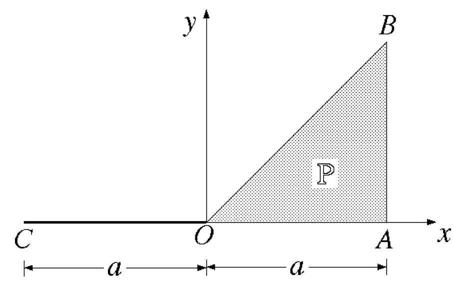
Prova in itinere di Fondamenti di meccanica razionale e Meccanica razionale del 21.04.2011

Esercizio 1

Un sistema rigido si compone di un'asta rettilinea OC e di una piastra triangolare $\mathbb{P} = OAB$, metà di un quadrato di lato OA. Asta e lato OA hanno lunghezza a. Il sistema è posto nel piano Oxy di una terna cartesiana solidale $Oxyz = O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$, come illustrato in figura. Le densità di asta e piastra sono espresse dalle relazioni:



$$\lambda(P) = \frac{\mu}{a^2}|P - O| \quad \forall\, P \in OC \qquad\qquad \sigma(Q) = \frac{\mu}{a^4}|Q - O|^2 \qquad \forall\, Q \in \mathbb{P},$$

dove μ è una massa costante. Determinare del sistema:

(a) la posizione del baricentro rispetto a $Oxyz$, verificando la proprietà dell'inviluppo convesso;

(b) la matrice d'inerzia relativa a $Oxyz$;

(c) i momenti principali d'inerzia in O;

(d) il momento d'inerzia relativo alla retta AB;

(e) momento angolare in O ed energia cinetica rispetto alla terna in cui O è fisso e la velocità angolare è $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_1 - \omega\hat{e}_3$, con ω costante.

Esercizio 2

Un punto materiale P, di massa unitaria, scorre senza attrito lungo l'asse orizzontale Ox di una terna inerziale $Oxyz = O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$. Sul punto agiscono una resistenza viscosa con costante di frizione $\beta = 1$, una forza di richiamo dovuta ad una molla ideale di costante elastica $k = 2$ che connette P ad O, e una forza sinusoidale $\cos(\Omega t)\hat{e}_1$, con $\Omega > 0$ costante. Determinare del sistema:

(a) il moto di regime;

(b) l'espressione generale dei moti;

(c) il valore della pulsazione Ω per il quale il sistema è risonante.

Esercizio 3
Rispetto a una terna cartesiana ortogonale destra $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ si considera il sistema di vettori:

$$\vec{v}_1 = -\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 \qquad \text{applicato in } P_1(0,2,1)$$

$$\vec{v}_2 = -\hat{e}_2 + \hat{e}_3 \qquad \text{applicato in } P_2(1,-1,0)\,.$$

Determinare:

(a) l'asse centrale a del sistema di vettori applicati;

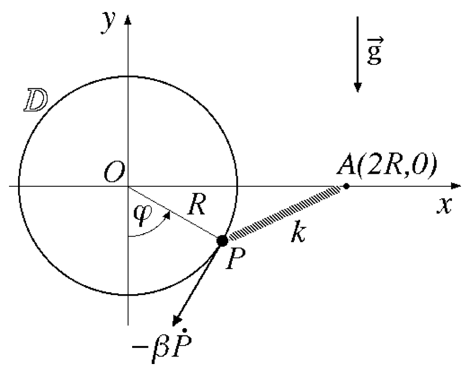
(b) la distanza fra a e la retta b di equazione $x = \xi - 1$, $y = -\xi$, $z = 1 - \xi$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4
In una terna $Oxyz = O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ un punto materiale P, di massa unitaria, è vincolato a scorrere lungo la superficie di equazione $z = (x^2 + y^2)/2$, $(x, y) \in \mathbb{R}$, soggetto al campo di forze $\vec{F} = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 - 2\hat{e}_3$ (tutte le grandezze sono adimensionalizzate per semplicità). Determinare:

(a) le equazioni pure del moto del punto nell'ipotesi che la superficie sia liscia;

(b) la condizione che caratterizza gli equilibri, nell'ipotesi che il coefficiente di attrito statico della superficie sia $\mu_s > 0$. Per quali valori di $\mu_s > 0$ *tutte* le posizioni sono di equilibrio?

Esercizio 5
Un disco circolare omogeneo $\mathbb{D}$, di massa m, raggio R e centro O, ruota senza attrito attorno all'asse Oz di una terna inerziale destra $Oxyz = O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$, che ha l'asse Oy diretto verticalmente verso l'alto. Un punto P di massa m è fissato sul bordo di $\mathbb{D}$ e collegato mediante una molla ideale di costante elastica k al punto fisso $A(2R, 0, 0)$. Su P agisce inoltre una resistenza viscosa $-\beta\dot{P}$. Sapendo che il sistema è pesante, si usi l'angolo di rotazione $\varphi \in \mathbb{R}$ in figura per determinare del sistema:



(a) l'equazione pura del moto della piastra;

(b) le configurazioni di equilibrio.

Soluzione dell'esercizio 1
Indicato con $P-O = x\hat{e}_1$, $x \in [-a,0]$, il vettore posizione del generico punto $P \in OC$, la densità lineare dell'asta si scrive esplicitamente nella forma:

$$\lambda(x) = \frac{\mu}{a^2}|x\hat{e}_1| = -\frac{\mu}{a^2}x\,, \qquad x \in [-a,0]\,.$$

In modo analogo, posto $Q-O = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2$, la densità areale della piastra nel suo generico punto Q si riduce a:

$$\sigma(x,y) = \frac{\mu}{a^4}(x^2+y^2)\,, \qquad (x,y) \in OAB\,.$$

Siamo così in condizione di calcolare la massa, il baricentro e la matrice d'inerzia del sistema.

