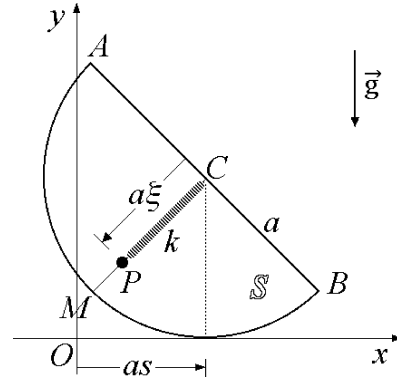


Esercizio di meccanica razionale

Un semidisco circolare \mathbb{S} , di centro C , raggio a e diametro AB , rotola senza strisciare con il proprio bordo curvo sull'asse orizzontale Ox di una terna inerziale $Oxyz$. Un punto materiale P , di massa m , scorre libero lungo il raggio CM ortogonale al diametro AB , connesso a C da una molla ideale di costante elastica k . La densità del disco in un suo generico punto Q vale $\sigma(Q) = m|Q - C|/a^3$. Il sistema si assume pesante, a vincoli ideali e descritto dalle variabili $(s, \xi) \in (-\pi/2, \pi/2) \times [0, 1]$ in figura — essendo $s = 0$ quando M si sovrappone ad O . Determinare:



- (a) gli equilibri ordinari;
- (b) le caratteristiche di stabilità degli equilibri ordinari;
- (c) l'espressione dell'energia cinetica;
- (d) le equazioni di Lagrange;
- (e) gli equilibri di confine.

Soluzione

(a) **Equilibri ordinari**

Le sollecitazioni applicate al sistema sono tutte posizionali conservative, potendosi ricondurre al peso sul punto P e sul semidisco, oltre che all'interazione elastica fra i punti C e P . Si tratta quindi di determinare il potenziale gravitazionale del punto P , il potenziale gravitazionale del semidisco \mathbb{S} e il potenziale elastico della molla ideale.

Potenziale gravitazionale del punto P

A causa della condizione di puro rotolamento, l'angolo formato dal vettore $M - C$ con la verticale condotta da C verso il basso è uguale a as/s , sebbene orientato in modo non conforme alla regola della mano destra; si ha pertanto:

$$P - C = a\xi(-\sin s \hat{e}_1 - \cos s \hat{e}_2).$$

D'altra parte, il centro C del semidisco si colloca giusto lungo la verticale condotta dal punto di contatto fra \mathbb{S} e Ox , e a distanza a da questo, per cui deve aversi:

$$C - O = as\hat{e}_1 + a\hat{e}_2.$$

Ne deriva che:

$$P - O = C - O + P - C = a(s - \xi \sin s)\hat{e}_1 + a(1 - \xi \cos s)\hat{e}_2 \tag{1}$$

in modo che il potenziale gravitazionale del punto risulta:

$$U_g^P = -mg\hat{e}_2 \cdot (P - O) = -mga(1 - \xi \cos s) = mga\xi \cos s + \text{costante}.$$

Potenziale gravitazionale del semidisco S

Occorre determinare massa e posizione del baricentro di S. A questo scopo conviene senz'altro introdurre una terna di riferimento $C\xi\eta z$ solidale al semidisco, con origine C, asse $C\xi$ parallelo al diametro AB e asse $C\eta$ parallelo e concorde con $M - C$. Introdotte le coordinate polari piane (ρ, ϕ) definite da:

$$(\xi, \eta) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi), \quad (\rho, \phi) \in [0, 1] \times [0, \pi],$$

la densità areale di S diventa:

$$\sigma(\rho, \phi) = \frac{m}{a^3} \rho \quad \forall (\rho, \phi) \in [0, 1] \times [0, \pi]$$

e la relativa massa si calcola come:

$$m_S = \int_S \sigma dA = \int_0^a d\rho \int_0^\pi d\phi \rho \frac{m}{a^3} \rho = \frac{m}{a^3} \int_0^a \rho^2 d\rho \int_0^\pi d\phi = \frac{m}{a^3} \frac{a^3}{3} \pi = \frac{\pi}{3} m.$$

