_i x_i = 0 \quad L_{23} = - \sum_i m_i y_i z_i = 0$$

e dei momenti centrali d'inerzia:

$$L_{11} = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) = A \quad L_{22} = \sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2) = A \quad L_{33} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) = A_3$$

da cui segue che

$$\sum_i m_i y_i^2 = \frac{1}{2}(L_{11} + L_{33} - L_{22}) = \frac{1}{2}(A + A_3 - A) = \frac{A_3}{2}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 \cdot \vec{M}_G^{\text{Cor}} &= -2\omega_3 \left( -L_{21}\omega_{T1} + \frac{A_3}{2}\omega_{T2} - L_{23}\omega_{T3} \right) = \\ &= -2\omega_3 \frac{A_3}{2}\omega_{T2} = -A_3\omega_3\omega_{T2} = -A_3\omega_3\vec{\omega}_T \cdot (-\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3) = A_3\omega_3\vec{\omega}_T \wedge \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 \end{aligned}$$

In definitiva:

$$A\ddot{\phi} = A_3\omega_3\vec{\omega}_T \wedge \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 .$$

#### 4.6.2 Proiezione lungo $\hat{e}_3$

Poiché:

$$\frac{d\vec{K}_G}{dt} \cdot \hat{e}_3 = A\ddot{\phi}\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 + A_3\dot{\omega}_3\hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3 + A_3\omega_3 \frac{d\hat{e}_3}{dt} \cdot \hat{e}_3 = A_3\dot{\omega}_3$$

la proiezione lungo  $\hat{e}_3$  dell'equazione cardinale del momento angolare si scrive:

$$A_3\dot{\omega}_3 = \vec{M}_G^{\text{Cor}} \cdot \hat{e}_3 + \vec{M}_G^{\phi, \text{est}} \cdot \hat{e}_3 = \vec{M}_G^{\text{Cor}} \cdot \hat{e}_3$$

dove la componente del momento in  $G$  delle forze di Coriolis si calcola in modo analogo a quanto visto nel caso precedente:

$$\begin{aligned} \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_G^{\text{Cor}} &= 2 \sum_i \hat{e}_3 \wedge \vec{\omega} \cdot (P_i - G) m_i (P_i - G) \cdot \vec{\omega}_T = \\ &= 2 \sum_i \dot{\phi}\hat{e}_3 \wedge \hat{e}_1 \cdot (P_i - G) m_i (P_i - G) \cdot \vec{\omega}_T = \\ &= 2\dot{\phi} \sum_i y_i m_i (x_i\omega_{T1} + y_i\omega_{T2} + z_i\omega_{T3}) = \\ &= 2\dot{\phi}\omega_{T2} \sum_i m_i y_i^2 = 2\dot{\phi}\omega_{T2} \frac{A_3}{2} = A_3\dot{\phi}\omega_{T2} = \\ &= A_3\dot{\phi}\vec{\omega}_T \cdot \hat{e}_3 \wedge \hat{e}_1 = -A_3\dot{\phi}\vec{\omega}_T \cdot \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3 = -A_3\dot{\phi}\vec{\omega}_T \wedge \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 \end{aligned}$$

e quindi:

$$A_3\dot{\omega}_3 = -A_3\dot{\phi}\vec{\omega}_T \wedge \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 .$$

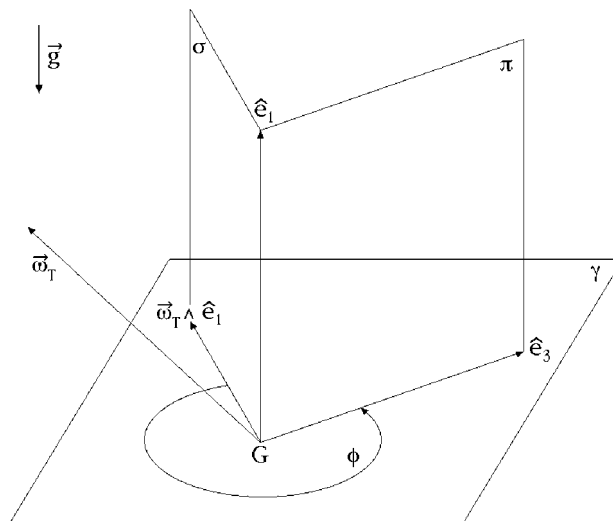
### 4.6.3 Equazioni del moto

In conclusione, le equazioni che governano il moto del sistema sono:

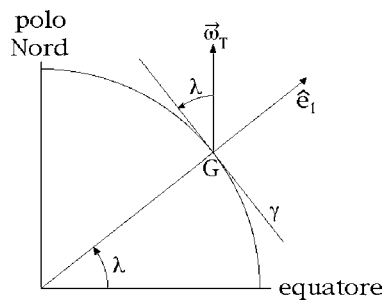
$$\begin{cases} \ddot{\phi} = \frac{A_3}{A} \omega_3 \vec{\omega}_T \wedge \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 \\ \dot{\omega}_3 = -\dot{\phi} \vec{\omega}_T \wedge \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 \end{cases}$$

ed esse valgono indipendentemente dal fatto che i piani  $\pi$  e  $\sigma$  siano verticali e che di conseguenza il versore  $\hat{e}_1$  sia diretto secondo la verticale locale — durante il calcolo precedente non si è mai fatto uso di questa ipotesi.

In pratica, per semplificare ulteriormente le equazioni del moto, conviene scegliere verticale ed ascendente il versore  $\hat{e}_1$  ed identificare il piano fisso  $\sigma$  con quello individuato da  $\hat{e}_1$  e dal vettore orizzontale  $\vec{\omega}_T \wedge \hat{e}_1$ , diretto verso oriente. In tal modo l'asse giroscopico potrà spazzare un piano orizzontale  $\gamma$ , sul quale verrà anche misurato l'angolo  $\phi$ , come illustrato in figura:



L'angolo compreso fra i vettori  $\hat{e}_1$  ed  $\vec{\omega}_T$  è complementare alla latitudine locale  $\lambda$  del punto in cui la bussola è collocata — co-latitudine:



in modo che risulta:

$$\vec{\omega}_T \wedge \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 = |\vec{\omega}_T| \sin(\pi/2 - \lambda) \cos \phi = |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \cos \phi .$$

Si ha perciò:

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = \frac{A_3}{A} |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \omega_3 \cos \phi \\ \dot{\omega}_3 = -|\vec{\omega}_T| \cos \lambda \dot{\phi} \cos \phi \end{cases} \quad (4.12)$$

che è un sistema di equazioni differenziali nelle funzioni incognite del tempo  $\omega_3$  e  $\phi$ .

#### 4.6.4 Soluzioni statiche

Se la bussola giroscopica è collocata ai poli, e dunque  $\lambda = \pm\pi/2$ , si ha  $\cos \lambda = 0$  e di conseguenza  $\dot{\phi}$  ed  $\omega_3$  si mantengono costanti nel tempo; il giroscopio ruota uniformemente attorno al proprio asse giroscopico, che contemporaneamente ruota di moto uniforme attorno all'asse verticale  $G\hat{e}_1$ , nel piano orizzontale  $\gamma$ . In queste condizioni, evidentemente, la "bussola" non è in grado di assolvere al proprio scopo.

Il caso interessante ricorre quando la bussola è collocata in un punto della superficie terrestre non coincidente con un polo geografico, allorché  $\cos \lambda \neq 0$ . Si è interessati, in particolare, ai moti per i quali l'angolo di rotazione  $\phi$  risulta costante in  $t$  e l'asse giroscopico mantiene conseguentemente una direzione costante rispetto all'osservatore terrestre. Posto  $\phi = \text{costante}$  nelle equazioni del moto (4.12), si ricava che:

$$\begin{cases} 0 = \frac{A_3}{A} |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \omega_3 \cos \phi \\ \dot{\omega}_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = \omega_3 \cos \phi \\ \dot{\omega}_3 = 0 \end{cases}$$

in modo che anche  $\omega_3$  risulta a propria volta costante e:

$$\omega_3 = 0 \quad \phi \text{ arbitrario} \quad (4.13.a)$$

oppure:

$$\omega_3 \neq 0 \quad \phi = \pm\pi/2. \quad (4.13.b)$$

Il primo caso corrisponde al giroscopio in quiete in una configurazione arbitraria — tutte le configurazioni del sistema sono di equilibrio — e può dunque essere ignorato come irrilevante. Nel secondo caso invece si verifica una rotazione stazionaria — o permanente — del giroscopio attorno al suo asse giroscopico, ma quest'ultimo **deve necessariamente disporsi secondo il meridiano locale**, ovvero la direzione Nord-Sud, attorno alla quale la rotazione del sistema rigido può avvenire indifferentemente in senso orario o antiorario. Tutte e sole le rotazioni permanenti della bussola giroscopica individuano quindi la direzione del meridiano locale e consentono di determinare la posizione del Nord geografico. A stretto rigore, in regime di rotazione permanente l'asse giroscopico si dispone secondo la direzione Nord-Sud e non consente di stabilire univocamente la posizione del Nord geografico; questa piena specificazione è tuttavia ottenibile esaminando il senso di rotazione del giroscopio. Si può infatti dimostrare che se asse giroscopico e senso di rotazione del giroscopio vengono reciprocamente orientati secondo l'usuale convenzione sinistrorsa — regola della mano destra — allora l'asse giroscopio **orientato** punta sempre, di fatto, verso il Nord geografico.

A questo risultato si perviene analizzando la stabilità delle soluzioni costanti di (4.12) mediante il criterio di stabilità di Liapunov ed applicando la discussione di Weierstrass ad una conveniente riscrittura delle equazioni del moto (4.12); in ambo i casi l'analisi è resa possibile dall'esistenza di due integrali primi delle stesse equazioni (4.12).

#### 4.6.5 Stabilità delle soluzioni statiche

Un integrale primo è quello dell'energia (cinetica), che si deduce moltiplicando la prima e la seconda equazione del moto rispettivamente per  $A\dot{\phi}$  e  $A_3\omega_3$  e sommando membro a membro le equazioni ottenute:

$$A\dot{\phi}\ddot{\phi} + A_3\omega_3\dot{\omega}_3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{A}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{A_3}{2}\omega_3^2 \right) = 0$$

per cui:

$$H(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = \frac{A}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{A_3}{2}\omega_3^2$$

è una costante del moto. Un ulteriore integrale primo del sistema si ricava riscrivendo la seconda equazione delle (4.12) nella forma:

$$\frac{d}{dt}(\omega_3 + |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \sin \phi) = 0$$

che implica l'esistenza dell'integrale primo:

$$\Gamma(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = \omega_3 + |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \sin \phi$$

il cui valore costante dipenderà dalle condizioni iniziali  $(\omega_3(0), \phi(0))$ :

$$\Gamma = \omega_3(0) + |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \sin \phi(0) . \quad (4.14)$$

Dall'integrale primo  $\Gamma$  si ricava  $\omega_3$  quale funzione di  $\phi$ :

$$\omega_3 = \Gamma - |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \sin \phi$$

e sostituendo l'espressione nella prima delle (4.12) si deduce l'equazione differenziale nella sola funzione  $\phi$ :

$$\ddot{\phi} = \frac{A_3}{A}(\Gamma - |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \sin \phi)|\vec{\omega}_T| \cos \lambda \cos \phi$$

che equivale a:

$$\ddot{\phi} = \frac{A_3}{A}|\vec{\omega}_T| \cos \lambda (\Gamma - |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \sin \phi) \cos \phi$$

e può anche esprimersi come:

$$\ddot{\phi} = \frac{A_3}{A}|\vec{\omega}_T| \cos \lambda \frac{d}{d\phi} \left( \Gamma \sin \phi - \frac{|\vec{\omega}_T| \cos \lambda}{2} \sin^2 \phi \right) . \quad (4.15)$$

Il sistema unidimensionale così ottenuto ha natura posizionale conservativa, con potenziale:

$$U(\phi) = \frac{A_3}{A} |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \left( \Gamma \sin \phi - \frac{|\vec{\omega}_T| \cos \lambda}{2} \sin^2 \phi \right) \quad (4.16)$$

e le sue soluzioni  $\phi(t)$  possono essere analizzate qualitativamente mediante i metodi di Weierstrass. Si può ora procedere alla discussione delle proprietà di stabilità delle singole soluzioni costanti (4.13.a) e (4.13.b). Si distinguono 5 casi in tutto.

(i) **La soluzione costante**  $(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = (\omega_3^0, \pi/2, 0)$ , con  $\omega_3^0 > 0$ , è stabile

È sufficiente porre:

$$\Gamma_0 = \Gamma(\omega_3^0, \pi/2, 0) \quad H_0 = H(\omega_3^0, \pi/2, 0)$$

e considerare la funzione di Liapunov:

$$V(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = (H - H_0)^2 + (\Gamma - \Gamma_0)^2 \quad (4.17)$$

che è di classe  $C^1$  in  $\mathbb{R}^3$  e semidefinita positiva in qualsiasi intorno di  $(\omega_3^0, \pi/2, 0)$  in  $\mathbb{R}^3$ . La derivata di  $V$  lungo le soluzioni di (4.12) è chiaramente semidefinita negativa in qualsiasi intorno di  $(\omega_3^0, \pi/2, 0)$ , avendosi in effetti:

$$\dot{V}(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = 2(H - H_0)\dot{H} + 2(\Gamma - \Gamma_0)\dot{\Gamma} = 2(H - H_0)0 + 2(\Gamma - \Gamma_0)0 = 0$$

per via del fatto che  $H$  e  $\Gamma$  sono integrali primi. Per poter applicare il criterio di stabilità di Liapunov è dunque sufficiente dimostrare che  $V$  risulta definita positiva in un conveniente intorno di  $(\omega_3^0, \pi/2, 0)$ , per esempio nella sfera chiusa  $B[\omega_3^0, \pi/2, 0; \beta]$  di centro  $(\omega_3^0, \pi/2, 0)$  e raggio  $\beta > 0$  opportuno. A questo scopo si deve dimostrare che per  $(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) \in B[\omega_3^0, \pi/2, 0; \beta]$  l'equazione

$$V(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = 0 \quad (4.18)$$

ammette l'unica soluzione  $(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = (\omega_3^0, \pi/2, 0)$ . La (4.18) equivale al sistema di equazioni:

$$H(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = H_0 \quad \Gamma(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = \Gamma_0$$

ossia:

$$\frac{A}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{A_3}{2} \omega_3^2 = \frac{A_3}{2} (\omega_3^0)^2 \quad \omega_3 + |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \sin \phi = \omega_3^0 + |\vec{\omega}_T| \cos \lambda$$

da cui si deduce:

$$\dot{\phi}^2 = \frac{A_3}{A} [(\omega_3^0)^2 - \omega_3^2] \quad (4.19.a)$$

$$\sin \phi = \frac{\omega_3^0 - \omega_3}{|\vec{\omega}_T| \cos \lambda} + 1. \quad (4.19.b)$$

La (4.19.b) impone che debba aversi:

$$\omega_3 \geq \omega_3^0$$

in modo che l'angolo  $\phi$  sia definito, mentre la (4.19.a) richiede che:

$$|\omega_3| \leq \omega_3^0$$

in quanto  $\dot{\phi}^2 \geq 0$ . Poiché per ipotesi  $\omega_3^0 > 0$ , se ne deduce che deve necessariamente risultare  $\omega_3 = \omega_3^0$  e dunque:

$$\dot{\phi}^2 = 0 \quad \sin \phi = 1$$

cosicché:

$$\omega_3 = \omega_3^0 \quad \phi = \pi/2 \quad \dot{\phi} = 0 ,$$

a patto di assumere  $\beta < 2\pi$  — ciò per assicurare che l'unica soluzione di  $\sin \phi = 1$  in  $B[\omega_3^0, \pi/2, 0; \beta]$  sia  $\phi = \pi/2$ . Dal criterio di stabilità di Liapunov segue quindi che la soluzione considerata è stabile.

(ii) **La soluzione costante**  $(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = (\omega_3^0, -\pi/2, 0)$ , con  $\omega_3^0 < 0$ , è stabile

La dimostrazione è analoga a quella esposta nel caso precedente, assumendo la stessa funzione di Liapunov (4.17) con le costanti:

$$\Gamma_0 = \Gamma(\omega_3^0, -\pi/2, 0) \quad H_0 = H(\omega_3^0, -\pi/2, 0) .$$

Per provare l'asserto basta mostrare che in un conveniente intorno sferico  $B[\omega_3^0, -\pi/2, 0; \beta]$  di  $(\omega_3^0, -\pi/2, 0)$  l'equazione  $V(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = 0$  ammette l'unica soluzione  $(\omega_3^0, -\pi/2, 0)$ . L'equazione si riduce in questo caso al sistema:

$$\frac{A}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{A_3}{2} \omega_3^2 = \frac{A_3}{2} (\omega_3^0)^2 \quad \omega_3 + |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \sin \phi = \omega_3^0 - |\vec{\omega}_T| \cos \lambda$$

che porge:

$$\dot{\phi}^2 = \frac{A_3}{A} [(\omega_3^0)^2 - \omega_3^2] \tag{4.20.a}$$

$$\sin \phi = \frac{\omega_3^0 - \omega_3}{|\vec{\omega}_T| \cos \lambda} - 1 . \tag{4.20.b}$$

Di qui seguono le disuguaglianze:

$$|\omega_3| \leq |\omega_3^0| \quad \omega_3 \leq \omega_3^0$$

che in forza dell'ipotesi  $\omega_3^0 < 0$  implicano:

$$-\omega_3 \leq -\omega_3^0 \quad \omega_3 \leq \omega_3^0$$

e quindi  $\omega_3 = \omega_3^0$ . Si avrà pertanto:

$$\dot{\phi}^2 = 0 \quad \sin \phi = -1$$

con l'unica soluzione:

$$\omega_3 = \omega_3^0 \quad \phi = -\pi/2 \quad \dot{\phi} = 0$$

a condizione di assumere, come nel caso precedente,  $\beta < 2\pi$ . Il criterio di stabilità di Liapunov conduce all'asserto.

**(iii) La soluzione costante  $(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = (\omega_3^0, \pi/2, 0)$ , con  $\omega_3^0 < 0$ , è instabile**

La prova dell'instabilità può essere ottenuta senza ricorrere ai criteri di Liapunov, dimostrando che in un qualsiasi intorno della soluzione costante  $(\omega_3^0, \pi/2, 0)$  è sempre possibile scegliere una condizione iniziale la cui corrispondente soluzione esce da una sfera di raggio prefissato e sempre centrata in  $(\omega_3^0, \pi/2, 0)$ , a patto di attendere un intervallo di tempo sufficientemente lungo. L'idea è quella di studiare l'andamento qualitativo della componente  $\phi(t)$  di opportune soluzioni perturbate di  $(\omega_3^0, \pi/2, 0)$ , componente governata dall'equazione unidimensionale (4.15) alla quale è consentito applicare i criteri di Weierstrass.

A questo scopo si consideri a  $t = 0$  una condizione iniziale del tipo:

$$(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = (\omega_3^0 - \delta, \pi/2, \delta)$$

con  $\delta > 0$  piccolo a piacere. È evidente che punti di questa forma sono contenuti in qualsiasi intorno sferico di  $(\omega_3^0, \pi/2, 0)$ . D'altra parte, lungo la soluzione  $(\omega_3(t), \phi(t), \dot{\phi}(t))$  corrispondente a questa condizione iniziale l'integrale primo  $\Gamma$  assume il valore costante:

$$\Gamma(\omega_3^0 - \delta, \pi/2, \delta) = \omega_3^0 - \delta + |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \sin(\pi/2) = \omega_3^0 + |\vec{\omega}_T| \cos \lambda - \delta$$

e siccome la derivata seconda del potenziale (4.16) nel suo punto critico  $\phi = \pi/2$  è sempre positiva:

$$\begin{aligned} U''(\pi/2) &= \frac{A_3}{A} |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \left[ -\Gamma \sin \phi - |\vec{\omega}_T| \cos \lambda (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \right] \Big|_{\phi=\pi/2} = \\ &= \frac{A_3}{A} |\vec{\omega}_T| \cos \lambda (-\Gamma + |\vec{\omega}_T| \cos \lambda) = \frac{A_3}{A} |\vec{\omega}_T| \cos \lambda (-\omega_3^0 + \delta) > 0, \end{aligned}$$

si conclude che  $\phi = \pi/2$  costituisce un massimo relativo proprio dell'energia potenziale  $-U(\phi)$ ; tale massimo è anche assoluto, dal momento che la funzione potenziale risulta derivabile sull'intero dominio di definizione  $\mathbb{R}$ . A ciò si aggiunga che l'integrale primo, corrispondente a  $H/A$ :

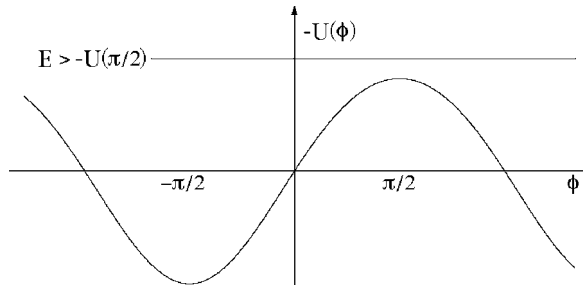
$$\frac{\dot{\phi}^2}{2} - U(\phi) \tag{4.21}$$

assume per  $(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = (\omega_3^0 - \delta, \pi/2, \delta)$  un valore strettamente maggiore del massimo assoluto di  $-U(\phi)$ :

$$E = \frac{\delta^2}{2} - U(\pi/2) > -U(\pi/2),$$

mentre  $\dot{\phi}(0) = \delta$ . Considerato che il potenziale  $U(\phi)$  è una funzione periodica del proprio argomento, dai criteri di Weierstrass segue immediatamente che la componente  $\phi(t)$  della soluzione  $(\omega_3(t), \phi(t), \dot{\phi}(t))$  del problema di Cauchy risulta definita e strettamente crescente  $\forall t \in \mathbb{R}$ , con immagine rappresentata dall'intera retta reale:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t) = -\infty \qquad \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = +\infty .$$



L'orbita della soluzione perturbata  $(\omega_3(t), \phi(t), \dot{\phi}(t))$  fuoriesce dunque da qualsiasi sfera  $B[\omega_3^0, \pi/2, 0; \beta]$  per ogni raggio  $\beta > 0$  fissato a piacere, a condizione che si lasci trascorrere un intervallo di tempo sufficientemente lungo. La soluzione costante  $(\omega_3^0, \pi/2, 0)$  è perciò instabile nel senso di Liapunov, come si voleva dimostrare.

**(iv) La soluzione costante  $(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = (\omega_3^0, -\pi/2, 0)$ , con  $\omega_3^0 > 0$ , è instabile**

La dimostrazione procede come nel caso precedentemente esaminato, scegliendo una condizione iniziale perturbata della forma:

$$(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = (\omega_3^0 + \delta, -\pi/2, \delta)$$

con  $\delta$  positivo e piccolo a piacere. Il valore dell'integrale  $\Gamma$  è dato dalla relazione:

$$\Gamma(\omega_3^0 + \delta, -\pi/2, \delta) = \omega_3^0 + \delta - |\vec{\omega}_T| \cos \lambda$$

mentre la derivata seconda del potenziale (4.16) nel suo punto critico  $\phi = -\pi/2$  risulta sempre positiva:

$$\begin{aligned} U''(-\pi/2) &= \frac{A_3}{A} |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \left[ -\Gamma \sin \phi - |\vec{\omega}_T| \cos \lambda (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \right] \Big|_{\phi=-\pi/2} = \\ &= \frac{A_3}{A} |\vec{\omega}_T| \cos \lambda (\Gamma + |\vec{\omega}_T| \cos \lambda) = \frac{A_3}{A} |\vec{\omega}_T| \cos \lambda (\omega_3^0 + \delta) > 0 , \end{aligned}$$

in modo che  $\phi = -\pi/2$  è un massimo relativo — e assoluto — proprio dell'energia potenziale  $-U(\phi)$ . L'integrale primo (4.21) associato all'equazione unidimensionale (4.15) assume infine il valore:

$$E = \frac{\delta^2}{2} - U(-\pi/2)$$

strettamente maggiore del valore del massimo  $-U(-\pi/2)$ , ed inoltre  $\dot{\phi}(0) = \delta > 0$ . Come nel caso precedente la componente  $\phi(t)$  della soluzione massimale del problema di Cauchy è strettamente crescente su tutta la retta dei  $t$  reali e  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = +\infty$ , cosicché la soluzione costante risulta instabile.

