

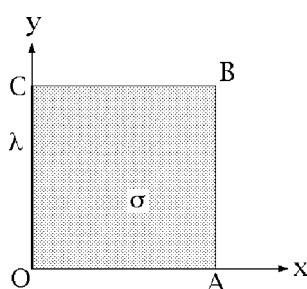
Esercizio 1

Nel piano Oxy di una terna di riferimento inerziale $Oxyz$ è data una lamina quadrata rigida $OABC$ di lato L e densità

$$\sigma(x, y) = \frac{m}{L^4} xy \quad \forall (x, y) \in [0, L]^2$$

come illustrato in figura. Al lato OC è saldata un'asta rigida di densità

$$\lambda(y) = \frac{m}{L^2} y \quad \forall y \in [0, L].$$

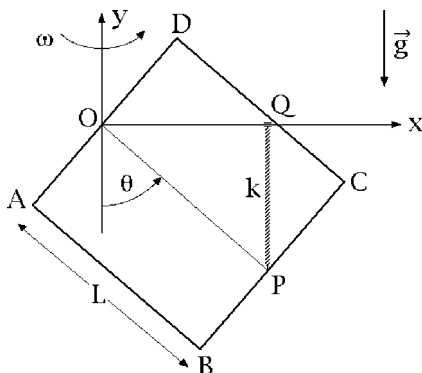


Si vuole determinare del sistema:

- (a) la posizione del baricentro rispetto alla terna $Oxyz$;
- (b) la matrice d'inerzia relativa alla stessa terna $Oxyz$;
- (c) il momento d'inerzia rispetto all'asse OB ;
- (d) il momento angolare rispetto all'origine O nell'ipotesi che O sia fisso e la velocità angolare istantanea valga $\vec{\omega} = 2\omega\hat{e}_1 - \omega\hat{e}_2$, con $\omega > 0$;
- (e) l'energia cinetica nelle stesse ipotesi.

Esercizio 2

Nel piano verticale Oxy di una terna $Oxyz$ una lamina quadrata omogenea e pesante $ABCD$, di lato L e massa m , è vincolata a ruotare attorno all'asse fisso Oz , essendo O il punto medio del lato AD . Il punto medio P del lato BC è connesso alla sua proiezione ortogonale Q sull'asse orizzontale Ox mediante una molla ideale di costante elastica k . La terna $Oxyz$ ruota con velocità angolare costante ω attorno all'asse verticale Oy rispetto ad un riferimento inerziale.



Assunti i vincoli ideali e usando l'angolo di rotazione θ come parametro lagrangiano, determinare del sistema, relativamente alla terna $Oxyz$:

- gli equilibri;
- le proprietà di stabilità degli equilibri ordinari;
- l'energia cinetica;
- le equazioni lagrangiane del moto;
- un integrale primo.

Soluzione dell'esercizio 1

(a) Baricentro

È opportuno calcolare separatamente massa e baricentro dell'asta e della lamina, per poi applicare il teorema distributivo.

Asta

La massa dell'asta si ricava integrando la densità lineare λ e vale

$$m_a = \int_0^L \lambda(y) dy = \int_0^L \frac{m}{L^2} y dy = \frac{m}{L^2} \frac{L^2}{2} = \frac{m}{2}.$$

La retta Oy costituisce un evidente asse di simmetria dell'asta, il cui baricentro G_a deve dunque collocarsi lungo di essa. Il vettore posizione del baricentro G_a si scrive perciò nella forma

$$G_a - O = y_a \hat{e}_2$$

dove l'ordinata y_a viene determinata per mezzo della definizione di centro di massa

$$y_a = \frac{1}{m_a} \int_0^L y \lambda(y) dy = \frac{2}{m} \int_0^L \frac{m}{L^2} y^2 dy = \frac{2}{L^2} \frac{L^3}{3} = \frac{2}{3} L.$$