Appare peraltro evidente che l'asse $C\eta$ costituisce un ovvio asse di simmetria del semidisco, e che pertanto il vettore posizione del baricentro G_S deve potersi esprimere nella forma:

$$G_S - C = \eta_S \hat{e}_\eta$$

con ordinata:

$$\begin{aligned} \eta_S &= \frac{1}{m_S} \int_S \eta \sigma dA = \frac{3}{\pi m} \int_0^a d\rho \int_0^\pi d\phi \rho \sin \phi \frac{m}{a^3} \rho = \\ &= \frac{3}{\pi a^3} \int_0^a \rho^3 d\rho \int_0^\pi \sin \phi d\phi = \frac{3}{\pi a^3} \frac{a^4}{4} [-\cos \phi]_0^\pi = \frac{3}{2\pi} a \end{aligned}$$

risultando perciò:

$$G_S - C = \frac{3}{2\pi} a \hat{e}_\eta = \frac{3}{2\pi} a (-\sin s \hat{e}_1 - \cos s \hat{e}_2)$$

ed infine:

$$G_S - O = C - O + G_S - C = a \left(s - \frac{3}{2\pi} \sin s \right) \hat{e}_1 + a \left(1 - \frac{3}{2\pi} \cos s \right) \hat{e}_2. \quad (2)$$

Il potenziale gravitazionale del semidisco è dunque:

$$U_g^S = -m_S g \hat{e}_2 \cdot (G_S - O) = -\frac{\pi}{3} m g a \left(1 - \frac{3}{2\pi} \cos s \right) = \frac{1}{2} m g a \cos s + \text{costante}.$$

Potenziale elastico

Alla molla ideale di costante elastica k è associato il potenziale:

$$U_{\text{el}} = -\frac{k}{2}|P - C|^2 = -\frac{ka^2}{2}\xi^2.$$

Potenziale del sistema

Il potenziale del sistema si ottiene sommando i potenziali parziali determinati in precedenza, ed omettendo le costanti additive:

$$U(s, \xi) = U_g^P + U_g^S + U_{\text{el}} = mga\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \cos s - \frac{ka^2}{2}\xi^2, \quad (s, \xi) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times [0, 1].$$

Equilibri ordinari

Gli equilibri ordinari sono i punti critici del potenziale compresi all'interno del dominio di definizione della parametrizzazione — e del potenziale U . Si tratta quindi di calcolare le derivate parziali prime:

$$\frac{\partial U}{\partial s}(s, \xi) = -mga\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \sin s \qquad \frac{\partial U}{\partial \xi}(s, \xi) = mga \cos s - ka^2\xi$$

ed imporre l'annullarsi nel rettangolo aperto $(s, \xi) \in (-\pi/2, \pi/2) \times (0, 1)$:

$$\begin{cases} -mga\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \sin s = 0 \\ mga \cos s - ka^2\xi = 0 \end{cases} \quad (s, \xi) \in (-\pi/2, \pi/2) \times (0, 1).$$

Dalla prima equazione si deduce $\sin s = 0$ e quindi:

$$s = 0,$$

per cui la seconda porge:

$$\xi = mg/ka.$$

Il sistema ammette pertanto l'unico equilibrio ordinario:

$$(s, \xi) = (0, mg/ka) \tag{3}$$

a condizione che si abbia $mg/ka < 1$.

(b) Stabilità degli equilibri

È facile verificare che l'unico equilibrio ordinario del sistema risulta stabile secondo Liapunov, quando definito. Le derivate parziali seconde del potenziale valgono infatti:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}(s, \xi) = -mga\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \cos s \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial s}(s, \xi) = -mga \sin s$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial s \partial \xi}(s, \xi) = -mga \sin s \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}(s, \xi) = -ka^2$$

e nella configurazione di equilibrio porgono la matrice hessiana:

$$H_U(0, mg/ka) = \begin{pmatrix} -mga\left(\frac{1}{2} + \frac{mg}{ka}\right) & 0 \\ 0 & -ka^2 \end{pmatrix}$$

che è palesemente definita negativa. L'equilibrio è quindi un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità segue dal teorema di Lagrange-Dirichlet.

(c) **Energia cinetica**

La proprietà additiva consente di esprimere l'energia cinetica del sistema come somma delle energie cinetiche del punto P e del semidisco.

Energia cinetica del punto P

Derivando in t il vettore posizione (1) si ricava la velocità istantanea del punto P :

$$\dot{P} = a(\dot{s} - \xi \cos s \dot{s} - \dot{\xi} \sin s)\hat{e}_1 + a(\xi \sin s \dot{s} - \dot{\xi} \cos s)\hat{e}_2$$

il cui modulo quadrato vale:

$$\begin{aligned} \dot{P}^2 &= a^2(\dot{s} - \xi \cos s \dot{s} - \dot{\xi} \sin s)^2 + a^2(\xi \sin s \dot{s} - \dot{\xi} \cos s)^2 = \\ &= a^2(\dot{s}^2 + \xi^2 \cos^2 s \dot{s}^2 + \dot{\xi}^2 \sin^2 s - 2\xi \cos s \dot{s}^2 - 2\sin s \dot{s} \dot{\xi} + 2\xi \sin s \cos s \dot{s} \dot{\xi} + \\ &+ \xi^2 \sin^2 s \dot{s}^2 + \dot{\xi}^2 \cos^2 s - 2\xi \sin s \cos s \dot{s} \dot{\xi}) = \\ &= a^2(\dot{s}^2 + \xi^2 \dot{s}^2 + \dot{\xi}^2 - 2\xi \cos s \dot{s}^2 - 2\sin s \dot{s} \dot{\xi}) \end{aligned}$$

e porge quindi, per l'energia cinetica del punto, l'espressione:

$$T_P = \frac{m}{2} \dot{P}^2 = \frac{ma^2}{2} (\dot{s}^2 + \xi^2 \dot{s}^2 - 2\xi \cos s \dot{s}^2 + \dot{\xi}^2 - 2\sin s \dot{s} \dot{\xi}).$$