(a) **Baricentro e inviluppo convesso**
Massa dell'asta
La massa dell'asta si ricava integrando sul segmento OC la densità di linea λ. Si ha pertanto:

$$m_{OC} = \int_{OC} \lambda\,ds = \int_{-a}^{0} \frac{\mu}{a^2}(-x)\,dx = -\frac{\mu}{a^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-a}^{0} = \frac{\mu}{2}\,.$$

Massa della piastra $\mathbb{P}$
L'integrale sul triangolo $\mathbb{P} = OAB$ della densità areale σ consente di determinare la massa della piastra, che risulta così:

$$m_{\mathbb{P}} = \int_{\mathbb{P}} \sigma\,dA = \int_0^a dx \int_0^x dy\,\frac{\mu}{a^4}(x^2+y^2) = \frac{\mu}{a^4}\int_0^a dx\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{x} =$$
$$= \frac{\mu}{a^4}\int_0^a dx\Big(x^3+\frac{x^3}{3}\Big) = \frac{\mu}{a^4}\frac{4}{3}\int_0^a x^3dx = \frac{4}{3}\frac{\mu}{a^4}\frac{a^4}{4} = \frac{\mu}{3}\,.$$

Massa del sistema
La proprietà di additività consente di esprimere la massa totale del sistema come somma delle masse parziali di asta e piastra, il punto di intersezione O risultando irrilevante nel calcolo tanto dell'integrale curvilineo su OC, quanto di quello doppio su $\mathbb{P}$:

$$m = m_{\mathbb{P}} + m_{OC} = \frac{\mu}{3}+\frac{\mu}{2} = \frac{5}{6}\mu\,.$$

Baricentro dell'asta OC
Il baricentro dell'asta deve collocarsi lungo l'asse di giacitura Ox, e sarà dunque individuato da un vettore posizione della forma:

$$G_{OC} - O = x_{OC}\hat{e}_1\,.$$

L'ascissa x_{OC} viene determinata ricorrendo alla definizione:

$$x_{OC} = \frac{1}{m_{OC}} \int\limits_{OC} x\,\lambda\,ds = \frac{2}{\mu}\int\limits_{-a}^{0} x\,\frac{\mu}{a^2}(-x)\,dx = -\frac{2}{a^2}\int\limits_{-a}^{0} x^2 dx = -\frac{2}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{0} = -\frac{2}{3}a$$

per cui:

$$G_{OC} - O = -\frac{2}{3}a\hat{e}_1 \,.$$

Baricentro della piastra $\mathbb{P}$

Poichè la piastra è ubicata nel piano coordinato Oxy, il relativo baricentro $G_{\mathbb{P}}$ deve giacere nello stesso piano ed essere individuato perciò da un vettore posizione del tipo:

$$G_{\mathbb{P}} - O = x_{\mathbb{P}}\hat{e}_1 + y_{\mathbb{P}}\hat{e}_2 \,.$$

L'ascissa $x_{\mathbb{P}}$ e l'ordinata $x_{\mathbb{P}}$ vengono ricavate per mezzo della definizione di baricentro, calcolando gli appropriati integrali doppi. Più precisamente si ha:

$$x_{\mathbb{P}} = \frac{1}{m_{\mathbb{P}}}\int\limits_{\mathbb{P}} x\,\sigma\,dA = \frac{3}{\mu}\int\limits_0^a dx\int\limits_0^x dy\,x\,\frac{\mu}{a^4}(x^2+y^2) = \frac{3}{a^4}\int\limits_0^a dx\int\limits_0^x dy\,(x^3+xy^2) =$$

$$= \frac{3}{a^4}\int\limits_0^a dx\left[x^3y + x\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{x} = \frac{3}{a^4}\int\limits_0^a\Big(x^4+\frac{x^4}{3}\Big)dx = \frac{3}{a^4}\,\frac{4}{3}\int\limits_0^a x^4 dx = \frac{4}{5}a$$

mentre per l'ordinata risulta:

$$y_{\mathbb{P}} = \frac{1}{m_{\mathbb{P}}}\int\limits_{\mathbb{P}} y\,\sigma\,dA = \frac{3}{\mu}\int\limits_0^a dx\int\limits_0^x dy\,y\,\frac{\mu}{a^4}(x^2+y^2) = \frac{3}{a^4}\int\limits_0^a dx\int\limits_0^x (x^2y+y^3) =$$

$$= \frac{3}{a^4}\int\limits_0^a dx\left[x^2\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4}\right]_{y=0}^{x} = \frac{3}{a^4}\int\limits_0^a\Big(\frac{x^4}{2}+\frac{x^4}{4}\Big)dx = \frac{3}{a^4}\,\frac{3}{4}\int\limits_0^a x^4 dx = \frac{9}{20}a$$

in modo che:

$$G_{\mathbb{P}} - O = \frac{4}{5}a\hat{e}_1 + \frac{9}{20}a\hat{e}_2 \,.$$

Baricentro del sistema

Il baricentro G del sistema può essere calcolato ricorrendo al teorema distributivo, osservando ancora una volta che il punto di intersezione O fra asta e piastra non contribuisce né agli integrali curvilinei sull'asta né a quelli doppi sulla piastra e non pregiudica pertanto la possibilità di applicare il teorema. Si ottiene così:

$$G - O = \frac{m_{OC}(G_{OC}-O) + m_{\mathbb{P}}(G_{\mathbb{P}}-O)}{m_{OC}+m_{\mathbb{P}}} = \frac{6}{5\mu}\left[\frac{\mu}{2}\Big(-\frac{2}{3}a\hat{e}_1\Big) + \frac{\mu}{3}\Big(\frac{4}{5}a\hat{e}_1 + \frac{9}{20}a\hat{e}_2\Big)\right] =$$

$$= \frac{6}{5}\Big(-\frac{a}{3}\hat{e}_1 + \frac{4}{15}a\hat{e}_1 + \frac{3}{20}a\hat{e}_2\Big) = \frac{6}{5}\Big(-\frac{1}{15}a\hat{e}_1 + \frac{3}{20}a\hat{e}_2\Big) = -\frac{2}{25}a\hat{e}_1 + \frac{9}{50}a\hat{e}_2\,.$$

Inviluppo convesso del sistema

Dall'esame della figura appare del tutto evidente che l'inviluppo convesso del sistema è costituito dal triangolo chiuso ABC, i cui punti sono le soluzioni (x,y) del sistema di disequazioni:

$$-a \le x \qquad\qquad x \le a \qquad\qquad y \le \frac{x+a}{2}$$

È immediato verificare che le coordinate $x_G = -2a/25$ e $y_G = 9a/50$ del baricentro soddisfano le disequazioni precedenti:

$$-a \le -\frac{2}{25}a \qquad\qquad -\frac{2}{25}a \le a \qquad\qquad \frac{9}{50}a \le \frac{23}{50}a = \frac{1}{2}\Big(-\frac{2}{25}a + a\Big)$$

per cui G appartiene effettivamente all'inviluppo convesso del sistema.

