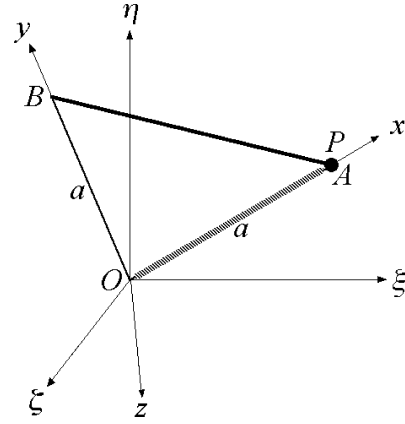


Esercizio 1

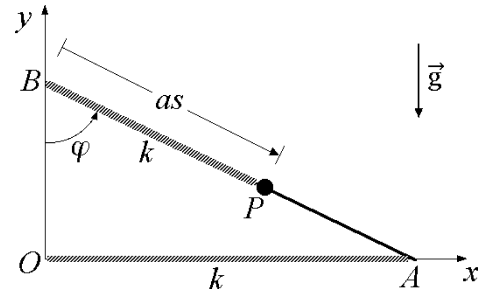
In una terna solidale $Oxyz = O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ un telaio triangolare ha vertici O , $A(a, 0, 0)$ e $B(0, a, 0)$, con $a > 0$. Un punto materiale P di massa m è bloccato sul telaio in A e collegato ad O da una molla ideale di grande costante elastica e massa trascurabile. La densità del telaio vale $\lambda(Q) = m|Q - O|^2/\sqrt{2}a^3 \forall Q \in AB$, mentre è trascurabile lungo OA e OB . Rispetto a una terna assoluta $O\xi\eta\zeta$ il telaio si muove con punto fisso O e all'istante $t = 0$ ha velocità angolare $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_1 - \omega\hat{e}_3$, con $\omega > 0$. Determinare del sistema:



- (a) la massa e la posizione del baricentro rispetto a $Oxyz$;
- (b) la matrice d'inerzia relativa a $Oxyz$ e i corrispondenti momenti principali;
- (c) il momento angolare in O e l'energia cinetica relative a $O\xi\eta\zeta$ per $t = 0$;
- (d) la velocità assoluta di P e la rappresentazione parametrica dell'asse di Mozzi per $t = 0$ — per esprimere i risultati si usi la base $\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$.
- (e) Se all'istante $t = 0$ il punto P si staccasse dal telaio e sotto l'azione della molla si spostasse bruscamente in O , ivi bloccandosi, quale sarebbe la velocità angolare del sistema immediatamente dopo lo spostamento di P ?

Esercizio 2

Nel piano Oxy di una terna inerziale $Oxyz$ un'asta omogenea AB , di lunghezza a e massa m , ha gli estremi A e B vincolati a scorrere lungo l'asse orizzontale Ox e quello verticale Oy , rispettivamente. Un punto materiale P , pure di massa m , può muoversi liberamente lungo AB . Due molle di eguale costante elastica $k = 2mg/a$ collegano B con P e A con l'origine. Il sistema è pesante. Assunti i vincoli ideali e introdotte le coordinate lagrangiane $(s, \varphi) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$ in figura, determinare del sistema:



- (a) gli equilibri ordinari;
- (b) le proprietà di stabilità degli equilibri ordinari;
- (c) l'espressione dell'energia cinetica;
- (d) le equazioni pure del moto;
- (e) gli eventuali equilibri di confine.

Soluzione dell'esercizio 1

(a) Massa e baricentro

Rispetto alla terna solidale $Oxyz$ il lato AB del telaio è descritto dalla parametrizzazione:

$$Q(x) - O = x\hat{e}_1 + (a - x)\hat{e}_2, \quad x \in [0, a],$$

con densità:

$$\lambda(x) = \frac{m}{\sqrt{2}a^3} |x\hat{e}_1 + (a - x)\hat{e}_2|^2 = \frac{m}{\sqrt{2}a^3} (2x^2 + a^2 - 2ax), \quad x \in [0, a]$$

ed elemento infinitesimo di lunghezza:

$$ds = |Q'(x)| dx = |\hat{e}_1 - \hat{e}_2| dx = \sqrt{2} dx$$

I lati OA e OB non devono essere parametrizzati in quanto privi di massa.