(v) **La soluzione costante**  $(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = (0, \phi_0, 0)$ , con  $\phi_0 \in \mathbb{R}$ , è stabile

Si esegue l'analisi di stabilità anche in questo caso, sebbene queste soluzioni costanti corrispondano ad una condizione di quiete della bussola giroscopica e non siano rilevanti nelle applicazioni pratiche del dispositivo. Basta porre:

$$\Gamma_0 = \Gamma(0, \phi_0, 0) \quad H_0 = H(0, \phi_0, 0)$$

e considerare la funzione di Liapunov:

$$V(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = (H - H_0)^2 + (\Gamma - \Gamma_0)^2 \quad (4.22)$$

che è di classe  $C^1$  in  $\mathbb{R}^3$  e semidefinita positiva in qualsiasi intorno di  $(0, \phi_0, 0)$  in  $\mathbb{R}^3$ . La derivata di  $V$  lungo le soluzioni di (4.12) è chiaramente semidefinita negativa in qualsiasi intorno di  $(0, \phi_0, 0)$ , avendosi:

$$\dot{V}(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = 2(H - H_0)\dot{H} + 2(\Gamma - \Gamma_0)\dot{\Gamma} = 2(H - H_0)0 + 2(\Gamma - \Gamma_0)0 = 0$$

in conseguenza del fatto che  $H$  e  $\Gamma$  sono integrali primi. Per poter applicare il criterio di stabilità di Liapunov è dunque sufficiente dimostrare che  $V$  risulta definita positiva in un conveniente intorno di  $(0, \phi_0, 0)$ , per esempio nella sfera chiusa  $B[0, \phi_0, 0; \beta]$  di centro  $(0, \phi_0, 0)$  e raggio  $\beta > 0$  opportuno. A questo scopo si deve dimostrare che per  $(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) \in B[0, \phi_0, 0; \beta]$  l'equazione

$$V(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = 0 \quad (4.23)$$

ammette l'unica soluzione  $(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = (0, \phi_0, 0)$ . La (4.23) equivale al sistema di equazioni:

$$H(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = H_0 \quad \Gamma(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = \Gamma_0$$

ovvero a:

$$\frac{A}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{A_3}{2}\omega_3^2 = 0 \quad \omega_3 + |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \sin \phi = |\vec{\omega}_T| \cos \lambda \sin \phi_0$$

da cui si deduce:

$$\dot{\phi} = 0 \quad \omega_3 = 0 \quad \sin \phi = \sin \phi_0 .$$

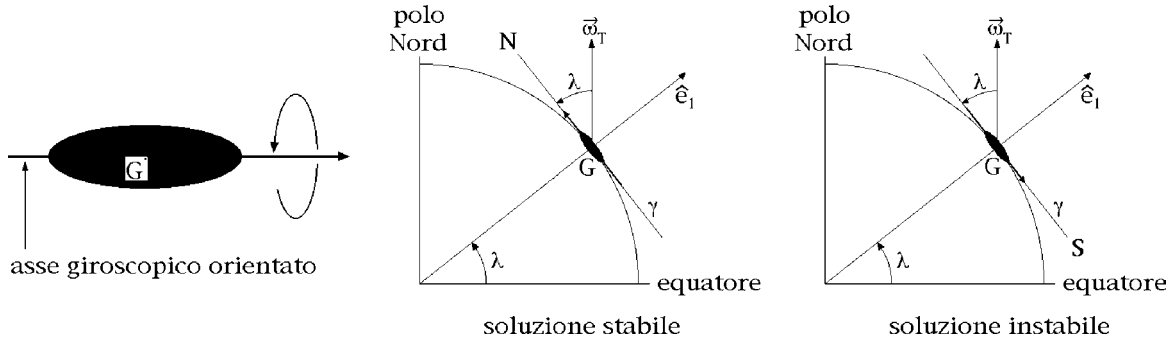
Assunto  $\beta$  abbastanza piccolo (in relazione alla scelta di  $\phi_0$ ), l'ultima equazione ammette l'unica soluzione:

$$\phi = \phi_0$$

cosicché  $V$  è definita positiva in  $B[0, \phi_0, 0; \beta]$ . Dal criterio di stabilità di Liapunov segue pertanto che la soluzione considerata è stabile.

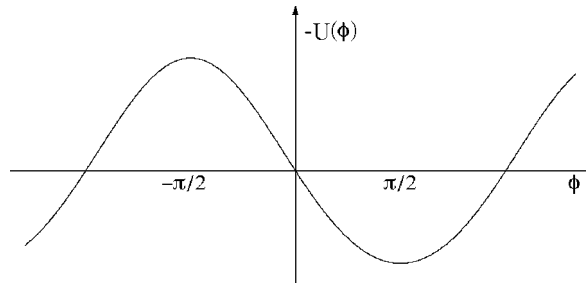
Le soluzioni costanti stabili  $(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = (\omega_3^0, \pi/2, 0)$ ,  $\omega_3^0 > 0$ , e  $(\omega_3, \phi, \dot{\phi}) = (\omega_3^0, -\pi/2, 0)$ ,  $\omega_3^0 < 0$ , sono le sole approssimativamente realizzabili nella pratica. Esse corrispondono a rotazioni permanenti per le quali l'asse giroscopico, orientato rispetto al proprio senso di rotazione secondo la convenzione sinistrorsa, risulta diretto verso il Nord geografico.

I moti di rotazione permanente in cui l'asse giroscopico è diretto in senso opposto, cioè verso il Sud geografico, corrispondono anch'essi a soluzioni costanti delle equazioni del moto, ma a causa della loro instabilità si rivelano di fatto inaccessibili al sistema.



#### 4.6.6 Studio qualitativo dei moti

Per una scelta arbitraria delle condizioni iniziali  $(\omega_3^0, \phi_0, \dot{\phi}_0)$  l'andamento qualitativo della funzione  $\phi(t)$  si desume calcolando preliminarmente il valore dell'integrale primo  $\Gamma$  mediante la (4.14) ed applicando quindi l'analisi di Weierstrass al problema unidimensionale così ottenuto, tenuto conto del grafico dell'energia potenziale  $-U(\phi)$ :



dell'integrale dell'“energia meccanica”:

$$\frac{1}{A}H = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - \frac{A_3}{A}|\vec{\omega}_T| \cos \lambda \left( \Gamma \sin \phi - \frac{|\vec{\omega}_T| \cos \lambda}{2} \sin^2 \phi \right)$$

e del valore di detto integrale, dedotto sempre dalle condizioni iniziali:

$$E = \frac{\dot{\phi}_0^2}{2} - \frac{A_3}{A}|\vec{\omega}_T| \cos \lambda \left( \Gamma \sin \phi_0 - \frac{|\vec{\omega}_T| \cos \lambda}{2} \sin^2 \phi_0 \right) .$$

Lo stesso integrale primo  $\Gamma$  consente poi di ricavare l'andamento della funzione  $\omega_3(t)$  e di completare in tal modo l'analisi.

## 5. Deviazione verso oriente di un grave in caduta libera in un riferimento terrestre

Si vuole dimostrare che un grave in caduta libera in prossimità della superficie terrestre non cade lungo la verticale locale, ma subisce una piccola deviazione verso l'oriente geografico. Tale deviazione, dopo un intervallo di tempo  $t$  dall'inizio del moto, corrisponde ad una distanza percorsa verso Est approssimativamente data da

$$g \cos \lambda \frac{\omega}{3} t^3 ,$$

in cui  $g$ ,  $\lambda$  e  $\omega$  sono rispettivamente il modulo dell'accelerazione gravitazionale locale, la latitudine locale e la velocità angolare scalare della Terra (nel suo moto sidereo, relativo cioè alle stelle lontane).

### 5.1 Premessa

Nella discussione del fenomeno si introducono una serie di assunti che se da un lato semplificano la trattazione, dall'altro consentono di ottenere risultati di precisione comunque adeguata per tutti gli scopi pratici.

- **1<sup>a</sup> Ipotesi.** *La Terra è una sfera di centro  $C$ .* Benché non essenziale per gli scopi del presente studio, l'ipotesi non risulta corretta, in quanto il globo terrestre presenta un leggero schiacciamento ai poli dovuto al moto di rotazione attorno al suo asse; una migliore approssimazione consiste nel descrivere la superficie della Terra come un ellissoide di rotazione, con il semiasse polare leggermente più piccolo di quello equatoriale (circa 6357 km contro 6378).
- **2<sup>a</sup> Ipotesi.** *La terna di riferimento  $Cx'y'z'$  con l'origine nel centro  $C$  e gli assi coordinati  $Cx'$ ,  $Cy'$ ,  $Cz'$  diretti verso le stelle distanti è inerziale.* L'osservazione astronomica dimostra che un'ottima terna galileiana è quella la cui origine si situa nel centro  $S$  del Sole ed i cui assi risultano orientati secondo le stelle lontane (o loro equivalenti, quali galassie o quasar). Si ha allora dal teorema di Coriolis che il riferimento  $Cx'y'z'$  non può essere inerziale se non per tempi piuttosto brevi, stimabili nell'ordine di qualche giorno solare. Ciò per il fatto che il centro  $C$  è animato da moto accelerato rispetto alla terna centrata in  $S$ : in prima approssimazione infatti, il centro della Terra è identificabile con il suo baricentro e si muove attorno al Sole secondo le leggi di Keplero; a questo si aggiunga poi che in realtà la Terra e la Luna ruotano su orbite pressoché ellittiche attorno al comune baricentro, e che è tale baricentro — non  $C$  — a compiere il moto kepleriano di rivoluzione attorno al Sole. Tutti i moti descritti implicano una accelerazione di  $C$  rispetto ad  $S$  e, di conseguenza, una non inerzialità della terna  $Cx'y'z'$ , nella quale insorgono corrispondenti forze fittizie di trascinamento. Si ricorda, per completezza, che le sollecitazioni responsabili del moto accelerato di  $C$  rispetto ad  $S$  sono le forze gravitazionali esercitate sulla Terra dal Sole e dalla Luna, e che le stesse sollecitazioni gravitazionali lunisolari tendono parzialmente ad elidere quelle fittizie. Le forze in gioco si compensano esattamente nel solo baricentro  $C$ , mentre altrove la cancellazione è soltanto parziale, risultando in generale tanto più incompleta al crescere della distanza da  $C$ . Le forze nette residue

sono responsabili, tra l'altro, dei fenomeni di marea che si registrano sulla superficie della Terra e vengono perciò denominate **forze mareali**.

- **3<sup>a</sup> Ipotesi.** *Il moto della Terra rispetto alla terna  $Cx'y'z'$  è di pura rotazione, con velocità angolare costante attorno ad un asse fisso. L'asse fisso di rotazione si identifica con il cosiddetto asse terrestre e le sue intersezioni con la sfera terrestre individuano i poli geografici Nord e Sud.* In realtà anche supponendo, il che non è del tutto lecito, che la Terra possa essere descritta come un sistema rigido con punto fisso  $C$ , il suo vettore velocità angolare istantanea rispetto a  $Cx'y'z'$  —  $\vec{\omega}$  — non risulta affatto costante. Il primo luogo, la Terra esegue moti di **libera precessione**, come qualsiasi corpo rigido con punto fisso non soggetto a sollecitazioni esterne (moto per inerzia) e dotato di struttura giroscopica rispetto a tale punto; in conseguenza di ciò l'asse terrestre si muove descrivendo una sorta di doppio cono ideale, con vertice in  $C$ , in un intervallo di tempo pari a circa 433 giorni (si ricorda a questo proposito che il periodo delle precessioni libere stimabile in base al modello della Terra rigida — 305 giorni circa — differisce sensibilmente da quello stabilito per mezzo dell'osservazione astronomica. L'usuale interpretazione della discrepanza consiste precisamente nel riconoscere come scorretto l'assunto della rigidità del pianeta, che al proprio interno risulta in larga parte costituito da fluidi molto viscosi (mantello, nucleo esterno). In secondo luogo, se la Terra fosse un corpo rigido perfettamente sferico e con distribuzione perfettamente sferica di massa il campo di forze mareali agente sul pianeta avrebbe momento risultante pressoché nullo rispetto al centro  $C$ , per cui il moto del pianeta in  $Cx'y'z'$  risulterebbe inerziale, limitandosi ad una semplice rotazione stazionaria. In realtà la presenza del rigonfiamento equatoriale, oltre ad essere responsabile dei moti di libera precessione, fa sì che il momento in  $C$  delle forze di marea non sia trascurabile ed induca sulla Terra un ulteriore moto di precessione e nutazione: la posizione dell'asse terrestre è determinata dalla sovrapposizione di due moti, il primo dei quali (precessione) vede l'asse mantenere costante la propria inclinazione sul piano dell'eclittica, ma ruotare uniformemente attorno alla normale a tale piano in un periodo di circa 25'780 anni (moto responsabile della cosiddetta **precessione degli equinozi**), mentre il secondo consiste in una oscillazione periodica dell'inclinazione dello stesso asse rispetto all'eclittica, con un periodo caratteristico di 18.6133 anni circa (nutazione)<sup>(1)</sup>.

I moti di precessione, libera o mareale, e di nutazione non modificano in modo significativo il modulo del vettore  $\vec{\omega}$ . Tuttavia la non perfetta rigidità della Terra dà luogo a fenomeni dissipativi che tendono a ridurre progressivamente tale modulo, e con esso la durata del giorno siderale  $2\pi/|\vec{\omega}|$ . Si tratta di fenomeni legati all'effetto combinato delle maree oceaniche e della rotazione terrestre: semplificando al massimo, i sollevamenti mareali degli oceani, causa l'inerzia e la viscosità delle acque, vengono parzialmente trascinati nel moto di rotazione del pianeta e l'attrazione gravitazionale che su di essi esercitano il Sole e la Luna determina una sorta di azione di “frenamento”

---

(1) In realtà il moto di nutazione viene descritto come una sovrapposizione di moti periodici, il cui periodo varia da un massimo di 18.6133 anni per il moto di maggiore ampiezza a circa 14 giorni per quello meno pronunciato. Il ciclo principale di 18.6133 anni è associato all'azione gravitazionale della luna e coincide con quello che governa le eclissi del satellite — c.d. ciclo di Saros. L'effetto è infatti attribuibile all'inclinazione del piano orbitale della luna rispetto al piano dell'eclittica.

sulle masse d'acqua e di conseguenza sull'intero pianeta. L'alterazione del periodo di rotazione della Terra (giorno siderale) che ne segue è tuttavia molto piccola, dell'ordine di  $2 \cdot 10^{-3}$  secondi per secolo.

Ai moti sopradescritti se ne sovrappongono altri, di entità assai modesta e sostanzialmente irregolari, dovuti alla variazione nella distribuzione di massa all'interno e sulla superficie della Terra (modifiche nella distribuzione delle coltri glaciali, sollevamenti isostatici postglaciali, derive continentali e processi tettonici in genere).

- **4<sup>a</sup> Ipotesi.** *I moti di caduta considerati hanno carattere locale rispetto ad una terna di riferimento solidale alla Terra.* Ciò significa che fissato un sistema di riferimento solidale alla Terra, di regola con l'origine  $O$  sulla superficie del pianeta, i soli moti presi in esame sono quelli che avvengono nell'intorno di  $O$  e conseguentemente su intervalli di tempo abbastanza brevi da non violare tale condizione.

## 5.2 Equazione fondamentale della meccanica terrestre

Fatte queste premesse, si consideri una qualsiasi terna di riferimento  $Oxyz$  solidale alla Terra, di versori  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ , ed un punto materiale  $P$  di massa  $m$ . Se  $x_1, x_2, x_3$  sono le coordinate cartesiane di  $P$  relative ad  $Oxyz$ , vale l'identità vettoriale:

$$P - C = P - O + O - C = \sum_{i=1}^N x_i \hat{e}_i + O - C$$

che derivata rispetto al tempo porge il teorema dei moti relativi:

$$\dot{P} = \dot{O} + \sum_{i=1}^N x_i \frac{d\hat{e}_i}{dt} + \sum_{i=1}^N \dot{x}_i \hat{e}_i = \vec{v}_T + \vec{v}_R$$

essendo  $\vec{v}_R = \sum_{i=1}^N \dot{x}_i \hat{e}_i$  la velocità di  $P$  relativa ad  $Oxyz$  e  $\vec{v}_T$  la velocità di trascinamento dello stesso punto. Una ulteriore derivazione in  $t$  conduce al teorema di Coriolis:

$$\ddot{P} = \ddot{O} + \sum_{i=1}^N x_i \frac{d^2 \hat{e}_i}{dt^2} + 2 \sum_{i=1}^N \dot{x}_i \frac{d\hat{e}_i}{dt} + \sum_{i=1}^N \ddot{x}_i \hat{e}_i = \vec{a}_T + \vec{a}_C + \vec{a}_R$$

in cui sono state evidenziate le espressioni dell'accelerazione di trascinamento, complementare e relativa ad  $Oxyz$  del punto  $P$ , rispettivamente:

$$\vec{a}_T = \ddot{O} + \sum_{i=1}^N x_i \frac{d^2 \hat{e}_i}{dt^2} \quad \vec{a}_C = 2 \sum_{i=1}^N \dot{x}_i \frac{d\hat{e}_i}{dt} \quad \vec{a}_R = \sum_{i=1}^N \ddot{x}_i \hat{e}_i .$$

Tenuto conto delle formule di Poisson

$$\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_i \quad i = 1, 2, 3 ,$$

che definiscono il vettore velocità angolare istantanea  $\vec{\omega}$  della terna rotante rispetto a quella fissa  $Cxyz$  — ovvero, equivalentemente, della Terra rispetto a  $Cxyz$  —, si ottiene per le derivate seconde in  $t$  dei versori  $\hat{e}_i$  l'espressione equivalente:

$$\frac{d^2 \hat{e}_i}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \hat{e}_i) = \dot{\vec{\omega}} \wedge \hat{e}_i + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \hat{e}_i)$$

in modo che l'accelerazione di Coriolis e quella di trascinamento di  $P$  assumono la forma

$$\vec{a}_C = 2 \sum_{i=1}^N \dot{x}_i \vec{\omega} \wedge \hat{e}_i = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R$$

e

$$\begin{aligned} \vec{a}_T &= \ddot{O} + \sum_{i=1}^N x_i [\dot{\vec{\omega}} \wedge \hat{e}_i + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \hat{e}_i)] = \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (O - C)] + \sum_{i=1}^N x_i [\dot{\vec{\omega}} \wedge \hat{e}_i + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \hat{e}_i)] \\ &= \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (O - C)] + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)] . \end{aligned}$$

Se  $\vec{F}$  indica il risultante delle sollecitazioni agenti su  $P$ , la seconda legge della dinamica per tale punto si scrive

$$m\ddot{P} = \vec{F}$$

ovvero, applicando il teorema di Coriolis ed evidenziando il termine contenente l'accelerazione relativa,

$$\vec{F} = m\vec{a}_T + m\vec{a}_C + m\vec{a}_R \quad \Longrightarrow \quad m\vec{a}_R = \vec{F} - m\vec{a}_T - m\vec{a}_C .$$

Quella ottenuta non è altro che l'equazione del moto di  $P$  relativa alla terna non inerziale  $Oxyz$ , nella quale si identificano le forze fittizie di trascinamento  $-m\vec{a}_T$  e di Coriolis  $-m\vec{a}_C$ ; si ha pertanto:

$$m\vec{a}_R = \vec{F} - m\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (O - C)] - m[\dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)]] - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R .$$

Nella fattispecie, indicata con  $M$  la massa della Terra e con  $G$  la costante gravitazionale, la sola forza applicata a  $P$  è quella gravitazionale dovuta alla Terra:

$$\vec{F} = -\frac{mMG}{|P - C|^3}(P - C)$$

per cui l'equazione del moto di  $P$  si riduce a

$$m\vec{a}_R = -\frac{mMG}{|P - C|^3}(P - C) - m\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (O - C)] - m[\dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O)]] - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R .$$

L'equazione ottenuta si semplifica drasticamente in virtù delle ipotesi assunte sul moto della Terra e sulla natura "locale" dei moti di  $P$  considerati, tenuto conto che l'origine  $O$  è

un punto appartenente alla superficie terrestre. A questo proposito si premettono alcune osservazioni.

(i) L'ipotesi che  $\vec{\omega}$  sia costante implica che si abbia  $\dot{\vec{\omega}} = 0$  e conseguentemente:

$$-m\dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O) = 0 \wedge (P - O) = 0 ;$$

vale la pena di notare come anche in assenza di questa ipotesi il vettore  $\dot{\vec{\omega}}$  risulti comunque estremamente piccolo in modulo, in quanto assai lentamente variabile nel tempo. Per piccoli moti nell'intorno dell'origine  $O$  il termine  $-m\dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O)$  assumerebbe dunque valori trascurabili e potrebbe essere ugualmente ignorato nell'equazione del moto. Più precisamente si avrebbe, considerando con buona approssimazione le sole precessioni libere dell'asse terrestre

$$|\dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O)| \leq |\dot{\vec{\omega}}||P - O| = |\vec{\omega}_{prec.lib.} \wedge \vec{\omega}||P - O| \leq |\vec{\omega}_{prec.lib.}||\vec{\omega}||P - O|$$

e poiché la velocità angolare siderale<sup>(1)</sup> della Terra ha modulo

$$|\vec{\omega}| = \frac{2\pi}{86164} = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$$

mentre per quella delle precessioni libere<sup>(2)</sup> vale

$$|\vec{\omega}_{prec.lib.}| = \frac{2\pi}{433 \cdot 86164} = 1.68 \cdot 10^{-7} \text{ rad s}^{-1} ,$$

risulterebbe

$$|\dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O)| \leq 7.29 \cdot 10^{-5} \cdot 1.68 \cdot 10^{-7} |P - O| = 1.23 \cdot 10^{-11} |P - O|$$

con  $|P - O|$  espresso in metri.

(ii) Il termine  $-\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (P - O))$  si stima in modo analogo:

$$|-\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (P - O))| \leq |\vec{\omega}|^2 |P - O| = (7.29 \cdot 10^{-5})^2 |P - O| = 5.31 \cdot 10^{-9} |P - O| .$$

(iii) Il termine di interazione gravitazionale si approssima con una espressione indipendente da  $P$ :

$$-\frac{mMG}{|P - C|^3}(P - C) \simeq -\frac{mMG}{|O - C|^3}(O - C)$$

per  $|P - O|$  piccolo. Posto  $x = O - C$ ,  $\varepsilon = P - O$  ed assunto  $|\varepsilon| \ll |x|$  vale infatti:

$$\left| \frac{x + \varepsilon}{|x + \varepsilon|^3} - \frac{x}{|x|^3} \right| = \left| \frac{x + \varepsilon}{|x + \varepsilon|^3} - \frac{x}{|x + \varepsilon|^3} + \frac{x}{|x + \varepsilon|^3} - \frac{x}{|x|^3} \right| \leq$$

(1) La durata del giorno siderale è di circa 86164 secondi

(2) Una precessione libera completa si compie in 433 giorni siderei circa

$$\leq \frac{|\varepsilon|}{|x + \varepsilon|^3} + |x| \left| \frac{1}{|x + \varepsilon|^3} - \frac{1}{|x|^3} \right| \leq \frac{|\varepsilon|}{(|x| - |\varepsilon|)^3} + |x| \left[ \frac{1}{(|x| - |\varepsilon|)^3} - \frac{1}{|x|^3} \right]$$

dove per  $\theta \in (0, 1)$  opportuno, applicando il teorema del valor medio, risulta

$$\frac{1}{(|x| - |\varepsilon|)^3} - \frac{1}{|x|^3} = -3 \frac{1}{(|x| - \theta|\varepsilon|)^4} (-|\varepsilon|) = \frac{3|\varepsilon|}{(|x| - \theta|\varepsilon|)^4}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \left| \frac{x + \varepsilon}{|x + \varepsilon|^3} - \frac{x}{|x|^3} \right| &\leq \frac{|\varepsilon|}{(|x| - |\varepsilon|)^3} + \frac{3|\varepsilon||x|}{(|x| - \theta|\varepsilon|)^4} \leq \frac{|\varepsilon|}{(|x| - |\varepsilon|)^3} + \frac{3|\varepsilon||x|}{(|x| - |\varepsilon|)^4} = \\ &= |\varepsilon| \frac{4|x| - |\varepsilon|}{(|x| - |\varepsilon|)^4} = \frac{1}{|x|^2} \left( 4 - \frac{|\varepsilon|}{|x|} \right) \left( 1 - \frac{|\varepsilon|}{|x|} \right)^{-4} \frac{|\varepsilon|}{|x|}. \end{aligned}$$

Di qui, posto per brevità  $\xi = |\varepsilon|/|x| \ll 1$ , si deduce che

$$\left| -\frac{MG}{|P - C|^3}(P - C) + \frac{MG}{|O - C|^3}(O - C) \right| \leq \frac{MG}{|O - C|^2} (4 - \xi)(1 - \xi)^{-4} \xi$$

in cui  $|O - C| = 6.37 \cdot 10^6$  è il raggio medio della Terra espresso in metri,  $MG/|O - C|^2 \simeq 9.81 \text{ m s}^{-2}$  e  $\xi = 1.57 \cdot 10^{-7} |P - O|$ .

