Il problema del solitario (idiot's delight)

Un solitario si gioca con due mazzi uguali di n carte ciascuno, costituiti da carte tutte diverse e perfettamente mescolati. Si gira contemporaneamente la carta superiore da ciascun mazzo e si confrontano le due carte estratte. Se queste sono uguali il gioco termina e il solitario non è riuscito; se viceversa le due carte sono diverse si procede girando altre due carte, una da ciascun mazzo. Se la procedura viene ripetuta ininterrottamente fino all'esaurimento dei due mazzi il solitario è riuscito. Si chiede di determinare la probabilità che il solitario riesca, ossia che da ciascun mazzo non vengano mai pescate contemporaneamente due carte uguali, dalla prima alla n-esima (e ultima) estrazione.

Soluzione

Poichè i mazzi si suppongono ben mescolati, il problema può essere formalizzato nel modo seguente:

(i) si immagina di eseguire l'estrazione in sequenza delle n carte del primo mazzo. Le carte vengono indicate con il corrispondente ordine di estrazione $1, 2, \ldots, n$;

(ii) si esegue l'estrazione delle carte del secondo mazzo. La sequenza di n carte ottenuta sarà una delle $n!$ permutazioni della sequenza $1, 2, \ldots, n$ estratta dal primo mazzo (i due mazzi sono identici). La si indicherà come $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

(iii) le sequenze utili $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono quelle per le quali nessuna carta coincide con quella di pari ordine nella sequenza $1, 2, \ldots, n$, vale a dire:

$$a_i \neq i \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n\,.$$

Una sequenza cosiffatta verrà denominata *sequenza no-match di ordine n*. Il nome allude alla mancata corrispondenza (matching) fra tutte le carte contemporaneamente estratte dai due mazzi;

(iv) la probabilità che il gioco riesca sarà il rapporto fra il numero di sequenze no-match di ordine n e il numero totale $n!$ di sequenze possibili.

Il problema si riduce quindi a determinare il numero delle sequenze no-match di ordine n, numero che verrà indicato con $\sigma(n)$. Si può procedere per induzione. Nel caso il mazzo sia costituito da una sola carta è ovvio che non esistono sequenze no-match, per cui:

$$\sigma(1) \,=\, 0\,.$$

Altrettanto banale è il caso di mazzi costituiti da due carte ciascuno, per il quale esiste un'unica sequenza no-match — ossia $(a_1, a_2) = (2, 1)$. Vale dunque:

$$\sigma(2) \,=\, 1\,.$$

Per realizzare l'induzione mostriamo che esiste una relazione (semplice) fra $\sigma(n+1)$, $\sigma(n)$ e $\sigma(n-1)$, $\forall\, n \geq 2$. Questa relazione costituisce una equazione alle differenze che tramite le condizioni iniziali $\sigma(1) = 0$ e $\sigma(2) = 1$ consente di ricavare univocamente $\sigma(n)$ $\forall\, n \geq 1$.

• *Relazione di induzione*
Si considerino le sequenze ottenute dai due mazzi di $n+1$ carte ciascuno, con $n \geq 2$:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots & n & n+1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots\ldots & a_n & a_{n+1} \end{array}$$

Affinchè la seconda sequenza sia no-match è *necessario* che $a_{n+1} \neq n+1$. La sequenza no-match di ordine $n+1$ può quindi essere ottenuta in due modi e due soltanto:

(a) si considera una sequenza no-match di ordine n delle carte $1, 2, \ldots, n$ e si sostituisce la carta $n+1$ ad una di esse, che finisce in fondo alla sequenza.
Le sequenze no-match di ordine n delle carte $1, 2, \ldots, n$ sono $\sigma(n)$ e da ciascuna di essere si ottiene una sequenza no-match di ordine $n+1$ sostituendo una qualsiasi delle n carte con la carta $n+1$. *Il numero totale delle sequenze ottenibili in questo modo è dunque* $\sigma(n) \cdot n$;

(b) si considera una sequenza delle n carte $1, 2, \ldots, n$ *in cui figura esattamente un unico matching* con la sequenza di riferimento $1, 2, \ldots, n$. La carta che determina il matching fra le due sequenze viene sostituita con la carta $n+1$ e collocata nella posizione finale a_{n+1}.
In questo modo si ottiene certamente una sequenza no-match di ordine $n+1$ distinta da quelle ottenute al punto (a), perchè gli insiemi delle sequenze delle carte $1, 2, \ldots, n$, rispettivamente no-match e con un solo matching sono chiaramente disgiunti per definizione.
La carta che determina il matching può occupare una qualsiasi posizione $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ed è associata a $\sigma(n-1)$ sequenze no-match delle carte rimanenti. Il numero totale di sequenze distinte delle carte $1, 2, \ldots, n$ con esattamente un matching è così pari a $\sigma(n-1) \cdot n$. A ognuna di esse si associa una distinta sequenza no-match di ordine $n+1$, scambiando la carta che determina il matching con la carta $n+1$ e ponendola nella posizione a_{n+1}, come già illustrato. *Il numero totale delle sequenze ottenibili in questo modo è dunque* $\sigma(n-1) \cdot n$.