Massa del lato AB (e del telaio)

La massa del telaio si identifica con quella del solo lato AB , determinabile per integrazione diretta della densità lineare:

$$\begin{aligned} m_{AB} &= \int_{AB} \lambda ds = \int_0^a \frac{m}{\sqrt{2}a^3} (2x^2 + a^2 - 2ax) \sqrt{2} dx = \frac{m}{a^3} \int_0^a (2x^2 + a^2 - 2ax) dx = \\ &= \frac{m}{a^3} \left[\frac{2}{3}x^3 + a^2x - ax^2 \right]_0^a = \frac{m}{a^3} \left(\frac{2}{3}a^3 + a^3 - a^3 \right) = \frac{2}{3}m. \end{aligned}$$

Massa del sistema rigido

La massa del sistema è la somma delle masse di telaio e punto P :

$$M = m_{AB} + m = \frac{2}{3}m + m = \frac{5}{3}m.$$

Baricentro del lato AB (e del telaio)

Il punto medio dell'asta AB è un centro di simmetria evidente: i punti simmetrici rispetto ad esso si collocano infatti alla stessa distanza dall'origine e presentano perciò lo stesso valore della densità lineare. Il baricentro di AB — e del telaio tutto — si determina quindi quasi senza alcun calcolo:

$$G_{AB} - O = \frac{A - O + B - O}{2} = \frac{a}{2}\hat{e}_1 + \frac{a}{2}\hat{e}_2.$$

Baricentro del sistema

Per determinare il baricentro G del sistema occorre applicare il teorema distributivo, che fornisce il vettore posizione:

$$\begin{aligned} G - O &= \frac{m_{AB}(G_{AB} - O) + m(P - O)}{M} = \frac{3}{5m} \left[\frac{2}{3}m \left(\frac{a}{2}\hat{e}_1 + \frac{a}{2}\hat{e}_2 \right) + ma\hat{e}_1 \right] = \\ &= \frac{3}{5} \left(\frac{1}{3}\hat{e}_1 + \frac{1}{3}\hat{e}_2 + \hat{e}_1 \right) a = \frac{3}{5} \left(\frac{4}{3}\hat{e}_1 + \frac{1}{3}\hat{e}_2 \right) a = \frac{4}{5}a\hat{e}_1 + \frac{1}{5}a\hat{e}_2. \end{aligned}$$

(b) **Matrice d'inerzia relativa a $Oxyz$ e momenti principali in O**

Matrice d'inerzia della sbarra AB (e del telaio)

Poichè la sbarra giace nel piano Oxy , la matrice d'inerzia relativa a $Oxyz$ della sbarra assume la forma caratteristica:

$$[L_O^{AB}] = \begin{pmatrix} L_{xx}^{AB} & L_{xy}^{AB} & 0 \\ L_{xy}^{AB} & L_{yy}^{AB} & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx}^{AB} + L_{yy}^{AB} \end{pmatrix}.$$

A ciò si aggiunga che la bisettrice $y = x$ del I quadrante nel piano coordinato Oxy è un asse di simmetria evidente per il lato AB . La retta passa infatti per il punto medio di questo e i punti simmetrici rispetto ad essa si collocano alla stessa distanza dall'origine e hanno perciò lo stesso valore della densità lineare. Il cambiamento lineare di coordinate $(x, y) \rightarrow (y, x)$ — la trasformazione di simmetria rispetto alla bisettrice — mostra allora che $L_{xx}^{AB} = L_{yy}^{AB}$. È quindi sufficiente calcolare direttamente il solo momento d'inerzia L_{yy}^{AB} ed il solo prodotto d'inerzia L_{xy}^{AB} . Per il primo — che viene preferito a L_{xx}^{AB} soltanto perchè il calcolo risulta un poco più semplice, almeno apparentemente — si ha:

$$\begin{aligned} L_{yy}^{AB} &= \int_{AB} x^2 \lambda ds = \int_0^a x^2 \frac{m}{\sqrt{2}a^3} (2x^2 + a^2 - 2ax) \sqrt{2} dx = \\ &= \frac{m}{a^3} \int_0^a (2x^4 + a^2x^2 - 2ax^3) dx = \frac{m}{a^3} \left(2\frac{a^5}{5} + a^2\frac{a^3}{3} - 2a\frac{a^4}{4} \right) = \frac{7}{30}ma^2. \end{aligned}$$

Il prodotto d'inerzia vale invece:

$$\begin{aligned} L_{xy}^{AB} &= - \int_{AB} xy \lambda ds = - \int_0^a x(a-x) \frac{m}{\sqrt{2}a^3} (2x^2 + a^2 - 2ax) \sqrt{2} dx = \\ &= - \frac{m}{a^3} \int_0^a (ax - x^2)(2x^2 + a^2 - 2ax) dx = \\ &= - \frac{m}{a^3} \int_0^a (2ax^3 + a^3x - 2a^2x^2 - 2x^4 - a^2x^2 + 2ax^3) dx = \\ &= - \frac{m}{a^3} \left(2a\frac{a^4}{4} + a^3\frac{a^2}{2} - 2a^2\frac{a^3}{3} - 2\frac{a^5}{5} - a^2\frac{a^3}{3} + 2a\frac{a^4}{4} \right) = - \frac{1}{10}ma^2 \end{aligned}$$

in modo che la matrice d'inerzia del telaio risulta:

$$[L_O^{AB}] = ma^2 \begin{pmatrix} 7/30 & -1/10 & 0 \\ -1/10 & 7/30 & 0 \\ 0 & 0 & 7/15 \end{pmatrix}.$$