(iv) Per l'accelerazione di Coriolis vale infine la stima

$$|2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R| \leq 2|\vec{\omega}||\vec{v}_R| = 1.46 \cdot 10^{-4} |\vec{v}_R|,$$

mentre il termine residuo nell'equazione del moto soddisfa

$$\left| -\frac{MG}{|O - C|^3}(O - C) - \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (O - C)] \right| \simeq 9.81 \text{ m s}^{-2}.$$

In virtù delle precedenti maggiorazioni, è ora immediato verificare che per moti localizzati in prossimità dell'origine  $O$ :

$$|P - O| \leq 10^2 \text{ m}$$

una buona approssimazione dell'equazione del moto è data da

$$m\vec{a}_R = -\frac{mMG}{|O - C|^3}(O - C) - m\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (O - C)] - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R$$

ovvero da

$$m\vec{a}_R = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R \quad (1)$$

a patto di definire l'accelerazione gravitazionale locale come

$$\vec{g} = -\frac{MG}{|O - C|^3}(O - C) - \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (O - C)]. \quad (2)$$

L'equazione del moto ottenuta (1) è nota come **equazione fondamentale della meccanica terrestre**. Si sottolinea come per velocità  $\vec{v}_R$  piccole — qualche metro al secondo — la forza di Coriolis  $-2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R$  e la correzione posizionale

$$-\frac{mMG}{|P-C|^3}(P-C) + \frac{mMG}{|O-C|^3}(O-C) \quad (3)$$

hanno intensità fra loro confrontabili, sicché il modello può non essere perfettamente adatto a descrivere questo tipo di situazione.

### 5.3 Scelta del sistema di riferimento terrestre

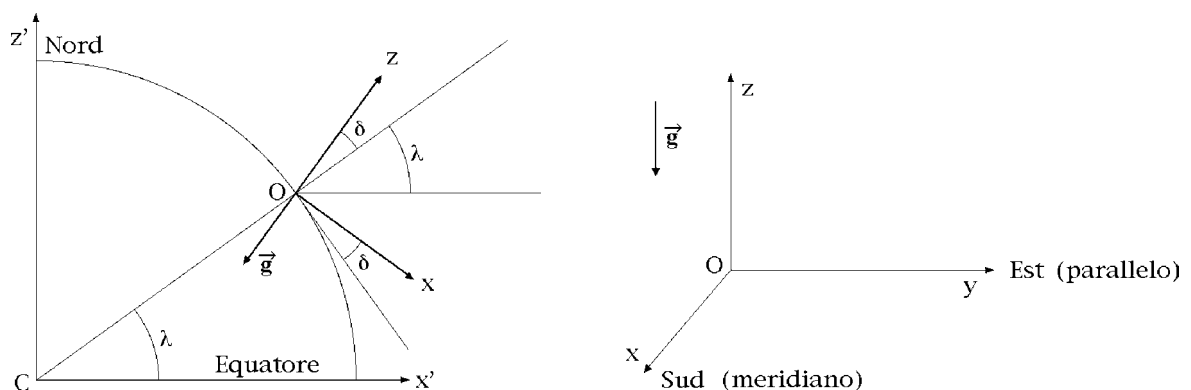
La terna di riferimento  $Oxyz$  viene scelta di regola disponendo gli assi coordinati nel modo sottoindicato:

- l'asse  $Oz$  secondo la verticale locale ascendente passante per  $O$ ;
- l'asse  $Oy$  tangenzialmente al parallelo locale passante per  $O$  ed orientato verso l'Est geografico;
- l'asse  $Ox$  determinato in modo che la terna risultante sia ortogonale e destrorsa, per cui esso risulta complanare al meridiano locale passante per  $O$  ed orientato verso il Sud geografico, come è immediato verificare.

Si osservi che a causa della correzione di trascinamento  $-\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (O-C)]$  nella definizione (2), l'accelerazione gravitazionale  $\vec{g}$  che definisce la verticale locale non è diretta verso il centro  $C$  della Terra, ma forma un piccolo angolo  $\delta$  con la congiungente  $O-C$ , in modo che risulta

$$(O-C) \cdot (-\vec{g}) = |O-C| |\vec{g}| \cos \delta .$$

In conseguenza di ciò l'asse  $Ox$  della terna terrestre non è esattamente tangente al meridiano in  $O$ , formando con esso un angolo di uguale ampiezza  $\delta$ . In particolare, il piano coordinato “orizzontale”  $Oxy$  **non coincide con il piano tangente alla superficie sferica della Terra in  $O$** , ma forma con questo un angolo diedro di ampiezza  $\delta$ .



L'angolo  $\delta$  dipende dalla latitudine  $\lambda$  di  $O$  e può essere calcolato agevolmente con un poco di trigonometria. A questo scopo conviene riscrivere in una forma più comoda il termine di trascinamento:

$$\begin{aligned} -\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (O - C)] &= \vec{\omega} \wedge [(O - C) \wedge \vec{\omega}] = (O - C)|\vec{\omega}|^2 - \vec{\omega} \vec{\omega} \cdot (O - C) = \\ &= |O - C|(\cos \lambda \hat{n} + \sin \lambda \hat{e}'_3)|\vec{\omega}|^2 - |\vec{\omega}| \hat{e}'_3 |\vec{\omega}| |O - C| \sin \lambda = |O - C||\vec{\omega}|^2 \cos \lambda \hat{n}, \end{aligned}$$

dove  $\hat{e}'_3$  indica il versore associato all'asse di rotazione della Terra, mentre il versore  $\hat{n}$  è diretto secondo la congiungente di  $O$  con la sua proiezione ortogonale sull'asse di rotazione terrestre  $Cz'$ , ed orientato in senso opposto. In modo analogo, il termine di interazione gravitazionale diventa:

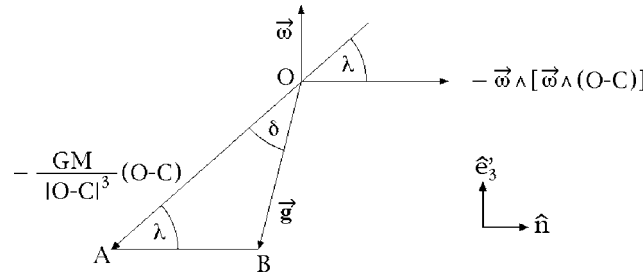
$$-\frac{MG}{|O - C|^3}(O - C) = -\frac{MG}{|O - C|^2}(\cos \lambda \hat{n} + \sin \lambda \hat{e}'_3),$$

per cui il vettore accelerazione gravitazionale locale si riscrive come

$$\begin{aligned} \vec{g} &= -\frac{MG}{|O - C|^2}(\cos \lambda \hat{n} + \sin \lambda \hat{e}'_3) + |O - C||\vec{\omega}|^2 \cos \lambda \hat{n} = \\ &= -\left(\frac{MG}{|O - C|^2} - |O - C||\vec{\omega}|^2\right) \cos \lambda \hat{n} - \frac{MG}{|O - C|^2} \sin \lambda \hat{e}'_3 \end{aligned}$$

ed ha modulo

$$|\vec{g}| = \left[ \left( \frac{MG}{|O - C|^2} - |O - C||\vec{\omega}|^2 \right)^2 \cos^2 \lambda + \left( \frac{MG}{|O - C|^2} \right)^2 \sin^2 \lambda \right]^{1/2}.$$



Osservato che  $AB = |-\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (O - C)]| = |O - C||\vec{\omega}|^2 \cos \lambda$  e che  $OB = |\vec{g}|$ , dal teorema dei seni applicato al triangolo  $OAB$  si deduce

$$\frac{\sin \delta}{AB} = \frac{\sin \lambda}{OB}$$

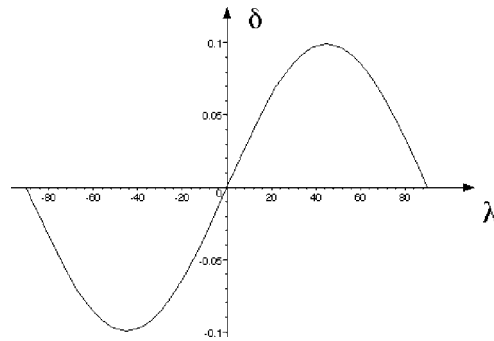
e quindi

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \frac{AB}{OB} \sin \lambda = \frac{\sin \lambda \cos \lambda |O - C||\vec{\omega}|^2}{|\vec{g}|} = \\ &= \sin \lambda \cos \lambda |O - C||\vec{\omega}|^2 \left[ \left( \frac{MG}{|O - C|^2} - |O - C||\vec{\omega}|^2 \right)^2 \cos^2 \lambda + \left( \frac{MG}{|O - C|^2} \right)^2 \sin^2 \lambda \right]^{-1/2} \end{aligned}$$

che consente il calcolo di  $\delta$ . Inserendo i valori misurati di  $|\vec{\omega}|$  e  $MG/|O - C|^2$  si ottiene

$$|O - C||\vec{\omega}|^2 \simeq 0.03387 \text{ m s}^{-2} \quad \text{e} \quad \frac{MG}{|O - C|^2} = 9.80665 \text{ m s}^{-2}$$

in modo che può essere calcolato esplicitamente per ogni valore della latitudine  $\lambda \in [-\pi/2, \pi/2]$  — in radianti. Il grafico di  $\delta$  in funzione di  $\lambda$  mostra che l'angolo  $\delta$  ha sempre ampiezza molto piccola — per comodità di lettura gli angoli sono rappresentati in gradi sessagesimali:



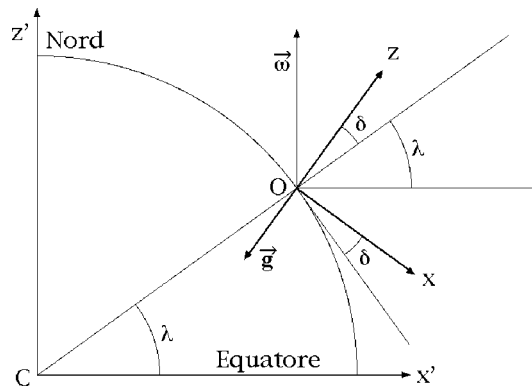
### 5.4 Equazioni del moto scritte nella terna di riferimento terrestre

Si vuole ora scrivere l'equazione fondamentale della meccanica terrestre, equazione (1), sotto forma di sistema di equazioni scalari secondo gli assi della terna di riferimento terrestre descritta in precedenza. A questo scopo, indicati con  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ , rispettivamente i versori associati agli assi coordinati  $Ox, Oy, Oz$ , si osserva che:

- (i) per il modo in cui è stato definito l'asse  $Oz$  risulta  $\vec{g} = -g\hat{e}_3$ ;
- (ii) le componenti cartesiane della velocità angolare terrestre  $\vec{\omega}$  si calcolano mediante semplici proiezioni ortogonali, in modo che  $\vec{\omega}$  può scriversi

$$\vec{\omega} = -\omega \cos \lambda_0 \hat{e}_1 + \omega \sin \lambda_0 \hat{e}_3$$

essendosi posto, per brevità,  $\omega = |\vec{\omega}|$  e  $\lambda_0 = \lambda + \delta$ . Da ricordare che, per quanto detto in precedenza circa il valore di  $\delta$ , è  $\lambda_0 \sim \lambda$  e quindi la sostituzione  $\lambda_0 \rightarrow \lambda$  costituisce comunque un'ottima approssimazione;



(iii) indicate con  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$  le componenti di  $\vec{v}_R$  rispetto alla terna  $Oxyz$ , si ha

$$\vec{v}_R = \dot{x} \hat{e}_1 + \dot{y} \hat{e}_2 + \dot{z} \hat{e}_3$$

e di conseguenza

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R = \omega \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -\cos \lambda_0 & 0 & \sin \lambda_0 \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \omega [-\sin \lambda_0 \dot{y} \hat{e}_1 + (\sin \lambda_0 \dot{x} + \cos \lambda_0 \dot{z}) \hat{e}_2 - \cos \lambda_0 \dot{y} \hat{e}_3]$$

per cui l'espressione della forza di Coriolis diventa

$$-2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R = 2m\omega [\sin \lambda_0 \dot{y} \hat{e}_1 - (\sin \lambda_0 \dot{x} + \cos \lambda_0 \dot{z}) \hat{e}_2 + \cos \lambda_0 \dot{y} \hat{e}_3] .$$

Posto infine  $\vec{a}_R = \ddot{x} \hat{e}_1 + \ddot{y} \hat{e}_2 + \ddot{z} \hat{e}_3$ , la proiezione ortogonale lungo gli assi  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , porge le equazioni del moto richieste

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega \sin \lambda_0 \dot{y} \\ \ddot{y} = -2\omega(\sin \lambda_0 \dot{x} + \cos \lambda_0 \dot{z}) \\ \ddot{z} = -g + 2\omega \cos \lambda_0 \dot{y} \end{cases} , \quad (4)$$

nelle quali è stato ovunque omissso il comune fattore  $m$ , costante inessenziale. È evidente che le equazioni (4) costituiscono un sistema lineare del secondo ordine in forma normale, non omogeneo, a coefficienti costanti e con termine noto costante a sua volta. Tale sistema, come ben noto dall'analisi matematica, può essere risolto esattamente ed in modo esplicito. Tuttavia, la particolare natura dei moti che si vuole esaminare, moti di caduta libera che si compiono necessariamente in intervalli di tempo molto brevi, rende vantaggioso il ricorso a metodi di integrazione approssimata che consentono di ottenere risultati sufficientemente accurati per tutti gli scopi pratici. Per procedere oltre è quindi necessaria una breve digressione su uno dei metodi abitualmente utilizzati per la soluzione di questo tipo di problema, il metodo ricorsivo o delle approssimazioni successive di Picard.

## 5.5 Soluzione approssimata di un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine in forma normale ed a coefficienti costanti.

### Il metodo delle approssimazioni successive di Picard

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti non omogenee

$$\dot{x} = Ax + v$$

dove  $v \in \mathbb{R}^n$  è il termine noto costante ed  $A$  la matrice  $n \times n$  dei coefficienti. Il teorema di Lagrange della variazione delle costanti consente di scrivere una soluzione particolare del sistema nella forma

$$x(t) = e^{tA} c(t)$$

la cui derivata rispetto al tempo risulta

$$\dot{x}(t) = Ae^{tA}c(t) + e^{tA}\dot{c}(t)$$

mentre

$$Ax + v = Ae^{tA}c(t) + v$$

e quindi, uguagliando le espressioni di  $\dot{x}$  e di  $Ax + v$ ,

$$v = e^{tA}\dot{c}(t) .$$

Da quest'ultima relazione si deduce che

$$\dot{c}(t) = e^{-tA}v$$

in modo che una integrazione in  $t$  porge

$$c(t) = c(0) + \int_0^t e^{-sA}v ds$$

e la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale  $x(0) = x_0 = c(0)$  risulta

$$x(t) = e^{tA} \left[ x(0) + \int_0^t e^{-sA}v ds \right] = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}v ds .$$

Si osservi come, in virtù dello sviluppo in serie di Taylor

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{(t-s)A}v ds &= \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-s)^n}{n!} A^n v ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n v \int_0^t (t-s)^n ds = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n v \left[ -\frac{(t-s)^{n+1}}{n+1} \right]_0^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n v \frac{t^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} A^n v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^{n-1} v , \end{aligned}$$

convergente  $\forall t \in \mathbb{R}$ , la soluzione ottenuta possa anche porsi nella forma

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^{n-1} v = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} [A^n x_0 + A^{n-1} v] = \\ &= x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^{n-1} [Ax_0 + v] , \end{aligned} \tag{5}$$

che è di fondamentale importanza nel provare la convergenza del metodo iterativo di Picard.

### 5.5.1 Metodo delle approssimazioni successive di Picard

Si riscrive il problema di Cauchy nella forma integrale equivalente

$$x(t) = x_0 + \int_0^t [Ax(s) + v] ds = x_0 + A \int_0^t x(s) ds + tv \quad (6)$$

alla quale si applica poi il metodo delle approssimazioni successive. Questo consiste nell'assumere come livello zero di approssimazione della soluzione  $x(t)$  la funzione costante uguale al valore iniziale del problema di Cauchy:

$$x_0(t) = x_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e nell'inserire tale soluzione nell'equazione integrale (6) per ottenere una approssimazione di livello successivo

$$x_1(t) = x_0 + A \int_0^t x_0(s) ds + tv = x_0 + (Ax_0 + v)t$$

che, inserita nuovamente nella (6), ne porge una ulteriore

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_0 + A \int_0^t x_1(s) ds + tv = x_0 + A \int_0^t [x_0 + (Ax_0 + v)s] ds + tv = \\ &= x_0 + A \left[ x_0 t + (Ax_0 + v) \frac{t^2}{2} \right] + tv = x_0 + (Ax_0 + v)t + A(Ax_0 + v) \frac{t^2}{2} = x_0 + \left( t + \frac{t^2}{2} A \right) (Ax_0 + v) \end{aligned}$$

e così via. Si dimostra per induzione che l'approssimazione  $n$ -esima fornita dal procedimento iterativo coincide con l'espressione

$$x_n(t) = x_0 + \sum_{k=1}^n \frac{t^k}{k!} A^{k-1} (Ax_0 + v)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} x_{n+1}(t) &= x_0 + tv + A \int_0^t \left[ x_0 + \sum_{k=1}^n \frac{s^k}{k!} A^{k-1} (Ax_0 + v) \right] ds = \\ &= x_0 + tv + A \left[ tx_0 + \sum_{k=1}^n \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} A^{k-1} (Ax_0 + v) \right] = x_0 + tv + tAx_0 + \sum_{k=1}^n \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} A^k (Ax_0 + v) = \\ &= x_0 + t(Ax_0 + v) + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{t^k}{k!} A^{k-1} (Ax_0 + v) = x_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{t^k}{k!} A^{k-1} (Ax_0 + v) . \end{aligned}$$

Poiché inoltre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_0 + \sum_{k=1}^n \frac{t^k}{k!} A^{k-1} (Ax_0 + v) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^{k-1} (Ax_0 + v) = x(t)$$

si conclude che le approssimazioni successive di Picard convergono effettivamente, per  $n \rightarrow +\infty$ , all'unica soluzione  $x(t)$  del problema di Cauchy,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

## 5.6 Applicazione del metodo di Picard alla soluzione delle equazioni del moto per il grave in caduta nel riferimento terrestre

Il sistema di equazioni lineari di cui si deve determinare una soluzione approssimata è il seguente

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega \sin \lambda_0 \dot{y} \\ \ddot{y} = -2\omega(\sin \lambda_0 \dot{x} + \cos \lambda_0 \dot{z}) \\ \ddot{z} = -g + 2\omega \cos \lambda_0 \dot{y} \end{cases}$$

e con il cambiamento di variabile  $\tau = \omega t$ , che adimensionalizza la variabile indipendente, diventa

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{d\tau^2} = +2 \sin \lambda_0 \frac{dy}{d\tau} \\ \frac{d^2 y}{d\tau^2} = -2 \sin \lambda_0 \frac{dx}{d\tau} - 2 \cos \lambda_0 \frac{dz}{d\tau} \\ \frac{d^2 z}{d\tau^2} = -\frac{g}{\omega^2} + 2 \cos \lambda_0 \frac{dy}{d\tau} . \end{cases}$$

Posto

$$V_x = \frac{dx}{d\tau} \quad V_y = \frac{dy}{d\tau} \quad V_z = \frac{dz}{d\tau} ,$$

l'equazione precedente assume la forma più compatta

$$\begin{cases} \frac{dV_x}{d\tau} = +2 \sin \lambda_0 V_y \\ \frac{dV_y}{d\tau} = -2 \sin \lambda_0 V_x - 2 \cos \lambda_0 V_z \\ \frac{dV_z}{d\tau} = -\frac{g}{\omega^2} + 2 \cos \lambda_0 V_y \end{cases}$$

ovvero quella matriciale equivalente

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \sin \lambda_0 & 0 \\ -2 \sin \lambda_0 & 0 & -2 \cos \lambda_0 \\ 0 & 2 \cos \lambda_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g/\omega^2 \end{pmatrix} .$$

Volendosi esaminare un moto di libera caduta, si suppone che il grave parta dalla quiete all'istante  $t = 0$ , ovvero  $\tau = 0$ ; di conseguenza, l'equazione integrale equivalente al problema di Cauchy del moto si scrive

$$\begin{cases} V_x = +2 \sin \lambda_0 \int_0^\tau V_y d\tau \\ V_y = -2 \sin \lambda_0 \int_0^\tau V_x d\tau - 2 \cos \lambda_0 \int_0^\tau V_z d\tau \\ V_z = -\frac{g\tau}{\omega^2} + 2 \cos \lambda_0 \int_0^\tau V_y d\tau \end{cases}$$

ed è a questa che deve essere applicato il metodo di Picard. La prima iterazione, con  $V_x(0) = V_y(0) = V_z(0) = 0$ , porge

$$\begin{cases} V_x = 0 \\ V_y = 0 \\ V_z = -\frac{g\tau}{\omega^2} \end{cases} .$$

Per la seconda iterazione si ha quindi

$$\begin{cases} V_x = 0 \\ V_y = -2 \cos \lambda_0 \int_0^\tau \left(-\frac{g\tau}{\omega^2}\right) d\tau = \frac{g}{\omega^2} \cos \lambda_0 \tau^2 \\ V_z = -\frac{g\tau}{\omega^2} \end{cases}$$

e per la terza infine

$$\begin{cases} V_x = +2 \sin \lambda_0 \int_0^\tau \frac{g}{\omega^2} \cos \lambda_0 \tau^2 d\tau = \frac{2}{3} \frac{g \sin \lambda_0 \cos \lambda_0}{\omega^2} \tau^3 \\ V_y = -2 \cos \lambda_0 \int_0^\tau \left(-\frac{g\tau}{\omega^2}\right) d\tau = \frac{g}{\omega^2} \cos \lambda_0 \tau^2 \\ V_z = -\frac{g\tau}{\omega^2} + 2 \cos \lambda_0 \int_0^\tau \frac{g}{\omega^2} \cos \lambda_0 \tau^2 d\tau = -\frac{g\tau}{\omega^2} + \frac{2g}{3\omega^2} \cos^2 \lambda_0 \tau^3 \end{cases} .$$

Di qui si deduce, tornando alla variabile indipendente  $t$ ,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \omega V_x = \frac{2}{3} \frac{g \sin \lambda_0 \cos \lambda_0}{\omega} \tau^3 \\ \frac{dy}{dt} = \omega V_y = \frac{g}{\omega} \cos \lambda_0 \tau^2 \\ \frac{dz}{dt} = \omega V_z = -\frac{g\tau}{\omega} + \frac{2g}{3\omega} \cos^2 \lambda_0 \tau^3 \end{cases}$$

e conseguentemente

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{2}{3} g \sin \lambda_0 \cos \lambda_0 \omega^2 t^3 \\ \dot{y} = g \cos \lambda_0 \omega t^2 \\ \dot{z} = -gt + \frac{2}{3} g \cos^2 \lambda_0 \omega^2 t^3 \end{cases}$$

in modo che se  $x(0) = y(0) = z(0) = 0$  risulta, integrando in  $t$ ,

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{6} g \sin \lambda_0 \cos \lambda_0 \omega^2 t^4 \\ y(t) = g \cos \lambda_0 \frac{\omega}{3} t^3 \\ z(t) = -g \frac{t^2}{2} + \frac{1}{6} g \cos^2 \lambda_0 \omega^2 t^4 \end{cases} \quad (7)$$

che costituisce la soluzione approssimata richiesta, valida per piccoli valori di  $t$ .

### 5.6.1 Interpretazione del risultato

La soluzione (7) del problema di Cauchy per il grave in caduta libera nel riferimento terrestre è suscettibile di una interpretazione molto semplice, considerato che ulteriori applicazioni del metodo iterativo condurrebbero, come già sottolineato, a termini correttivi di ordine superiore in  $t$ :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{6}g \sin \lambda_0 \cos \lambda_0 \omega^2 t^4 + O(t^5) \\ y(t) = g \cos \lambda_0 \frac{\omega}{3} t^3 + O(t^5) \\ z(t) = -g \frac{t^2}{2} + \frac{1}{6}g \cos^2 \lambda_0 \omega^2 t^4 + O(t^5) . \end{cases}$$

Nel primo termine della soluzione in  $z(t)$  è immediato riconoscere l'espressione galileiana della distanza verticale coperta in un intervallo  $t$  di tempo da un punto materiale partito dalla quiete ed in moto uniformemente accelerato con accelerazione  $-g$ . Il termine correttivo in  $t^4$  risulta piccolo rispetto ad  $y(t)$ :

$$\frac{1}{6}g \cos^2 \lambda_0 \omega^2 t^4 \Big/ g \cos \lambda_0 \frac{\omega}{3} t^3 = \frac{1}{2} \cos \lambda_0 \omega t$$

poiché il modulo della velocità angolare terrestre vale circa  $\omega = 7.29 \cdot 10^{-5}$  e i tempi  $t$  di osservazione sono di necessità limitati a pochi secondi. Analoga considerazione si estende anche al termine in  $t^4$  della componente  $x(t)$ :

$$\frac{1}{6}g \sin \lambda_0 \cos \lambda_0 \omega^2 t^4 \Big/ g \cos \lambda_0 \frac{\omega}{3} t^3 = \frac{1}{2} \sin \lambda_0 \omega t .$$

Su intervalli di tempo di qualche secondo i termini rilevanti della soluzione approssimata si riducono dunque a

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = g \cos \lambda_0 \frac{\omega}{3} t^3 \\ z(t) = -gt^2/2 \end{cases}$$

espressione che si interpreta come la composizione del consueto moto uniformemente accelerato lungo la direzione verticale  $z$  e di una piccola “deriva” positiva e crescente lungo la direzione dell'asse coordinato  $Oy$ , che per costruzione è stato orientato verso Est. Si osservi che in questo ordine di approssimazione nessuno spostamento apprezzabile del grave avviene lungo la direzione dell'asse  $Ox$ , orientata secondo il meridiano locale — verso il Sud geografico.

