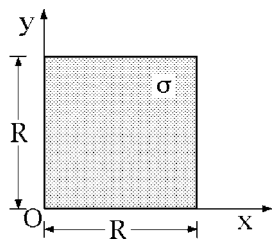
Scritto di meccanica razionale 1 del 20.07.2004

Esercizio 1
Nella terna $Oxyz$, di asse verticale Oz, un punto materiale pesante P di massa m è vincolato a muoversi senza attrito sulla superficie del paraboloide di equazione $z = \alpha(x^2 + y^2)$, con α costante positiva. Scrivere le equazioni del moto del sistema.

Esercizio 2
Una lamina quadrata di lato R si colloca nel piano Oxy di una terna cartesiana ortogonale $Oxyz$, in modo che due lati giacciano lungo gli assi coordinati Ox e Oy. La densità della lamina è espressa da

$$\sigma(x, y) = \frac{m}{R^4}xy \qquad \forall\,(x, y) \in [0, R]^2\,.$$



Si vuole determinare del sistema:

(*a*) la posizione del baricentro rispetto alla terna $Oxyz$;

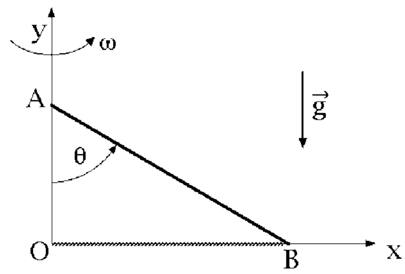
(*b*) la matrice d'inerzia relativa alla stessa terna $Oxyz$;

(*c*) una terna principale d'inerzia in O, e i momenti principali d'inerzia in O;

(*d*) il momento angolare in O e l'energia cinetica relativi ad una terna di riferimento in cui O sia fisso e la velocità angolare istantanea valga $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_1 - 2\omega\hat{e}_3$, con $\omega > 0$.

Esercizio 3

Nel piano verticale Oxy di una terna di riferimento cartesiana ortogonale si consideri il sistema costituito da un'asta rettilinea rigida e pesante i cui estremi A e B sono vincolati a scorrere rispettivamente lungo gli assi Oy e Ox. L'asta ha lunghezza L ed è omogenea di massa m. La terna di riferimento ruota con velocità angolare costante ω attorno all'asse verticale Oy rispetto ad un riferimento inerziale e una molla di costante elastica $m\omega^2/2$ collega l'estremo B dell'asta con l'origine O.



Supponendo i vincoli ideali e facendo uso dell'angolo θ mostrato in figura come coordinata lagrangiana, determinare:

(*a*) l'energia cinetica del sistema rispetto alla terna $Oxyz$;

(*b*) gli equilibri del sistema;

(*c*) le proprietà di stabilità degli equilibri;

(*d*) le equazioni pure del moto;

(*e*) un integrale primo del sistema.

Soluzione dell'esercizio 1
La posizione del punto P sulla superficie del paraboloide è individuata in termini delle coordinate $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ per mezzo della parametrizzazione C^∞

$$P-O\;=\;x\,\hat{e}_1+y\,\hat{e}_2+\alpha(x^2+y^2)\,\hat{e}_3\;,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2\,.$$

Il postulato delle reazioni vincolari permette di scrivere la seconda legge della dinamica anche in presenza del vincolo

$$m\ddot{P}\;=\;-mg\,\hat{e}_3+\vec{\Phi} \tag{1}$$

ma l'equazione del moto ottenuta non è pura a causa della reazione vincolare incognita $\vec{\Phi}$ che compare a secondo membro. Nell'ipotesi che la superficie del paraboloide sia liscia, le componenti di $\vec{\Phi}$ lungo i vettori tangenti $\partial P/\partial x$ e $\partial P/\partial y$ risultano identicamente nulle

$$\vec{\Phi}\cdot\frac{\partial P}{\partial x}\;=\;0\qquad\qquad \vec{\Phi}\cdot\frac{\partial P}{\partial y}\;=\;0$$

per cui le equazioni pure del moto si ricavano proiettando la (1) lungo gli stessi vettori tangenti:

$$\begin{cases} m\ddot{P}\cdot\dfrac{\partial P}{\partial x}\;=\;-mg\,\hat{e}_3\cdot\dfrac{\partial P}{\partial x}\\[2mm] m\ddot{P}\cdot\dfrac{\partial P}{\partial y}\;=\;-mg\,\hat{e}_3\cdot\dfrac{\partial P}{\partial y}\,. \end{cases}$$