Matrice d'inerzia del punto P

Il calcolo è immediato, ricordando che il vettore posizione di P coincide con quello del punto A :

$$P - O = a\hat{e}_1$$

per cui si ottiene:

$$[L_O^P] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & ma^2 \end{pmatrix} = ma^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrice d'inerzia del sistema

La matrice d'inerzia del sistema rispetto alla terna solidale $Oxyz$ è la somma delle matrici d'inerzia di telaio e punto P , relativamente alla stessa terna:

$$\begin{aligned} [L_O] &= [L_O^{AB}] + [L_O^P] = ma^2 \begin{pmatrix} 7/30 & -1/10 & 0 \\ -1/10 & 7/30 & 0 \\ 0 & 0 & 7/15 \end{pmatrix} + ma^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= ma^2 \begin{pmatrix} 7/30 & -1/10 & 0 \\ -1/10 & 37/30 & 0 \\ 0 & 0 & 22/15 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Momenti principali d'inerzia in O

I momenti principali d'inerzia in O del sistema sono gli autovalori $\lambda = ma^2 \mathcal{X}$ della matrice d'inerzia $[L_O]$, individuati dalle soluzioni \mathcal{X} dell'equazione caratteristica adimensionale:

$$\det \begin{pmatrix} 7/30 - \mathcal{X} & -1/10 & 0 \\ -1/10 & 37/30 - \mathcal{X} & 0 \\ 0 & 0 & 22/15 - \mathcal{X} \end{pmatrix} = 0$$

ossia di:

$$\left[\left(\frac{7}{30} - \mathcal{X} \right) \left(\frac{37}{30} - \mathcal{X} \right) - \frac{1}{100} \right] \left(\frac{22}{15} - \mathcal{X} \right) = 0.$$

Una radice ovvia si ha per $\mathcal{X} = 22/15$. Le altre due sono le soluzioni dell'equazione di secondo grado:

$$\left(\frac{7}{30} - \mathcal{X} \right) \left(\frac{37}{30} - \mathcal{X} \right) - \frac{1}{100} = 0$$

che con semplici passaggi si riduce alla forma trinomia:

$$\mathcal{X}^2 - \frac{22}{15}\mathcal{X} + \frac{5}{18} = 0$$

ed ammette le radici:

$$\mathcal{X} = \frac{1}{2} \left(\frac{22}{15} \pm \sqrt{\frac{22^2}{15^2} - 4 \cdot \frac{5}{18}} \right) = \frac{11}{15} \pm \frac{1}{10} \sqrt{26}.$$

I momenti principali d'inerzia in O sono pertanto:

$$\lambda_1 = \left(\frac{11}{15} + \frac{1}{10}\sqrt{26} \right) ma^2 \quad \lambda_2 = \left(\frac{11}{15} - \frac{1}{10}\sqrt{26} \right) ma^2 \quad \lambda_3 = \frac{22}{15} ma^2.$$

(c) **Momento angolare in O ed energia cinetica relativi a $O\xi\eta\zeta$**

Nella terna assoluta $O\xi\eta\zeta$ il sistema rigido si muove con punto fisso O . Questa circostanza consente di scrivere il momento angolare in O e l'energia cinetica del sistema in termini della sola velocità angolare istantanea $\vec{\omega}$, per mezzo delle ben note formule:

$$\vec{K}_O = L_O(\vec{\omega}) \quad T = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{K}_O.$$

All'istante $t = 0$ la velocità angolare istantanea vale $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_1 - \omega\hat{e}_3$ e si è quindi in condizione di determinare \vec{K}_O e T allo stesso istante.

Momento angolare in O

Il momento angolare in O si esprime nella forma $\vec{K}_O = \sum_{\alpha=1}^3 K_\alpha \hat{e}_\alpha$, dove le componenti K_1, K_2, K_3 sono date dalla relazione matriciale:

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = [L_O] \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix} = ma^2 \omega \begin{pmatrix} 7/30 & -1/10 & 0 \\ -1/10 & 37/30 & 0 \\ 0 & 0 & 22/15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = ma^2 \omega \begin{pmatrix} 7/30 \\ -1/10 \\ -22/15 \end{pmatrix}$$

in modo che risulta:

$$\vec{K}_O = \left(\frac{7}{30}\hat{e}_1 - \frac{1}{10}\hat{e}_2 - \frac{22}{15}\hat{e}_3 \right) ma^2 \omega.$$

Energia cinetica

L'energia cinetica del sistema vale:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{K}_O = \frac{1}{2}(\omega\hat{e}_1 - \omega\hat{e}_3) \cdot \left(\frac{7}{30}\hat{e}_1 - \frac{1}{10}\hat{e}_2 - \frac{22}{15}\hat{e}_3 \right) ma^2 \omega = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{7}{30} + \frac{22}{15} \right) ma^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{51}{30} ma^2 \omega^2 = \frac{17}{20} ma^2 \omega^2. \end{aligned}$$

