Soluzione del problema delle spezzate

Si indichino con O e $F = P_n$ rispettivamente il punto iniziale e finale del problema. Si vuole muovere da O a F lungo una linea spezzata di esattamente n segmenti in modo che la distanza da F decresca — o comunque non cresca — e la lunghezza complessiva del percorso sia la massima possibile.

(1) La lunghezza del percorso massimo che congiunge O ed F *deve dipendere unicamente dalla distanza $d = |F - O|$ fra O ed F*, e non dalle effettiva posizioni dei punti da congiungere. Ciò perchè risulta sempre possibile costruire una *isometria* $\mathcal{T}$ del piano, o se si vuole la composizione di una traslazione e di una rotazione opportune dello stesso piano, in grado di riportare il punto O nell'origine di un riferimento cartesiano fissato ed il punto F su un semiasse positivo dello stesso riferimento. La traiettoria di massima lunghezza determinata rispetto a tale riferimento è anche soluzione del problema iniziale.

(2) *La lunghezza massima del percorso fra O ed F deve risultare proporzionale alla distanza d fra i due punti.* Se infatti si considera un riferimento cartesiano di origine O e si suppone che la sequenza di punti:

$$O = Q_0 \qquad Q_1 \qquad Q_2 \qquad \ldots\ldots \qquad Q_{n-1} \qquad Q_n = F'$$

definisca la soluzione del problema nel caso che il punto iniziale O e quello finale F' siano a distanza unitaria $|F' - O| = 1$, i punti

$$O = P_0 \qquad P_1 \qquad P_2 \qquad \ldots\ldots \qquad P_{n-1} \qquad P_n = F$$

definiti dai vettori posizione:

$$P_i - O = d\,(Q_i - O) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

costituiscono una soluzione per il problema originale. In altri termini, è sempre possibile costruire una soluzione del problema per $|F - O| = d$ a partire dal problema per $|F' - O| = 1$ applicando una *omotetia di punto fisso O e fattore di scala d*. Si conclude pertanto che la lunghezza massima del percorso che congiunge O ad F secondo i vincoli specificati deve sempre potersi scrivere nella forma:

$$L_n = d\,\sigma_n = |F - O|\,\sigma_n\,,$$

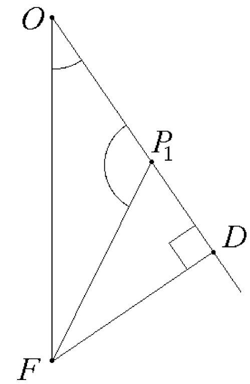
dove σ_n è un coefficiente positivo dipendente soltanto dal numero prefissato n di segmenti che compongono la traiettoria.

(3) Per $n = 1$ la soluzione del problema è data ovviamente dal segmento $F - O$, di lunghezza d. Deve dunque aversi:

$$\sigma_1 = 1$$

e la soluzione è chiaramente unica.

(4) Sia $n \geq 2$ e sia P_1 il primo punto della traiettoria di massima lunghezza costituita da n segmenti. Poichè la distanza da F non può crescere, il punto P_1 deve essere scelto in modo che:
   - l'angolo $F\hat{O}P_1$ sia di ampiezza minore o uguale di 90^o;
   - l'angolo $O\hat{P}_1F$ abbia ampiezza non inferiore a 90^o.



La prima condizione afferma che da O è possibile muovere soltanto in una direzione che forma con il segmento orientato $F - O$ un angolo acuto o, al limite, retto — in questo secondo caso, tuttavia, lo spostamento può essere soltanto nullo, quindi poco interessante. La seconda condizione precisa che, lungo la direzione di spostamento selezionata, il punto P_1 non può collocarsi oltre il punto D che rappresenta la distanza di F dalla retta $O - P_1$ — oltre tale punto infatti la distanza $P_1 - F$ *crescerebbe* anzichè diminuire, violando il vincolo. È ben noto dalla geometria che il punto D giace sulla circonferenza di diametro $F - O$. Si conclude pertanto che per rispettare il vincolo *il punto P_1 può essere scelto soltanto sul cerchio chiuso $\mathbb{C}$ di diametro $F - O$.*

(5) Il tratto successivo della spezzata di massima lunghezza deve congiungere P_1 con F con $n - 1$ segmenti. La sua lunghezza deve quindi esprimersi nella forma:

$$|F - P_1|\, \sigma_{n-1}\,.$$

La lunghezza massima del percorso fra O ed F ad n segmenti risulta così:

$$|P_1 - O| + |F - P_1|\, \sigma_{n-1}$$

e deve identificarsi con $|F - O|\, \sigma_n$.