Di conseguenza:

$$G_a - O = \frac{2}{3} L \hat{e}_2.$$

Lamina

La massa della lamina quadrata è data dall'integrale su $[0, L]^2$ della densità superficiale σ :

$$m_\ell = \int_0^L dx \int_0^L dy \sigma(x, y) = \int_0^L dx \int_0^L dy \frac{m}{L^4} xy = \frac{m}{L^4} \frac{L^2}{2} \frac{L^2}{2} = \frac{m}{4},$$

mentre il baricentro G_ℓ deve collocarsi nel piano di giacitura della lamina, che ne rappresenta anche un ovvio piano di simmetria:

$$G_\ell - O = x_\ell \hat{e}_1 + y_\ell \hat{e}_2.$$

L'ascissa x_ℓ del baricentro si deduce immediatamente dalla definizione:

$$x_\ell = \frac{1}{m_\ell} \int_0^L dx \int_0^L dy x \sigma(x, y) = \frac{4}{m} \int_0^L dx \int_0^L dy \frac{m}{L^4} x^2 y = \frac{4}{L^4} \frac{L^3}{3} \frac{L^2}{2} = \frac{2}{3} L$$

ed un calcolo analogo consente di determinare la corrispondente ordinata:

$$y_\ell = \frac{1}{m_\ell} \int_0^L dx \int_0^L dy y \sigma(x, y) = \frac{4}{m} \int_0^L dx \int_0^L dy \frac{m}{L^4} xy^2 = \frac{4}{L^4} \frac{L^2}{2} \frac{L^3}{3} = \frac{2}{3} L.$$

Si osservi che l'identità di ascissa e ordinata del baricentro si poteva stabilire a priori per via della relazione

$$\sigma(y, x) = \sigma(x, y) \quad \forall (x, y) \in [0, L]^2$$

che consente di individuare nella bisettrice $y = x$, $z = 0$, un asse di simmetria del sistema. In definitiva:

$$G_\ell - O = \frac{2}{3}L\hat{e}_1 + \frac{2}{3}L\hat{e}_2.$$

Sistema

Il baricentro G del sistema può ora individuarsi per mezzo del teorema distributivo, che consente di scriverne il vettore posizione come

$$\begin{aligned} G - O &= \frac{m_a(G_a - O) + m_\ell(G_\ell - O)}{m_a + m_\ell} = \\ &= \frac{\frac{m}{2}\frac{2}{3}L\hat{e}_2 + \frac{m}{4}\left(\frac{2}{3}L\hat{e}_1 + \frac{2}{3}L\hat{e}_2\right)}{\frac{m}{2} + \frac{m}{4}} = \frac{\frac{m}{6}L\hat{e}_1 + \frac{m}{2}L\hat{e}_2}{\frac{3}{4}m} = \frac{2}{9}L\hat{e}_1 + \frac{2}{3}L\hat{e}_2. \end{aligned}$$

(b) Matrice d'inerzia rispetto alla terna $Oxyz$

La matrice d'inerzia del sistema rispetto alla terna $Oxyz$ viene determinata come somma delle matrici d'inerzia relative all'asta OC e alla lamina quadrata $OABC$, che sono quindi calcolate separatamente.

Asta

Siccome l'asta giace sull'asse coordinato Oy è immediato convincersi che la relativa matrice d'inerzia assume la forma:

$$[L_O]^a = \begin{pmatrix} L_{xx}^a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx}^a \end{pmatrix}$$

in cui l'unico elemento da determinare è il momento d'inerzia

$$L_{xx}^a = \int_0^L \lambda(y) y^2 dy = \int_0^L \frac{m}{L^2} y^3 dy = \frac{m}{L^2} \frac{L^4}{4} = \frac{mL^2}{4}.$$