(d) **Velocità assoluta di P e asse di Mozzi**

Velocità assoluta del punto P

Poichè il sistema è rigido con punto fisso O , la velocità di P rispetto alla terna assoluta $O\xi\eta\zeta$ si ricava dalla formula di Poisson dell'atto di moto rigido:

$$\dot{P} = \vec{\omega} \wedge (P - O) = (\omega\hat{e}_1 - \omega\hat{e}_3) \wedge a\hat{e}_1 = -a\omega\hat{e}_2.$$

Asse di Mozzi

L'asse di Mozzi è definito perchè $\vec{\omega} \neq 0$. Data la presenza del punto fisso O , si tratta in effetti di un asse istantaneo di rotazione. Più precisamente, l'asse di Mozzi è la retta passante per O e di direzione $\vec{\omega}$, rappresentabile parametricamente nella forma:

$$Q - O = \alpha\vec{\omega} = \alpha(\omega\hat{e}_1 - \omega\hat{e}_3) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

ovvero:

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = -\alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

(e) **Variazione impulsiva della velocità angolare**

La forza elastica che agisce sul punto P è diretta verso il polo O , per cui durante lo spostamento il momento angolare in O dell'intero sistema deve conservarsi. Poichè lo spostamento è pressochè istantaneo, la posizione assoluta del telaio — e della terna solidale $Oxyz$ — rimane invariata a valle dello spostamento stesso: solo la posizione di P viene modificata (da A ad O). Di conseguenza, la matrice d'inerzia del sistema, che prima dello spostamento è $[L_O]$, diventa $[L_O^{AB}]$ immediatamente dopo — la matrice d'inerzia del punto P , bloccato ora nell'origine, si annulla. La velocità angolare passa allora dal valore $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_1 - \omega \hat{e}_3$ ad un nuovo valore $\vec{\omega}' = \omega'_1 \hat{e}_1 + \omega'_2 \hat{e}_2 + \omega'_3 \hat{e}_3$, in modo che il momento angolare in O sia conservato:

$$[L_O] \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix} = [L_O^{AB}] \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \\ \omega'_3 \end{pmatrix}.$$

Si ottiene così:

$$\begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \\ \omega'_3 \end{pmatrix} = [L_O^{AB}]^{-1} [L_O] \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix} = [L_O^{AB}]^{-1} ma^2 \omega \begin{pmatrix} 7/30 \\ -1/10 \\ -22/15 \end{pmatrix}$$

e poichè:

$$[L_O^{AB}]^{-1} = \frac{1}{ma^2} \begin{pmatrix} 21/4 & 9/4 & 0 \\ 9/4 & 21/4 & 0 \\ 0 & 0 & 15/7 \end{pmatrix}$$

risulta infine:

$$\begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \\ \omega'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21/4 & 9/4 & 0 \\ 9/4 & 21/4 & 0 \\ 0 & 0 & 15/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7/30 \\ -1/10 \\ -22/15 \end{pmatrix} \omega = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -22/7 \end{pmatrix} \omega.$$

La velocità angolare del sistema subito dopo lo spostamento di P è quindi:

$$\vec{\omega}' = \omega \hat{e}_1 - \frac{22}{7} \omega \hat{e}_3.$$

Si osservi che l'energia cinetica del sistema cresce durante il processo, il suo valore finale risultando:

$$T' = \frac{1}{2} \vec{\omega}' \cdot \vec{K}_O = \frac{1}{2} \left(\omega \hat{e}_1 - \frac{22}{7} \omega \hat{e}_3 \right) \cdot \left(\frac{7}{30} \hat{e}_1 - \frac{1}{10} \hat{e}_2 - \frac{22}{15} \hat{e}_3 \right) ma^2 \omega = \frac{339}{140} ma^2 \omega^2,$$

maggiore di quello iniziale $T = (17/20)ma^2\omega^2$. L'incremento dell'energia cinetica avviene a spese dell'energia potenziale della molla. Nel momento in cui P si arresta in O , tuttavia,

parte dell'energia meccanica viene verosimilmente dissipata perchè il punto passa all'improvviso da una velocità non nulla alla quiete — urto completamente anelastico. Né potrebbe essere altrimenti, visto che l'energia cinetica finale è determinata univocamente e non dipende dalla costante elastica della molla, per cui l'energia potenziale elastica prima dello spostamento potrebbe essere grande a piacere.