Più esplicitamente, la velocità e l'accelerazione istantanea del punto P sono date dalle espressioni:

$$\begin{aligned}\dot{P}\;&=\;\dot{x}\,\hat{e}_1+\dot{y}\,\hat{e}_2+2\alpha(x\dot{x}+y\dot{y})\,\hat{e}_3\\ \ddot{P}\;&=\;\ddot{x}\,\hat{e}_1+\ddot{y}\,\hat{e}_2+2\alpha(x\ddot{x}+y\ddot{y}+\dot{x}^2+\dot{y}^2)\,\hat{e}_3\end{aligned}$$

mentre i vettori tangenti al paraboloide nella generica posizione $P(x,y)$ si scrivono

$$\frac{\partial P}{\partial x}\;=\;\hat{e}_1+2\alpha x\,\hat{e}_3\qquad\qquad \frac{\partial P}{\partial y}\;=\;\hat{e}_2+2\alpha y\,\hat{e}_3$$

e risultano sempre fra loro linearmente indipendenti, caratterizzando così la superficie come regolare. Se ne deducono le relazioni:

$$\ddot{P}\cdot\frac{\partial P}{\partial x}\;=\;\ddot{x}+4\alpha^2x(x\ddot{x}+y\ddot{y}+\dot{x}^2+\dot{y}^2)\;=\;(1+4\alpha^2x^2)\ddot{x}+4\alpha^2xy\,\ddot{y}+4\alpha^2x(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$

$$-mg\,\hat{e}_3\cdot\frac{\partial P}{\partial x}\;=\;-mg\,\hat{e}_3\cdot(\hat{e}_1+2\alpha x\,\hat{e}_3)\;=\;-2\alpha mgx$$

$$\ddot{P}\cdot\frac{\partial P}{\partial y}\;=\;\ddot{y}+4\alpha^2y(x\ddot{x}+y\ddot{y}+\dot{x}^2+\dot{y}^2)\;=\;4\alpha^2xy\ddot{x}+(1+4\alpha^2y^2)\ddot{y}+4\alpha^2y(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$

$$-mg\,\hat{e}_3\cdot\frac{\partial P}{\partial y}\;=\;-mg\,\hat{e}_3\cdot(\hat{e}_2+2\alpha y\,\hat{e}_3)\;=\;-2\alpha mgy$$

che sostituite nelle equazioni pure del moto porgono il risultato cercato

$$\begin{cases} (1+4\alpha^2x^2)\ddot{x} + 4\alpha^2xy\,\ddot{y} + 4\alpha^2x(\dot{x}^2+\dot{y}^2) \,=\, -2\alpha g x \\ 4\alpha^2xy\ddot{x} + (1+4\alpha^2y^2)\ddot{y} + 4\alpha^2y(\dot{x}^2+\dot{y}^2) \,=\, -2\alpha g y\,, \end{cases}$$

in cui si è omesso il fattore comune m.