(b) **Matrice d'inerzia**

La matrice d'inerzia in $Oxyz$ del sistema è la somma delle matrici d'inerzia, relative alla stessa terna, di asta e piastra. Considerato che l'asta giace lungo l'asse Ox e che la piastra si colloca nel piano Oxy, la matrice d'inerzia del sistema assume la forma:

$$[L_O] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{yy}^{OC} & 0 \\ 0 & 0 & L_{yy}^{OC} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_{xx}^{\mathbb{P}} & L_{xy}^{\mathbb{P}} & 0 \\ L_{xy}^{\mathbb{P}} & L_{yy}^{\mathbb{P}} & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx}^{\mathbb{P}} + L_{yy}^{\mathbb{P}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} L_{xx}^{\mathbb{P}} & L_{xy}^{\mathbb{P}} & 0 \\ L_{xy}^{\mathbb{P}} & L_{yy}^{OC} + L_{yy}^{\mathbb{P}} & 0 \\ 0 & 0 & L_{yy}^{OC} + L_{xx}^{\mathbb{P}} + L_{yy}^{\mathbb{P}} \end{pmatrix}.$$

L'unico momento d'inerzia non banale dell'asta è dato da:

$$L_{yy}^{OC} = \int_{OC} x^2 \lambda\, ds = \int_{-a}^{0} x^2 \frac{\mu}{a^2}(-x)\, dx = -\frac{\mu}{a^2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-a}^{0} = \frac{1}{4}\mu a^2\,.$$

Per la piastra si hanno invece i momenti d'inerzia:

$$L_{xx}^{\mathbb{P}} = \int_{\mathbb{P}} y^2 \sigma\, dA = \int_0^a dx \int_0^x dy\, y^2 \frac{\mu}{a^4}(x^2+y^2) = \frac{\mu}{a^4}\int_0^a dx \int_0^x dy\, (x^2y^2 + y^4) =$$

$$= \frac{\mu}{a^4}\int_0^a dx \left[x^2\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right]_{y=0}^{x} = \frac{\mu}{a^4}\int_0^a \Big(\frac{x^5}{3} + \frac{x^5}{5}\Big)dx = \frac{8}{15}\frac{\mu}{a^4}\frac{a^6}{6} = \frac{4}{45}\mu a^2$$

e

$$L_{yy}^{\mathbb{P}} = \int_{\mathbb{P}} x^2 \sigma\, dA = \int_0^a dx \int_0^x dy\, x^2 \frac{\mu}{a^4}(x^2+y^2) = \frac{\mu}{a^4}\int_0^a dx \int_0^x dy\, (x^4 + x^2y^2) =$$

$$= \frac{\mu}{a^4}\int_0^a dx \left[x^4 y + x^2\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{x} = \frac{\mu}{a^4}\int_0^a \Big(x^5 + \frac{x^5}{3}\Big)dx = \frac{\mu}{a^4}\frac{4}{3}\frac{a^6}{6} = \frac{2}{9}\mu a^2$$

per cui:

$$L^{\mathbb{P}}_{xx} + L^{\mathbb{P}}_{yy} \;=\; \frac{4}{45}\mu a^2 + \frac{2}{9}\mu a^2 \;=\; \frac{14}{45}\mu a^2\,,$$

mentre il prodotto d'inerzia non ovvio risulta:

$$L^{\mathbb{P}}_{xy} \;=\; -\int_{\mathbb{P}} xy\,\sigma\,dA \;=\; -\int_0^a dx \int_0^x dy\, xy\,\frac{\mu}{a^4}(x^2+y^2) \;=\; -\frac{\mu}{a^4}\int_0^a dx\int_0^x dy\;(x^3y + xy^3) \;=$$

$$= -\frac{\mu}{a^4}\int_0^a dx \left[x^3\frac{y^2}{2} + x\frac{y^4}{4}\right]_{y=0}^{x} \;=\; -\frac{\mu}{a^4}\int_0^a \Big(\frac{x^5}{2}+\frac{x^5}{4}\Big)dx \;=\; -\frac{3}{4}\frac{\mu}{a^4}\frac{a^6}{6} \;=\; -\frac{1}{8}\mu a^2\,.$$

In conclusione, si ha:

$$[L_O] \;=\; \mu a^2 \begin{pmatrix} 4/45 & -1/8 & 0 \\ -1/8 & 17/36 & 0 \\ 0 & 0 & 101/180 \end{pmatrix}.$$

(c) **Momenti principali d'inerzia in O**
Per definizione, i momenti principali d'inerzia in O del sistema sono gli autovalori della matrice d'inerzia $[L_O]$, soluzioni λ dell'equazione caratteristica:

$$\det\big([L_O] - \lambda\mathbb{I}\big) \;=\; 0\,.$$

Posto per brevità $\lambda = \mu a^2 \mathcal{X}$, l'equazione precedente diventa:

$$\det\left[\mu a^2 \begin{pmatrix} 4/45-\mathcal{X} & -1/8 & 0 \\ -1/8 & 17/36-\mathcal{X} & 0 \\ 0 & 0 & 101/180-\mathcal{X} \end{pmatrix}\right] \;=\; 0$$

e semplificando il fattore positivo μa^2, con uno sviluppo del determinante rispetto all'ultima riga, si riduce a:

$$\Big(\frac{101}{180} - \mathcal{X}\Big)\cdot\det\begin{pmatrix} 4/45-\mathcal{X} & -1/8 \\ -1/8 & 17/36-\mathcal{X}\end{pmatrix} \;=\; 0\,.$$