## 5.7 Correzione lineare sul campo di gravità di $\vec{g}$

Nella discussione precedente si è assunto che i moti in esame siano sufficientemente localizzati nell'intorno dell'origine  $O$  in modo che l'accelerazione gravitazionale  $\vec{g}$  possa considerarsi costante nell'intera regione del moto. Si è già osservato tuttavia che per velocità  $\vec{v}_R$  dell'ordine di qualche metro al secondo, la forza di Coriolis e la variazione (3) del campo di gravità  $\vec{g}$  hanno intensità confrontabili anche su scale di distanza dell'ordine di  $10^2$  m. Ciò suggerisce l'opportunità di prendere in esame un livello di approssimazione superiore, che tenga conto delle variazioni di  $\vec{g}$  lineari in  $P - O$ . Una descrizione più accurata si può così ricavare, nell'ipotesi che la distribuzione di massa della Terra sia dotata di simmetria perfettamente sferica e che i moti si situino all'esterno del pianeta, calcolando le correzioni lineari in  $P - O$  al campo  $\vec{g}$  quale risulta dalla legge di Newton della gravitazione universale. Si osserva preliminarmente che per ogni  $x, \varepsilon \in \mathbb{R}^3$ ,  $|\varepsilon| \ll |x|$ , nell'espressione

$$\frac{x + \varepsilon}{|x + \varepsilon|^3} = (x + \varepsilon)(|x|^2 + 2x \cdot \varepsilon + |\varepsilon|^2)^{-3/2} = (x + \varepsilon)|x|^{-3} \left(1 + \frac{2x \cdot \varepsilon}{|x|^2} + \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2}\right)^{-3/2}$$

si può sostituire l'approssimazione di Taylor

$$(1 + u)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2}u + \frac{15}{8}(1 + \theta u)^{-7/2}u^2, \quad \theta \in (0, 1),$$

con

$$u = \frac{2x \cdot \varepsilon}{|x|^2} + \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2},$$

per ottenere

$$\begin{aligned} \frac{x + \varepsilon}{|x + \varepsilon|^3} &= (x + \varepsilon) \frac{1}{|x|^3} \left[ 1 - 3 \frac{x \cdot \varepsilon}{|x|^2} - \frac{3}{2} \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2} + \frac{15}{8} \left( 1 + \theta \frac{2x \cdot \varepsilon}{|x|^2} + \theta \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2} \right)^{-7/2} \left( \frac{2x \cdot \varepsilon}{|x|^2} + \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2} \right)^2 \right] = \\ &= (x + \varepsilon) \frac{1}{|x|^3} \left[ 1 - \frac{3x \cdot \varepsilon}{|x|^2} + h(x, \varepsilon) \right], \end{aligned}$$

dove la funzione ausiliaria

$$h(x, \varepsilon) := -\frac{3}{2} \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2} + \frac{15}{8} \left( \frac{2x \cdot \varepsilon}{|x|^2} + \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2} \right)^2 \left( 1 + \theta \frac{2x \cdot \varepsilon}{|x|^2} + \theta \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2} \right)^{-7/2}$$

soddisfa l'ovvia maggiorazione

$$\begin{aligned} |h(x, \varepsilon)| &\leq \frac{3}{2} \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2} + \frac{15}{8} \left( 2 \frac{|\varepsilon|}{|x|} + \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2} \right)^2 \left( 1 - 2 \frac{|\varepsilon|}{|x|} - \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2} \right)^{-7/2} = \\ &= \frac{3}{2} \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2} + \frac{15}{2} \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2} \left( 1 + \frac{|\varepsilon|}{2|x|} \right)^2 \left( 1 - 2 \frac{|\varepsilon|}{|x|} - \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2} \right)^{-7/2} = \\ &= \frac{3}{2} \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2} \left[ 1 + 5 \left( 1 + \frac{|\varepsilon|}{2|x|} \right)^2 \left( 1 - 2 \frac{|\varepsilon|}{|x|} - \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2} \right)^{-7/2} \right]. \end{aligned}$$

Vale allora:

$$\begin{aligned} \frac{x + \varepsilon}{|x + \varepsilon|^3} &= \frac{1}{|x|^3} \left[ x + \varepsilon - \frac{3x \cdot \varepsilon}{|x|^2} x - \frac{3x \cdot \varepsilon}{|x|^2} \varepsilon + h(x, \varepsilon) x + h(x, \varepsilon) \varepsilon \right] = \\ &= \frac{1}{|x|^3} \left( x + \varepsilon - \frac{3\varepsilon \cdot x}{|x|^2} x \right) + R(x, \varepsilon) \end{aligned}$$

con la funzione resto

$$R(x, \varepsilon) := \frac{1}{|x|^3} \left[ -\frac{3x \cdot \varepsilon}{|x|^2} \varepsilon + h(x, \varepsilon)(x + \varepsilon) \right]$$

il cui modulo ammette la maggiorazione

$$\begin{aligned} |R(x, \varepsilon)| &\leq \frac{1}{|x|^3} \left[ 3 \frac{|\varepsilon|^2}{|x|} + |h(x, \varepsilon)| (|x| + |\varepsilon|) \right] = \frac{1}{|x|^2} \left[ 3 \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2} + |h(x, \varepsilon)| \left( 1 + \frac{|\varepsilon|}{|x|} \right) \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{|x|^2} \left[ 3 \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2} + \frac{3}{2} \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2} \right] + \frac{1}{|x|^2} O\left(\frac{|\varepsilon|^3}{|x|^3}\right) = \frac{9}{2} \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2} \frac{1}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^2} O\left(\frac{|\varepsilon|^3}{|x|^3}\right). \end{aligned}$$

Risulta pertanto

$$\frac{MG}{|x + \varepsilon|^3} (x + \varepsilon) = \frac{MG}{|x|^3} \left( x + \varepsilon - \frac{3\varepsilon \cdot x}{|x|^2} x \right) + MGR(x, \varepsilon)$$

e posto  $x = O - C$  e  $\varepsilon = P - O$

$$\frac{MG}{|P - C|^3} (P - C) = \frac{MG}{|O - C|^3} \left[ O - C + P - O - \frac{3(P - O) \cdot (O - C)}{|O - C|^2} (O - C) \right] + MGR(x, \varepsilon)$$

con il termine di resto che si stima come

$$|MGR(x, \varepsilon)| \lesssim \frac{9}{2} \frac{|\varepsilon|^2}{|x|^2} \frac{MG}{|x|^2} = \frac{9}{2} 2.464 \cdot 10^{-14} |P - O|^2 9.80665 = 1.088 \cdot 10^{-12} |P - O|^2.$$

In particolare, per  $|P - O| \leq 10^2$  m si ha

$$|MGR(x, \varepsilon)| \leq 1.088 \cdot 10^{-8}$$

e un'ottima approssimazione dell'equazione del moto diventa

$$m\vec{a}_R = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R - \frac{mMG}{|O - C|^3} \left[ P - O - 3 \frac{(P - O) \cdot (O - C)}{|O - C|^2} (O - C) \right] \quad (8)$$

che è ancora lineare. Si tratta di riscrivere tale equazione come sistema di equazioni scalari, eseguendo le proiezioni ortogonali secondo gli assi della terna di riferimento terrestre già

introdotta in precedenza. A questo scopo, osservato che il vettore costante  $O - C$  assume la forma

$$O - C = |O - C|(\sin \delta \hat{e}_1 + \cos \delta \hat{e}_3)$$

mentre per il vettore incognito  $P - O$  vale, come prima,

$$P - O = x \hat{e}_1 + y \hat{e}_2 + z \hat{e}_3$$

e l'accelerazione gravitazionale risulta

$$\vec{g} = -g \hat{e}_3 ,$$

l'equazione del moto (8) si riduce alla seguente

$$\vec{a}_R = -g \hat{e}_3 - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R - \frac{MG}{|O - C|^3} [P - O - 3(x \sin \delta + z \cos \delta)(\sin \delta \hat{e}_1 + \cos \delta \hat{e}_3)] .$$

Siccome poi  $\delta \sim 0$ , si ha in pratica

$$\vec{a}_R = -g \hat{e}_3 - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R - \frac{MG}{|O - C|^3} (P - O - 3z \hat{e}_3)$$

ossia

$$\vec{a}_R = -g \hat{e}_3 - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R - \frac{MG}{|O - C|^3} (x \hat{e}_1 + y \hat{e}_2 - 2z \hat{e}_3)$$

che è l'equazione del moto con correzione lineare sul campo  $\vec{g}$  cercata. Posto per brevità  $\alpha = MG/|O - C|^3 = 9.80665/6.37 \cdot 10^6 = 1.54 \cdot 10^{-6}$ , questa stessa equazione vettoriale si riesprime come sistema di equazioni scalari proiettando lungo gli assi  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega \sin \lambda_0 \dot{y} - \alpha x \\ \ddot{y} = -2\omega(\sin \lambda_0 \dot{x} + \cos \lambda_0 \dot{z}) - \alpha y \\ \ddot{z} = -g + 2\omega \cos \lambda_0 \dot{y} + 2\alpha z \end{cases}$$

che si verifica immediatamente essere equivalente al sistema del primo ordine in forma normale

$$\begin{cases} \dot{v}_x = 2\omega \sin \lambda_0 v_y - \alpha x \\ \dot{v}_y = -2\omega(\sin \lambda_0 v_x + \cos \lambda_0 v_z) - \alpha y \\ \dot{v}_z = -g + 2\omega \cos \lambda_0 v_y + 2\alpha z \\ \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{z} = v_z \end{cases}$$

cui vanno assegnate le condizioni iniziali

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0 \quad v_x(0) = v_y(0) = v_z(0) = 0 \quad (9)$$

corrispondenti ad un grave che all'istante  $t = 0$  è collocato con velocità nulla nell'origine  $O$  e viene quindi abbandonato all'azione delle sollecitazioni gravitazionali/inerziali ad esso

applicate. Il problema di Cauchy così determinato risulta a sua volta equivalente al sistema di equazioni integrali — di Volterra —

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x(t) = \int_0^t [2\omega \sin \lambda_0 v_y - \alpha x] dt \\ v_y(t) = \int_0^t [-2\omega(\sin \lambda_0 v_x + \cos \lambda_0 v_z) - \alpha y] dt \\ v_z(t) = \int_0^t [-g + 2\omega \cos \lambda_0 v_y + 2\alpha z] dt \\ x(t) = \int_0^t v_x dt \\ y(t) = \int_0^t v_y dt \\ z(t) = \int_0^t v_z dt \end{array} \right. \quad (10)$$

alla cui soluzione approssimata si procede, come nel caso precedente, con il metodo delle approssimazioni successive di Picard.

L'approssimazione del primo ordine in  $t$  viene determinata sostituendo nelle (10) le condizioni iniziali (9) per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , in modo che risulta

$$\begin{aligned} v_x^{(1)}(t) &= 0 \\ v_y^{(1)}(t) &= 0 \\ v_z^{(1)}(t) &= -gt \\ x^{(1)}(t) &= 0 \\ y^{(1)}(t) &= 0 \\ z^{(1)}(t) &= 0 \end{aligned}$$

L'ulteriore inserimento di queste relazioni nelle (10) conduce al secondo ordine di approssimazione

$$\begin{aligned} v_x^{(2)}(t) &= 0 \\ v_y^{(2)}(t) &= \int_0^t [-2\omega \cos \lambda_0 (-gt)] dt = g\omega \cos \lambda_0 t^2 \\ v_z^{(2)}(t) &= -gt \\ x^{(2)}(t) &= 0 \\ y^{(2)}(t) &= 0 \\ z^{(2)}(t) &= -\frac{gt^2}{2} \end{aligned}$$

che sostituito a propria volta nelle (10) conduce alla terza approssimazione di Picard

$$v_x^{(3)}(t) = \int_0^t 2\omega \sin \lambda_0 g \omega \cos \lambda_0 t^2 dt = \frac{2}{3} g \sin \lambda_0 \cos \lambda_0 \omega^2 t^3$$

$$v_y^{(3)}(t) = \int_0^t 2\omega \cos \lambda_0 g t dt = g \omega \cos \lambda_0 t^2$$

$$v_z^{(3)}(t) = -gt + \int_0^t [2\omega \cos \lambda_0 g \omega \cos \lambda_0 t^2 - \alpha g t^2] dt = -gt + g(2\cos^2 \lambda_0 \omega^2 - \alpha) \frac{t^3}{3}$$

$$x^{(3)}(t) = 0$$

$$y^{(3)}(t) = g \omega \cos \lambda_0 \frac{t^3}{3}$$

$$z^{(3)}(t) = -\frac{gt^2}{2} .$$

Per l'approssimazione del quarto ordine in  $t$  si ha poi

$$v_x^{(4)}(t) = \int_0^t 2\omega \sin \lambda_0 g \omega \cos \lambda_0 t^2 dt = \frac{2}{3} g \sin \lambda_0 \cos \lambda_0 \omega^2 t^3$$

$$\begin{aligned} v_y^{(4)}(t) &= \int_0^t \left[ -2\omega \sin \lambda_0 \frac{2}{3} g \sin \lambda_0 \cos \lambda_0 \omega^2 t^3 + 2\omega \cos \lambda_0 g t - \right. \\ &\quad \left. - 2\omega \cos \lambda_0 (2\cos^2 \lambda_0 g \omega^2 - \alpha g) \frac{t^3}{3} - \alpha g \omega \cos \lambda_0 \frac{t^3}{3} \right] dt = \\ &= g \omega \cos \lambda_0 t^2 - \int_0^t \left[ \frac{4}{3} g \sin^2 \lambda_0 \cos \lambda_0 \omega^3 t^3 + \frac{4}{3} g \cos^3 \lambda_0 \omega^3 t^3 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} \alpha g \cos \lambda_0 \omega t^3 + \frac{\alpha}{3} g \omega \cos \lambda_0 t^3 \right] dt = \\ &= g \omega \cos \lambda_0 t^2 - \int_0^t \left[ \frac{4}{3} g \cos \lambda_0 \omega^3 - \frac{\alpha}{3} g \cos \lambda_0 \omega \right] t^3 dt = \\ &= g \omega \cos \lambda_0 t^2 + \frac{1}{12} (\alpha - 4\omega^2) g \cos \lambda_0 \omega t^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_z^{(4)}(t) &= -gt + \int_0^t \left[ 2\omega \cos \lambda_0 g \omega \cos \lambda_0 t^2 + 2\alpha \left( -\frac{gt^2}{2} \right) \right] dt = \\ &= -gt + g(2\cos^2 \lambda_0 \omega^2 - \alpha) \frac{t^3}{3} \end{aligned}$$

$$x^{(4)}(t) = \frac{1}{6} g \sin \lambda_0 \cos \lambda_0 \omega^2 t^4$$

$$y^{(4)}(t) = g \omega \cos \lambda_0 \frac{t^3}{3}$$

$$z^{(4)}(t) = -\frac{gt^2}{2} + g(2\cos^2 \lambda_0 \omega^2 - \alpha) \frac{t^4}{12}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
 v_x^{(4)}(t) &= \frac{2}{3}g \sin \lambda_0 \cos \lambda_0 \omega^2 t^3 \\
 v_y^{(4)}(t) &= g\omega \cos \lambda_0 t^2 + \frac{1}{12}(\alpha - 4\omega^2)g \cos \lambda_0 \omega t^4 \\
 v_z^{(4)}(t) &= -gt + g(2\cos^2 \lambda_0 \omega^2 - \alpha) \frac{t^3}{3} \\
 x^{(4)}(t) &= \frac{1}{6}g \sin \lambda_0 \cos \lambda_0 \omega^2 t^4 \\
 y^{(4)}(t) &= g\omega \cos \lambda_0 \frac{t^3}{3} \\
 z^{(4)}(t) &= -\frac{gt^2}{2} + g(2\cos^2 \lambda_0 \omega^2 - \alpha) \frac{t^4}{12} .
 \end{aligned}$$

In conclusione, si può scrivere

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{1}{6}g \sin \lambda_0 \cos \lambda_0 \omega^2 t^4 + O(t^5) \\
 y(t) &= g\omega \cos \lambda_0 \frac{t^3}{3} + O(t^4) \\
 z(t) &= -\frac{gt^2}{2} + g(2\cos^2 \lambda_0 \omega^2 - \alpha) \frac{t^4}{12} + O(t^5) .
 \end{aligned}$$

Il moto di caduta è leggermente più rapido per via dell'aumentare di  $\vec{g}$  al diminuire della quota e quindi della distanza dal centro della Terra. Gli altri termini di moto rimangono invece inalterati al livello di approssimazione richiesto. Nello studio della deviazione verso oriente la variazione lineare di  $\vec{g}$  può essere dunque ignorata.

## 6. Pendolo di Foucault

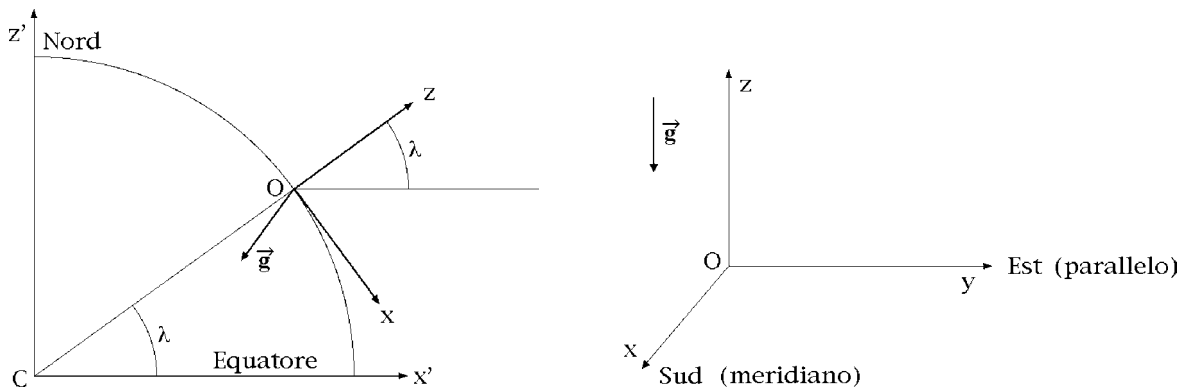
Un altro esempio notevole di moto di un punto materiale in un riferimento terrestre è costituito dal **pendolo di Foucault**. Si tratta di un comune pendolo conico collocato in una terna di riferimento rotante uniformemente rispetto ad un sistema di riferimento inerziale. L'azione della forza di Coriolis provoca la lenta rotazione del piano di oscillazione del pendolo e permette di evidenziare il moto di rotazione della Terra rispetto al sistema di riferimento inerziale delle stelle distanti.

### 6.1 Sistema di riferimento terrestre ed equazioni del moto

In un sistema di riferimento terrestre l'equazione della dinamica di un punto materiale  $P$ , di massa  $m$ , è data dall'espressione:

$$m\vec{a}_R = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R + \vec{F}_{\text{diverse}} + \vec{\Phi} \tag{6.1}$$

in cui  $m\vec{g}$  indica la forza peso, assunta costante,  $-2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R$  è forza di Coriolis,  $\vec{F}_{\text{diverse}}$  il risultante delle forze attive distinte dal peso e dalla forza di Coriolis e  $\vec{\Phi}$  quello delle eventuali reazioni vincolari, mentre  $\vec{a}_R$  e  $\vec{v}_R$  sono rispettivamente l'accelerazione e la velocità del punto  $P$  relative al riferimento assegnato. La terna terrestre  $Oxyz$  viene scelta, al solito, identificando l'origine  $O$  con un punto della superficie della Terra; l'asse  $Ox$  è orientato tangenzialmente al meridiano passante per  $O$  e diretto verso Sud, l'asse  $Oy$  viene disposto tangenzialmente al parallelo locale e orientato verso Est, mentre  $Oz$  è l'asse verticale condotto da  $O$  e diretto verso lo Zenit.  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  sono i corrispondenti versori ortonormali associati alla terna.



Lo scostamento del vettore accelerazione gravitazionale  $\vec{g}$ , che definisce la verticale locale, rispetto al segmento congiungente  $O$  con il centro  $C$  della Terra risulta sempre molto piccolo e può essere ignorato con ottima approssimazione. Rispetto alla terna assegnata l'accelerazione gravitazionale  $\vec{g}$  si esprime quindi nella forma:

$$\vec{g} = -g\hat{e}_3$$

mentre per il vettore velocità angolare costante della Terra una semplice proiezione ortogonale porge:

$$\vec{\omega} = -\omega \cos \lambda \hat{e}_1 + \omega \sin \lambda \hat{e}_3$$

essendo  $\lambda$  la latitudine geografica di  $O$  e  $\omega = |\vec{\omega}| = 2\pi/86164 = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$  il modulo della velocità angolare **siderale** terrestre — 86164 s è la durata del giorno siderale. Indicate poi con  $x, y, z$  le coordinate di  $P$  rispetto alla terna  $Oxyz$ , si ha

$$\vec{v}_R = \dot{x} \hat{e}_1 + \dot{y} \hat{e}_2 + \dot{z} \hat{e}_3 \quad \vec{a}_R = \ddot{x} \hat{e}_1 + \ddot{y} \hat{e}_2 + \ddot{z} \hat{e}_3$$

e di conseguenza

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R = \omega \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -\cos \lambda & 0 & \sin \lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \omega [-\sin \lambda \dot{y} \hat{e}_1 + (\sin \lambda \dot{x} + \cos \lambda \dot{z}) \hat{e}_2 - \cos \lambda \dot{y} \hat{e}_3]$$

per cui l'espressione della forza di Coriolis diventa

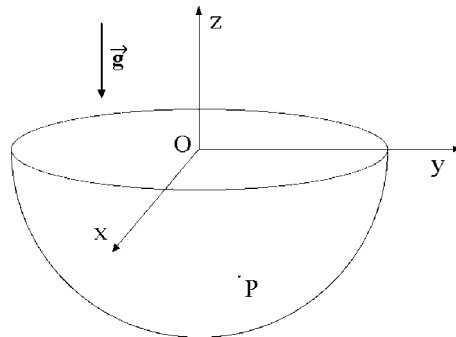
$$-2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R = 2m\omega [\sin \lambda \dot{y} \hat{e}_1 - (\sin \lambda \dot{x} + \cos \lambda \dot{z}) \hat{e}_2 + \cos \lambda \dot{y} \hat{e}_3] .$$

La sostituzione in (6.1) delle espressioni ottenute conduce infine all'equazione del moto:

$$\begin{aligned} m[\ddot{x} \hat{e}_1 + \ddot{y} \hat{e}_2 + \ddot{z} \hat{e}_3] &= \\ &= -mg \hat{e}_3 + 2m\omega [\sin \lambda \dot{y} \hat{e}_1 - (\sin \lambda \dot{x} + \cos \lambda \dot{z}) \hat{e}_2 + \cos \lambda \dot{y} \hat{e}_3] + \vec{F}_{\text{diverse}} + \vec{\Phi} . \end{aligned} \quad (6.2)$$

## 6.2 Definizione del pendolo

Il punto materiale  $P$  si intende soggetto alle sole forze peso e di Coriolis, e vincolato a rimanere su una superficie sferica fissa e liscia, di centro  $O$  e raggio  $R$ .