Energia cinetica del semidisco \mathbb{S}

Data la mancanza di punti fissi, l'energia cinetica del semidisco deve essere determinata ricorrendo alla formula di König:

$$T_{\mathbb{S}} = \frac{1}{2} m_{\mathbb{S}} \dot{G}_{\mathbb{S}}^2 + \frac{1}{2} I_{G_{\mathbb{S}}z}^{\mathbb{S}} |\vec{\omega}_{\mathbb{S}}|^2.$$

La velocità istantanea del baricentro $G_{\mathbb{S}}$ si ricava derivando rispetto al tempo il vettore posizione (2):

$$\dot{G}_{\mathbb{S}} = a\left(1 - \frac{3}{2\pi} \cos s\right) \dot{s} \hat{e}_1 + a \frac{3}{2\pi} \sin s \dot{s} \hat{e}_2$$

e ha modulo quadrato:

$$\dot{G}_{\mathbb{S}}^2 = a^2 \left(1 + \frac{9}{4\pi^2} \cos^2 s - \frac{3}{\pi} \cos s + \frac{9}{4\pi^2} \sin^2 s\right) \dot{s}^2 = a^2 \left(1 + \frac{9}{4\pi^2} - \frac{3}{\pi} \cos s\right) \dot{s}^2.$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrale $G_{\mathbb{S}z}$ viene determinato per mezzo del teorema di Huygens-Steiner, calcolando direttamente il momento relativo all'asse Cz :

$$\begin{aligned} I_{G_{\mathbb{S}z}}^{\mathbb{S}} &= I_{C_{\mathbb{S}z}}^{\mathbb{S}} - m_{\mathbb{S}}|G_{\mathbb{S}} - C|^2 = \int_{\mathbb{S}} \rho^2 \sigma dA - m_{\mathbb{S}}|G_{\mathbb{S}} - C|^2 = \\ &= \int_0^a d\rho \int_0^\pi d\phi \rho \rho^2 \frac{m}{a^3} \rho - \frac{\pi}{3} m \left(\frac{3}{2\pi} a \right)^2 = \frac{m}{a^3} \int_0^a \rho^4 d\rho \int_0^\pi d\phi - \frac{3}{4\pi} ma^2 = \left(\frac{\pi}{5} - \frac{3}{4\pi} \right) ma^2. \end{aligned}$$

Per la velocità angolare istantanea del semidisco si ha infine, grazie alla condizione di puro rotolamento:

$$\vec{\omega}_{\mathbb{S}} = -\frac{1}{a} \frac{d}{dt}(as) \hat{e}_3 = -\dot{s} \hat{e}_3.$$

L'energia cinetica del semidisco diventa così:

$$\begin{aligned} T_{\mathbb{S}} &= \frac{1}{2} \frac{\pi}{3} ma^2 \left(1 + \frac{9}{4\pi^2} - \frac{3}{\pi} \cos s \right) \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{5} - \frac{3}{4\pi} \right) ma^2 \dot{s}^2 = \\ &= \frac{ma^2}{2} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{3}{4\pi} - \cos s + \frac{\pi}{5} - \frac{3}{4\pi} \right) \dot{s}^2 = \frac{ma^2}{2} \left(\frac{8}{15} \pi - \cos s \right) \dot{s}^2. \end{aligned}$$

Energia cinetica del sistema

L'energia cinetica del sistema è data dall'espressione:

$$T = T_{\mathbb{S}} + T_P = \frac{ma^2}{2} \left(\frac{8}{15} \pi - \cos s \right) \dot{s}^2 + \frac{ma^2}{2} [(1 + \xi^2 - 2\xi \cos s) \dot{s}^2 + \dot{\xi}^2 - 2 \sin s \dot{s} \dot{\xi}].$$

(d) Equazioni di Lagrange

Le equazioni di Lagrange si scrivono:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial s} \qquad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial \xi}.$$