La matrice d'inerzia dell'asta rispetto al riferimento $Oxyz$ diventa pertanto:

$$[L_O]^a = mL^2 \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Lamina

Dal momento che il piano coordinato Oxy si identifica con il piano di giacitura della lamina, la matrice d'inerzia di questa deve assumere la forma

$$[L_O]^\ell = \begin{pmatrix} L_{xx}^\ell & L_{xy}^\ell & 0 \\ L_{xy}^\ell & L_{yy}^\ell & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx}^\ell + L_{yy}^\ell \end{pmatrix}$$

per via del fatto che $z = 0$ in tutti i punti della figura. Il momento d'inerzia rispetto all'asse Ox si scrive, per definizione,

$$L_{xx}^{\ell} = \int_0^L dx \int_0^L dy y^2 \sigma(x, y) = \int_0^L dx \int_0^L dy \frac{m}{L^4} xy^3 = \frac{m}{L^4} \frac{L^2}{2} \frac{L^4}{4} = \frac{mL^2}{8}$$

ed una espressione analoga vale per il momento d'inerzia relativo all'asse coordinato Oy :

$$L_{yy}^{\ell} = \int_0^L dx \int_0^L dy x^2 \sigma(x, y) = \int_0^L dx \int_0^L dy \frac{m}{L^4} x^3 y = \frac{m}{L^4} \frac{L^4}{4} \frac{L^2}{2} = \frac{mL^2}{8},$$

mentre il prodotto d'inerzia si riduce a:

$$L_{xy}^{\ell} = - \int_0^L dx \int_0^L dy xy \sigma(x, y) = - \int_0^L dx \int_0^L dy \frac{m}{L^4} x^2 y^2 = - \frac{m}{L^4} \frac{L^3}{3} \frac{L^3}{3} = - \frac{mL^2}{9}.$$

La matrice d'inerzia della lamina quadrata si esprime perciò come

$$[L_O]^{\ell} = mL^2 \begin{pmatrix} 1/8 & -1/9 & 0 \\ -1/9 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Sistema

La matrice d'inerzia del sistema rigido, composto da asta e lamina quadrata, viene infine determinata sommando termine a termine le matrici d'inerzia precedentemente ricavate, e risulta:

$$[L_O] = [L_O]^a + [L_O]^{\ell} = mL^2 \begin{pmatrix} 3/8 & -1/9 & 0 \\ -1/9 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(c) **Momento d'inerzia rispetto all'asse OB**

L'asse OB passa ovviamente per l'origine della terna di riferimento ed è individuato dal versore

$$\hat{n} = n_1 \hat{e}_1 + n_2 \hat{e}_2 + n_3 \hat{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_2.$$

Per nota proprietà, il momento d'inerzia del sistema relativamente all'asse $OB = O\hat{n}$ si ricava per mezzo della relazione

$$\begin{aligned} I_{OB} &= I_{O\hat{n}} = \hat{n} \cdot L_O(\hat{n}) = (n_1 \ n_2 \ n_3)[L_O] \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} (1 \ 1 \ 0) mL^2 \begin{pmatrix} 3/8 & -1/9 & 0 \\ -1/9 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{mL^2}{2} (1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} \frac{3}{8} - \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} + \frac{1}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{mL^2}{2} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + \frac{1}{8} \right) = \frac{5}{36} mL^2. \end{aligned}$$

(d) **Momento angolare in O**

Per O punto fisso e velocità angolare istantanea $\vec{\omega} = 2\omega \hat{e}_1 - \omega \hat{e}_2$, il momento angolare in O del sistema si scrive:

$$\vec{K}_O = L_O(\vec{\omega}) = K_1 \hat{e}_1 + K_2 \hat{e}_2 + K_3 \hat{e}_3,$$

dove le componenti K_1, K_2, K_3 del momento sono individuate dal prodotto matriciale:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} &= [L_O] \begin{pmatrix} 2\omega \\ -\omega \\ 0 \end{pmatrix} = mL^2 \begin{pmatrix} 3/8 & -1/9 & 0 \\ -1/9 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \omega = \\ &= mL^2 \omega \begin{pmatrix} \frac{3}{4} + \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} - \frac{1}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = mL^2 \omega \begin{pmatrix} 31/36 \\ -25/72 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si ha, conseguentemente:

$$\vec{K}_O = mL^2 \omega \left(\frac{31}{36} \hat{e}_1 - \frac{25}{72} \hat{e}_2 \right).$$