Per semplicità ci si limiterà a considerare i soli moti per i quali la quota  $z$  del punto  $P$  si mantiene negativa, per cui una parametrizzazione dell'emisfero inferiore si potrà scrivere nella forma:

$$P-O = x \hat{e}_1 + y \hat{e}_2 - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \hat{e}_3, \quad \forall (x, y) \in B(R) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}.$$

In una generica posizione individuata da  $(x, y) \in B(R)$ , due vettori tangenti alla superficie sono dati dalle derivate parziali della parametrizzazione rispetto ai parametri:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \hat{e}_1 + \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \hat{e}_3 \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \hat{e}_2 + \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \hat{e}_3 \quad (6.3)$$

e risultano, come è evidente, linearmente indipendenti — sebbene non ortogonali, in generale. Per inciso, questo significa che la parametrizzazione adottata è **regolare**. Le due equazioni pure del moto si otterranno quindi proiettando l'equazione (6.2) lungo i vettori tangenti sopra calcolati, in quanto l'ipotesi di vincolo liscio implica che si abbia:

$$\vec{\Phi} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{\Phi} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} = 0 .$$

Di conseguenza, ricordando che sul sistema non agiscono altre sollecitazioni attive oltre al peso e alla forza di Coriolis:

$$\left[ m[\ddot{x} \hat{e}_1 + \ddot{y} \hat{e}_2 + \ddot{z} \hat{e}_3] + mg \hat{e}_3 - 2m\omega [\sin \lambda \dot{y} \hat{e}_1 - (\sin \lambda \dot{x} + \cos \lambda \dot{z}) \hat{e}_2 + \cos \lambda \dot{y} \hat{e}_3] \right] \cdot \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

$$\left[ m[\ddot{x} \hat{e}_1 + \ddot{y} \hat{e}_2 + \ddot{z} \hat{e}_3] + mg \hat{e}_3 - 2m\omega [\sin \lambda \dot{y} \hat{e}_1 - (\sin \lambda \dot{x} + \cos \lambda \dot{z}) \hat{e}_2 + \cos \lambda \dot{y} \hat{e}_3] \right] \cdot \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

e sostituite le espressioni delle derivate parziali:

$$\begin{aligned} & \left[ m[\ddot{x} \hat{e}_1 + \ddot{y} \hat{e}_2 + \ddot{z} \hat{e}_3] + mg \hat{e}_3 - 2m\omega [\sin \lambda \dot{y} \hat{e}_1 - (\sin \lambda \dot{x} + \cos \lambda \dot{z}) \hat{e}_2 + \cos \lambda \dot{y} \hat{e}_3] \right] \cdot \\ & \cdot \left[ \hat{e}_1 + \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \hat{e}_3 \right] = 0 \\ & \left[ m[\ddot{x} \hat{e}_1 + \ddot{y} \hat{e}_2 + \ddot{z} \hat{e}_3] + mg \hat{e}_3 - 2m\omega [\sin \lambda \dot{y} \hat{e}_1 - (\sin \lambda \dot{x} + \cos \lambda \dot{z}) \hat{e}_2 + \cos \lambda \dot{y} \hat{e}_3] \right] \cdot \\ & \cdot \left[ \hat{e}_2 + \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \hat{e}_3 \right] = 0 \end{aligned}$$

si perviene alle due equazioni scalari:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega \sin \lambda \dot{y} + [\ddot{z} + g - 2\omega \cos \lambda \dot{y}] \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} &= 0 \\ \ddot{y} + 2\omega(\sin \lambda \dot{x} + \cos \lambda \dot{z}) + [\ddot{z} + g - 2\omega \cos \lambda \dot{y}] \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} &= 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

in cui si è ommesso l'inessenziale fattore  $m$  — il moto del sistema è indipendente dalla massa del punto materiale  $P$ . Avendosi poi:

$$z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

derivando successivamente rispetto al tempo si deducono le espressioni:

$$\dot{z} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\ddot{z} = \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \ddot{x} + \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \ddot{y} + \frac{d}{dt} \left[ \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \right] \dot{x} + \frac{d}{dt} \left[ \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \right] \dot{y}$$

l'ultima delle quali deve essere sostituita in (6.4) per condurre ad un sistema di due equazioni differenziali del secondo ordine nelle funzioni incognite  $x(t)$  e  $y(t)$ . Detto sistema può essere sempre ricondotto alla forma normale. Esso è infatti del tipo:

$$\begin{cases} \frac{R^2 - y^2}{R^2 - x^2 - y^2} \ddot{x} + \frac{xy}{R^2 - x^2 - y^2} \ddot{y} = f_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \\ \frac{xy}{R^2 - x^2 - y^2} \ddot{x} + \frac{R^2 - x^2}{R^2 - x^2 - y^2} \ddot{y} = f_2(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \end{cases}$$

con  $f_1$  ed  $f_2$  opportune funzioni di  $x, y, \dot{x}$  e  $\dot{y}$ . Il sistema matriciale equivalente si scrive:

$$\frac{1}{R^2 - x^2 - y^2} \begin{pmatrix} R^2 - y^2 & xy \\ xy & R^2 - x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \\ f_2(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \end{pmatrix}$$

e la matrice a primo membro risulta invertibile  $\forall (x, y) \in B(R)$ :

$$\det \begin{pmatrix} R^2 - y^2 & xy \\ xy & R^2 - x^2 \end{pmatrix} = R^2(R^2 - x^2 - y^2) > 0 \quad \forall (x, y) \in B(R)$$

implicando pertanto:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = (R^2 - x^2 - y^2) \begin{pmatrix} R^2 - y^2 & xy \\ xy & R^2 - x^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \\ f_2(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \end{pmatrix}.$$

Le equazioni del moto, così poste in forma normale, sono definite per  $(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \in B(R) \times \mathbb{R}^2$  e le funzioni a secondo membro sono di classe  $C^\infty$  sullo stesso insieme. Il problema di Cauchy corrispondente viene assegnato fissando i valori iniziali di  $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$  in  $B(R) \times \mathbb{R}^2$ . La relativa soluzione massimale è  $C^1$ . Dato il loro carattere non lineare, le equazioni del moto non possono essere integrate esplicitamente. Si rende quindi necessario il ricorso alla soluzione numerica del problema di Cauchy, o l'uso di metodi approssimati per il computo di soluzioni particolari.

### 6.3 Integrale primo dell'energia

Poiché il vincolo è fisso e liscio, le reazioni vincolari non compiono lavoro, risultandone costantemente nulla la potenza:

$$\vec{\Phi} \cdot \dot{P} = \vec{\Phi} \cdot \left( \frac{\partial P}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial P}{\partial y} \dot{y} \right) = \vec{\Phi} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \dot{x} + \vec{\Phi} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} \dot{y} = 0 \dot{x} + 0 \dot{y} = 0;$$

allo stesso modo, nulla è la potenza della forza di Coriolis:

$$-2m\vec{\omega} \wedge \dot{P} \cdot \dot{P} = -2m\vec{\omega} \cdot \dot{P} \wedge \dot{P} = 0.$$

La forza peso è invece posizionale e conservativa, per cui *vale il teorema di conservazione dell'energia meccanica*. In effetti, dall'equazione del moto

$$m\ddot{\vec{P}} - m\vec{g} + 2m\vec{\omega} \wedge \dot{\vec{P}} = \vec{\Phi}$$

si deduce che

$$(m\ddot{\vec{P}} - m\vec{g} + 2m\vec{\omega} \wedge \dot{\vec{P}}) \cdot \dot{\vec{P}} = \vec{\Phi} \cdot \dot{\vec{P}} = 0$$

e quindi

$$m\ddot{\vec{P}} \cdot \dot{\vec{P}} - m\vec{g} \cdot \dot{\vec{P}} = 0$$

relazione che può anche porsi nella forma equivalente:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{m}{2} |\dot{\vec{P}}|^2 - m\vec{g} \cdot (\vec{P} - \vec{O}) \right] = 0$$

e che implica la costanza, lungo qualsiasi soluzione delle equazioni del moto, dell'integrale dell'energia:

$$\frac{m}{2} |\dot{\vec{P}}|^2 + mg \hat{e}_3 \cdot (\vec{P} - \vec{O}) = E$$

con

$$mg \hat{e}_3 \cdot (\vec{P} - \vec{O}) = -mg\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

e

$$|\dot{\vec{P}}|^2 = \left| \frac{\partial P}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial P}{\partial y} \dot{y} \right|^2 = \left| \frac{\partial P}{\partial x} \right|^2 \dot{x}^2 + 2 \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} \dot{x} \dot{y} + \left| \frac{\partial P}{\partial y} \right|^2 \dot{y}^2.$$

L'energia meccanica

$$\frac{m}{2} |\dot{\vec{P}}|^2 - mg\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

è dunque costante lungo ogni soluzione delle equazioni pure del moto.

## 6.4 Piccoli moti nell'intorno della posizione di equilibrio ( $x, y, z$ ) = ( $0, 0, -R$ )

Il valore minimo dell'energia meccanica è

$$E_{\min} = -mgR$$

raggiunto per  $(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (0, 0, 0, 0)$  — punto  $P$  collocato nella posizione di equilibrio con velocità nulla. Se si assegna un valore di energia  $E$  leggermente superiore

$$E = -mgR + \varepsilon$$

con  $0 < \varepsilon \ll mgR$ , le corrispondenti soluzioni delle equazioni (6.4) devono soddisfare:

$$\frac{m}{2} |\dot{\vec{P}}|^2 - mg\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = -mgR + \varepsilon$$

ovvero

$$\frac{m}{2}|\dot{P}|^2 + mg[R - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}] = \varepsilon$$

con  $\frac{m}{2}|\dot{P}|^2 \geq 0$  e  $mg[R - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}] \geq 0 \forall (x, y) \in B(R)$ . Se ne deducono le due distinte disequaglianze:

$$mg[R - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}] \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad \frac{m}{2}|\dot{P}|^2 \leq \varepsilon \quad (6.5)$$

che si passa ad esaminare separatamente.

(i) La prima delle disequazioni (6.5) si può riscrivere nella forma:

$$R - \frac{\varepsilon}{mg} \leq \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$$

che, per l'essere il primo membro strettamente positivo in forza della condizione  $\varepsilon < mgR$ , equivale a

$$\left(R - \frac{\varepsilon}{mg}\right)^2 \leq R^2 - (x^2 + y^2)$$

e semplificando si riduce alla disequaglianza:

$$x^2 + y^2 \leq \frac{\varepsilon}{mg} \left(2R - \frac{\varepsilon}{mg}\right). \quad (6.6)$$

(ii) Nella seconda delle (6.5)

$$|\dot{P}|^2 = \left| \frac{\partial P}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial P}{\partial y} \dot{y} \right|^2 \leq \frac{2\varepsilon}{m}$$

conviene sostituire le espressioni esplicite (6.3) delle derivate parziali della parametrizzazione, da cui si deduce:

$$\begin{aligned} |\dot{P}|^2 &= \frac{1}{R^2 - x^2 - y^2} [(R^2 - y^2)\dot{x}^2 + 2xy\dot{x}\dot{y} + (R^2 - x^2)\dot{y}^2] = \\ &= \frac{1}{R^2 - x^2 - y^2} \begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^2 - y^2 & xy \\ xy & R^2 - x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nell'ipotesi che sia  $(\dot{x}, \dot{y}) \neq (0, 0)$ , l'ultima espressione si riscrive nella forma

$$\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{R^2 - x^2 - y^2} \begin{pmatrix} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} & \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^2 - y^2 & xy \\ xy & R^2 - x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \\ \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \end{pmatrix}$$

che conduce alla disequaglianza

$$|\dot{P}|^2 \geq \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{R^2 - x^2 - y^2} \inf_{n_x^2 + n_y^2 = 1} \begin{pmatrix} n_x & n_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^2 - y^2 & xy \\ xy & R^2 - x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$$

dove

$$\inf_{n_x^2+n_y^2=1} \begin{pmatrix} n_x & n_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^2 - y^2 & xy \\ xy & R^2 - x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$$

coincide con il più piccolo autovalore della matrice simmetrica

$$\begin{pmatrix} R^2 - y^2 & xy \\ xy & R^2 - x^2 \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

Dal polinomio caratteristico di (6.7):

$$\begin{aligned} \det \begin{vmatrix} R^2 - y^2 - \lambda & xy \\ xy & R^2 - x^2 - \lambda \end{vmatrix} &= \lambda^2 - \lambda(2R^2 - x^2 - y^2) + R^2(R^2 - x^2 - y^2) = \\ &= \lambda^2 - \lambda R^2 - \lambda(R^2 - x^2 - y^2) + R^2(R^2 - x^2 - y^2) = \lambda(\lambda - R^2) - (\lambda - R^2)(R^2 - x^2 - y^2) = \\ &= (R^2 - \lambda)(R^2 - x^2 - y^2 - \lambda) \end{aligned}$$

si ricavano gli autovalori della matrice

$$\lambda = R^2 \quad , \quad R^2 - x^2 - y^2$$

il minore dei quali è evidentemente  $R^2 - x^2 - y^2$ . Vale dunque la disuguaglianza

$$|\dot{P}|^2 \geq \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{R^2 - x^2 - y^2} (R^2 - x^2 - y^2) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

che sussiste banalmente anche nel caso di  $(\dot{x}, \dot{y}) = (0, 0)$ . In definitiva

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \leq \frac{2\varepsilon}{m}. \quad (6.8)$$

Le disuguaglianze (6.6) e (6.8) consentono di affermare che qualsiasi soluzione massimale di energia

$$E = -mgR + \varepsilon \quad , \quad \text{con } \varepsilon = |\varepsilon| \ll mgR \quad ,$$

risulta limitata:

$$x(t)^2 + y(t)^2 \leq \frac{\varepsilon}{mg} \left( 2R - \frac{\varepsilon}{mg} \right) \quad \dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 \leq \frac{2\varepsilon}{m}$$

e conseguentemente definita  $\forall t \in \mathbb{R}$ , in virtù del teorema di prolungabilità — le equazioni differenziali del moto sono definite in  $\{(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) \in \mathbb{R} \times B(R) \times \mathbb{R}^2\}$ , la cui frontiera  $\{(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) \in \mathbb{R}^5, x^2 + y^2 = R^2\}$  è inaccessibile alle soluzioni del tipo precedente per  $\varepsilon < mgR/2$ .

Gli spostamenti  $x(t)$ ,  $y(t)$  e le componenti di velocità  $\dot{x}(t)$ ,  $\dot{y}(t)$  si mantengono piccoli  $\forall t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{mg} \left( 2R - \frac{\varepsilon}{mg} \right)} & |y(t)| &\leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{mg} \left( 2R - \frac{\varepsilon}{mg} \right)} \\ |\dot{x}(t)| &\leq \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}} & |\dot{y}(t)| &\leq \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}} \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e per l'analisi dei piccoli moti nell'intorno di  $(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (0, 0, 0, 0)$  è quindi legittimo procedere alla linearizzazione delle equazioni del moto.

Le equazioni linearizzate si ricavano agevolmente dalle (6.3) una volta osservato che  $\dot{z}$  e  $\ddot{z}$  sono funzioni del secondo ordine e sostituita con  $R$  la radice  $\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ :

$$\ddot{x} - 2\omega \sin \lambda \dot{y} + \frac{g}{R}x = 0 \quad \ddot{y} + 2\omega \sin \lambda \dot{x} + \frac{g}{R}y = 0. \quad (6.9)$$

Questo sistema di equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti può essere risolto con metodi standard, ma è più interessante e rapido fare ricorso al metodo dei numeri complessi. A questo scopo, si moltiplica la seconda equazione per l'unità immaginaria  $i$  e si somma membro a membro la relazione ottenuta con la prima equazione

$$\ddot{x} - 2\omega \sin \lambda \dot{y} + \frac{g}{R}x + i\ddot{y} + 2i\omega \sin \lambda \dot{x} + i\frac{g}{R}y = 0$$

in modo che, posto  $\zeta = x + iy$ , si perviene all'equazione differenziale complessa

$$\ddot{\zeta} + 2i\omega \sin \lambda \dot{\zeta} + \frac{g}{R}\zeta = 0. \quad (6.10)$$

L'equazione caratteristica associata alla (6.9) è evidentemente

$$\mu^2 + 2i\omega \sin \lambda \mu + \frac{g}{R} = 0$$

e le sue radici sono date da:

$$\mu = \frac{1}{2} \left[ -2i\omega \sin \lambda \pm \sqrt{-4\omega^2 \sin^2 \lambda - 4\frac{g}{R}} \right] = -i\omega \sin \lambda \pm i\sqrt{\omega^2 \sin^2 \lambda + \frac{g}{R}} = -i\omega \sin \lambda \pm i\Omega$$

essendosi posto, per brevità,

$$\Omega := \sqrt{\omega^2 \sin^2 \lambda + \frac{g}{R}} \sim \sqrt{\frac{g}{R}}. \quad (6.11)$$

La soluzione generale dell'equazione linearizzata del moto (6.10) diventa allora:

$$\zeta(t) = c_1 e^{-i\omega \sin \lambda t + i\Omega t} + c_2 e^{-i\omega \sin \lambda t - i\Omega t} = e^{-i\omega \sin \lambda t} [c_1 e^{i\Omega t} + c_2 e^{-i\Omega t}] \quad (6.12)$$

con:

$$c_1 := a_1 + ib_1, \quad (a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad c_2 := a_2 + ib_2, \quad (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$$

costanti complesse arbitrarie dipendenti dalle condizioni iniziali. Il fattore compreso entro parentesi quadre nella (6.12) si può porre in una forma equivalente evidenziando le parti reale ed immaginaria:

$$\begin{aligned} c_1 e^{i\Omega t} + c_2 e^{-i\Omega t} &= (a_1 + ib_1)[\cos(\Omega t) + i \sin(\Omega t)] + (a_2 + ib_2)[\cos(\Omega t) - i \sin(\Omega t)] = \\ &= (a_1 + a_2) \cos(\Omega t) + (b_2 - b_1) \sin(\Omega t) + i[(b_1 + b_2) \cos(\Omega t) + (a_1 - a_2) \sin(\Omega t)] \end{aligned}$$

e risulta pertanto del tipo

$$c_1 e^{i\Omega t} + c_2 e^{-i\Omega t} = A_1 \cos(\Omega t + \phi_1) + iA_2 \cos(\Omega t + \phi_2),$$

potendosi così interpretare come una composizione di moti armonici ortogonali di uguale pulsazione  $\Omega \sim \sqrt{g/R}$  ed ampiezza e fase arbitrarie. Il risultato di una tale composizione consiste, come ben noto, in un moto armonico semplice lungo un segmento fissato — qualora lo sfasamento  $\phi_2 - \phi_1$  sia multiplo di  $\pi$  — o più in generale in un moto su traiettoria ellittica fissa.

In assenza del fattore di fase  $e^{-i\omega \sin \lambda t}$  — circostanza che ricorrerebbe per  $\omega = 0$ , ovvero in mancanza delle forze di Coriolis — il moto del pendolo conico avviene in modo che la proiezione ortogonale del punto  $P$  sul piano orizzontale  $Oxy$  descriva una *traiettoria ellittica costante oppure un segmento fisso*. In quest'ultimo caso il punto  $P$  si muove lungo la semicirconferenza, approssimata con un segmento orizzontale, di intersezione fra la superficie emisferica e un piano verticale costante (invarianza del piano di oscillazione del pendolo conico).

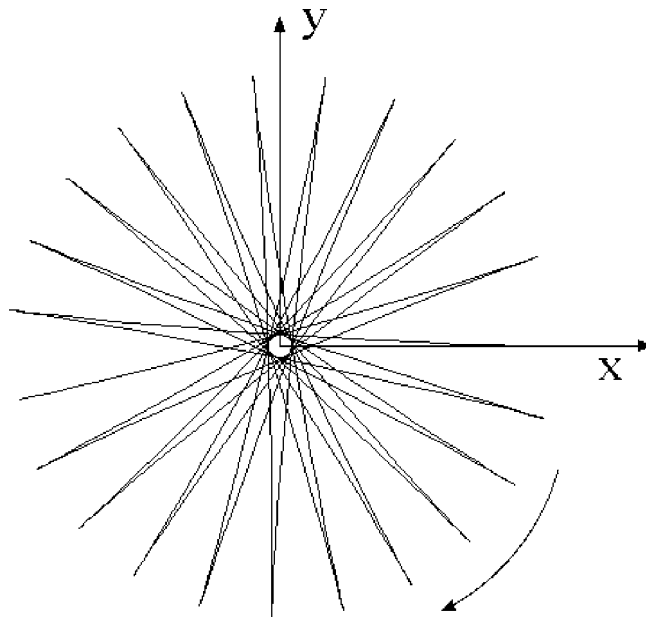
L'effetto del fattore  $e^{-i\omega \sin \lambda t}$  è una trasformazione lineare delle coordinate  $(x, y)$ :

$$\begin{aligned} (x', y') &= e^{-i\omega \sin \lambda t} (x + iy) = [\cos(\omega \sin \lambda t) - i \sin(\omega \sin \lambda t)] (x + iy) = \\ &= \cos(\omega \sin \lambda t) x + \sin(\omega \sin \lambda t) y + i[-\sin(\omega \sin \lambda t) x + \cos(\omega \sin \lambda t) y] \end{aligned}$$

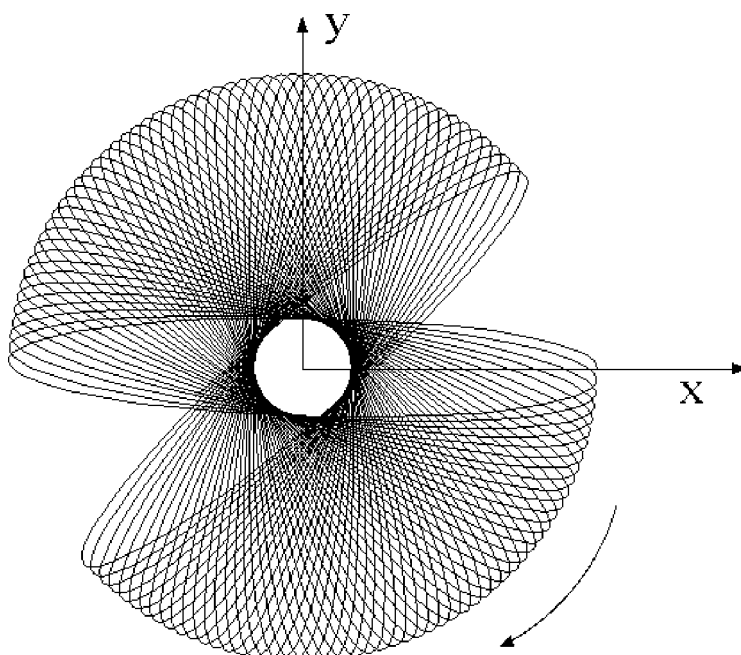
che si esprime in forma matriciale come:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega \sin \lambda t) & \sin(\omega \sin \lambda t) \\ -\sin(\omega \sin \lambda t) & \cos(\omega \sin \lambda t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

e descrive una rotazione **antioraria** e uniforme attorno all'asse  $Oz$ , con velocità angolare  $-\omega \sin \lambda$ . Per latitudini  $\lambda$  positive — emisfero settentrionale — la velocità angolare  $-\omega \sin \lambda$  è negativa e la rotazione risulta **in senso orario** attorno all'asse verticale  $Oz$ , mentre nell'emisfero australe si verifica il viceversa. Osservato poi che nei sistemi di riferimento terrestri è sempre  $|-\omega \sin \lambda| \ll \Omega \sim \sqrt{g/R}$ , si conclude che il moto generale del pendolo di Foucault è dato da un moto armonico semplice in un piano verticale lentamente e uniformemente rotante attorno all'asse  $Oz$ , come illustrato nella figura seguente:



oppure può intendersi come moto su una ellisse di dimensioni ed eccentricità fissate, lentamente rotante attorno all'asse verticale  $Oz$ , e con la stessa velocità angolare — traiettoria “a rosetta”:



Per il moto di rotazione della Terra attorno al proprio asse, rispetto alle stelle distanti, si ha:

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$$

e di conseguenza la velocità angolare di rotazione del piano di oscillazione del pendolo — ovvero della traiettoria ellittica — attorno all'asse verticale  $Oz$  risulta molto piccola:

$$-\omega \sin \lambda = -7.29 \cdot 10^{-5} \sin \lambda \text{ rad s}^{-1} .$$

Alla latitudine di  $45^\circ$  Nord si ha, in particolare,

$$-\omega \sin \lambda = -7.29 \cdot 10^{-5} \sin(\pi/4) \text{ rad s}^{-1} = -5.155 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1} = -10.6 \text{ }^\circ/\text{h}$$

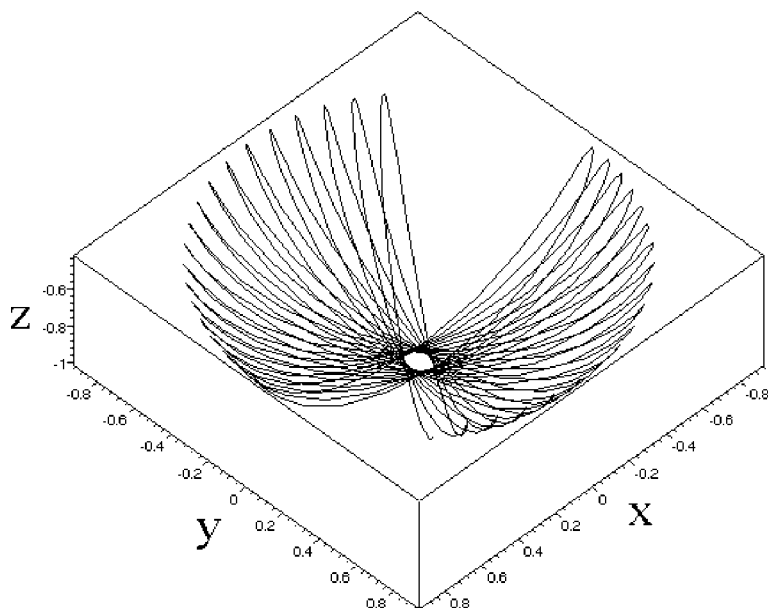
e il piano di oscillazione del pendolo di Foucault ruota di poco più di 10 gradi sessagesimali ogni ora.