(6) La lunghezza massima del percorso fra O e F ad n segmenti deve potersi calcolare determinando il massimo della funzione:

$$|A - O| + |F - A|\, \sigma_{n-1} \tag{.1}$$

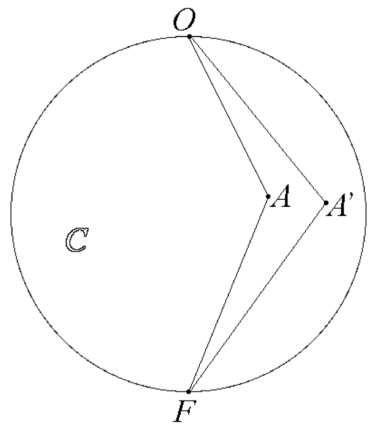
per $A \in \mathbb{C}$. *Un punto A di massimo fornisce la posizione di P_1*, primo punto della soluzione. *Il valore del massimo, una volta determinato, individua una relazione di ricorrenza che consente il calcolo di σ_n.*

(7) È facile convincersi che basta calcolare il massimo dell'equazione (.1) sulla sola *circonferenza* $\partial\mathbb{C}$, bordo del cerchio $\mathbb{C}$. L'asserto si può dimostrare rigorosamente, ma è comunque evidente per ragioni geometriche. Scelto infatti un punto A interno al cerchio, è sempre dato scegliere un altro punto A' per il quale *entrambe* le distanze $|A' - O|$ e $|F - A'|$ risultano *maggiori* rispetto a quelle calcolate per il punto iniziale, $|A - O|$ e $|F - A|$ rispettivamente. Di conseguenza è anche:

$$|A - O| + |F - A|\, \sigma_{n-1} \,<\, |A' - O| + |F - A'|\, \sigma_{n-1}\,.$$

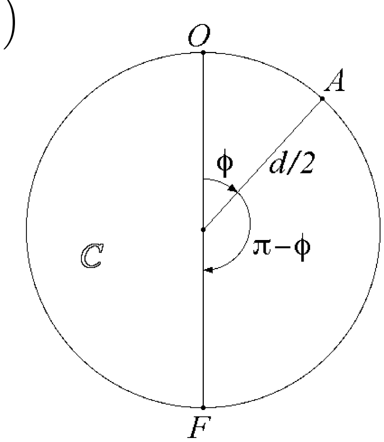
I punti di massimo non possono dunque collocarsi all'interno del cerchio chiuso $\mathbb{C}$, ma soltanto sulla frontiera $\partial\mathbb{C}$ di questo.

La figura seguente illustra quanto affermato:



(8) Si tratta ora di calcolare il valore dell'estremo:

$$\max_{A \in \partial \mathbb{C}} \Big(|A-O| + |F-A|\, \sigma_{n-1} \Big)$$



e il punto di massimo corrispondente, che andrà identificato con P_1. Conviene introdurre un sistema di coordinate polari con origine nel centro della circonferenza $\partial\mathbb{C}$; ls coordinata radiale è fissata al raggio $d/2$ della circonferenza, mentre l'anomalia ϕ si identifica con l'angolo $F\hat{C}A$, come mostrato in figura. È altresì evidente, per ragioni di simmetria, che la ricerca del massimo può essere limitata ad una sola delle due semicirconferenze delimitate dai punti O ed F, per esempio quella mostrata a destra nella figura.
In termini delle coordinate polari introdotte si hanno le relazioni:

$$|A-O| \,=\, 2\,\frac{d}{2}\,\sin\frac{\phi}{2} \,=\, d\,\sin\frac{\phi}{2} \qquad\qquad |F-A| \,=\, 2\,\frac{d}{2}\,\sin\frac{\pi-\phi}{2} \,=\, d\,\cos\frac{\phi}{2}$$

per cui l'estremo da calcolare diventa:

$$\max_{\phi\in[0,\pi]}\Big(d\,\sin\frac{\phi}{2} + \sigma_{n-1}\,d\,\cos\frac{\phi}{2}\Big) \,=\, d\,\max_{\phi\in[0,\pi]}\Big(\sin\frac{\phi}{2} + \sigma_{n-1}\,\cos\frac{\phi}{2}\Big)\,.$$

Derivando in ϕ l'espressione entro parentesi tonde e uguagliando a zero il risultato si ricava l'unico punto di massimo $\phi = \phi_o \in [0,\pi]$ definito da:

$$\mathrm{tg}\frac{\phi_o}{2} \,=\, \frac{1}{\sigma_{n-1}} \tag{.2}$$

al quale corrisponde il valore massimo:

$$\begin{aligned} d\Big(\sin\frac{\phi_o}{2} + \sigma_{n-1}\,\cos\frac{\phi_o}{2}\Big) &= d\,\cos\frac{\phi_o}{2}\Big(\mathrm{tg}\frac{\phi_o}{2} + \sigma_{n-1}\Big) = \\ &= d\,\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\phi_o}{2}}}\Big(\mathrm{tg}\frac{\phi_o}{2} + \sigma_{n-1}\Big) = \\ &= d\,\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sigma_{n-1}^2}}}\Big(\frac{1}{\sigma_{n-1}} + \sigma_{n-1}\Big) = d\sqrt{1+\sigma_{n-1}^2}\;. \end{aligned}$$