Soluzione dell'esercizio 2

(a) Equilibri ordinari

Tutte le sollecitazioni che agiscono sul sistema sono posizionali e conservative: il peso e le interazioni elastiche mediate dalle due molle ideali. Gli equilibri ordinari del sistema scleronomo a vincoli ideali sono perciò tutti e soli i punti critici del potenziale interni al dominio di definizione dello stesso. Per determinare i potenziali associati alle varie sollecitazioni occorre scrivere i vettori posizione degli estremi dell'asta:

$$A - O = a \sin \varphi \hat{e}_1 \quad B - O = a \cos \varphi \hat{e}_2$$

oltre al vettore posizione del punto P , che si ricava da

$$P - B = as \sin \varphi \hat{e}_1 - as \cos \varphi \hat{e}_2$$

e risulta:

$$P - O = B - O + P - B = as \sin \varphi \hat{e}_1 + a(1 - s) \cos \varphi \hat{e}_2.$$

Il baricentro G dell'asta omogenea coincide con il punto medio di questa ed è perciò individuato dal vettore posizione:

$$G - O = B - O + \frac{A - B}{2} = a \cos \varphi \hat{e}_2 + \frac{a \sin \varphi \hat{e}_1 - a \cos \varphi \hat{e}_2}{2} = \frac{a}{2} \sin \varphi \hat{e}_1 + \frac{a}{2} \cos \varphi \hat{e}_2.$$

Ciò premesso, il potenziale gravitazionale dell'asta risulta:

$$U_g^{AB} = -mg \hat{e}_2 \cdot (G - O) = -\frac{1}{2} m g a \cos \varphi$$

mentre quello del punto P vale:

$$U_g^P = -mg \hat{e}_2 \cdot (P - O) = -m g a (1 - s) \cos \varphi = m g a (s - 1) \cos \varphi.$$

Il potenziale elastico associato alla molla ideale tesa fra l'origine O e l'estremo A si scrive poi

$$U_{el}^{OA} = -\frac{k}{2} |A - O|^2 = -\frac{k a^2}{2} \sin^2 \varphi = -m g a \sin^2 \varphi$$

mentre per la molla che congiunge B a P si ha:

$$U_{el}^{PB} = -\frac{k}{2} |P - B|^2 = -\frac{k a^2}{2} s^2 = -m g a s^2.$$

La somma dei potenziali parziali definisce il potenziale del sistema:

$$\begin{aligned} U(s, \varphi) &= mga\left(s - \frac{3}{2}\right) \cos \varphi - mga \sin^2 \varphi - mgas^2 = \\ &= mga \left[\left(s - \frac{3}{2}\right) \cos \varphi - \sin^2 \varphi - s^2 \right] \quad (s, \varphi) \in [0, 1] \times \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1)$$

Equilibri ordinari

Gli equilibri ordinari del sistema si ricavano imponendo il simultaneo annullarsi delle derivate parziali prime di U :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial s}(s, \varphi) &= mga(\cos \varphi - 2s) \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi}(s, \varphi) &= mga \left[-\left(s - \frac{3}{2}\right) \sin \varphi - 2 \sin \varphi \cos \varphi \right] \end{aligned} \quad (2)$$

nel dominio aperto $(s, \varphi) \in (0, 1) \times \mathbb{R}$. Si tratta quindi di risolvere il sistema di equazioni algebriche non lineari:

$$\begin{cases} mga(\cos \varphi - 2s) = 0 \\ mga \left[-\left(s - \frac{3}{2}\right) \sin \varphi - 2 \sin \varphi \cos \varphi \right] = 0 \end{cases} \quad (s, \varphi) \in (0, 1) \times \mathbb{R}.$$

Dalla prima equazione segue che all'equilibrio deve aversi:

$$s = \frac{1}{2} \cos \varphi \quad (3)$$

in modo che la seconda equazione di equilibrio diventa:

$$mga \left[-\left(\frac{1}{2} \cos \varphi - \frac{3}{2}\right) \sin \varphi - 2 \sin \varphi \cos \varphi \right] = 0$$

ossia:

$$\sin \varphi \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{2} \cos \varphi \right) = 0.$$

Soluzioni di questa equazione si hanno per $\sin \varphi = 0$, e sono definite incondizionatamente:

$$\varphi = 0 \quad \varphi = \pi.$$

Altre due radici, distinte dalle precedenti, si hanno invece ponendo $\cos \varphi = 3/5$:

$$\varphi = \arccos(3/5) \quad \varphi = -\arccos(3/5).$$

Tenuto conto della (3), si conclude che il sistema ammette tre equilibri ordinari:

$$(s, \varphi) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad (s, \varphi) = \left(\frac{3}{10}, \arccos\left(\frac{3}{5}\right)\right) \quad (s, \varphi) = \left(\frac{3}{10}, -\arccos\left(\frac{3}{5}\right)\right).$$