Soluzione dell'esercizio 2
(a) **Baricentro**
La posizione del baricentro G rispetto alla terna $Oxyz$ è individuata dal vettore

$$G-O \,=\, x_G\,\hat{e}_1 + y_G\,\hat{e}_2 + z_G\,\hat{e}_3\,.$$

Il piano di giacitura Oxy della figura costituisce un evidente piano di simmetria, nel quale il baricentro deve necessariamente collocarsi. Ne segue che

$$z_G \,=\, 0\,.$$

La densità superficiale della lamina soddisfa inoltre la condizione

$$\sigma(x,y) \,=\, \sigma(y,x) \qquad \forall\,(x,y) \in\, [0,R]^2$$

dalla quale si deduce che la bisettrice del I e III quadrante, di equazione $y = x$, deve rappresentare un asse di simmetria del sistema. Pertanto

$$x_G \,=\, y_G\,.$$

Massa della lamina
La massa M della lamina si determina per integrazione della densità σ sull'intera superficie del quadrato:

$$M \,=\, \int\limits_{[0,R]^2} dxdy\,\sigma \,=\, \int\limits_0^R dx \int\limits_0^R dy\,\frac{m}{R^4}xy \,=\, \frac{m}{R^4}\int\limits_0^R x\,dx\int\limits_0^R y\,dy \,=\, \frac{m}{R^4}\,\frac{R^2}{2}\,\frac{R^2}{2} \,=\, \frac{m}{4}\,.$$

Ascissa del baricentro
L'ascissa x_G risulta l'unica coordinata rilevante del baricentro G e viene calcolata direttamente facendo ricorso alla definizione, la quale porge:

$$x_G \,=\, \frac{1}{M}\int\limits_{[0,R]^2} dxdy\,x\,\sigma \,=\, \frac{4}{m}\int\limits_0^R dx\int\limits_0^R dy\,\frac{m}{R^4}\,x^2y \,=$$

$$=\, \frac{4}{R^4}\int\limits_0^R x^2\,dx\int\limits_0^R y\,dy \,=\, \frac{4}{R^4}\,\frac{R^3}{3}\,\frac{R^2}{2} \,=\, \frac{2}{3}R$$

Baricentro
La posizione del baricentro è quindi individuata dal vettore posizione

$$G - O \,=\, \frac{2}{3} R\,\hat{e}_1 + \frac{2}{3} R\,\hat{e}_2 \,.$$

(b) **Matrice d'inerzia rispetto alla terna** $Oxyz$
L'essere la lamina completamente ubicata nel piano coordinato Oxy implica che la matrice d'inerzia relativa alla terna $Oxyz$ assuma la forma

$$[L_O] \,=\, \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & 0 \\ L_{xy} & L_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx}+L_{yy} \end{pmatrix} \,.$$

Il momento d'inerzia relativo all'asse Ox si calcola agevolmente per mezzo della definizione:

$$\begin{aligned} L_{xx} \,&=\, \int\limits_{[0,R]^2} dxdy\,\sigma\, y^2 \,=\, \int\limits_0^R dx \int\limits_0^R dy\, \frac{m}{R^4}\, xy^3 \,= \\ &=\, \frac{m}{R^4} \int\limits_0^R x\,dx \int\limits_0^R y^3 dy \,=\, \frac{m}{R^4}\,\frac{R^2}{2}\,\frac{R^4}{4} \,=\, \frac{mR^2}{8} \end{aligned}$$

ed in modo analogo si procedere per il momento d'inerzia relativo ad Oy:

$$\begin{aligned} L_{yy} \,&=\, \int\limits_{[0,R]^2} dxdy\,\sigma\, x^2 \,=\, \int\limits_0^R dx \int\limits_0^R dy\, \frac{m}{R^4}\, x^3 y \,= \\ &=\, \frac{m}{R^4} \int\limits_0^R x^3 dx \int\limits_0^R y\,dy \,=\, \frac{m}{R^4}\,\frac{R^4}{4}\,\frac{R^2}{2} \,=\, \frac{mR^2}{8} \end{aligned}$$

che dunque coincide con il precedente, come deve essere a causa dell'asse di simmetria $y = x$. Il prodotto d'inerzia L_{xy} vale infine:

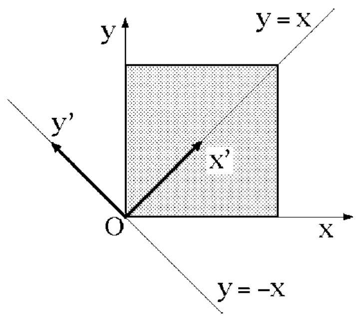
$$\begin{aligned} L_{xy} \,&=\, -\int\limits_{[0,R]^2} dxdy\,\sigma\, xy \,=\, -\int\limits_0^R dx \int\limits_0^R dy\, \frac{m}{R^4} x^2 y^2 \,= \\ &=\, -\frac{m}{R^4} \int\limits_0^R x^2 dx \int\limits_0^R y^2 dy \,=\, -\frac{m}{R^4}\,\frac{R^3}{3}\,\frac{R^3}{3} \,=\, -\frac{mR^2}{9} \,. \end{aligned}$$

La matrice d'inerzia del sistema si scrive perciò:

$$[L_O] \,=\, mR^2 \begin{pmatrix} 1/8 & -1/9 & 0 \\ -1/9 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \,.$$

(c) **Terna principale e momenti principali d'inerzia in O**

Poiché Oxy rappresenta un piano di simmetria, l'asse Oz è certamente un asse principale d'inerzia in O. Analogamente, anche l'asse di simmetria $y = x$ passa per O e costituisce quindi un asse principale d'inerzia in O. Un terzo asse principale sarà quindi $y = -x$, ortogonale ai precedenti. Una terna principale d'inerzia in O del sistema sarà quindi il riferimento cartesiano ortogonale $Ox'y'z'$ indicato nella figura seguente



il terzo asse risultando orgotonale al piano del foglio ed identificabile con l'asse Oz.
I momenti principali d'inerzia si calcolano risolvendo il problema agli autovalori

$$\det([L_O] - \lambda\mathbb{I}) = 0$$

ossia, posto $\lambda = mR^2\mu$ ed omesso il fattore costante mR^2, l'equazione

$$\det\begin{pmatrix} \frac{1}{8} - \mu & -\frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{8} - \mu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} - \mu \end{pmatrix} = 0\,.$$

Dopo semplici passaggi algebrici, l'equazione caratteristica diventa:

$$\left(\mu^2 - \frac{1}{4}\mu + \frac{17}{5184}\right)\left(\frac{1}{4} - \mu\right) = 0$$

e porge le soluzioni

$$\mu = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{17}{1296}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{81-17}{1296}}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} \pm \frac{2}{9}\right) = \frac{9 \pm 8}{72} = \begin{cases} \nearrow \frac{17}{72} \\ \searrow \frac{1}{72} \end{cases}$$

nonché

$$\mu = \frac{1}{4}\,,$$

cui corrispondono i momenti principali d'inerzia in O:

$$A_1 = \frac{17}{72} mR^2 \qquad A_2 = \frac{1}{72} mR^2 \qquad A_3 = \frac{1}{4} mR^2 .$$

Degli assi principali d'inerzia già individuati per mezzo degli elementi di simmetria si può dare conferma calcolando gli autovettori di L_O relativi ai momenti principali.

Autovalore $\mu_1 = 17/72$
Gli autovettori relativi al momento principale d'inerzia $A_1 = 17/72 mR^2$ si ricavano da

$$\frac{1}{mR^2}[L_O] - \mu_1 \mathbb{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} - \frac{17}{72} & -\frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{8} - \frac{17}{72} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} - \frac{17}{72} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{72} \end{pmatrix}$$

risolvendo l'equazione matriciale

$$0 = \Big(\frac{1}{mR^2}[L_O] - \mu_1 \mathbb{I}\Big)[v] = \begin{pmatrix} -1/9 & -1/9 & 0 \\ -1/9 & -1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1/72 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1/9 - v_2/9 \\ -v_1/9 - v_2/9 \\ v_3/72 \end{pmatrix}$$