Una radice è ovviamente

$$\mathcal{X} \;=\; \frac{101}{180}\,,$$

mentre le altre due sono le soluzioni dell'equazione algebrica di secondo grado:

$$\Big(\frac{4}{45}-\mathcal{X}\Big)\Big(\frac{17}{36}-\mathcal{X}\Big) - \frac{1}{64} \;=\; 0$$

ossia:

$$\mathcal{X}^2 - \frac{101}{180}\mathcal{X} + \frac{17}{405} - \frac{1}{64} \;=\; 0$$

dalla quale segue:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X} &= \frac{101}{360} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{101^2}{180^2} - \frac{68}{405} + \frac{1}{16}} = \\
&= \frac{101}{360} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10201 - 5440 + 2025}{180^2}} = \frac{101 \pm \sqrt{6786}}{360} = \frac{101 \pm 3\sqrt{754}}{360}\,.
\end{aligned}
$$

I momenti principali d'inerzia in O del sistema sono pertanto:

$$
A_1 = \frac{101 - 3\sqrt{754}}{360}\,\mu a^2 \qquad A_2 = \frac{101 + 3\sqrt{754}}{360}\,\mu a^2 \qquad A_3 = \frac{101}{180}\,\mu a^2\,.
$$

(d) **Momento d'inerzia relativo alla retta AB**
Conviene considerare le rette parallele AB, Gy e Oy, ed applicare due volte il teorema di Huygens-Steiner. Si hanno così le relazioni:

$$
I_{AB} = I_{Gy} + m(a - x_G)^2 \qquad L_{yy} = I_{Oy} = I_{Gy} + m x_G^2
$$

dalle quali si deduce:

$$
I_{AB} = L_{yy} - m x_G^2 + m(a - x_G)^2 = L_{yy} + ma(a - 2x_G)\,.
$$

Il momento d'inerzia richiesto si ottiene sostituendo la massa $m = 5\mu/6$ e l'ascissa $x_G = -2a/25$ del baricentro nell'espressione precedente:

$$
\begin{aligned}
I_{AB} &= \frac{17}{36}\mu a^2 + \frac{5}{6}\mu\, a\left[a - 2\left(-\frac{2}{25}a\right)\right] = \frac{17}{36}\mu a^2 + \frac{5}{6}\mu a\left(a + \frac{4}{25}a\right) = \\
&= \frac{17}{36}\mu a^2 + \frac{5}{6}\,\frac{29}{25}\mu a^2 = \frac{17}{36}\mu a^2 + \frac{29}{30}\mu a^2 = \frac{85 + 174}{180}\mu a^2 = \frac{259}{180}\mu a^2\,.
\end{aligned}
$$

(e) **Momento angolare in O ed energia cinetica**
Il sistema rigido presenta il punto fisso O e ha velocità angolare istantanea $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_1 - \omega\hat{e}_3$. Le componenti K_1, K_2, K_3 del momento angolare in O del sistema, rispetto alla base $\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$, sono quindi individuate dalla relazione matriciale:

$$
\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = [L_O]\begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix} = \mu a^2 \begin{pmatrix} 4/45 & -1/8 & 0 \\ -1/8 & 17/36 & 0 \\ 0 & 0 & 101/180 \end{pmatrix}\omega\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \mu a^2\omega\begin{pmatrix} 4/45 \\ -1/8 \\ -101/108 \end{pmatrix}
$$

che fornisce l'espressione del momento richiesta:

$$
\vec{K}_O = \mu a^2\omega\left(\frac{4}{45}\hat{e}_1 - \frac{1}{8}\hat{e}_2 - \frac{101}{180}\hat{e}_3\right).
$$

Per l'energia cinetica, rispetto allo stesso sistema di riferimento, si ha poi:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{K}_O = \frac{1}{2}\omega(\hat{e}_1-\hat{e}_3)\cdot\mu a^2\omega\Big(\frac{4}{45}\hat{e}_1-\frac{1}{8}\hat{e}_2-\frac{101}{180}\hat{e}_3\Big) = \\ &= \frac{1}{2}\mu a^2\omega^2\Big(\frac{4}{45}+\frac{101}{180}\Big) = \frac{1}{2}\mu a^2\omega^2\frac{16+101}{180} = \frac{117}{360}\mu a^2\omega^2 = \frac{13}{40}\mu a^2\omega^2\,. \end{aligned}$$

Soluzione dell'esercizio 2

Il postulato delle reazioni vincolari porge, per il punto P, l'equazione del moto:

$$\ddot{P} = \vec{g} - k(P-O) - \beta\dot{P} + \vec{\Phi} + \cos(\Omega t)\hat{e}_1$$

dove $\vec{g}$ indica l'accelerazione di gravità e $\vec{\Phi}$ la reazione vincolare agente sul punto. L'equazione pura del moto si ottiene ponendo $P-O = x\hat{e}_1$ e proiettando la relazione precedente lungo il versore $\hat{e}_1$ associato all'asse orizzontale Ox:

$$\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + \cos(\Omega t)\,.$$

Si perviene così all'equazione lineare non omogenea a coefficienti costanti:

$$\ddot{x} + \dot{x} + 2x = \cos(\Omega t)\,. \tag{.1}$$

(a) **Moto di regime**

È ben noto che la soluzione generale dell'equazione (.1) consiste di una parte transiente, che si identifica con la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, e di una parte stazionaria. Quest'ultima è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, della forma:

$$x(t) = A_1\cos(\Omega t) + A_2\sin(\Omega t) \qquad \forall\, t\in\mathbb{R}$$

per opportune costanti reali A_1 e A_2. Calcolando le derivate prima e seconda:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\Omega A_1\sin(\Omega t) + \Omega A_2\cos(\Omega t) \\ \ddot{x}(t) &= -\Omega^2 A_1\cos(\Omega t) - \Omega^2 A_2\sin(\Omega t) \end{aligned}$$

e sostituendole nel primo membro della (.1), si ottiene la relazione:

$$\begin{aligned} -\Omega^2 A_1\cos(\Omega t) - \Omega^2 A_2\sin(\Omega t) - \Omega A_1\sin(\Omega t) + \Omega A_2\cos(\Omega t) + \\ + 2A_1\cos(\Omega t) + 2A_2\sin(\Omega t) = \cos(\Omega t) \end{aligned}$$

ossia:

$$(-\Omega^2 A_1 + \Omega A_2 + 2A_1)\cos(\Omega t) + (-\Omega^2 A_2 - \Omega A_1 + 2A_2)\sin(\Omega t) = \cos(\Omega t)$$

che deve risultare identicamente soddisfatta $\forall\, t\in\mathbb{R}$. Le costanti A_1 e A_2 devono quindi verificare il sistema di equazioni algebriche lineari:

$$\begin{cases} (2-\Omega^2)A_1 + \Omega A_2 = 1 \\ -\Omega A_1 + (2-\Omega^2)A_2 = 0 \end{cases}$$

dal quale segue:

$$A_1 \;=\; \frac{\begin{vmatrix} 1 & \Omega \\ 0 & 2-\Omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2-\Omega^2 & \Omega \\ -\Omega & 2-\Omega^2 \end{vmatrix}} \;=\; \frac{2-\Omega^2}{(2-\Omega^2)^2+\Omega^2}$$

e:

$$A_2 \;=\; \frac{\begin{vmatrix} 2-\Omega^2 & 1 \\ -\Omega & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2-\Omega^2 & \Omega \\ -\Omega & 2-\Omega^2 \end{vmatrix}} \;=\; \frac{\Omega}{(2-\Omega^2)^2+\Omega^2}\,.$$

Il moto di regime è dunque descritto dall'equazione:

$$x(t) \;=\; \frac{(2-\Omega^2)\cos(\Omega t)+\Omega\sin(\Omega t)}{(2-\Omega^2)^2+\Omega^2} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}\,. \tag{.2}$$

(b) **Espressione generale dei moti**
L'espressione generale dei moti del sistema si ricava sommando alla soluzione particolare (.2) la soluzione generale dell'equazione omogenea associata:

$$\ddot{x}+\dot{x}+2x \;=\; 0$$

che porge l'equazione caratteristica:

$$\lambda^2+\lambda+2 \;=\; 0$$

e quindi gli autovalori complessi coniugati:

$$\lambda_1,\lambda_2 \;=\; \frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot 2}}{2} \;=\; \frac{-1\pm i\sqrt{7}}{2} \;=\; -\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}i\,.$$

La soluzione generale dell'omogenea si scrive:

$$x(t) \;=\; c_1 e^{-t/2}\cos\Bigl(\frac{\sqrt{7}}{2}t\Bigr)+c_2 e^{-t/2}\sin\Bigl(\frac{\sqrt{7}}{2}t\Bigr)$$

con c_1 e c_2 costanti reali arbitrarie, determinate dalle condizioni iniziali. Il moto generale è perciò descritto da:

$$x(t) \;=\; c_1 e^{-t/2}\cos\Bigl(\frac{\sqrt{7}}{2}t\Bigr)+c_2 e^{-t/2}\sin\Bigl(\frac{\sqrt{7}}{2}t\Bigr)+\frac{(2-\Omega^2)\cos(\Omega t)+\Omega\sin(\Omega t)}{(2-\Omega^2)^2+\Omega^2} \qquad \forall\, t\in\mathbb{R}\,,$$

in termini delle costanti arbitrarie c_1 e c_2.

(c) **Pulsazione di risonanza**
L'ampiezza del moto di regime (.2) si ricava facilmente riesprimendo la funzione nella forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{(2-\Omega^2)\cos(\Omega t) + \Omega\sin(\Omega t)}{(2-\Omega^2)^2+\Omega^2} = \\ &= \frac{\sqrt{(2-\Omega^2)^2+\Omega^2}}{(2-\Omega^2)^2+\Omega^2}\left[\frac{2-\Omega^2}{\sqrt{(2-\Omega^2)^2+\Omega^2}}\cos(\Omega t) + \frac{\Omega}{\sqrt{(2-\Omega^2)^2+\Omega^2}}\right] \end{aligned}$$

e risulta perciò:

$$A(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{(\Omega^2-2)^2+\Omega^2}}\,.$$

Si ha risonanza del sistema quando l'ampiezza di oscillazione per il moto di regime assume il proprio valore massimo. La condizione ricorre quando è minimo il radicando a denominatore:

$$(\Omega^2-2)^2+\Omega^2 \tag{.3}$$

e risulta quindi verificata l'equazione:

$$2(\Omega^2-2)+1 = 0$$

ottenuta derivando l'espressione (.3) rispetto ad Ω^2 ed uguagliando a zero il risultato. La pulsazione di risonanza vale pertanto:

$$\Omega = \Omega_R = \sqrt{\frac{3}{2}}\,.$$

Soluzione dell'esercizio 3
(a) **Asse centrale** a
Per un sistema di vettori applicati con risultante non nullo l'asse centrale è individuato dalla parametrizzazione:

$$A-O = \frac{\vec{R}\wedge\vec{M}_O}{|\vec{R}|^2} + \alpha\,\vec{R}\,, \quad \alpha\in\mathbb{R}\,.$$