### 6.5 Oscillazioni di ampiezza non piccola

Qualora i moti del sistema non siano caratterizzati da un valore di energia leggermente superiore a  $E_{\min} = -mgR$ , e non si riducano quindi a piccole oscillazioni nell'intorno della configurazione di equilibrio, la procedura di linearizzazione perde qualsiasi significato ed è necessario procedere all'integrazione delle equazioni complete (6.4). Data l'evidente

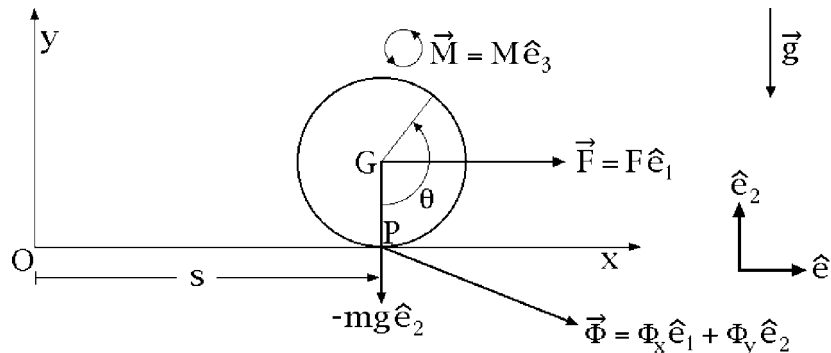
non linearità delle stesse, non sono disponibili soluzioni analitiche esplicite, e ci si deve limitare alla integrazione numerica di un assegnato problema di Cauchy. Non è più possibile approssimare il moto come localizzato nel piano orizzontale  $Oxy$ , trascurando le variazioni di quota del grave  $P$ , in modo che i moti del sistema appaiono in tutta la loro tridimensionalità.

In particolare, assumendo che all'istante iniziale il punto  $P$  sia collocato a grande distanza dalla configurazione di equilibrio e con velocità nulla, l'integrazione numerica delle equazioni del moto conduce alla seguente traiettoria — ovviamente ubicata sulla superficie sferica di raggio  $R$  e centro  $O$ :



## 7. Rotolamento di un disco su un piano orizzontale

Si consideri un disco circolare rigido, di centro  $G$ , raggio  $R$  e massa  $m$ , vincolato a muoversi nel piano verticale  $Oxy$  di una terna di riferimento cartesiana ortogonale  $Oxyz$ , mantenendosi a contatto con l'asse orizzontale  $Ox$ . Per semplicità si supponga che il baricentro del disco coincida con il suo centro geometrico  $G$ . Il disco, pesante, è soggetto ad una sollecitazione esterna  $\vec{F} = F \hat{e}_1$  applicata nel centro  $G$  e ad una coppia di momento  $\vec{M} = M \hat{e}_3$ . Il sistema descrive in modo schematico una ruota vincolata a rotolare su un piano orizzontale, in presenza di una eventuale forza di trazione  $\vec{F}$  e di una coppia motrice di momento  $\vec{M}$ .



Utilizzando l'ascissa  $s$  di  $G$  e l'angolo di rotazione  $\theta$  mostrato in figura, si vogliono ricavare le equazioni che governano il moto del sistema, sia nell'ipotesi che il disco rotoli con la possibilità di strisciare sull'asse orizzontale  $Ox$ , sia nel caso di puro rotolamento.

### 7.1 Puro rotolamento (rotolamento senza strisciamento)

Oltre alla coppia di momento  $M \hat{e}_3$ , il disco rigido è soggetto alla forza peso  $-mg \hat{e}_2$  e a quella di trazione  $F \hat{e}_1$ , entrambe applicate nel baricentro  $G$ , nonché ad una reazione vincolare  $\vec{\Phi} = \Phi_x \hat{e}_1 + \Phi_y \hat{e}_2$  agente sul punto  $P$  del disco posto a contatto con l'asse orizzontale. Le equazioni del moto si deducono facendo ricorso alle equazioni cardinali della dinamica.

L'equazione cardinale della quantità di moto si scrive:

$$m\ddot{G} = m\ddot{s} \hat{e}_1 = -mg \hat{e}_2 + F \hat{e}_1 + \Phi_x \hat{e}_1 + \Phi_y \hat{e}_2$$

e proiettando lungo gli assi ortogonali  $Ox$  ed  $Oy$  porge le due equazioni scalari:

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F + \Phi_x \\ 0 = -mg + \Phi_y \end{cases} \quad (7.1)$$

La condizione di puro rotolamento impone peraltro che il punto  $P$  del disco abbia velocità nulla, eguale a quella del corrispondente punto del piano orizzontale:

$$0 = \dot{P} = \dot{G} + \vec{\omega} \wedge (P - G) = \dot{s} \hat{e}_1 + \dot{\theta} \hat{e}_3 \wedge (-R \hat{e}_2) = (\dot{s} + R\dot{\theta}) \hat{e}_1$$

per cui deve aversi:

$$\dot{s} + R\dot{\theta} = 0 . \quad (7.2)$$

L'equazione cardinale del momento angolare, rispetto al polo  $G$ , assume poi la forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{K}_G &= M \hat{e}_3 + (P - G) \wedge (\Phi_x \hat{e}_1 + \Phi_y \hat{e}_2) = \\ &= M \hat{e}_3 + (-R \hat{e}_2) \wedge (\Phi_x \hat{e}_1 + 0) = M \hat{e}_3 + R\Phi_x \hat{e}_3 \end{aligned}$$

dove il momento angolare  $\vec{K}_G$  del disco è legato al momento d'inerzia  $I$  rispetto all'asse  $Gz$  dall'ovvia relazione:

$$\vec{K}_G = I\dot{\theta} \hat{e}_3$$

e quindi, sostituendo:

$$I\ddot{\theta} = M + R\Phi_x . \quad (7.3)$$

Vale la pena di osservare come allo stesso risultato si giunga considerando l'equazione cardinale del momento angolare rispetto al polo  $P$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{K}_P &= -\dot{P} \wedge m\dot{G} + \vec{M}_P = \vec{M}_P = (G - P) \wedge F \hat{e}_1 + (G - P) \wedge (-mg \hat{e}_2) + M \hat{e}_3 = \\ &= R \hat{e}_2 \wedge F \hat{e}_1 + R \hat{e}_2 \wedge (-mg \hat{e}_2) + M \hat{e}_3 = (-RF + M) \hat{e}_3 \end{aligned} \quad (7.4)$$

dove il momento angolare  $\vec{K}_P$  del disco in  $P$  si esprime ora per mezzo dell'equazione:

$$\vec{K}_P = I_{Pz} \dot{\theta} \hat{e}_3$$

in quanto  $P$  è per ipotesi un punto del corpo a velocità nulla, identificabile con il centro istantaneo di rotazione. Il momento d'inerzia  $I_{Pz}$  del disco rispetto all'asse  $Pz$  si ricava da  $I$  facendo uso del teorema di Huygens-Steiner:

$$I_{Pz} = I + mR^2$$

espressione che inserita nella (7.4) conduce all'equazione del moto:

$$(I + mR^2)\ddot{\theta} = -RF + M .$$

Questa può anche porsi nella forma equivalente:

$$I\ddot{\theta} = -mR^2\ddot{\theta} - RF + M = M + R\Phi_x - mR^2\ddot{\theta} - RF - R\Phi_x$$

e poiché risulta:

$$mR\ddot{\theta} + F + \Phi_x = mR^2\ddot{\theta} + m\ddot{s} = m \frac{d}{dt} (R\dot{\theta} + \dot{s}) = m \frac{d}{dt} 0 = 0$$

si conclude che

$$I\ddot{\theta} = M + R\Phi_x$$

in accordo con la (7.3).

Le equazioni (7.1), (7.2), (7.3) possono riassumersi nel seguente sistema:

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F + \Phi_x \\ \Phi_y = mg \\ \dot{s} + R\dot{\theta} = 0 \\ (I + mR^2)\ddot{\theta} = -RF + M \end{cases} \implies \begin{cases} \ddot{s} + R\ddot{\theta} = 0 \\ (I + mR^2)\ddot{\theta} = -RF + M \end{cases} \quad (7.5)$$

L'ultima equazione si risolve in  $\ddot{\theta}$ :

$$\ddot{\theta} = \frac{-RF + M}{I + mR^2} \quad (7.6)$$

mentre dalla prima e dalla terza segue l'espressione della componente  $\Phi_x$  della reazione vincolare:

$$\Phi_x = m\ddot{s} - F = -mR\ddot{\theta} - F = -mR \frac{M - RF}{I + mR^2} - F = -\frac{IF + mRM}{I + mR^2} .$$

A questa si affianca la componente verticale costante della reazione vincolare in  $P$ :

$$\Phi_y = mg$$

ed infine l'equazione per il moto orizzontale del baricentro  $G$ :

$$\ddot{s} = -R\ddot{\theta} = R \frac{RF - M}{I + mR^2} . \quad (7.7)$$

Per  $F$  ed  $M$  costanti l'equazione (7.6) descrive un moto rotatorio uniformemente accelerato del disco attorno al proprio asse baricentrale  $Gz$ , mentre la (7.7) rappresenta un contemporaneo moto uniformemente accelerato del baricentro secondo la direzione orizzontale  $Ox$ .

In definitiva, le equazioni del moto richieste sono:

$$\begin{cases} \ddot{s} = R \frac{RF - M}{I + mR^2} \\ \ddot{\theta} = -\frac{RF - M}{I + mR^2} \end{cases} \quad (7.8)$$

con la reazione vincolare in  $P$  data dall'espressione:

$$\vec{\Phi} = -\frac{IF + mRM}{I + mR^2} \hat{e}_1 + mg \hat{e}_2 . \quad (7.9)$$

### 7.1.1 Osservazione. Condizione per il puro rotolamento

L'effettivo realizzarsi della condizione di puro rotolamento dipende, come è ragionevole attendersi, dalla intensità delle forze di attrito radente che il piano orizzontale è in grado di esercitare sul disco nel suo punto di contatto  $P$  con il piano stesso.

In condizioni di puro rotolamento, il punto  $P$  del disco risulta istantaneamente in quiete rispetto alla terna assoluta  $Oxyz$ , identificandosi con il centro di rotazione istantanea del sistema rigido. Data l'assenza di strisciamento su  $Ox$ , la componente orizzontale della reazione vincolare agente sul disco in  $P$  deve quindi interpretarsi come una forza di attrito radente statico, per la quale vale la legge di Coulomb-Morin:

$$|\Phi_x| \leq \mu_s |\Phi_y|$$

che in virtù della (7.9) può anche esprimersi nella forma più esplicita:

$$\left| \frac{FI + mRM}{I + mR^2} \right| \leq \mu_s mg .$$

Da un semplice raccoglimento a fattor comune si deduce la relazione equivalente:

$$\left| F + M \frac{mR}{I} \right| \left| 1 + \frac{mR^2}{I} \right|^{-1} \leq \mu_s mg$$

che porta infine alla condizione necessaria e sufficiente perché il moto sia di puro rotolamento:

$$\left| F + M \frac{mR}{I} \right| \leq \mu_s mg \left( 1 + \frac{mR^2}{I} \right)$$

ossia:

$$\mu_s \geq \frac{1}{mg} \left( 1 + \frac{mR^2}{I} \right)^{-1} \left| F + M \frac{mR}{I} \right| . \quad (7.10)$$

Come ci si aspetta, la condizione (7.10) stabilisce che il moto del disco sulla retta  $Ox$  risulta di puro rotolamento se e soltanto se il coefficiente di attrito radente statico  $\mu_s$  assume un valore sufficientemente elevato.

## 7.2 Moto di rotolamento con strisciamento

Le equazioni cardinali della quantità di moto e del momento angolare in  $G$ :

$$m\ddot{G} = \vec{R} \quad \frac{d}{dt} \vec{K}_G = \vec{M}_G$$

porgono, come prima,

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F + \Phi_x \\ \Phi_y = mg \end{cases} \quad \text{e} \quad I\ddot{\theta} = M + R\Phi_x , \quad (7.11)$$

ma in questo caso la velocità del punto  $P$  del disco, tangente all'asse orizzontale  $Ox$ , risulta diversa da zero. La componente orizzontale  $\Phi_x$  della reazione vincolare applicata al disco in  $P$  deve quindi interpretarsi come una sollecitazione di attrito radente dinamico, che si esercita in senso opposto alla velocità  $\dot{P} = \dot{P} \cdot \hat{e}_1 \hat{e}_1$  e soddisfa la legge di Coulomb-Morin:

$$\Phi_x = \begin{cases} -\mu_d \Phi_y & \text{se } \hat{e}_1 \cdot \dot{P} > 0 \\ +\mu_d \Phi_y & \text{se } \hat{e}_1 \cdot \dot{P} < 0 . \end{cases} \quad (7.12)$$

Le equazioni differenziali del moto del sistema assumeranno dunque una forma diversa a seconda del segno di  $\dot{P} \cdot \hat{e}_1$ , osservato che:

$$\hat{e}_1 \cdot \dot{P} = \hat{e}_1 \cdot [\dot{G} + \dot{\theta} \hat{e}_3 \wedge (P - G)] = \dot{s} + R\dot{\theta} .$$

I casi  $\dot{P} \cdot \hat{e}_1 > 0$  e  $\dot{P} \cdot \hat{e}_1 < 0$ , ovvero  $\dot{s} + R\dot{\theta} > 0$  e  $\dot{s} + R\dot{\theta} < 0$ , dovranno essere esaminati separatamente.

(i) Se  $\hat{e}_1 \cdot \dot{P} > 0$ , ossia  $\dot{s} + R\dot{\theta} > 0$ , sostituendo le relazioni (7.12) nelle equazioni cardinali (7.11) si ottengono le equazioni del moto:

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F - \mu_d mg \\ I\ddot{\theta} = M - R\mu_d mg \end{cases}$$

immediatamente riconducibili alla forma normale:

$$\begin{cases} \ddot{s} = \frac{F}{m} - \mu_d g \\ \ddot{\theta} = \frac{M}{I} - \frac{R\mu_d mg}{I} . \end{cases} \quad (7.13)$$

Qualora  $F$  e  $M$  siano funzioni sufficientemente regolari di  $(t, s, \theta, \dot{s}, \dot{\theta})$ , il problema di Cauchy ottenuto associando alla (7.13) le condizioni iniziali  $(t_0, s_0, \theta_0, \dot{s}_0, \dot{\theta}_0)$  — con  $\dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0 > 0$  — ammette una ed una sola soluzione massimale, che avrà significato fisico finché sia  $\dot{s} + R\dot{\theta} > 0$ .

In particolare, se  $F$  ed  $M$  sono costanti assegnate le equazioni (7.13) si integrano esplicitamente e per  $(\dot{s}(0), \dot{\theta}(0)) = (\dot{s}_0, \dot{\theta}_0)$  forniscono:

$$\begin{cases} \dot{s} = \left( \frac{F}{m} - \mu_d g \right) t + \dot{s}_0 \\ \dot{\theta} = \left( \frac{M}{I} - \frac{R\mu_d mg}{I} \right) t + \dot{\theta}_0 \end{cases}$$

da cui si deduce la condizione di compatibilità:

$$\dot{s} + R\dot{\theta} = \left( \frac{F}{m} - \mu_d g + \frac{RM}{I} - \frac{R^2 \mu_d mg}{I} \right) t + \dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0 > 0$$

che specifica l'eventuale intervallo di valori di  $t$  per i quali la soluzione è fisicamente significativa.

(ii) Se  $\hat{e}_1 \cdot \dot{P} < 0$ , ossia  $\dot{s} + R\dot{\theta} < 0$ , le equazioni del moto differiscono dalle precedenti per il segno del termine di attrito radente dinamico:

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F + \mu_d mg \\ I\ddot{\theta} = M + R\mu_d mg \end{cases}$$

e le equazioni differenziali del moto in forma normale si scrivono:

$$\begin{cases} \ddot{s} = \frac{F}{m} + \mu_d g \\ \ddot{\theta} = \frac{M}{I} + \frac{R\mu_d mg}{I} \end{cases} \quad (7.14)$$

Le soluzioni di (7.14) sono fisicamente accettabili nell'intervallo di  $t$  contenente l'istante iniziale per il quale si abbia  $\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) < 0$ .

Nel caso notevole di  $F$  ed  $M$  costanti, una integrazione esplicita delle (7.14) con le condizioni iniziali  $(\dot{s}(0), \dot{\theta}(0)) = (\dot{s}_0, \dot{\theta}_0)$  porge:

$$\begin{cases} \dot{s} = \left(\frac{F}{m} + \mu_d g\right)t + \dot{s}_0 \\ \dot{\theta} = \left(\frac{M}{I} + \frac{R\mu_d mg}{I}\right)t + \dot{\theta}_0 \end{cases}$$

e conduce alla condizione di compatibilità per la soluzione:

$$\dot{s} + R\dot{\theta} = \left(\frac{F}{m} + \mu_d g + \frac{RM}{I} + \frac{R^2\mu_d mg}{I}\right)t + \dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0 < 0$$

che seleziona l'intervallo di  $t$  su cui la soluzione è fisicamente ammissibile.

### 7.3 Discussione generale

La dinamica del sistema è governata da tre diversi sistemi di equazioni differenziali ordinarie in forma normale, come illustrato di seguito.

(i) Se  $\dot{s} + R\dot{\theta} = 0$  e  $\mu_s \geq \left| \frac{IF + mRM}{I + mR^2} \right| \frac{1}{mg}$  il disco rotola senza strisciare sull'asse orizzontale  $Ox$  e le equazioni del moto si scrivono:

$$\ddot{s} = R \frac{RF - M}{I + mR^2} \quad \ddot{\theta} = -\frac{RF - M}{I + mR^2}; \quad (7.15)$$

(ii) per  $\dot{s} + R\dot{\theta} > 0$  la velocità del punto di contatto disco-guida è parallela e concorde con  $\hat{e}_1$ , per cui le equazioni del moto assumono la forma:

$$\ddot{s} = \frac{F}{m} - \mu_d g \quad \ddot{\theta} = \frac{M}{I} - \frac{R\mu_d mg}{I}; \quad (7.16)$$

(iii) se infine  $\dot{s} + R\dot{\theta} < 0$  si ha al contrario che la velocità del punto  $P$  di contatto fra il disco e l'asse orizzontale  $Ox$  è antiparallela ad  $\hat{e}_1$ , in modo che risulta:

$$\ddot{s} = \frac{F}{m} + \mu_d g \qquad \ddot{\theta} = \frac{M}{I} + \frac{R\mu_d mg}{I} . \quad (7.17)$$

Sotto condizioni molto generali sulle funzioni  $F(t, s, \theta, \dot{s}, \dot{\theta})$  ed  $M(t, s, \theta, \dot{s}, \dot{\theta})$ , ciascun sistema di equazioni ammette una ed una sola soluzione massimale per ogni scelta delle condizioni iniziali di  $(s, \theta, \dot{s}, \dot{\theta})$ , compatibili con le relative restrizioni sul segno di  $\dot{s} + R\dot{\theta}$ . Le soluzioni delle singole equazioni del moto vanno raccordate in modo che  $\dot{\theta}(t)$ ,  $\dot{s}(t)$  — e dunque anche  $\theta(t)$ ,  $s(t)$  — risultino continue. Le forze di attrito applicate, anche quando variano con discontinuità o non sono definite, sono infatti comunque finite e non possono indurre discontinuità nell'impulso. Si verifica facilmente che in tal modo è sempre possibile definire uno ed un solo moto del sistema, in senso massimale, per qualsiasi set assegnato di condizioni iniziali  $(s(t_0), \theta(t_0), \dot{s}(t_0), \dot{\theta}(t_0)) = (s_0, \theta_0, \dot{s}_0, \dot{\theta}_0) \in \mathbb{R}^4$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

La costruzione del suddetto moto avviene secondo lo schema seguente, che lo individua in modo univoco. Per semplicità ci si limiterà a considerare il moto nel futuro, cioè per  $t \geq t_0$ , restando inteso che una analoga procedura si applica alla definizione del moto nel passato.

**(1) Se  $\dot{s}(t_0) + R\dot{\theta}(t_0) > 0$**

il moto del sistema è descritto dalla soluzione  $(s(t), \theta(t), \dot{s}(t), \dot{\theta}(t))$  del problema di Cauchy associato al sistema (7.16), con la condizione iniziale  $(s_0, \theta_0, \dot{s}_0, \dot{\theta}_0)$  all'istante  $t = t_0$ . Ciò avviene sull'intervallo  $t \in [t_0, t_+]$  tale che:

$$\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) > 0 \quad \forall t \in [t_0, t_+) \quad \text{e} \quad \dot{s}(t_+) + R\dot{\theta}(t_+) = 0 .$$

Può naturalmente ricorrere il caso che non esista alcun  $t_+ > t_0$  per il quale risulti  $\dot{s}(t_+) + R\dot{\theta}(t_+) = 0$  e che, di conseguenza, il moto del sistema sia completamente descritto dalla soluzione di (7.16).

**(2) Se  $\dot{s}(t_0) + R\dot{\theta}(t_0) < 0$**

il moto del sistema si rappresenta per mezzo della soluzione  $(s(t), \theta(t), \dot{s}(t), \dot{\theta}(t))$  delle equazioni (7.17) con la condizione iniziale assegnata. L'intervallo di definizione  $[t_0, t_+]$  è individuato dalle condizioni:

$$\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) < 0 \quad \forall t \in [t_0, t_+) \quad \text{e} \quad \dot{s}(t_+) + R\dot{\theta}(t_+) = 0 .$$

Circa l'esistenza dell'estremo superiore  $t_+$  valgono le considerazioni già espresse nel caso precedente.

**(3) Se  $\dot{s}(t_0) + R\dot{\theta}(t_0) = 0$** 

il moto del sistema può essere descritto su un conveniente intervallo  $[t_0, t_+]$  dalla soluzione delle equazioni (7.15), (7.16) o (7.17) che soddisfi le condizioni iniziali assegnate. Precisamente:

- (a) si utilizza il sistema (7.15) qualora all'istante  $t_0$  la condizione di Coulomb dell'attrito radente statico (7.10) sia verificata

$$\mu_s \geq \left| \frac{IF + mRM}{I + mR^2} \right| \frac{1}{mg} \Big|_{t=t_0}$$

fissando il massimo  $t_+$  per il quale lungo la soluzione di (7.15) risulti

$$\mu_s \geq \left| \frac{IF + mRM}{I + mR^2} \right| \frac{1}{mg} \quad \forall t \in [t_0, t_+]$$

— il che peraltro assicura il verificarsi della condizione di puro rotolamento  $\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_+]$ ;

- (b) si fa ricorso al sistema (7.16) nel caso che all'istante  $t_0$  la legge di Coulomb dell'attrito radente statico non sia verificata

$$\mu_s < \left| \frac{IF + mRM}{I + mR^2} \right| \frac{1}{mg} \Big|_{t=t_0}$$

e nel contempo  $\dot{s} + R\dot{\theta}$  risulti crescente — ossia positiva — in un intorno destro di  $t_0$

$$\frac{d}{dt}(\dot{s} + R\dot{\theta})(t_0) = (\ddot{s} + R\ddot{\theta}) \Big|_{t=t_0} = \left( \frac{F}{m} - \mu_d g + \frac{RM}{I} - \frac{R^2 \mu_d mg}{I} \right) \Big|_{t=t_0} > 0. \quad (7.18)$$

L'istante  $t_+$  viene determinato in modo che si abbia

$$\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) > 0 \quad \forall t \in (t_0, t_+)$$

e  $\dot{s}(t_+) + R\dot{\theta}(t_+) = 0$  — all'istante  $t_+$  la velocità del punto di contatto disco-asse orizzontale si annulla, dopo avere assunto valori strettamente positivi in tutto l'intervallo aperto  $(t_0, t_+)$ ;

- (c) il sistema da impiegare è (7.17) qualora all'istante  $t_0$  la legge di Coulomb dell'attrito radente statico non risulti verificata

$$\mu_s < \left| \frac{IF + mRM}{I + mR^2} \right| \frac{1}{mg} \Big|_{t=t_0}$$

ed inoltre  $\dot{s} + R\dot{\theta}$  sia decrescente — dunque negativa — in un intorno destro di  $t_0$

$$\frac{d}{dt}(\dot{s} + R\dot{\theta})(t_0) = (\ddot{s} + R\ddot{\theta}) \Big|_{t=t_0} = \left( \frac{F}{m} + \mu_d g + \frac{RM}{I} + \frac{R^2 \mu_d mg}{I} \right) \Big|_{t=t_0} < 0. \quad (7.19)$$

L'istante  $t_+$  è fissato in modo che si abbia

$$\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) < 0 \quad \forall t \in (t_0, t_+)$$

e  $\dot{s}(t_+) + R\dot{\theta}(t_+) = 0$  — la velocità del punto di contatto fra disco e guida orizzontale si mantiene strettamente negativa nell'intervallo  $(t_0, t_+)$  e si annulla a  $t = t_+$ .

### 7.3.1 Osservazione. Mutua esclusione delle soluzioni (a), (b) e (c).

Le condizioni (7.18) e (7.19) sono alternative l'una all'altra. Qualora infatti esse risultassero valide simultaneamente, all'istante  $t_0$  si avrebbe:

$$\begin{cases} \left( -\frac{F}{m} + \mu_d g - \frac{RM}{I} + \frac{R^2 \mu_d mg}{I} \right) \Big|_{t=t_0} < 0 \\ \left( \frac{F}{m} + \mu_d g + \frac{RM}{I} + \frac{R^2 \mu_d mg}{I} \right) \Big|_{t=t_0} < 0 \end{cases}$$

e quindi, sommando membro a membro:

$$2\mu_d g + 2\frac{R^2 \mu_d mg}{I} < 0$$

una palese contraddizione, visto che  $\mu_d$ ,  $g$  ed  $I$  sono costanti positive assegnate. Se ne conclude che le procedure (b) e (c) non sono soltanto ovviamente alternative ad (a), richiedendo che la legge di Coulomb dell'attrito radente statico non sia verificata a  $t = t_0$ , ma anche mutuamente esclusive.