ovvero l'equivalente sistema omogeneo di equazioni lineari algebriche

$$\begin{cases} -\frac{1}{9}v_1 - \frac{1}{9}v_2 = 0 \\ \frac{1}{72}v_3 = 0 \end{cases}$$

da cui si deduce la soluzione generale

$$v_2 = -v_1 , \quad v_3 = 0 , \qquad \forall \, v_1 \in \mathbb{R} .$$

Gli autovettori corrispondenti sono perciò:

$$\vec{v} = v_1 \, \hat{e}_1 - v_1 \, \hat{e}_2 \qquad \forall \, v_1 \in \mathbb{R}$$

ed individuano i punti dell'asse principale $y = -x$.

Autovalore $\mu_2 = 1/72$
Gli autovettori associati all'autovalore μ_2 vengono determinati dalla matrice

$$\frac{1}{mR^2}[L_O] - \mu_2 \mathbb{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} - \frac{1}{72} & -\frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{8} - \frac{1}{72} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} - \frac{1}{72} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{72} \end{pmatrix}$$

per tramite dell'equazione matriciale

$$0 = \Big(\frac{1}{mR^2}[L_O] - \mu_2\mathbb{I}\Big)[v] = \begin{pmatrix} 1/9 & -1/9 & 0 \\ -1/9 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 17/72 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1/9 - v_2/9 \\ -v_1/9 + v_2/9 \\ 17/72 v_3 \end{pmatrix}$$

equivalente al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} \dfrac{1}{9}v_1 - \dfrac{1}{9}v_2 = 0 \\ \dfrac{17}{72}v_3 = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione generale si scrive

$$v_2 = v_1 \ , \quad v_3 = 0 \qquad \forall\, v_1 \in \mathbb{R}\,.$$

Gli autovettori relativi a μ_2 risultano perciò

$$\vec{v} = v_1\,\hat{e}_1 + v_1\,\hat{e}_2 \qquad v_1 \in \mathbb{R}$$

ed individuano tutti e soli i punti dell'asse di simmetria $y = x$.

Autovalore $\mu_3 = 1/4$
In questo caso risulta

$$\frac{1}{mR^2}[L_O] - \mu_3\mathbb{I} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{9} & 0 \\[2ex] -\dfrac{1}{9} & \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{4} & 0 \\[2ex] 0 & 0 & \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{8} & -\dfrac{1}{9} & 0 \\[2ex] -\dfrac{1}{9} & -\dfrac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e gli autovettori relativi a μ_3 si ottengono risolvendo l'equazione matriciale

$$0 = \Big(\frac{1}{mR^2}[L_O] - \mu_3\mathbb{I}\Big)[v] = \begin{pmatrix} -1/8 & -1/9 & 0 \\ -1/9 & -1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1/8 - v_2/9 \\ -v_1/9 - v_2/8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ossia l'equivalente sistema lineare

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{8}v_1 - \dfrac{1}{9}v_2 = 0 \\[2ex] -\dfrac{1}{9}v_1 - \dfrac{1}{8}v_2 = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione generale assume la forma

$$v_1 = 0 \qquad v_2 = 0 \qquad \forall\, v_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Gli autovettori sono dunque

$$\vec{v} = v_3\,\hat{e}_3\;, \quad \forall\, v_3 \in \mathbb{R}$$

e corrispondono all'asse principale Oz.

(d) **Momento angolare in O ed energia cinetica**
Il vettore velocità angolare istantanea della lamina è dato da

$$\vec{\omega} = \sum_{j=1}^{3} \omega_j \hat{e}_j$$

con componenti $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\omega, 0, -2\omega)$. Siccome il punto O del sistema è fisso per ipotesi, il momento angolare in O si esprime per mezzo della relazione lineare

$$\sum_{i=1}^{3} K_i \hat{e}_i = \vec{K}_O = L_O(\vec{\omega})$$

e le sue componenti rispetto alla terna $Oxyz$ risultano perciò

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = mL^2 \begin{pmatrix} 1/8 & -1/9 & 0 \\ -1/9 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ -2\omega \end{pmatrix} = mL^2\omega \begin{pmatrix} 1/8 \\ -1/9 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che:

$$\vec{K}_O = mL^2\omega\Big(\frac{1}{8}\,\hat{e}_1 - \frac{1}{9}\,\hat{e}_2 - \frac{1}{2}\,\hat{e}_3\Big)\,.$$