(b) **Stabilità degli equilibri ordinari**

Data la natura posizionale conservativa del sistema scleronomo, la stabilità degli equilibri ordinari può essere analizzata per mezzo dei teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale. Allo scopo si rende necessario calcolare le derivate parziali seconde del potenziale:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}(s, \varphi) = -2mga \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial s}(s, \varphi) = -mga \sin \varphi$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial s \partial \varphi}(s, \varphi) = -mga \sin \varphi \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}(s, \varphi) = mga \left[-\left(s - \frac{3}{2}\right) \cos \varphi - 2 \cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi \right]$$

dalle quali si deduce la relativa matrice hessiana:

$$H_U(s, \varphi) = mga \begin{pmatrix} -2 & -\sin \varphi \\ -\sin \varphi & -\left(s - \frac{3}{2}\right) \cos \varphi - 2 \cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi \end{pmatrix}$$

di cui si devono determinare le proprietà di positività in ciascuna configurazione di equilibrio.

Configurazione $(s, \varphi) = (1/2, 0)$

Per questa configurazione di equilibrio la matrice hessiana del potenziale assume la forma diagonale:

$$H_U(1/2, 0) = mga \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ed è chiaramente definita negativa, come si desume dal segno negativo di entrambi gli elementi diagonali (e autovalori). L'equilibrio si caratterizza quindi come un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità segue dal teorema di Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $(s, \varphi) = (3/10, \arccos(3/5))$

Nella fattispecie la matrice hessiana del potenziale risulta:

$$H_U(3/10, \arccos(3/5)) = mga \begin{pmatrix} -2 & -4/5 \\ -4/5 & 32/25 \end{pmatrix}$$

avendosi:

$$\cos[\arccos(3/5)] = \frac{3}{5} \quad \sin[\arccos(3/5)] = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

Il determinante della matrice è di segno negativo:

$$\det H_U(3/10, \arccos(3/5)) = (mga)^2 \left(-\frac{64}{25} - \frac{16}{25} \right) = -\frac{16}{5} m^2 g^2 a^2 < 0$$

e ciò basta a riconoscere il carattere indefinito della matrice, che dunque ha autovalori di segno opposto. La presenza di un autovalore positivo nello spettro della matrice autorizza

a concludere che l'equilibrio è instabile secondo Liapunov, in base al teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $(s, \varphi) = (3/10, -\arccos(3/5))$

In questo caso la matrice hessiana diventa:

$$H_U(3/10, -\arccos(3/5)) = mga \begin{pmatrix} -2 & 4/5 \\ 4/5 & 32/25 \end{pmatrix}$$

ma ha ancora determinante negativo, come nella configurazione simmetrica precedente. Ne segue l'instabilità dell'equilibrio per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

(c) **Energia cinetica**

Per determinare l'energia cinetica del sistema si calcolano e si sommano i contributi dell'asta AB e del punto materiale P .

Energia cinetica dell'asta AB

Data l'assenza di punti fissi, l'energia cinetica dell'asta omogenea si scrive per mezzo del teorema di König:

$$T_{AB} = \frac{m}{2} \dot{G}^2 + \frac{1}{2} I_{Gz}^{AB} |\vec{\omega}_{AB}|^2$$

dove la velocità del baricentro è ottenuta derivando in t il vettore $G - O$:

$$\dot{G} = \frac{a}{2} (\cos \varphi \hat{e}_1 - \sin \varphi \hat{e}_2) \dot{\varphi}$$

e ha modulo quadrato:

$$\dot{G}^2 = \frac{a^2}{4} \dot{\varphi}^2,$$

mentre il momento d'inerzia rispetto all'asse Gz e la velocità angolare dell'asta sono dati dalle espressioni:

$$I_{Gz}^{AB} = \frac{ma^2}{12} \quad \vec{\omega}_{AB} = \dot{\varphi} \hat{e}_3.$$

Si conclude pertanto che:

$$T_{AB} = \frac{m}{2} \frac{a^2}{4} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \frac{ma^2}{12} \dot{\varphi}^2 = \frac{ma^2}{6} \dot{\varphi}^2.$$

Energia cinetica del punto P

Il vettore posizione del punto P rispetto alla terna $Oxyz$ era già stato determinato in precedenza:

$$P - O = as \sin \varphi \hat{e}_1 + a(1 - s) \cos \varphi \hat{e}_2$$

e va derivato rispetto al tempo per fornire l'espressione della corrispondente velocità assoluta:

$$\dot{P} = a(\dot{s} \sin \varphi + s \cos \varphi \dot{\varphi}) \hat{e}_1 + a[-\dot{s} \cos \varphi - (1 - s) \sin \varphi \dot{\varphi}] \hat{e}_2$$

che ha modulo quadrato:

$$\begin{aligned}
\dot{P}^2 &= a^2(\dot{s} \sin \varphi + s \cos \varphi \dot{\varphi})^2 + a^2[-\dot{s} \cos \varphi - (1-s) \sin \varphi \dot{\varphi}]^2 = \\
&= a^2[\dot{s}^2 \sin^2 \varphi + s^2 \cos^2 \varphi \dot{\varphi}^2 + 2s \sin \varphi \cos \varphi \dot{s} \dot{\varphi} + \\
&+ \dot{s}^2 \cos^2 \varphi + (1-s)^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2 + 2(1-s) \sin \varphi \cos \varphi \dot{s} \dot{\varphi}] = \\
&= a^2[\dot{s}^2 + s^2 \cos^2 \varphi \dot{\varphi}^2 + (1-s)^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2 + 2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{s} \dot{\varphi}].
\end{aligned}$$