### 7.3.2 Osservazione. Caso critico.

A prima vista potrebbe sembrare che le tre soluzioni (a), (b), (c) non esauriscano la totalità dei casi possibili, in quanto nessuna di essere è accettabile nell'ipotesi che all'istante  $t_0$  risulti:

$$\begin{cases} \mu_s < \frac{1}{mg} \left| \frac{IF + mRM}{I + mR^2} \right| \\ \frac{F}{m} - \mu_d g + \frac{RM}{I} - \frac{R^2 \mu_d mg}{I} \leq 0 \\ \frac{F}{m} + \mu_d g + \frac{RM}{I} + \frac{R^2 \mu_d mg}{I} \geq 0 \end{cases} \quad (7.20)$$

La prima delle (7.20) esclude infatti l'applicabilità della procedura (a), mentre la seconda e la terza condizione non autorizzano il ricorso alle procedure (b) e (c), in quanto incompatibili con (7.18) e (7.19) rispettivamente. La situazione individuata dalle (7.20) si configura dunque come critica, non potendosi procedere alla descrizione del moto del sistema mediante nessuna delle equazioni differenziali (7.15), (7.16), (7.17).

**In realtà detto caso critico non può ricorrere** grazie alla ben nota condizione generale che lega i coefficienti di attrito radente statico e dinamico:

$$\mu_s \geq \mu_d \quad (7.21)$$

La seconda e la terza disequazione in (7.20) porgono infatti:

$$\begin{cases} IF - \mu_d mg I + mRM - mR^2 \mu_d mg \leq 0 \\ IF + \mu_d mg I + mRM + mR^2 \mu_d mg \geq 0 \end{cases}$$

da cui segue:

$$\begin{cases} IF + mRM \leq \mu_d mg(I + mR^2) \\ -\mu_d mg(I + mR^2) \leq IF + mRM \end{cases}$$

per cui:

$$|IF + mRM| \leq \mu_d mg(I + mR^2)$$

e quindi:

$$\left| \frac{IF + mRM}{I + mR^2} \right| \leq \mu_d mg . \tag{7.22}$$

Dalla prima disequazione (7.20) si deduce allora che:

$$\mu_s < \frac{1}{mg} \left| \frac{IF + mRM}{I + mR^2} \right| \leq \frac{1}{mg} \mu_d mg = \mu_d \implies \mu_s < \mu_d$$

in contraddizione con la relazione generale (7.21).

Si perviene così alla conclusione che per  $\dot{s}(t_0) + R\dot{\theta}(t_0) = 0$  le soluzioni (a), (b) e (c) non sono soltanto mutuamente esclusive, ma esauriscono anche la totalità dei casi possibili, essendo sempre applicabile una ed una sola di esse.

### 7.3.3 Costruzione del moto del sistema

La costruzione del moto del sistema per le assegnate condizioni iniziali  $(t_0, s_0, \theta_0, \dot{s}_0, \dot{\theta}_0)$  avviene mediante le procedure (1), (2) e (3) – (a), (b), (c), mutuamente esclusive ed esauritive della totalità dei casi possibili. L’applicazione di tali procedure consente di definire il moto del sistema dall’istante iniziale  $t_0$  al successivo istante  $t_+$ . Se  $t_+$  non risulta definito il moto nel futuro è completamente determinato — l’intervallo di definizione può essere superiormente limitato o meno. Qualora viceversa l’istante  $t_+$  sia definito, lo si potrà assumere come nuovo istante iniziale e si farà nuovamente ricorso alle procedure (1), (2), (3) – (a), (b), (c) con le nuove condizioni iniziali  $(t_+, s(t_+), \theta(t_+), \dot{s}(t_+), \dot{\theta}(t_+))$ . L’iterazione del metodo consente di costruire, in senso massimale, l’intero moto nel futuro del sistema.

Procedura applicata a $t = t_0$	Eq. integrata da $t_0$ a $t_+$	Proced. applicabili a $t = t_+$
(1)	(3.2)	(3-a) - (3-b) - (3-c)
(2)	(3.3)	(3-a) - (3-b) - (3-c)
(3-a)	(3.1)	(3-b) - (3-c)
(3-b)	(3.2)	(3-a) - (3-b) - (3-c)
(3-c)	(3.3)	(3-a) - (3-b) - (3-c)

## 7.4 Esempio notevole: forza di trazione e coppia motrice costanti

Nel caso particolare di  $F$  ed  $M$  costanti, le equazioni differenziali che descrivono il moto di puro rotolamento del sistema e i due casi di rotolamento con strisciamento possono essere integrate esplicitamente e descrivono moti uniformemente accelerati. Nella fattispecie, l'equazione (7.15), con condizioni iniziali  $(t_0, s_0, \theta_0, \dot{s}_0, \dot{\theta}_0)$ , ammette la soluzione massimale in  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} s(t) = s_0 + \dot{s}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}R \frac{RF - M}{I + mR^2}(t - t_0)^2 \\ \theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0(t - t_0) - \frac{1}{2} \frac{RF - M}{I + mR^2}(t - t_0)^2 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (7.23)$$

mentre per la (7.16) si ha:

$$\begin{cases} s(t) = s_0 + \dot{s}_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{F}{m} - \mu_d g \right) (t - t_0)^2 \\ \theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{M}{I} - \frac{R\mu_d mg}{I} \right) (t - t_0)^2 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (7.24)$$

e per la (7.17) risulta infine:

$$\begin{cases} s(t) = s_0 + \dot{s}_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{F}{m} + \mu_d g \right) (t - t_0)^2 \\ \theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{M}{I} + \frac{R\mu_d mg}{I} \right) (t - t_0)^2 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} . \quad (7.25)$$

Distinguiamo tre casi principali, con i relativi sottocasi.

### (1) Caso $\dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0 = 0$

(i) Nell'ipotesi che si abbia:

$$\mu_s \geq \left| \frac{IF + mRM}{I + mR^2} \right| \frac{1}{mg}$$

la soluzione (7.23) descrive il moto del sistema per ogni  $t$  reale. Dal momento che  $F$  ed  $M$  sono delle costanti preassegnate, infatti, la condizione per la validità della legge di Coulomb dell'attrito radente statico, se verificata, lo è costantemente  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

(ii) Se viceversa:

$$\mu_s < \left| \frac{IF + mRM}{I + mR^2} \right| \frac{1}{mg} \quad \text{e} \quad \frac{F}{m} - \mu_d g + \frac{RM}{I} - \frac{R^2 \mu_d mg}{I} > 0 \quad (7.26)$$

il moto è rappresentato dalla soluzione (7.24) per ogni  $t \geq t_0$ . Ciò segue dal fatto che, avendosi  $\dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0 = 0$ , lungo la (7.24) la velocità del punto di contatto disco-asse è data da:

$$\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) = \left( \frac{F}{m} - \mu_d g + \frac{RM}{I} - \frac{R^2 \mu_d m g}{I} \right) (t - t_0)$$

e si mantiene strettamente positiva  $\forall t > t_0$  in virtù della seconda condizione (7.26).

(iii) La terza possibilità è che risulti:

$$\mu_s < \left| \frac{IF + mRM}{I + mR^2} \right| \frac{1}{mg} \quad \text{e} \quad \frac{F}{m} + \mu_d g + \frac{RM}{I} + \frac{R^2 \mu_d m g}{I} < 0. \quad (7.27)$$

Nella fattispecie è la soluzione (7.25) dell'equazione differenziale (7.17) a fornire il moto del sistema per ogni  $t \geq t_0$ , in quanto:

$$\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) = \left( \frac{F}{m} + \mu_d g + \frac{RM}{I} + \frac{R^2 \mu_d m g}{I} \right) (t - t_0) < 0 \quad \forall t > t_0$$

per effetto della seconda diseuguaglianza (7.27).

L'analisi generale del moto già condotta in precedenza assicura che non possano ricorrere altre situazioni oltre a queste. La discussione del caso  $\dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0 = 0$  è dunque completa.

## (2) Caso $\dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0 > 0$

La soluzione (7.24) dell'equazione (7.16) porge:

$$\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) = \left( \frac{F}{m} - \mu_d g + \frac{RM}{I} - \frac{R^2 \mu_d m g}{I} \right) (t - t_0) + \dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(i) Per:

$$\frac{F}{m} - \mu_d g + \frac{RM}{I} - \frac{R^2 \mu_d m g}{I} \geq 0$$

allora è certamente  $\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) > 0 \forall t \geq t_0$  e quindi la soluzione (7.24) descrive l'intero moto del sistema nel futuro.

(ii) Se all'opposto:

$$\frac{F}{m} - \mu_d g + \frac{RM}{I} - \frac{R^2 \mu_d m g}{I} < 0$$

esisterà un istante  $t_+$  definito da:

$$t_+ = t_0 - (\dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0) \left( \frac{F}{m} - \mu_d g + \frac{RM}{I} - \frac{R^2 \mu_d m g}{I} \right)^{-1} > t_0$$

tale che  $\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) > 0 \forall t \in [t_0, t_+)$  e  $\dot{s}(t_+) + R\dot{\theta}(t_+) = 0$ ; per  $t > t_+$  la soluzione (7.24) non è applicabile, visto che la velocità del punto di contatto del disco sull'asse orizzontale diventerebbe negativa. Si hanno due possibilità.

- Qualora sia soddisfatta la legge dell'attrito radente statico:

$$\mu_s \geq \left| \frac{IF + mRM}{I + mR^2} \right| \frac{1}{mg} ,$$

per ogni  $t > t_+$  si applica l'equazione (7.15) con le nuove condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} s(t_+) &= s_0 + \dot{s}_0(t_+ - t_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{F}{m} - \mu_d g \right) (t_+ - t_0)^2 \\ \theta(t_+) &= \theta_0 + \dot{\theta}_0(t_+ - t_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{M}{I} - \frac{R\mu_d mg}{I} \right) (t_+ - t_0)^2 \\ \dot{s}(t_+) &= \dot{s}_0 + \left( \frac{F}{m} - \mu_d g \right) (t_+ - t_0) \\ \dot{\theta}(t_+) &= \dot{\theta}_0 + \left( \frac{M}{I} - \frac{R\mu_d mg}{I} \right) (t_+ - t_0) \end{aligned} \tag{7.28}$$

e la soluzione assume la forma:

$$\begin{cases} s(t) = s(t_+) + \dot{s}(t_+)(t - t_+) + \frac{1}{2} R \frac{RF - M}{I + mR^2} (t - t_+)^2 \\ \theta(t) = \theta(t_+) + \dot{\theta}(t_+)(t - t_+) - \frac{1}{2} \frac{RF - M}{I + mR^2} (t - t_+)^2 \end{cases} \quad \forall t \geq t_+$$

- Se viceversa la legge dell'attrito radente statico non è verificata, deve aversi necessariamente:

$$\frac{F}{m} + \mu_d g + \frac{RM}{I} + \frac{R^2 \mu_d mg}{I} < 0$$

e per  $t > t_+$  l'equazione da utilizzare è la (7.17) con gli stessi dati iniziali (7.28) a  $t = t_+$ . La soluzione diventa allora:

$$\begin{cases} s(t) = s(t_+) + \dot{s}(t_+)(t - t_+) + \frac{1}{2} \left( \frac{F}{m} + \mu_d g \right) (t - t_+)^2 \\ \theta(t) = \theta(t_+) + \dot{\theta}(t_+)(t - t_+) + \frac{1}{2} \left( \frac{M}{I} + \frac{R\mu_d mg}{I} \right) (t - t_+)^2 \end{cases} \quad \forall t \geq t_+ .$$

**(3) Caso  $\dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0 < 0$** 

Dalla soluzione (7.25) dell'equazione (7.17) si deduce che:

$$\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) = \left( \frac{F}{m} + \mu_d g + \frac{RM}{I} + \frac{R^2 \mu_d m g}{I} \right) (t - t_0) + \dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0 \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

(i) Se:

$$\frac{F}{m} + \mu_d g + \frac{RM}{I} + \frac{R^2 \mu_d m g}{I} \leq 0$$

risulta  $\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) < 0 \forall t \geq t_0$  e la soluzione (7.25) descrive completamente il moto del sistema nel futuro.

(ii) Se viceversa:

$$\frac{F}{m} + \mu_d g + \frac{RM}{I} + \frac{R^2 \mu_d m g}{I} > 0$$

la soluzione (7.25) può essere applicata soltanto fino all'istante  $t_+ > t_0$  definito dall'espressione:

$$t_+ = t_0 - (\dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0) \left( \frac{F}{m} + \mu_d g + \frac{RM}{I} + \frac{R^2 \mu_d m g}{I} \right)^{-1} > t_0$$

e per il quale risulta  $\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) < 0 \forall t \in [t_0, t_+)$  e  $\dot{s}(t_+) + R\dot{\theta}(t_+) = 0$ . Oltre questo istante la (7.25) non è più utilizzabile, dal momento che la velocità scalare del punto di contatto fra disco ed asse assumerebbe segno positivo. Due sono le possibilità.

– Se la legge dell'attrito radente statico risulta soddisfatta:

$$\mu_s \geq \left| \frac{IF + mRM}{I + mR^2} \right| \frac{1}{mg} ,$$

per ogni  $t > t_+$  si ricorre all'equazione (7.15) con le condizioni iniziali della forma (7.28), in modo che la soluzione risulta:

$$\begin{cases} s(t) = s(t_+) + \dot{s}(t_+)(t - t_+) + \frac{1}{2} R \frac{RF - M}{I + mR^2} (t - t_+)^2 \\ \theta(t) = \theta(t_+) + \dot{\theta}(t_+)(t - t_+) - \frac{1}{2} \frac{RF - M}{I + mR^2} (t - t_+)^2 \end{cases} \quad \forall t \geq t_+ .$$

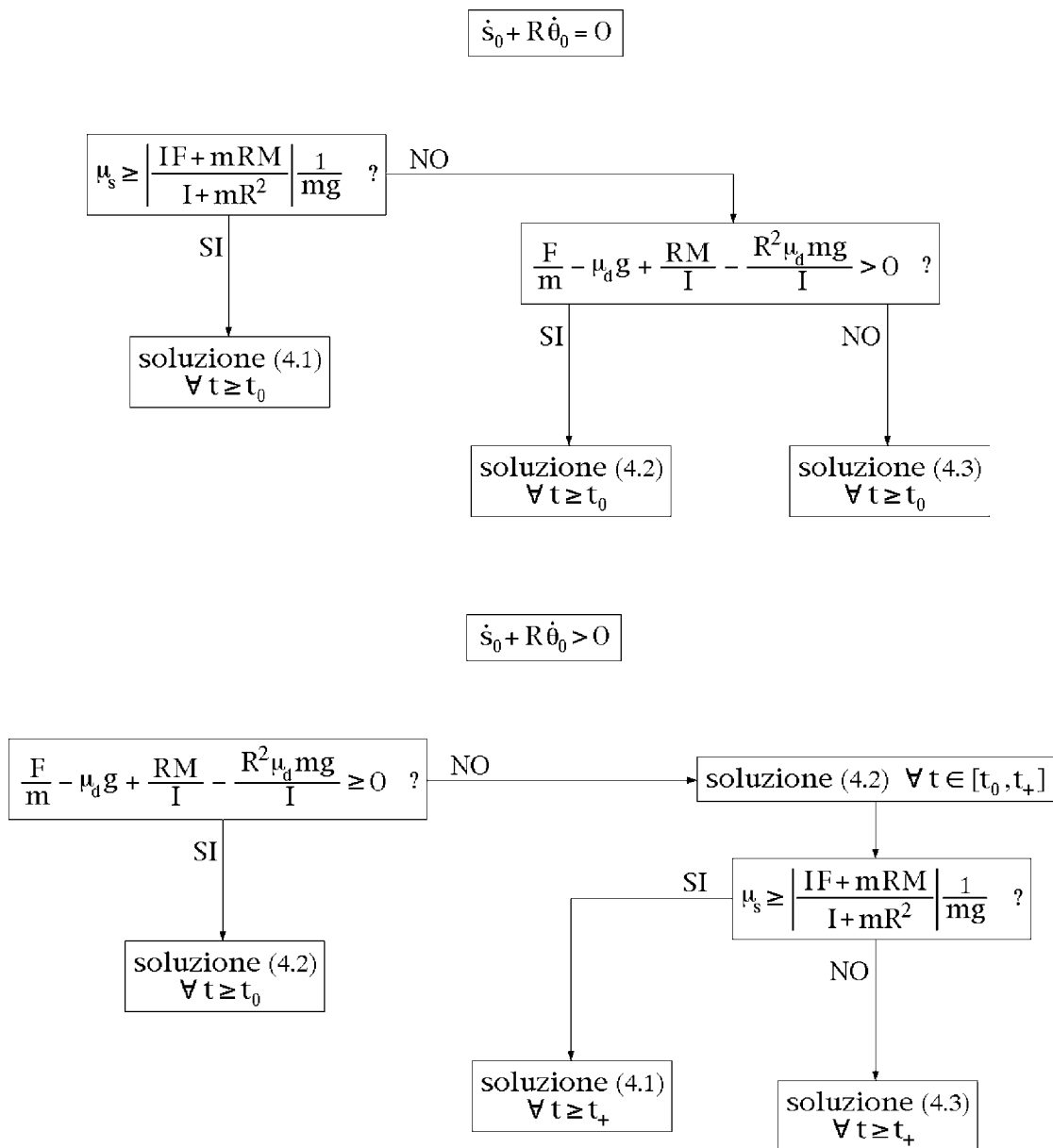
– Qualora viceversa la legge dell'attrito radente statico non sia verificata, deve aversi necessariamente:

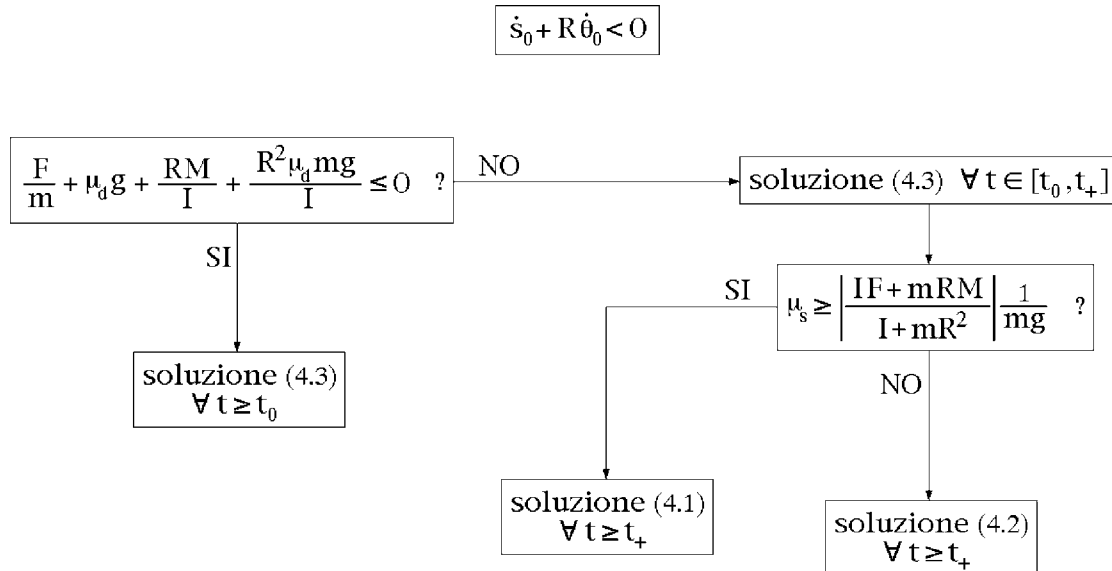
$$\frac{F}{m} - \mu_d g + \frac{RM}{I} - \frac{R^2 \mu_d m g}{I} > 0$$

e per  $t > t_+$  l'equazione da utilizzare è la (7.16) con gli stessi dati iniziali (7.28) a  $t = t_+$ . La soluzione diventa allora:

$$\begin{cases} s(t) = s(t_+) + \dot{s}(t_+)(t - t_+) + \frac{1}{2}\left(\frac{F}{m} - \mu_d g\right)(t - t_+)^2 \\ \theta(t) = \theta(t_+) + \dot{\theta}(t_+)(t - t_+) + \frac{1}{2}\left(\frac{M}{I} - \frac{R\mu_d mg}{I}\right)(t - t_+)^2 \end{cases} \quad \forall t \geq t_+ .$$

I tre schemi a blocchi riportati nel seguito illustrano la procedura per la determinazione del moto del sistema assegnate che siano le condizioni iniziali  $(t_0, s_0, \theta_0, \dot{s}_0, \dot{\theta}_0) \in \mathbb{R}^5$ .





### 7.5 Caso particolare: forza di trazione e coppia motrice nulle

Le equazioni differenziali (7.15), (7.16) e (7.17) che governano il moto del sistema assumono in questo caso una forma particolarmente semplice, al pari della loro soluzione generale.

- (i) Se  $\dot{s} + R\dot{\theta} = 0$ , poiché la condizione per la validità della legge dell'attrito radente statico  $\mu_s \geq \left| \frac{IF + mRM}{I + mR^2} \right| \frac{1}{mg} = 0$  è sempre verificata, il disco rotola senza strisciare sull'asse orizzontale  $Ox$  e le equazioni del moto si scrivono:

$$\ddot{s} = 0 \quad \ddot{\theta} = 0 ; \tag{7.29}$$

la soluzione del relativo problema di Cauchy con dato iniziale  $(t_0, s_0, \theta_0, \dot{s}_0, \dot{\theta}_0)$  è data dall'ovvia espressione:

$$\begin{cases} s(t) = s_0 + \dot{s}_0(t - t_0) \\ \theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0(t - t_0) \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{7.30}$$

in cui  $\dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0 = 0$ .

- (ii) Per  $\dot{s} + R\dot{\theta} > 0$  la velocità del punto di contatto disco-guida è parallela e concorde con  $\hat{e}_1$  e le equazioni del moto diventano:

$$\ddot{s} = -\mu_d g \quad \ddot{\theta} = -\frac{R\mu_d mg}{I} , \tag{7.31}$$

con soluzione:

$$\begin{cases} s(t) = s_0 + \dot{s}_0(t - t_0) - \frac{1}{2}\mu_d g(t - t_0)^2 \\ \theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0(t - t_0) - \frac{R\mu_d mg}{2I}(t - t_0)^2 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} . \tag{7.32}$$

(iii) Se infine  $\dot{s} + R\dot{\theta} < 0$  si ha al contrario che la velocità del punto  $P$  di contatto fra il disco e l'asse orizzontale  $Ox$  è antiparallela ad  $\hat{e}_1$ , per cui risulta:

$$\ddot{s} = \mu_d g \quad \ddot{\theta} = \frac{R\mu_d m g}{I} . \quad (7.33)$$

e la soluzione del generico problema di Cauchy si scrive:

$$\begin{cases} s(t) = s_0 + \dot{s}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\mu_d g(t - t_0)^2 \\ \theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0(t - t_0) + \frac{R\mu_d m g}{2I}(t - t_0)^2 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R} . \quad (7.34)$$

Come già discusso nel caso generale, le soluzioni precedenti consentono di determinare univocamente il moto del disco rigido sull'asse orizzontale, imponendo la semplice condizione di continuità in  $t$  delle funzioni  $s(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\dot{s}(t)$  e  $\dot{\theta}(t)$ .

**Se  $\dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0 = 0$**

il disco si limita a rotolare senza strisciare sull'asse orizzontale  $Ox$  ed il suo moto rototraslatorio uniforme è descritto dalla (7.30)  $\forall t \in \mathbb{R}$  — cioè tanto nel futuro quanto nel passato.

**Se  $\dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0 > 0$**

si fa uso della soluzione (7.32), che però implica:

$$\dot{s}(t) = -\mu_d g(t - t_0) + \dot{s}_0 \quad \dot{\theta}(t) = -\frac{R\mu_d m g}{I}(t - t_0) + \dot{\theta}_0$$

e deve soddisfare la condizione di compatibilità:

$$\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) = \left(-\mu_d g - \frac{R^2\mu_d m g}{I}\right)(t - t_0) + \dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0 > 0 , \quad (7.35)$$

sufficiente affinché sia applicabile l'equazione (7.31). Dalla (7.35) si deduce che la (7.32) risulta valida soltanto in un intervallo superiormente limitato, dovendo essere:

$$t < (\dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0) \left(\mu_d g + \frac{R^2\mu_d m g}{I}\right)^{-1} + t_0 := t_+$$

con  $t_+ > t_0$ . Il moto in  $s$  è uniformemente decelerato  $\forall t \in [t_0, t_+]$ . All'istante  $t_+$  la velocità del punto di contatto fra disco e asse orizzontale si annulla ed il moto prosegue senza strisciamento come moto uniforme — vale certamente  $\mu_s \geq 0$ , per cui la legge dell'attrito radente statico impone l'assenza di strisciamento.