Per l'energia cinetica si ha invece:

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{K}_O = \frac{1}{2}(\omega \;\; 0 \;\; -2\omega)\, mL^2\omega \begin{pmatrix} 1/8 \\ -1/9 \\ -1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}mL^2\omega^2(1 \;\; 0 \;\; -2) \begin{pmatrix} 1/8 \\ -1/9 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}mL^2\omega^2\Big(\frac{1}{8} + 1\Big) = \frac{9}{16}mL^2\omega^2\,.$$

Soluzione dell'esercizio 3
(a) **Energia cinetica**
L'asta AB è priva di punti fissi e la sua energia cinetica deve essere determinata facendo uso del teorema di König. Il vettore posizione del baricentro G dell'asta omogenea — punto medio del segmento AB — si scrive

$$G - O = \frac{A - O + B - O}{2} = \frac{L}{2}\cos\theta\,\hat{e}_2 + \frac{L}{2}\sin\theta\,\hat{e}_1 = \frac{L}{2}\sin\theta\,\hat{e}_1 + \frac{L}{2}\cos\theta\,\hat{e}_2$$

e la sua velocità istantanea assume la forma

$$\dot{G} = \frac{L}{2}(\cos\theta\,\hat{e}_1 - \sin\theta\,\hat{e}_2)\,\dot{\theta}\,.$$

In una qualsivoglia terna baricentrale il moto dell'asta avviene attorno all'asse fisso Gz, con velocità angolare istantanea

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\hat{e}_3$$

dal momento che θ rappresenta l'angolo compreso fra la direzione AB, solidale all'asta, e la verticale Oy orientata verso il basso — direzione fissa nella terna di riferimento baricentrale, ovvero nel riferimento fisso $Oxyz$. Il teorema di König porge pertanto

$$T = \frac{m}{2}\dot{G}^2 + \frac{1}{2}I_{Gz}|\vec{\omega}|^2 = \frac{m}{2}\left|\frac{L}{2}(\cos\theta\,\hat{e}_1 - \sin\theta\,\hat{e}_2)\,\dot{\theta}\right|^2 + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}|\dot{\theta}\,\hat{e}_3|^2$$

e conduce all'espressione cercata

$$T = \frac{m}{2}\frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{mL^2}{24}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{6}mL^2\dot{\theta}^2\,.$$

(*b*) **Equilibri**
Il sistema, scleronomo a vincoli bilaterali ideali, è soggetto esclusivamente a sollecitazioni posizionali e conservative, che sono date dal peso, dall'interazione elastica fra i punti O e B, dal campo delle forze centrifughe agenti sull'asta AB. Di ciascun campo di forze si provvede a determinare il relativo potenziale. Il potenziale U del sistema risulterà dalla somma dei potenziali gravitazionale, elastico e centrifugo. Gli equilibri del sistema si otterranno infine ricercando i punti critici del potenziale U. Si osservi che nella terna non galileiana $Oxyz$ il sistema sperimenta anche un sistema di forze centrifughe, la cui componente lagrangiana è tuttavia identicamente nulla per via della planarità del moto, che infatti si svolge in un piano passante per l'asse fisso di rotazione Oy:

$$Q_\theta^{\mathrm{Cor}} = \sum_{P\in AB} -2m\omega\,\hat{e}_2\wedge\dot{P}\cdot\frac{\partial P}{\partial\theta} = \sum_{P\in AB} -2m\omega\,\hat{e}_2\wedge\frac{\partial P}{\partial\theta}\,\dot{\theta}\cdot\frac{\partial P}{\partial\theta} = 0\,.$$