Nella fattispecie si hanno le relazioni:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{v}_1+\vec{v}_2 = (-\hat{e}_1+2\hat{e}_2)+(-\hat{e}_2+\hat{e}_3) = -\hat{e}_1+\hat{e}_2+\hat{e}_3 \neq 0 \\ |\vec{R}|^2 &= |-\hat{e}_1+\hat{e}_2+\hat{e}_3|^2 = 3 \\ \vec{M}_O &= (P_1-O)\wedge\vec{v}_1 + (P_2-O)\wedge\vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (-2\hat{e}_1-\hat{e}_2+2\hat{e}_3)+(-\hat{e}_1-\hat{e}_2-\hat{e}_3) = -3\hat{e}_1-2\hat{e}_2+\hat{e}_3 \end{aligned}$$

$$\vec{R} \wedge \vec{M}_O = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 + 5\hat{e}_3$$

per cui risulta:

$$A - O = \frac{3\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 + 5\hat{e}_3}{3} + \alpha(-\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3)\,.$$

L'equazione parametrica dell'asse centrale a diventa pertanto:

$$x = 1 - \alpha \qquad\qquad y = -\frac{2}{3} + \alpha \qquad\qquad z = \frac{5}{3} + \alpha\,, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

(b) **Distanza fra le rette a e b**

Le rette a e b sono parallele. Dalle parametrizzazioni:

$$A(\alpha) - O = (1-\alpha)\hat{e}_1 + \Big(-\frac{2}{3} + \alpha\Big)\hat{e}_2 + \Big(\frac{5}{3} + \alpha\Big)\hat{e}_3\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,,$$

$$P(\xi) - O = (\xi - 1)\hat{e}_1 - \xi\hat{e}_2 + (1-\xi)\hat{e}_3\,, \quad \xi \in \mathbb{R}\,,$$

seguono infatti i vettori tangenti:

$$A'(\alpha) = -\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3 \qquad\qquad P'(\xi) = \hat{e}_1 - \hat{e}_2 - \hat{e}_3$$

che risultano linearmente dipendenti, come è immediato verificare. Posto allora:

$$\hat{\tau} = \frac{A'(\alpha)}{|A'(\alpha)|} = \frac{-\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3}{\sqrt{3}}\,,$$

in virtù della definizione di prodotto vettoriale la distanza fra le due rette si scrive:

$$d_{ab} = \big|\hat{\tau} \wedge [P(0) - A(0)]\big|$$

essendo $A(0)$ e $P(0)$ punti di a e di b rispettivamente — quelli di cui è più immediato il calcolo:

$$A(0) - O = \hat{e}_1 - \frac{2}{3}\hat{e}_2 + \frac{5}{3}\hat{e}_3 \qquad\qquad P(0) - O = -\hat{e}_1 + \hat{e}_3\,.$$

Si ottiene così:

$$\begin{aligned} d_{ab} &= \left|\frac{-\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3}{\sqrt{3}} \wedge \Big(-\hat{e}_1 + \hat{e}_3 - \hat{e}_1 + \frac{2}{3}\hat{e}_2 - \frac{5}{3}\hat{e}_3\Big)\right| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left|(-\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3) \wedge \Big(-2\hat{e}_1 + \frac{2}{3}\hat{e}_2 - \frac{2}{3}\hat{e}_3\Big)\right| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left|-\frac{2}{3}\hat{e}_3 - \frac{2}{3}\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3 - \frac{2}{3}\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 - \frac{2}{3}\hat{e}_1\right| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left|-\frac{4}{3}\hat{e}_1 - \frac{8}{3}\hat{e}_2 + \frac{4}{3}\hat{e}_3\right| = \frac{1}{3\sqrt{3}}\sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + 4^2} = \frac{4}{3}\sqrt{2}\,. \end{aligned}$$

Soluzione dell'esercizio 4
La superficie vincolare $\mathcal{S}$ è descritta dalla parametrizzazione:

$$P(x,y) - O \,=\, x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + \frac{x^2+y^2}{2}\hat{e}_3 \;, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,,$$

che ammette le derivate parziali prime:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) \,=\, \hat{e}_1 + x\hat{e}_3 \qquad\qquad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \,=\, \hat{e}_2 + y\hat{e}_3 \,.$$

Il mancato annullarsi del relativo prodotto vettore

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \,=\, (\hat{e}_1 + x\hat{e}_3) \wedge (\hat{e}_2 + y\hat{e}_3) \,=\, -x\hat{e}_1 - y\hat{e}_2 + \hat{e}_3$$

consente di riconoscere la regolarità della superficie e di definire in ogni punto di $\mathcal{S}$ il relativo versore normale:

$$\hat{n}(x,y) \,=\, \frac{-x\hat{e}_1 - y\hat{e}_2 + \hat{e}_3}{|-x\hat{e}_1 - y\hat{e}_2 + \hat{e}_3|} \,=\, \frac{-x\hat{e}_1 - y\hat{e}_2 + \hat{e}_3}{(1+x^2+y^2)^{1/2}} \;, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) **Equazioni pure del moto nel caso di superficie liscia**
Tutti i moti possibili del sistema si esprimono per mezzo della parametrizzazione $P(x,y)$, intendendo le coordinate x e y come funzioni C^2 del tempo in un intervallo assegnato a piacere. La velocità istantanea di un generico punto vincolato a scorrere lungo la superficie $\mathcal{S}$ si scrive allora nella forma:

$$\dot{P} \,=\, (\hat{e}_1 + x\hat{e}_3)\dot{x} + (\hat{e}_2 + y\hat{e}_3)\dot{y}$$

mentre la relativa accelerazione istantanea si ottiene derivando una seconda volta in t:

$$\ddot{P} \,=\, (\hat{e}_1 + x\hat{e}_3)\ddot{x} + (\hat{e}_2 + y\hat{e}_3)\ddot{y} + \dot{x}^2\hat{e}_3 + \dot{y}^2\hat{e}_3 \,.$$