(e) **Energia cinetica**

Per l'energia cinetica del sistema rigido con punto fisso O vale l'espressione generale:

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot L_O(\vec{\omega}) = \frac{1}{2} (\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3) [L_O] \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = (\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3) \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$$

che nella fattispecie assume la forma esplicita

$$T = \frac{1}{2} (2\omega \ -\ \omega \ 0) mL^2 \omega \begin{pmatrix} 31/36 \\ -25/72 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Basta eseguire i prodotti matriciali per ottenere il risultato richiesto:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} mL^2 \omega^2 (2 \ -\ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 31/36 \\ -25/72 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} mL^2 \omega^2 \left(\frac{31}{18} + \frac{25}{72} \right) = \frac{1}{2} mL^2 \omega^2 \frac{124 + 25}{72} = \frac{149}{144} mL^2 \omega^2. \end{aligned}$$

Soluzione dell'esercizio 2

Il sistema è a vincoli bilaterali ideali, scleronomo e ad un solo grado di libertà. Ne segue che l'energia cinetica deve essere una forma quadratica definita positiva della velocità generalizzata $\dot{\theta}$ e che tutti gli equilibri del sistema sono ordinari.

(a) **Equilibri**

Tutte le sollecitazioni attive applicate al sistema hanno natura posizionale e conservativa, essendo costituite dal peso, dall'interazione elastica fra i punti P e Q , dalle sollecitazioni centrifughe. Nonostante nella terna non inerziale $Oxyz$ agiscano anche le forze di Coriolis, ci si convince facilmente che la componente lagrangiana di queste sollecitazioni inerziali è nulla:

$$Q_{\theta}^{\text{Cor}} = \sum_{P_i \in ABCD} -2m_i \omega \hat{e}_2 \wedge \dot{P}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial \theta} = -2 \sum_{P_i \in ABCD} m_i \omega \hat{e}_2 \cdot \dot{P}_i \wedge \frac{\partial P_i}{\partial \theta} = 0$$

in quanto

$$\dot{P}_i \wedge \frac{\partial P_i}{\partial \theta} = \frac{\partial P_i}{\partial \theta} \dot{\theta} \wedge \frac{\partial P_i}{\partial \theta} = 0 \quad \forall P_i \in ABCD.$$

Le sollecitazioni attive applicate sono perciò descritte completamente dal potenziale U del sistema, che risulterà dalla somma di un potenziale gravitazionale, di un potenziale elastico e di un potenziale centrifugo.

Potenziale gravitazionale

Il baricentro G della lamina quadrata e omogenea è il centro del quadrato $ABCD$ e il suo vettore posizione si scrive:

$$G - O = \frac{L}{2}(\sin \theta \hat{e}_1 - \cos \theta \hat{e}_2).$$

Il corrispondente potenziale gravitazionale vale pertanto:

$$U_g = -mg \hat{e}_2 \cdot (G - O) = \frac{1}{2} mgL \cos \theta.$$

Potenziale elastico

L'espressione per il potenziale relativo all'interazione elastica fra i punti P e Q è la seguente

$$U_{\text{el}} = -\frac{k}{2}|P - Q|^2$$

e in essa vale

$$P - Q = -L \cos \theta \hat{e}_2$$

per cui

$$U_{\text{el}} = -\frac{k}{2}|-L \cos \theta \hat{e}_2|^2 = -\frac{kL^2}{2} \cos^2 \theta.$$