L'energia cinetica del punto diventa perciò:

$$T_P = \frac{m}{2} \dot{P}^2 = \frac{ma^2}{2} [\dot{s}^2 + [s^2 \cos^2 \varphi + (1-s)^2 \sin^2 \varphi] \dot{\varphi}^2 + 2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{s} \dot{\varphi}].$$

Energia cinetica del sistema

L'energia cinetica del sistema è la somma delle energie cinetiche parziali di asta e punto materiale:

$$T = T_{AB} + T_P = \frac{ma^2}{2} \left[\dot{s}^2 + \left[\frac{1}{3} + s^2 \cos^2 \varphi + (1-s)^2 \sin^2 \varphi \right] \dot{\varphi}^2 + 2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{s} \dot{\varphi} \right]. \quad (4)$$

(d) Equazioni pure del moto

L'ipotesi dei vincoli ideali autorizza a scrivere le equazioni pure del moto del sistema nella forma lagrangiana:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial s} \qquad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

dove l'energia cinetica T ed il potenziale U sono forniti dalle relazioni (4) e (1), rispettivamente. Le derivate parziali prime del potenziale sono già state valutate nelle (2):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial s}(s, \varphi) &= mga(\cos \varphi - 2s) \\
\frac{\partial U}{\partial \varphi}(s, \varphi) &= mga \left[- \left(s - \frac{3}{2} \right) \sin \varphi - \sin(2\varphi) \right]
\end{aligned}$$

mentre per i termini relativi all'energia cinetica si hanno le espressioni seguenti:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} &= \frac{ma^2}{2} (2\dot{s} + 2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}) = ma^2 (\dot{s} + \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}) \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) &= ma^2 [\ddot{s} + \sin \varphi \cos \varphi \ddot{\varphi} + \cos(2\varphi) \dot{\varphi}^2] \\
\frac{\partial T}{\partial s} &= \frac{ma^2}{2} [2s \cos^2 \varphi - 2(1-s) \sin^2 \varphi] \dot{\varphi}^2 = ma^2 [s \cos^2 \varphi + (s-1) \sin^2 \varphi] \dot{\varphi}^2 \\
\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= ma^2 \left[\left[\frac{1}{3} + s^2 \cos^2 \varphi + (1-s)^2 \sin^2 \varphi \right] \dot{\varphi} + \sin \varphi \cos \varphi \dot{s} \right] \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= ma^2 \left[\left[\frac{1}{3} + s^2 \cos^2 \varphi + (1-s)^2 \sin^2 \varphi \right] \ddot{\varphi} + \sin \varphi \cos \varphi \ddot{s} \right] + \\
&+ ma^2 \left[[2s \cos^2 \varphi \dot{s} + (1-2s) \sin(2\varphi) \dot{\varphi} + 2(s-1) \sin^2 \varphi \dot{s}] \dot{\varphi} + \cos(2\varphi) \dot{s} \dot{\varphi} \right] \\
\frac{\partial T}{\partial \varphi} &= ma^2 \left[[-s^2 \cos \varphi \sin \varphi + (1-s)^2 \sin \varphi \cos \varphi] \dot{\varphi}^2 + \cos(2\varphi) \dot{s} \dot{\varphi} \right].
\end{aligned}$$

Le equazioni del moto diventano così:

$$ma^2 [\ddot{s} + \sin \varphi \cos \varphi \ddot{\varphi} + \cos(2\varphi) \dot{\varphi}^2] - ma^2 [s \cos^2 \varphi + (s-1) \sin^2 \varphi] \dot{\varphi}^2 = mga(\cos \varphi - 2s)$$

e:

$$\begin{aligned} & ma^2 \left[\left[\frac{1}{3} + s^2 \cos^2 \varphi + (1-s)^2 \sin^2 \varphi \right] \ddot{\varphi} + \sin \varphi \cos \varphi \ddot{s} \right] + \\ & + ma^2 \left[2s \cos^2 \varphi \dot{s} + (1-2s) \sin(2\varphi) \dot{\varphi} + 2(s-1) \sin^2 \varphi \dot{s} \right] \dot{\varphi} - \\ & - ma^2 \left[-s^2 \cos \varphi \sin \varphi + (1-s)^2 \sin \varphi \cos \varphi \right] \dot{\varphi}^2 = \\ & = mga \left[-\left(s - \frac{3}{2} \right) \sin \varphi - \sin(2\varphi) \right]. \end{aligned}$$