Tenuto conto che il punto P ha massa unitaria, il postulato delle reazioni vincolari porge l'equazione:

$$(\hat{e}_1 + x\hat{e}_3)\ddot{x} + (\hat{e}_2 + y\hat{e}_3)\ddot{y} + (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\hat{e}_3 \,=\, x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 - 2\hat{e}_3 + \vec{\Phi} \,,$$

nella quale $\vec{F} = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 - 2\hat{e}_3$ è il campo posizionale delle forze applicate e $\vec{\Phi}$ indica al solito la reazione vincolare agente sul punto. Per ricavare le equazioni pure del moto basta proiettare l'equazione precedente lungo le direzioni tangenti indipendenti individuate dai vettori $\partial P/\partial x$ e $\partial P/\partial y$:

$$\begin{cases} (1+x^2)\ddot{x} + xy\ddot{y} + x(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \,=\, x - 2x + \vec{\Phi} \cdot \dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) \\ xy\ddot{x} + (1+y^2)\ddot{y} + y(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \,=\, y - 2y + \vec{\Phi} \cdot \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) \end{cases}$$

e ricordare che la condizione di vincolo liscio equivale all'annullarsi delle componenti tangenti di $\vec{\Phi}$:

$$\begin{cases} (1+x^2)\ddot{x} + xy\ddot{y} + x(\dot{x}^2+\dot{y}^2) \;=\; -x \\ xy\ddot{x} + (1+y^2)\ddot{y} + y(\dot{x}^2+\dot{y}^2) \;=\; -y\,. \end{cases}$$

(*b*) **Equilibri nel caso di superficie con attrito**
Come ben noto, la condizione di equilibrio per un punto vincolato a scorrere su una superficie fissa con coefficiente di attrito statico μ_s è dedotta dalla legge di Coulomb-Morin dell'attrito radente statico:

$$|\vec{F}_T| \;\leq\; \mu_s|\vec{F}_n| \tag{.4}$$

in termini delle componenti tangente $\vec{F}_T$ e normale $\vec{F}_n$ della forza attiva $\vec{F}$ rispetto alla superficie vincolare. Si rende quindi necessario calcolare tali componenti. Per la componente normale si ha semplicemente:

$$\begin{aligned}\vec{F}_n \;&=\; \vec{F}\cdot\hat{n}\,\hat{n} \;=\; (x\hat{e}_1+y\hat{e}_2-2\hat{e}_3)\cdot\frac{-x\hat{e}_1-y\hat{e}_2+\hat{e}_3}{(1+x^2+y^2)^{1/2}}\,\frac{-x\hat{e}_1-y\hat{e}_2+\hat{e}_3}{(1+x^2+y^2)^{1/2}} \;= \\ &=\; \frac{-x^2-y^2-2}{1+x^2+y^2}(-x\hat{e}_1-y\hat{e}_2+\hat{e}_3) \;=\; \frac{2+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}(x\hat{e}_1+y\hat{e}_2-\hat{e}_3)\,.\end{aligned}$$

La componente tangente della forza attiva viene poi determinata per differenza:

$$\begin{aligned}\vec{F}_T \;=\; \vec{F}-\vec{F}_n \;&=\; x\hat{e}_1+y\hat{e}_2-2\hat{e}_3-\frac{2+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}(x\hat{e}_1+y\hat{e}_2-\hat{e}_3) \;= \\ &=\; \Big(1-\frac{2+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\Big)(x\hat{e}_1+y\hat{e}_2)+\Big(-2+\frac{2+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\Big)\hat{e}_3 \;= \\ &=\; -\frac{1}{1+x^2+y^2}(x\hat{e}_1+y\hat{e}_2)-\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\hat{e}_3\,.\end{aligned}$$

La condizione di equilibrio (.4) diventa pertanto:

$$\frac{1}{1+x^2+y^2}\Big|x\hat{e}_1+y\hat{e}_2+(x^2+y^2)\hat{e}_3\Big| \;\leq\; \mu_s\frac{2+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\big|x\hat{e}_1+y\hat{e}_2-\hat{e}_3\big|$$

ossia

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \;\leq\; \mu_s\frac{2+x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

e quindi, semplificando il comune denominatore non nullo,

$$\sqrt{x^2+y^2} \;\leq\; \mu_s(2+x^2+y^2)\,. \tag{.5}$$

La relazione di equilibrio può essere scritta nella forma più compatta:

$$\xi \;\leq\; \mu_s(2+\xi^2)$$

ponendo:

$$\xi = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0 .$$

Si ha quindi equilibrio in tutte le configurazioni per le quali risulta, equivalentemente:

$$\frac{\xi}{2+\xi^2} \leq \mu_s \quad , \qquad \xi \geq 0 .$$

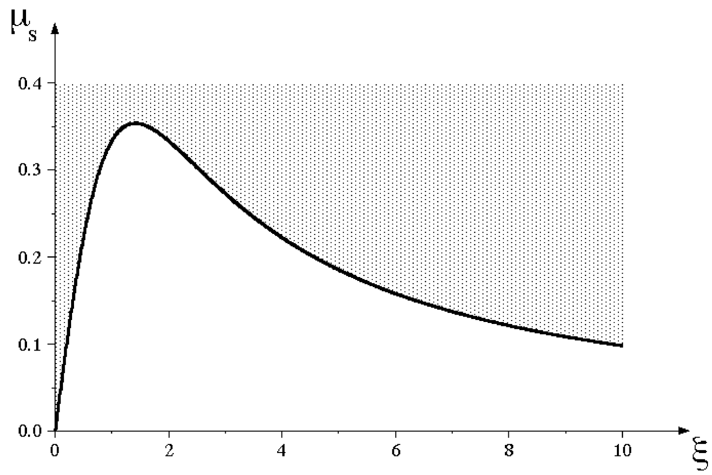
La funzione ausiliaria $\Xi(\xi) = \xi/(2+\xi^2)$ soddisfa le ovvie condizioni ai limiti:

$$\Xi(0) = 0 \qquad\qquad \lim_{\xi\to+\infty} \Xi(\xi) = 0$$

e presenta un unico punto di massimo relativo (e assoluto) in $\xi = \sqrt{2}$, dove vale:

$$\Xi(\sqrt{2}) = \sqrt{2}/4 .$$

Le posizioni di equilibrio sono così individuate dalla coppie (x, y) per le quali il punto $(\xi, \mu_s) = (\sqrt{x^2+y^2}, \mu_s)$ si colloca al di sopra del grafico di Ξ nel primo quadrante del piano (ξ, μ_s), regione evidenziata con il tratteggio nella figura seguente:



e che deve intendersi comprensiva della sua frontiera (l'insieme è cioè chiuso). In particolare, *tutte le configurazioni risultano di equilibrio* se e soltanto se $\mu_s \geq \Xi(\sqrt{2})$, vale a dire:

$$\mu_s \geq \sqrt{2}/4 = 0.3535533905 .$$

Soluzione dell'esercizio 5

(a) **Equazione pura del moto della piastra**

Poichè il sistema rigido è vincolato a ruotare senza attrito attorno all'asse fisso Oz, che in figura deve essere orientato in senso uscente rispetto al piano del foglio e dunque concordemente all'angolo di rotazione φ, l'equazione pura del moto assume la forma:

$$I\ddot{\varphi} = \vec{M}_O \cdot \hat{e}_3$$

dove I è il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse fisso e $\vec{M}_O \cdot \hat{e}_3$ indica il momento delle forze attive applicate rispetto allo stesso asse. Il momento d'inerzia del sistema è la semplice somma dei momenti d'inerzia di disco $\mathbb{D}$ e punto P rispetto allo stesso asse Oz:

$$I = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2 .$$

Le forze attive agenti sul sistema sono invece:

- il sistema delle forze peso agenti sul disco;
- il peso $-mg\hat{e}_2$ del punto P;
- la forza elastica $k(A-P)$ su P dovuta alla molla ideale;
- la resistenza viscosa $-\beta\dot{P}$, sempre applicata a P.

Il momento in O delle forze peso che agiscono sul disco è uguale a quello calcolato immaginando l'intero peso $-mg\hat{e}_2$ applicato nel baricentro O — i due sistemi di vettori applicati sono equivalenti. Ne segue che il momento rispetto all'asse Oz è nullo.
Tutte le altre sollecitazioni sono applicate al punto P, individuato dal vettore posizione:

$$P - O = R\sin\varphi\,\hat{e}_1 - R\cos\varphi\,\hat{e}_2 .$$

La forza elastica è quindi espressa da:

$$\begin{aligned} k(A-P) &= k\big[(A-O)-(P-O)\big] = k\big[2R\hat{e}_1 - (R\sin\varphi\,\hat{e}_1 - R\cos\varphi\,\hat{e}_2)\big] = \\ &= kR\big[(2-\sin\varphi)\hat{e}_1 + \cos\varphi\,\hat{e}_2\big] \end{aligned}$$

mentre per quella di resistenza viscosa si ha:

$$-\beta\dot{P} = -\beta R(\cos\varphi\,\hat{e}_1 + \sin\varphi\,\hat{e}_2)\dot{\varphi} .$$

Tenuto conto anche del peso $-mg\hat{e}_2$, la forza complessiva agente su P vale dunque:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -mg\hat{e}_2 + k(A-P) - \beta\dot{P} = \\ &= -mg\hat{e}_2 + kR\big[(2-\sin\varphi)\hat{e}_1 + \cos\varphi\,\hat{e}_2\big] - \beta R(\cos\varphi\,\hat{e}_1 + \sin\varphi\,\hat{e}_2)\dot{\varphi} = \\ &= (2kR - kR\sin\varphi - \beta R\cos\varphi\dot{\varphi})\,\hat{e}_1 + (-mg + kR\cos\varphi - \beta R\sin\varphi\dot{\varphi})\,\hat{e}_2 \end{aligned}$$

ed il suo momento rispetto all'asse Oz risulta:

$$\begin{aligned} (P-O)\wedge\vec{F}\cdot\hat{e}_3 &= \begin{vmatrix} R\sin\varphi & -R\cos\varphi \\ 2kR - kR\sin\varphi - \beta R\cos\varphi\dot{\varphi} & -mg + kR\cos\varphi - \beta R\sin\varphi\dot{\varphi} \end{vmatrix} = \\ &= R\sin\varphi\,(-mg + kR\cos\varphi - \beta R\sin\varphi\dot{\varphi}) + R\cos\varphi\,(2kR - kR\sin\varphi - \beta R\cos\varphi\dot{\varphi}) = \\ &= -mgR\sin\varphi - \beta R^2\dot{\varphi} + 2kR^2\cos\varphi . \end{aligned}$$

L'equazione del moto si riduce pertanto a:

$$\frac{3}{2}mR^2\ddot{\varphi} = -mgR\sin\varphi + 2kR^2\cos\varphi - \beta R^2\dot{\varphi} . \tag{.6}$$

(b) **Equilibri**

Gli equilibri sono, per definizione, le configurazioni nelle quali il sistema può stazionare in quiete. Un generico stato di quiete del rotore è individuato da una funzione $\varphi(t)$ costante $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Gli equilibri del sistema sono perciò caratterizzati da tutte e soltanto le soluzioni costanti delle equazioni pure del moto (.6). Ciò corrisponde a risolvere l'equazione trigonometrica:

$$0 \;=\; -mgR\sin\varphi + 2kR^2\cos\varphi$$

per la quale non può certamente aversi $\cos\varphi = 0$ ed è quindi lecito scrivere, equivalentemente:

$$\mathrm{tg}\varphi \;=\; \frac{2kR}{mg}\,.$$

Il sistema ammette pertanto due distinte configurazioni di equilibrio, individuate dai seguenti valori dell'angolo di rotazione:

$$\varphi \;=\; \mathrm{arctg}\Big(\frac{2kR}{mg}\Big) \qquad\qquad \varphi \;=\; \pi + \mathrm{arctg}\Big(\frac{2kR}{mg}\Big)\,,$$

a meno di multipli interi di 2π fisicamente irrilevanti.