Da notare che non ha interesse considerare sequenze delle carte $1, 2, \ldots, n$ con più di un matching, in quanto almeno un matching sopravviverebbe allo scambio con la carta $n+1$ e la sequenza di ordine $n+1$ prodotta non sarebbe no-match.
Il numero complessivo di sequenze no-match di ordine $n+1$ *è quindi espresso dalla relazione di ricorrenza:*

$$\sigma(n+1) \,=\, n \cdot \sigma(n) + n \cdot \sigma(n-1) \qquad \forall\, n \geq 2 \tag{S.1}$$

che va risolta unitamente alle condizioni iniziali:

$$\sigma(1) \,=\, 0 \qquad\qquad \sigma(2) \,=\, 1\,. \tag{S.2}$$

Si tratta di una equazione alle differenze del secondo ordine, lineare ma a coefficienti variabili, che deve essere risolta con una procedura appropriata.

• *Soluzione della relazione di induzione*
La relazione di ricorrenza (S.1), munita delle condizioni (S.2), viene riespressa in una forma più conveniente ponendo:

$$z_n = \frac{\sigma(n)}{n!} \qquad \forall\, n \geq 1\,. \tag{$S.3$}$$

Risulta infatti:

$$(n+1)!\, z_{n+1} = n\, n!\, z_n + n\,(n-1)!\, z_{n-1}$$

ossia, semplificando:

$$z_{n+1} = \frac{n}{n+1} z_n + \frac{1}{n+1} z_{n-1} \qquad \forall\, n \geq 2\,, \tag{$S.4$}$$

mentre le condizioni iniziali diventano:

$$z_1 = \frac{\sigma(1)}{1!} = 0 \qquad\qquad z_2 = \frac{\sigma(2)}{2!} = \frac{1}{2}\,. \tag{$S.5$}$$

Sottratto z_n membro a membro nella (S.4) si ottiene infine:

$$z_{n+1} - z_n = -\frac{1}{n+1} z_n + \frac{1}{n+1} z_{n-1}$$

ovvero:

$$z_{n+1} - z_n = -\frac{1}{n+1}(z_n - z_{n-1}) \qquad \forall\, n \geq 2 \tag{$S.6$}$$

in cui è riconoscibile una equazione alle differenze *del primo ordine* nelle variabili $z_n - z_{n-1}$. La soluzione di (S.6) per ricorrenza non comporta alcuna difficoltà:

$$\begin{aligned}
z_{n+1} - z_n &= -\frac{1}{n+1}(z_n - z_{n-1}) = \\
&= \left(-\frac{1}{n+1}\right)\left(-\frac{1}{n}\right)(z_{n-1} - z_{n-2}) = \\
&= \left(-\frac{1}{n+1}\right)\left(-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n-1}\right)(z_{n-2} - z_{n-3}) = \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= \left(-\frac{1}{n+1}\right)\left(-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n-1}\right)\ldots\left(-\frac{1}{3}\right)(z_2 - z_1) = \\
&= \left(-\frac{1}{n+1}\right)\left(-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n-1}\right)\ldots\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2} = \\
&= \frac{(-1)^{n+1-3+1}}{(n+1)n(n-1)\ldots 3\cdot 2} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned} \tag{$S.7$}$$

tenuto conto delle condizioni iniziali (S.5). Si osservi che la relazione (S.7), sebbene ricavata per $n \geq 2$, riproduce il corretto valore della differenza $z_{n+1} - z_n$ anche per $n = 1$.

Per ogni $n \geq 2$ si può allora esprimere z_n per mezzo di una somma telescopica, che fornisce:

$$z_n = \sum_{k=2}^{n}(z_k - z_{k-1}) + z_1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + 0 = 1 - 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

La relazione è valida anche per $n = 1$, in quanto:

$$\sum_{k=0}^{1} \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - 1 = 0 = z_1 .$$

• *Calcolo della probabilità di riuscita del gioco*
È evidente dalla definizione (S.3) che z_n rappresenta proprio la probabilità di riuscita del solitario condotto con due mazzi uguali da n carte distinte ciascuno:

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \qquad \forall\, n \geq 1 .$$

Per $n \to +\infty$ la successione degli z_n converge assai rapidamente al ben noto limite:

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} = \frac{1}{e} \sim 0.3678794412$$

in quanto successione delle somme parziali di una serie *a segni alterni*, per la quale risulta:

$$\left| e^{-1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

sicchè la differenza fra z_n e e^{-1} è inferiore a 10^{-13} già per $n = 15$ carte.

In conclusione, *per $n \geq 15$ la probabilità di ottenere una sequenza no-match di ordine n, e dunque di concludere positivamente il gioco, si può considerare di fatto indipendente da n ed espressa, con ottima approssimazione da:*

$$z_\infty = \frac{1}{e} \sim 0.3678794412 .$$

La probabilità di fallire il solitario risulta perciò il complemento a 1 della precedente:

$$1 - z_\infty = 1 - \frac{1}{e} \sim 0.6321205588$$

ed è sensibilmente superiore a quella di riuscita del solitario. Per quanto possa apparire poco intuitivo, la probabilità di pescare due carte uguali durante lo svolgimento del gioco è significativamente maggiore di quella dell'evento complementare (cioè di non pescare nessuna coppia di carte uguali dalla prima estrazione all'ultima).