La seconda equazione si semplifica in:

$$\begin{aligned} & ma^2 \left[\left(\frac{4}{3} + s^2 - 2s \sin^2 \varphi \right) \ddot{\varphi} + \sin \varphi \cos \varphi \ddot{s} \right] + \\ & + ma^2 \left[2s \cos^2 \varphi \dot{s} + (1-2s) \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi} + 2(s-1) \sin^2 \varphi \dot{s} \right] \dot{\varphi} = \\ & = mga \left[-\left(s - \frac{3}{2} \right) \sin \varphi - \sin(2\varphi) \right]. \end{aligned}$$

(e) **Equilibri di confine**

La parametrizzazione del sistema scleronomo è definita sulla striscia chiusa:

$$\{(s, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq 1, \varphi \in \mathbb{R}\}$$

la cui frontiera consiste delle rette $s = 0$ e $s = 1$. Queste due rette vanno esaminate separatamente per determinare gli eventuali equilibri di confine.

Retta $s = 0$

Secondo il teorema dei lavori virtuali, la configurazione di confine $(s, \varphi) = (0, \varphi_o)$, con $\varphi_o \in \mathbb{R}$, è un equilibrio del sistema se e soltanto se risulta:

$$\frac{\partial U}{\partial s}(0, \varphi_o) \delta s + \frac{\partial U}{\partial \varphi}(0, \varphi_o) \delta \varphi \leq 0 \quad \forall \delta s \geq 0, \delta \varphi \in \mathbb{R},$$

dal momento che lungo un generico moto virtuale relativo a tale configurazione la variabile s non può diminuire, mentre la φ può indifferentemente aumentare o decrescere. Questa relazione equivale, come ben noto, alla coppia di condizioni:

$$\frac{\partial U}{\partial s}(0, \varphi_o) \leq 0 \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi}(0, \varphi_o) = 0$$

ossia, facendo uso delle derivate (2), al sistema di relazioni:

$$\begin{cases} mga \cos \varphi_o \leq 0 \\ mga \left(\frac{3}{2} \sin \varphi_o - 2 \sin \varphi_o \cos \varphi_o \right) = 0 \end{cases}$$

che debitamente semplificato si riduce a:

$$\begin{cases} \cos \varphi_o \leq 0 \\ \sin \varphi_o \left(\frac{3}{4} - \cos \varphi_o \right) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Dall'equazione in (5) si deducono le possibili radici — fisicamente distinte —

$$\varphi_o = \varphi_1 = 0 \quad \varphi_o = \varphi_2 = \pi \quad \varphi_o = \varphi_3 = \arccos\left(\frac{3}{4}\right) \quad \varphi_o = \varphi_4 = -\arccos\left(\frac{3}{4}\right)$$

in corrispondenza delle quali risulta:

$$\cos \varphi_1 = 1 \quad \cos \varphi_2 = -1 \quad \cos \varphi_3 = \frac{3}{4} \quad \cos \varphi_4 = \frac{3}{4}$$

per cui soltanto $\varphi = \varphi_2$ è compatibile con la disequazione in (5). Se ne deduce che lungo questo tratto di frontiera il sistema ammette l'unica configurazione di equilibrio:

$$(s, \varphi) = (0, \pi),$$

peraltro facilmente interpretabile — è la configurazione che vede l'estremo A dell'asta posizionarsi sull'origine O ed il secondo estremo B collocarsi lungo l'asse verticale Oy giusto al di sotto di A , con il punto materiale B appoggiato a B .

Retta $s = 1$

In una configurazione della forma $(s, \varphi) = (1, \varphi_o)$, con $\varphi_o \in \mathbb{R}$, il teorema dei lavori virtuali prescrive il sussistere dell'equilibrio se e soltanto se:

$$\frac{\partial U}{\partial s}(1, \varphi_o) \delta s + \frac{\partial U}{\partial \varphi}(1, \varphi_o) \delta \varphi \leq 0 \quad \forall \delta s \leq 0, \delta \varphi \in \mathbb{R}$$

ossia:

$$\frac{\partial U}{\partial s}(1, \varphi_o) \geq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi}(1, \varphi_o) = 0.$$

La condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio è quindi data dal sistema di relazioni:

$$\begin{cases} mga(\cos \varphi_o - 2) \geq 0 \\ mga \left(\frac{1}{2} \sin \varphi_o - 2 \sin \varphi_o \cos \varphi_o \right) = 0 \end{cases}$$

la prima delle quali tuttavia non può mai risultare verificata, avendosi:

$$\cos \varphi_o - 2 \leq 1 - 2 = -1 \quad \forall \varphi_o \in \mathbb{R}.$$

Questo tratto di frontiera non accoglie quindi alcun equilibrio di confine.