Ricordando che nel calcolo dei binomi di Lagrange le coordinate e le velocità generalizzate devono riguardarsi come variabili indipendenti, si hanno le relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} &= ma^2 \left(\frac{8}{15} \pi - \cos s \right) \dot{s} + ma^2 [(1 + \xi^2 - 2\xi \cos s) \dot{s} - \sin s \dot{\xi}] \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) &= ma^2 \left(\frac{8}{15} \pi - \cos s \right) \ddot{s} + ma^2 \sin s \dot{s}^2 + \\ &\quad + ma^2 [(1 + \xi^2 - 2\xi \cos s) \ddot{s} + (2\xi \dot{\xi} - 2\dot{\xi} \cos s + 2\xi \sin s \dot{s}) \dot{s} - \sin s \ddot{\xi} - \cos s \dot{s} \dot{\xi}] \\ \frac{\partial T}{\partial s} &= \frac{ma^2}{2} \sin s \dot{s}^2 + ma^2 (\xi \sin s \dot{s}^2 - \cos s \dot{s} \dot{\xi}) \end{aligned}$$

e analogamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} &= ma^2 (\dot{\xi} - \sin s \dot{s}) & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} \right) &= ma^2 (\ddot{\xi} - \sin s \ddot{s} - \cos s \dot{s}^2) \\ \frac{\partial T}{\partial \xi} &= ma^2 (\xi - \cos s) \dot{s}^2. \end{aligned}$$

Le equazioni del moto risultano perciò:

$$\begin{aligned}
 & ma^2 \left(\frac{8}{15} \pi - \cos s \right) \ddot{s} + \frac{ma^2}{2} \sin s \dot{s}^2 + \\
 & + ma^2 \left[(1 + \xi^2 - 2\xi \cos s) \ddot{s} + (2\xi \dot{\xi} - 2\dot{\xi} \cos s + \xi \sin s \dot{s}) \dot{s} - \sin s \ddot{\xi} \right] = -mga \left(\xi + \frac{1}{2} \right) \sin s \\
 & ma^2 (\ddot{\xi} - \sin s \ddot{s} - \xi \dot{s}^2) = mga \cos s - ka^2 \xi.
 \end{aligned}$$

(e) **Equilibri di confine**

Poichè la parametrizzazione del sistema è definita nel rettangolo $(s, \xi) \in (-\pi/2, \pi/2) \times [0, 1]$, le configurazioni di confine corrispondono ai segmenti $\xi = 0$ e $\xi = 1$, con $s \in (-\pi/2, \pi/2)$. Segmenti che conviene esaminare separatamente, alla ricerca degli eventuali equilibri di confine.

Segmento $(s, \xi) = (s_o, 0)$, $s_o \in (-\pi/2, \pi/2)$

Per il teorema dei lavori virtuali una tale configurazione costituisce un equilibrio se e solo se

$$\frac{\partial U}{\partial s}(s_o, 0) \delta s + \frac{\partial U}{\partial \xi}(s_o, 0) \delta \xi \leq 0 \quad \forall \delta s \in \mathbb{R} \quad \forall \delta \xi \geq 0$$

vale a dire:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial s}(s_o, 0) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \xi}(s_o, 0) \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -mga \frac{1}{2} \sin s_o = 0 \\ mga \cos s_o \leq 0 \end{cases} \quad s_o \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Dalla prima equazione si deduce che $s_o = 0$, per cui la disequazione diventa:

$$mga \leq 0$$

ed è chiaramente incompatibile. *Non esistono equilibri di confine* lungo questo tratto della frontiera.

Segmento $(s, \xi) = (s_o, 1)$, $s_o \in (-\pi/2, \pi/2)$

Nella fattispecie il teorema dei lavori virtuali porge la seguente condizione necessaria e sufficiente perchè $(s, \xi) = (s_o, 1)$ sia un equilibrio:

$$\frac{\partial U}{\partial s}(s_o, 1) \delta s + \frac{\partial U}{\partial \xi}(s_o, 1) \delta \xi \leq 0 \quad \forall \delta s \in \mathbb{R} \quad \forall \delta \xi \leq 0$$

ossia, in termini più espliciti:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial s}(s_o, 1) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \xi}(s_o, 1) \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -mga \frac{3}{2} \sin s_o = 0 \\ mga \cos s_o - ka^2 \geq 0 \end{cases} \quad s_o \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Come prima, dall'equazione segue che necessariamente $s_o = 0$; di conseguenza, la disequazione si riduce a:

$$mga - ka^2 \geq 0$$

e risulta verificata se e soltanto se $mg/ka \geq 1$. *Il sistema ammette quindi un unico equilibrio di confine:*

$$(s, \xi) = (0, 1)$$

a condizione che si abbia $mg/ka \geq 1$. Da notare che il sussistere dell'equilibrio di confine esclude la presenza dell'equilibrio ordinario (3), definito per $mg/ka < 1$.