Questo valore massimo deve identificarsi con $d\,\sigma_n$. Pertanto:

$$d\,\sigma_n = d\sqrt{1+\sigma_{n-1}^2}$$

ed infine, equivalentemente:

$$\sigma_n^2 = 1 + \sigma_{n-1}^2 \qquad n \geq 2\,.$$

Basta poi ricordare la condizione $\sigma_1 = 1$, per concludere che:

$$\sigma_n = \sqrt{n} \qquad n = 1, 2, \ldots, n\,.$$

La massima lunghezza della spezzata di n *segmenti che collega* O *ad* F *rispettando il vincolo è pari a* $d\sqrt{n}$.
La relazione (.2) stabilisce che il primo punto P_1 della spezzata di massima lunghezza deve collocarsi sulla circonferenza di diametro $O-F$ in modo che l'arco OP_1 individui un angolo al centro di ampiezza ϕ_o. L'angolo alla circonferenza $O\hat{F}P_1$ ha quindi ampiezza:

$$\frac{\phi_o}{2} = \mathrm{arctg}\Big(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\Big)$$

e individua completamente la posizione di P_1. Si osservi che detto punto poteva anche essere scelto in posizione simmetrica rispetto al diametro $F-O$: *la spezzata di massima lunghezza non è unica per* $n \geq 2$.

(9) Una volta scelto P_1, la posizione del secondo punto della spezzata di massima lunghezza si determina in maniera analoga, considerando la circonferenza di diametro $F-P_1$ e prendendo su di essa un punto P_2 in modo che l'angolo $P_1\hat{F}P_2$ abbia ampiezza:

$$\mathrm{arctg}\Big(\frac{1}{\sqrt{n-2}}\Big)\,.$$

Ancora una volta và rilevato che il punto P_2 non è unico, potendosi scegliere simmetricamente rispetto al diametro $F-P_1$.

(10) I risulta precedenti consentono di costruire facilmente l'intera spezzata a $n \geq 2$ segmenti di massima lunghezza:

$$O = P_0 \qquad P_1 \qquad \ldots\ldots \qquad P_{n-1} \qquad P_n = F\,.$$

Un possibile algoritmo è il seguente. Per prima cosa si calcolano gli $n-1$ angoli:

$$\alpha_i = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{i}}\right) \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1\,.$$

Dal punto finale F si tracciano quindi $n-1$ semirette:

$$r_1 \qquad r_2 \qquad \ldots\ldots \qquad r_{n-2} \qquad r_{n-1}$$

in modo che la prima formi un angolo α_{n-1} con la retta orientata $O-F$, la seconda un angolo α_{n-2} con la precedente, e così via fino alla $n-1$-esima e ultima, che formerà un angolo α_1 con la $n-2$-esima. Come ultimo passo si determinano:

- la proiezione ortogonale di O su r_1, individuando P_1;
- la proiezione ortogonale di P_1 su r_2, individuando P_2;

  ....
- la proiezione ortogonale di P_{n-2} su r_{n-1}, individuando P_{n-1};

e si ricorda che $P_n = F$.

Congiungendo consecutivamente i punti $O = P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n = F$ si ottiene infine la spezzata richiesta. La figura seguente illustra l'algoritmo — si osservi che gli angoli $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1$ da considerare formano una sequenza crescente, il cui ultimo elemento è $\alpha_1 = 45^o$. Nella fattispecie è $n = 7$ e gli angoli $\alpha_6, \alpha_5, \ldots, \alpha_2, \alpha_1$ hanno le ampiezze (in gradi):

$$\begin{aligned}
\alpha_6 &= 22.20765430^o \\
\alpha_5 &= 24.09484253^o \\
\alpha_4 &= 26.56505117^o \\
\alpha_3 &= 30.00000000^o \\
\alpha_2 &= 35.26438966^o \\
\alpha_1 &= 45.00000000^o
\end{aligned}$$

La lunghezza complessiva del percorso è:

$$L_7 = d\sqrt{7}\,.$$

Da notare che, potendosi scegliere i vari punti P_i in modo simmetrico rispetto alle posizioni indicate, si potrebbero individuare esattamente $2^{n-1} = 2^6 = 64$ percorsi distinti di uguale lunghezza massima.