Potenziale gravitazionale
Il potenziale gravitazionale dell'asta è calcolato direttamente dalla definizione e vale

$$U_{\mathrm{g}} = -mg(G-O)\cdot\hat{e}_2 = -\frac{1}{2}mgL\cos\theta\,.$$

Potenziale elastico
Analogamente, per il potenziale elastico associato alla molla OB si ha l'espressione

$$U_{\mathrm{el}} = -\frac{1}{2}\frac{m\omega^2}{2}(B-O)^2 = -\frac{m\omega^2}{4}\big|L\sin\theta\,\hat{e}_1\big|^2 = -\frac{1}{4}mL^2\omega^2\sin^2\theta\,.$$

Potenziale delle forze centrifughe
Per calcolare il potenziale delle forze centrifughe è conveniente, anziché fare uso della matrice d'inerzia dell'asta, ricorrere direttamente alla definizione

$$U_{\mathrm{cf}} \,=\, \frac{\omega^2}{2} I_{Oy}(\theta)$$

e calcolare il momento d'inerzia $I_{Oy}(\theta)$ dell'asta rispetto all'asse Oy, attorno al quale avviene il moto rotatorio della terna $Oxyz$ rispetto al riferimento inerziale. Parametrizzando l'asta con un'ascissa curvilinea s, in modo che sia $s = 0$ in A e $s = L$ in B, il potenziale centrifugo del sistema si esprime nella forma

$$U_{\mathrm{cf}} \,=\, \frac{\omega^2}{2} \int_0^L (s \sin\theta)^2 \frac{m}{L}\, ds \,=\, \frac{m\omega^2}{2L} \sin^2\theta \int_0^L s^2\, ds \,=\, \frac{m\omega^2}{2L} \sin^2\theta\, \frac{L^3}{3} \,=\, \frac{1}{6} mL^2\omega^2 \sin^2\theta\,.$$

Potenziale del sistema
Il potenziale del sistema risulta dalla somma dei potenziali parziali sopra calcolati:

$$\begin{aligned} U(\theta) \,=\, U_{\mathrm{g}} + U_{\mathrm{el}} + U_{\mathrm{cf}} \,&=\, -\frac{1}{2} mgL\cos\theta - \frac{1}{4} mL^2\omega^2 \sin^2\theta + \frac{1}{6} mL^2\omega^2 \sin^2\theta \,= \\ &=\, -\frac{1}{2} mgL\cos\theta - \frac{1}{12} mL^2\omega^2 \sin^2\theta \end{aligned}$$

e la sua derivata prima risulta

$$U'(\theta) \,=\, \frac{1}{2} mgL\sin\theta - \frac{1}{6} mL^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta\,.$$

Le configurazioni di equilibrio del sistema sono tutti e soli i punti critici del potenziale, ottenibili ponendo uguale a zero la derivata prima di U:

$$\frac{1}{6} mL^2\omega^2 \sin\theta \left(\frac{3g}{L\omega^2} - \cos\theta\right) \,=\, 0$$

e dunque risolvendo l'una o l'altra delle due equazioni parziali

$$\sin\theta \,=\, 0 \qquad\qquad \frac{3g}{L\omega^2} - \cos\theta \,=\, 0\,.$$

Dalla prima equazione si deducono gli equilibri, sempre definiti,

$$\theta \,=\, 0\,, \quad \pi\,,$$

mentre la seconda equazione porge le ulteriori configurazioni di equilibrio

$$\theta \,=\, \pm\arccos\left(\frac{3g}{L\omega^2}\right) \,=\, \pm\theta^\star$$

definite e distinte dalle precedenti a condizione che si abbia

$$\frac{3g}{L\omega^2} < 1$$

con $\theta^\star = \arccos(3g/L\omega^2)$.