Potenziale centrifugo

Il potenziale centrifugo della lamina è dato dalla ben nota relazione

$$U_{\text{cf}} = \frac{\omega^2}{2} I_{Oy}$$

nella quale il momento d'inerzia I_{Oy} della lamina rispetto all'asse Oy si riesprime in termini del momento d'inerzia relativo all'asse Gy dello stesso sistema per mezzo del teorema di Huygens-Steiner:

$$\begin{aligned} I_{Oy} &= m[(G - O) \cdot \hat{e}_1]^2 + I_{Gy} = \\ &= m\left(\frac{L}{2} \sin \theta\right)^2 + I_{Gy} = \frac{1}{4}mL^2 \sin^2 \theta + I_{Gy}. \end{aligned}$$

Il momento I_{Gy} è indipendente dall'angolo di rotazione θ . Infatti, introdotti gli assi solidali $G\xi$ e $G\eta$, rispettivamente paralleli ai lati BC e BA , la terna $G\xi\eta z$ è centrale d'inerzia con matrice

$$[L_G] = mL^2 \begin{pmatrix} 1/12 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

e a causa dell'autovalore doppio $1/12$ tutti gli assi passanti per G e ubicati nel piano $G\xi\eta = Oxy$ sono assi centrali d'inerzia di uguale autovalore $1/12$. In particolare si ha:

$$\begin{aligned} I_{Gy} &= (\sin \theta \ \cos \theta \ 0) mL^2 \begin{pmatrix} 1/12 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= mL^2 \left(\frac{1}{12} \sin^2 \theta + \frac{1}{12} \cos^2 \theta \right) = \frac{mL^2}{12}. \end{aligned}$$

Il potenziale centrifugo diventa pertanto:

$$U_{cf} = \frac{\omega^2}{2} \frac{1}{4} mL^2 \sin^2 \theta + \text{costante} = \frac{1}{8} mL^2 \omega^2 \sin^2 \theta + \text{costante}.$$

Gli equilibri del sistema — tutti ordinari — si identificano con i punti critici del potenziale

$$U(\theta) = U_g + U_{el} + U_{cf} = \frac{1}{2} mgL \cos \theta - \frac{kL^2}{2} \cos^2 \theta + \frac{1}{8} mL^2 \omega^2 \sin^2 \theta$$

ossia con gli zeri della derivata prima di U :

$$\begin{aligned} U'(\theta) &= \frac{\partial U}{\partial \theta}(\theta) = -\frac{1}{2} mgL \sin \theta + kL^2 \cos \theta \sin \theta + \frac{1}{4} mL^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta = \\ &= -\frac{1}{2} mgL \sin \theta + \left(kL^2 + \frac{1}{4} mL^2 \omega^2 \right) \sin \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

Raccogliendo il comune fattore $\sin \theta$ si ha allora l'equazione trigonometrica:

$$\sin \theta \left[-\frac{1}{2} mgL + \left(kL^2 + \frac{1}{4} mL^2 \omega^2 \right) \cos \theta \right] = 0$$

dalla quale si deducono, per $\sin \theta = 0$, le soluzioni — sempre definite —

$$\theta = 0, \quad \pi$$

e per

$$-\frac{1}{2}mgL + \left(kL^2 + \frac{1}{4}mL^2\omega^2\right) \cos \theta = 0$$

le ulteriori radici

$$\theta = \pm \arccos \left[\frac{\frac{1}{2}mgL}{kL^2 + \frac{1}{4}mL^2\omega^2} \right] = \pm \theta^*$$

a condizione che risulti

$$\frac{1}{2}mgL < kL^2 + \frac{1}{4}mL^2\omega^2.$$

(b) Stabilità degli equilibri

Data la natura posizionale conservativa del sistema scleronomo, per lo studio della stabilità degli equilibri si ricorre ai teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale. A questo scopo è necessario determinare l'espressione della derivata seconda del potenziale:

$$U''(\theta) = \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\theta) = -\frac{1}{2}mgL \cos \theta + \left(kL^2 + \frac{1}{4}mL^2\omega^2\right) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

per poi procedere all'analisi delle singole configurazioni di equilibrio individuate al punto precedente.