Se  $\dot{\mathbf{s}}_0 + R\dot{\theta}_0 < 0$

dalla soluzione (7.34) si ha invece:

$$\dot{s}(t) = \mu_d g(t - t_0) + \dot{s}_0 \quad \dot{\theta}(t) = \frac{R\mu_d m g}{I}(t - t_0) + \dot{\theta}_0 ,$$

con la condizione di compatibilità:

$$\dot{s}(t) + R\dot{\theta}(t) = \left( \mu_d g + \frac{R^2 \mu_d m g}{I} \right) (t - t_0) + \dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0 < 0 . \quad (7.36)$$

La soluzione (7.34) dell'equazione (7.33) è dunque utilizzabile soltanto in un intervallo di  $t$  superiormente limitato:

$$t < -(\dot{s}_0 + R\dot{\theta}_0) \left( \mu_d g + \frac{R^2 \mu_d m g}{I} \right)^{-1} + t_0 := t_+$$

dove, di nuovo,  $t_+ > t_0$ . Il moto lungo  $Ox$  del disco risulta uniformemente accelerato nell'intervallo  $t \in [t_0, t_+]$ . Dall'istante  $t_+$  in poi, annullandosi la velocità del punto di contatto disco-asse, il moto diventa uniforme e di puro rotolamento.

Si conclude che qualunque sia la scelta delle condizioni iniziali, trascorso un intervallo di tempo abbastanza lungo, quello del disco sull'asse orizzontale diventa un moto di puro rotolamento, con traslazione uniforme del baricentro  $G$  secondo la direzione  $Ox$  e simultanea rotazione, pure uniforme, del disco attorno al proprio asse baricentrale  $Gz$ .

## 7.6 Attrito volvente dinamico

Al punto precedente si è giunti a prevedere che un disco rigido, vincolato a rotolare su un piano orizzontale e non soggetto ad alcuna sollecitazione oltre al proprio peso ed alla reazione vincolare nel punto di contatto con il piano, dovrebbe indefinitamente muoversi di moto rototraslatorio uniforme — dopo una eventuale fase iniziale di moto rototraslatorio uniformemente accelerato. Tale previsione risulta in palese contrasto con l'esperienza, la quale dimostra che nelle predette condizioni il moto del disco si arresta dopo un intervallo di tempo sufficientemente lungo. Dal momento che le leggi di Coulomb-Morin dell'attrito radente statico e dinamico riposano su una base sperimentale piuttosto solida e non v'è motivo di dubitare della loro validità nelle condizioni considerate, si deve presumere che l'analisi condotta al punto precedente sia di per sé corretta ma pur tuttavia incompleta, non potendo rendere conto dei fenomeni dissipativi osservati sperimentalmente e responsabili del progressivo rallentamento del moto e dell'arresto finale del sistema.

Un modo ragionevole di completare il modello di rotolamento e di ottenere risultati maggiormente in linea con quelli sperimentali consiste nell'ipotizzare che nel punto  $P$  di contatto fra il disco ed il piano non agisca soltanto la reazione vincolare  $\vec{\Phi} = \Phi_x \hat{e}_1 + \Phi_y \hat{e}_2$ , ma anche una coppia vincolare di momento  $\vec{M}^\phi = M^\phi \hat{e}_3$ . Detto momento è noto come **attrito volvente** — o di rotolamento — e l'esperienza insegna che esso obbedisce a leggi fenomenologiche analoghe a quelle già esaminate nel caso delle forze di attrito radente.

Nella fattispecie, per un moto di rotolamento già in atto — il vettore velocità angolare istantanea  $\vec{\omega}$  del disco che rotola è diverso da zero — il momento di attrito volvente obbedisce alla legge di Coulomb dell'attrito volvente dinamico ed è dato dall'espressione:

$$\vec{M}^\phi = -h_d \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} |\Phi_y|$$

dove  $\Phi_y$  indica la componente della reazione vincolare ortogonale al piano di rotolamento nel punto di contatto  $P$  all'istante considerato, mentre  $h_d \geq 0$  è una costante caratteristica dei corpi a contatto, avente le dimensioni fisiche di una lunghezza e nota come **coefficiente di attrito volvente dinamico** — o più precisamente, nella fattispecie, coefficiente di attrito di rotolamento dinamico.

Limitandosi al caso del disco rigido in moto di puro rotolamento, per il quale risulta  $\dot{s} + R\dot{\theta} = 0$ , l'equazione cardinale della quantità di moto porge:

$$m\ddot{s} = F + \Phi_x \quad \Phi_y = mg$$

mentre quella del momento angolare nel polo  $G$  comporta l'equazione scalare:

$$I\ddot{\theta} = M + R\Phi_x - h_d \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} |\Phi_y| \quad \implies \quad I\ddot{\theta} = M + R\Phi_x - h_d \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} mg .$$

Da quest'ultima, posto  $\dot{\theta} = -\dot{s}/R$  e  $\Phi_x = m\ddot{s} - F$ , si ottiene:

$$-\frac{I}{R}\ddot{s} = M + R(m\ddot{s} - F) + h_d \frac{\dot{s}}{|\dot{s}|} mg$$

che risolta in  $\ddot{s}$  conduce alla forma normale:

$$\ddot{s} = \frac{R}{I + mR^2} \left( RF - M - h_d \frac{\dot{s}}{|\dot{s}|} mg \right) .$$

Per  $\ddot{\theta}$  si ha invece:

$$\ddot{\theta} = -\frac{\ddot{s}}{R} = -\frac{1}{I + mR^2} \left( RF - M - h_d \frac{\dot{s}}{|\dot{s}|} mg \right)$$

ossia:

$$\ddot{\theta} = -\frac{1}{I + mR^2} \left( RF - M + h_d \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} mg \right) .$$

Le equazioni differenziali del moto di puro rotolamento in presenza di attrito volvente si scrivono dunque come:

$$\begin{cases} \ddot{s} = +\frac{R}{I + mR^2} \left( RF - M - h_d \frac{\dot{s}}{|\dot{s}|} mg \right) \\ \ddot{\theta} = -\frac{1}{I + mR^2} \left( RF - M + h_d \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} mg \right) \end{cases} \quad (7.37)$$

e generalizzano le equazioni (7.8) già precedentemente considerate. Le soluzioni di (7.37) sono accettabili fino a che  $\dot{\theta}$  — ovvero  $\dot{s}$  — mantiene lo stesso segno iniziale: l'annullarsi della velocità angolare scalare  $\dot{\theta}$  richiederebbe infatti l'introduzione di un momento di attrito volvente **statico** in luogo di quello dinamico qui considerato. In tale ipotesi, le soluzioni di (7.37) assumono la forma:

$$\begin{cases} s(t) = s_0 + \dot{s}_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{R}{I + mR^2} \left( RF - M - h_d \frac{\dot{s}_0}{|\dot{s}_0|} mg \right) (t - t_0)^2 \\ \theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0(t - t_0) - \frac{1}{2} \frac{1}{I + mR^2} \left( RF - M + h_d \frac{\dot{\theta}_0}{|\dot{\theta}_0|} mg \right) (t - t_0)^2 \end{cases}$$

e sono definite per ogni  $t$  compreso fra l'istante iniziale  $t_0$  e l'eventuale istante  $t_+$  di annullamento della velocità angolare:

$$t_+ = t_0 + \dot{\theta}_0 (I + mR^2) \left( RF - M + h_d \frac{\dot{\theta}_0}{|\dot{\theta}_0|} mg \right)^{-1}$$

qualora risulti  $t_+ > t_0$  — se  $t_+$  è indefinito la soluzione risulta accettabile  $\forall t \geq t_0$ .

Nel caso particolare del disco rigido non soggetto a forze di trazione o a coppie motrici, discusso al punto 5, vale  $F = 0$  e  $M = 0$ . Le equazioni (7.37) del moto di puro rotolamento diventano allora:

$$\begin{cases} \ddot{s} = -\frac{R}{I + mR^2} h_d \frac{\dot{s}}{|\dot{s}|} mg \\ \ddot{\theta} = -\frac{1}{I + mR^2} h_d \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} mg \end{cases}$$

con le soluzioni:

$$\begin{cases} s(t) = s_0 + \dot{s}_0(t - t_0) - \frac{1}{2} \frac{R}{I + mR^2} h_d \frac{\dot{s}_0}{|\dot{s}_0|} mg (t - t_0)^2 \\ \theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0(t - t_0) - \frac{1}{2} \frac{1}{I + mR^2} h_d \frac{\dot{\theta}_0}{|\dot{\theta}_0|} mg (t - t_0)^2 \end{cases}$$

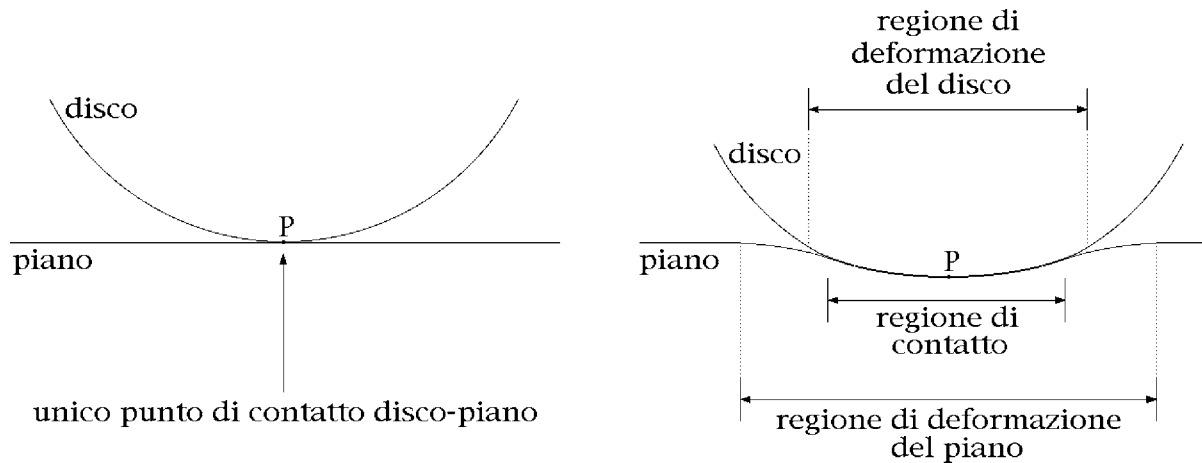
sempre definite sull'intervallo  $[t_0, t_+]$  di estremo superiore:

$$t_+ = t_0 + \dot{\theta}_0 (I + mR^2) \left( h_d \frac{\dot{\theta}_0}{|\dot{\theta}_0|} mg \right)^{-1} = t_0 + |\dot{\theta}_0| \frac{I + mR^2}{h_d mg} .$$

Dall'istante  $t_+$  in poi il sistema si mantiene indefinitamente in quiete nella configurazione finale raggiunta. Quello descritto è un moto rototraslatorio uniformemente accelerato, che in un intervallo di tempo finito porta il disco a raggiungere la quiete. L'accordo con l'esperienza è in tal modo ristabilito.

L'origine del momento di attrito volvente, statico o dinamico, può essere compresa riconoscendo che i corpi in gioco — disco e piano orizzontale — sono soltanto approssimativamente rigidi. In un conveniente intorno di  $P$ , il disco ed il piano subiranno una piccola

deformazione localizzata e le reazioni vincolari sul disco non saranno applicate nel solo punto  $P$  del contatto rigido, ma in una piccola superficie estesa intorno a  $P$  che costituirà la regione di effettivo contatto fra i due corpi. Poiché le reazioni vincolari non sono in realtà applicate ad un solo punto, il momento di tali reazioni rispetto a  $P$  potrà risultare non nullo e, se di segno opportuno, potrà rendere conto delle dissipazioni.



Il modello dell'attrito volvente nasce da una sorta di compromesso fra l'approssimazione di corpo rigido, usata per descrivere disco e piano orizzontale, e la presenza di inevitabili, piccole deformazioni. Queste fanno sì che il contatto non avvenga nel solo punto  $P$ , ma in corrispondenza di una piccola superficie nell'intorno di  $P$ . Le reazioni vincolari esercitate dal piano sul disco non si riducono quindi ad un'unica forza applicata in  $P$ , ma costituiscono un sistema di forze applicate con risultante  $\vec{\Phi}$  e momento risultante  $\vec{M}^\phi$  in  $P$ . Tornando a considerare il disco come un sistema sostanzialmente rigido, questi risultanti specificano completamente l'effetto delle reazioni vincolari sul disco stesso. Al complesso sistema delle reazioni vincolari prodotte nella regione di contatto può sostituirsi un sistema equivalente costituito da un'unica forza di reazione vincolare applicata in  $P$  — comprendente l'eventuale attrito radente statico o dinamico — e da un'unica coppia — che costituisce l'attrito volvente, statico o dinamico.

### 7.7 Attrito volvente statico

Accanto all'attrito volvente dinamico, di cui si è discusso al punto precedente, l'esperienza dimostra l'esistenza di un attrito volvente di tipo statico, che si manifesta quando il disco risulta in quiete rispetto al piano di rotolamento. Per illustrare la necessità di introdurre un momento di attrito volvente statico, si consideri il solito disco omogeneo pesante di massa  $m$ , raggio  $R$  e centro  $G$ , appoggiato sul piano orizzontale  $Ox$  e soggetto ad una forza costante orizzontale  $F \hat{e}_1$  applicata al baricentro  $G$ . È facile convincersi che un simile sistema non ammette alcuna configurazione di equilibrio. Indicate con  $\Phi_x$  e  $\Phi_y$  le componenti cartesiane della reazione vincolare agente sul disco nel punto  $P$  di contatto con

l'asse orizzontale ed applicando le equazioni cardinali della statica dovrebbe aversi infatti:

$$\begin{cases} -mg \hat{e}_2 + F \hat{e}_1 + \Phi_x \hat{e}_1 + \Phi_y \hat{e}_2 = 0 \\ (G - P) \wedge (-mg \hat{e}_2 + F \hat{e}_1) = 0 \end{cases} \quad (7.38)$$

e quindi, con la sostituzione  $G - P = R \hat{e}_2$  ed una proiezione ortogonale sugli assi:

$$\begin{cases} F + \Phi_x = 0 \\ -mg + \Phi_y = 0 \\ -RF = 0 . \end{cases}$$

Quest'ultimo sistema di equazioni fornisce le componenti della reazione vincolare  $\vec{\Phi} = \Phi_x \hat{e}_1 + \Phi_y \hat{e}_2$ :

$$\Phi_x = -F \quad \Phi_y = mg$$

mentre l'ultima delle tre equazioni diventa:

$$RF = 0$$

e chiaramente non ammette alcuna soluzione nell'ipotesi che sia  $F \neq 0$ . Non sono quindi definite configurazioni di equilibrio per il sistema! Ciò è in evidente contrasto con l'osservazione sperimentale che vede il disco appoggiato mantenersi in equilibrio sul piano orizzontale, a condizione che la sollecitazione  $F \hat{e}_1$  non risulti troppo intensa.

Per ripristinare l'accordo fra l'esperienza e le previsioni della Statica, si suppone che un momento di reazioni vincolari  $\vec{M}^\phi$  venga esercitato dal piano orizzontale sul disco, come conseguenza delle piccole deformazioni che l'uno e l'altro subiscono in corrispondenza della regione di contatto fra i due corpi. Con l'introduzione di questo momento addizionale, la seconda delle equazioni cardinali (7.38) si modifica in:

$$(G - P) \wedge (-mg \hat{e}_2 + F \hat{e}_1) + \vec{M}^\phi = 0$$

e conduce alla relazione:

$$-RF \hat{e}_3 + \vec{M}^\phi = 0 \quad (7.39)$$

che dunque assicura l'equilibrio del sistema se e soltanto se  $\vec{M}^\phi = RF \hat{e}_3$ . Detto momento di reazioni vincolari è noto come **attrito volvente statico** ed obbedisce a leggi fenomenologiche analoghe a quelle di Coulomb-Morin valide per gli attriti radenti e per l'attrito volvente dinamico. Indicata con  $\vec{\Phi}_n$  la componente della reazione vincolare agente sul disco in  $P$  ortogonale alle superfici in contatto, il momento di attrito volvente statico deve soddisfare la condizione:

$$|\vec{M}^\phi| \leq h_s |\vec{\Phi}_n|$$

essendo  $h_s > 0$  una costante caratteristica delle superfici a contatto, nota come **coefficiente di attrito volvente statico** e avente le dimensioni fisiche di una lunghezza. Il coefficiente risulta, con discreta approssimazione, sostanzialmente indipendente dal raggio

del disco. Nella fattispecie  $\vec{\Phi}_n = \Phi_y \hat{e}_2 = mg \hat{e}_2$  e la legge dell'attrito volvente statico diventa:

$$|\vec{M}^\phi| \leq h_s mg$$

e dovendo essere per la (7.39):

$$\vec{M}^\phi = RF \hat{e}_3$$

si conclude che condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio del disco sul piano orizzontale è la seguente:

$$R|F| \leq h_s mg$$

ossia:

$$|F| \leq \frac{h_s mg}{R} . \quad (7.40)$$

L'attrito volvente statico consente quindi di giustificare quegli equilibri la cui esistenza è ben dimostrata dall'osservazione sperimentale. Qualora la diseuguaglianza (7.40) non sia verificata, l'attrito volvente statico non è in grado di mantenere in equilibrio il sistema, ed il disco si pone in movimento sul piano.

# Indice degli argomenti

1.	Discussione di Weierstrass .....	1
1.1	Teorema. Soluzioni statiche .....	2
1.2	Teorema. Moti progressivi .....	2
1.3	Teorema. Punti di inversione e mete asintotiche .....	3
1.4	Esempio notevole .....	4
1.5	Applicazione dei teoremi .....	6
1.5.1	Caso NN — nessuno zero a sinistra e nessuno zero a destra .....	6
1.5.2	Caso NS — nessuno zero a sinistra e zero semplice a destra .....	7
1.5.3	Caso ND — nessuno zero a sinistra e zero doppio a destra .....	7
1.5.4	Caso SN — zero semplice a sinistra e nessuno zero a destra .....	8
1.5.5	Caso SS — zero semplice a sinistra e zero semplice a destra .....	8
1.5.6	Caso SD — zero semplice a sinistra e zero doppio a destra .....	10
1.5.7	Caso DN — zero doppio a sinistra e nessuno zero a destra .....	10
1.5.8	Caso DS — zero doppio a sinistra e zero semplice a destra .....	11
1.5.9	Caso DD — zero doppio a sinistra e zero doppio a destra .....	11
1.6	Osservazione. Soluzioni su intervalli limitati .....	11
1.6.1	Proposizione .....	11
2.	Discussione di Weierstrass per alcuni potenziali notevoli .....	13
2.1	Potenziale quartico attrattivo .....	13
2.2	Potenziale quartico repulsivo .....	14
2.3	Potenziale di Lennard-Jones (modello di potenziale interatomico) .....	14
2.4	Potenziale cubico attrattivo a $+\infty$ .....	15
2.5	Potenziale cubico repulsivo a $+\infty$ .....	16
2.6	Potenziale del tipo $U(x) = x^s$ , con $s > 0$ e $x > 0$ .....	16
2.7	Esempio di potenziale quadratico a tratti .....	17
2.8	La discussione di Weierstrass per un potenziale centrale .....	17
2.9	Discussione di Weierstrass per moti vincolati ad una curva fissa liscia, in presenza di un potenziale .....	19
2.9.1	Esempio .....	19
3.	Moto di un punto materiale soggetto ad un campo di forze centrali .....	20
3.1	Campo di forze centrali: definizione .....	20
3.2	Regolarità nell'origine .....	20
3.3	Il campo di forze centrali è posizionale e conservativo .....	21
3.3.1	Campo $\vec{F}$ continuo nel centro $O$ .....	22
3.3.2	Campo singolare nel centro $O$ .....	22
3.4	Equazione del moto per un punto materiale in un campo centrale .....	23
3.5	Integrali primi .....	24
3.5.1	Energia meccanica .....	24
3.5.2	Momento angolare rispetto al centro del campo .....	24

3.6	Conseguenze dell'essere $\vec{K}_O$ un integrale primo .....	25
3.7	Sistema di riferimento $Oxyz$ in cui il piano del moto coincide con il piano coordinato $Oxy$ . Costante delle aree .....	26
3.8	Descrizione cinematica dei moti piani: velocità e accelerazione istantanee in coordinate polari .....	27
3.8.1	Moto regolare in coordinate polari .....	27
3.8.2	Velocità e accelerazione .....	29
3.9	Velocità areale .....	30
3.10	Velocità areale e costante delle aree nei moti centrali. Seconda legge di Keplero .....	32
3.11	Equazioni del moto nel piano $Oxy$ in coordinate polari .....	32
3.12	Riduzione a forma normale. Calcolo delle condizioni iniziali per il problema di Cauchy .....	33
3.13	Equazione del moto radiale. Forze fittizie .....	34
3.14	Analisi di Weierstrass del moto radiale .....	35
3.15	Conseguenze dell'essere $c \neq 0$ .....	36
3.16	Formule di Binet .....	38
3.17	Equazione differenziale delle orbite in coordinate polari .....	38
3.18	Discussione di Weierstrass applicata all'equazione differenziale delle orbite in coordinate polari .....	39
3.19	Equazione differenziale delle orbite nel reciproco della distanza radiale .....	45
3.20	Moto in un campo newtoniano .....	46
3.20.1	Orbite in un campo newtoniano .....	46
3.20.2	Relazione fra eccentricità ed energia .....	48
3.20.3	Leggi di Keplero .....	49
3.21	Campo newtoniano con correzione inversamente proporzionale al cubo della distanza .....	50
3.21.1	Analisi di Weierstrass applicata all'equazione del moto radiale .....	56
3.22	Campo centrale elastico con correzione inversamente proporzionale al cubo della distanza .....	59
3.23	Campo centrale elastico .....	60
4.	Giroscopi .....	62
4.1	Definizione di solido a struttura giroscopica .....	62
4.2	Sulla tendenza dei giroscopi a mantenere invariata l'orientazione del loro asse di figura (asse giroscopico) rispetto ad una terna di riferimento inerziale ...	62
4.2.1	Variazioni relative di velocità angolare istantanea e momento angolare in $G$ ....	63
4.2.2	Variazione dell'asse di figura .....	66
4.3	Uso dei giroscopi per la stabilizzazione del moto dei sistemi .....	68
4.3.1	Imbarcazioni .....	70
4.3.2	Siluri e razzi .....	72
4.3.3	Proiettili .....	72
4.4	Dispositivo di orientamento inerziale .....	73
4.5	Tendenza al parallelismo .....	74
4.6	Bussola giroscopica .....	75

4.6.1	Proiezione lungo $\hat{e}_1$ .....	76
4.6.2	Proiezione lungo $\hat{e}_3$ .....	78
4.6.3	Equazioni del moto .....	79
4.6.4	Soluzioni statiche .....	80
4.6.5	Stabilità delle soluzioni statiche .....	81
4.6.6	Studio qualitativo dei moti .....	87
5.	Deviazione verso oriente di un grave in caduta libera in un riferimento terrestre .	88
5.1	Premessa .....	88
5.2	Equazione fondamentale della meccanica terrestre .....	90
5.3	Scelta del sistema di riferimento terrestre .....	94
5.4	Equazioni del moto scritte nella terna di riferimento terrestre .....	96
5.5	Soluzione approssimata di un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine in forma normale e a coefficienti costanti	
	Il metodo delle approssimazioni successive di Picard .....	97
5.5.1	Metodo delle approssimazioni successive di Picard .....	99
5.6	Applicazione del metodo di Picard alla soluzione delle equazioni del moto per il grave in caduta nel riferimento terrestre .....	100
5.6.1	Interpretazione del risultato .....	102
5.7	Correzione lineare sul campo di gravità $\vec{g}$ .....	103
6.	Pendolo di Foucault .....	109
6.1	Sistema di riferimento terrestre ed equazioni del moto .....	109
6.2	Definizione del pendolo .....	110
6.3	Integrale primo dell'energia .....	112
6.4	Piccoli moti nell'intorno della posizione di equilibrio $(x, y, z) = (0, 0, -R)$ .....	113
6.5	Oscillazioni di ampiezza non piccola .....	118
7.	Rotolamento di un disco su un piano orizzontale .....	120
7.1	Puro rotolamento (rotolamento senza strisciamento) .....	120
7.1.1	Osservazione. Condizione di puro rotolamento .....	123
7.2	Moto di rotolamento con strisciamento .....	123
7.3	Discussione generale .....	125
7.3.1	Osservazione. Mutua esclusione delle soluzioni $(a)$ , $(b)$ e $(c)$ .....	128
7.3.2	Osservazione. Caso critico .....	128
7.3.3	Costruzione del moto del sistema .....	129
7.4	Esempio notevole: forza di trazione e coppia motrice costanti .....	130
7.5	Caso particolare: forza di trazione e coppia motrice nulle .....	135
7.6	Attrito volvente dinamico .....	137
7.7	Attrito volvente statico .....	140