(c) **Stabilità degli equilibri**
La stabilità degli equilibri — tutti ordinari — viene analizzata mediante i teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale. Preliminarmente occorre calcolare la derivata seconda del potenziale

$$\begin{aligned} U''(\theta) &= \frac{1}{2}mgL\cos\theta - \frac{1}{6}mL^2\omega^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \\ &= \frac{1}{6}mL^2\omega^2\Big(\frac{3g}{L\omega^2}\cos\theta - \cos^2\theta + \sin^2\theta\Big) = \frac{1}{6}mL^2\omega^2\Big(\frac{3g}{L\omega^2}\cos\theta - 2\cos^2\theta + 1\Big) \end{aligned}$$

per poi valutarla nelle singole configurazioni di equilibrio.

Configurazione $\theta = 0$
In questa configurazione la derivata seconda del potenziale non ha segno definito

$$U''(0) = \frac{1}{6}mL^2\omega^2\Big(\frac{3g}{L\omega^2} - 1\Big)$$

per cui si devono distinguere tre diversi sottocasi.

- Se $3g/L\omega^2 > 1$ si ha $U''(0) > 0$ e la configurazione di equilibrio è instabile per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet;
- per $3g/L\omega^2 < 1$ risulta invece $U''(0) > 0$, in modo che la configurazione si riconosce essere un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità segue dal teorema di Lagrange-Dirichlet;
- se infine $3g/L\omega^2 = 1$ ricorre un caso critico, che richiederebbe un esame delle derivate di ordine superiore al primo.

Configurazione $\theta = \pi$
In questo caso la derivata seconda del potenziale assume segno negativo

$$U''(\pi) = \frac{1}{6}mL^2\omega^2\Big(-\frac{3g}{L\omega^2} - 1\Big) = -\frac{1}{6}mL^2\omega^2\Big(\frac{3g}{L\omega^2} + 1\Big) < 0$$

per cui la configurazione costituisce un massimo relativo proprio del potenziale, stabile per Lagrange-Dirichlet.

Configurazioni $\theta = \theta^\star,\, -\theta^\star$
Le proprietà di stabilità di queste configurazioni sono le stesse, in quanto la derivata seconda del potenziale assume lo stesso valore

$$\begin{aligned} U''(-\theta^\star) = U''(\theta^\star) &= \frac{1}{6}mL^2\omega^2\Big(\frac{3g}{L\omega^2}\cos\theta^\star - 2\cos^2\theta^\star + 1\Big) = \\ &= \frac{1}{6}mL^2\omega^2\Big(\cos^2\theta^\star - 2\cos^2\theta^\star + 1\Big) = \frac{1}{6}mL^2\omega^2\sin^2\theta^\star > 0\,. \end{aligned}$$

Il segno positivo della derivata implica l'instabilità delle configurazioni di equilibrio.

(d) **Equazioni di Lagrange**
La lagrangiana del sistema si scrive

$$\mathfrak{L} \,=\, T + U \,=\, \frac{1}{6} mL^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} mgL\cos\theta - \frac{1}{12} mL^2\omega^2 \sin^2\theta$$

e verifica le relazioni

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\theta}}\Big) \,=\, \frac{1}{3} mL^2 \ddot{\theta} \qquad\qquad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \theta} \,=\, \frac{1}{2} mgL\sin\theta - \frac{1}{6} mL^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta$$

in modo che l'equazione di Lagrange $\displaystyle\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\theta}}\Big) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \theta} = 0$ si riduce a

$$\frac{1}{3} mL^2 \ddot{\theta} - \frac{1}{2} mgL\sin\theta + \frac{1}{6} mL^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta \,=\, 0\,.$$

(e) **Integrale primo**
Il sistema è scleronomo, posizionale e conservativo per cui un ovvio integrale primo è quello dell'energia meccanica $H = T - U$, ossia

$$H(\theta,\dot{\theta}) \,=\, \frac{1}{6} mL^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mgL\cos\theta + \frac{1}{12} mL^2\omega^2 \sin^2\theta\,.$$