Configurazione $\theta = 0$

In questa configurazione la derivata seconda del potenziale vale

$$U''(0) = -\frac{1}{2}mgL + kL^2 + \frac{1}{4}mL^2\omega^2$$

e non ha quindi segno definito. Devono distinguersi tre casi:

- (i) per $\frac{1}{2}mgL > kL^2 + \frac{1}{4}mL^2\omega^2$ risulta $U''(0) < 0$, in modo che la configurazione $\theta = 0$ si riconosce essere un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità è assicurata dal teorema di Lagrange-Dirichlet;
- (ii) se $\frac{1}{2}mgL < kL^2 + \frac{1}{4}mL^2\omega^2$ si ha viceversa $U''(0) > 0$ e l'instabilità della configurazione segue dal teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet;
- (iii) qualora infine sia $\frac{1}{2}mgL = kL^2 + \frac{1}{4}mL^2\omega^2$ ricorre un caso critico.

Configurazione $\theta = \pi$

Nella fattispecie la derivata seconda del potenziale assume segno positivo per qualsiasi scelta delle costanti caratteristiche del sistema

$$U''(\pi) = \frac{1}{2}mgL + kL^2 + \frac{1}{4}mL^2\omega^2 > 0$$

e l'instabilità della configurazione è dunque garantita dal teorema di inversione parziale.

Configurazioni $\theta = \theta^*$ e $\theta = -\theta^*$

Le configurazioni simmetriche $\theta = \theta^*$ e $\theta = -\theta^*$ presentano le stesse proprietà di stabilità a causa della simmetria del potenziale:

$$U(-\theta) = U(\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

È quindi sufficiente esaminarne una sola, ad esempio la prima. Per questa risulta

$$\begin{aligned} U''(\theta^*) &= -\frac{1}{2}mgL \cos \theta^* + \left(kL^2 + \frac{1}{4}mL^2\omega^2\right)(\cos^2\theta^* - \sin^2\theta^*) = \\ &= \left(kL^2 + \frac{1}{4}mL^2\omega^2\right)(-\cos \theta^* \cos \theta^* + \cos^2\theta^* - \sin^2\theta^*) = \\ &= -\left(kL^2 + \frac{1}{4}mL^2\omega^2\right)\sin^2\theta^* < 0. \end{aligned}$$

Si conclude che le configurazioni $\theta = \theta^*$ e $\theta = -\theta^*$ costituiscono dei massimi relativi proprio del potenziale, la cui stabilità segue dal teorema di Lagrange-Dirichlet.

(c) Energia cinetica

Rispetto alla terna $Oxyz$ il moto del sistema si riduce ad una semplice rotazione di un angolo θ attorno all'asse Oz . L'energia cinetica del sistema è quindi data dall'espressione generale

$$T = \frac{1}{2}I_{Oz}|\vec{\omega}|^2$$

con velocità angolare

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{e}_3$$

e momento d'inerzia

$$I_{Oz} = I_{Gz} + m|G - O|^2 = I_{Gz} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{6} + \frac{mL^2}{4} = \frac{5}{12}mL^2.$$

Si ha perciò:

$$T = \frac{1}{2} \frac{5}{12} mL^2 |\dot{\theta} \hat{e}_3|^2 = \frac{5}{24} mL^2 \dot{\theta}^2$$

che è l'espressione cercata.

(d) Equazioni di Lagrange

La lagrangiana $\mathcal{L} = T + U$ del sistema si scrive:

$$\mathcal{L} = \frac{5}{24}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgL \cos \theta - \frac{1}{2}kL^2 \cos^2\theta + \frac{1}{8}mL^2\omega^2 \sin^2\theta$$

e da essa si deducono le espressioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{5}{12}mL^2\dot{\theta} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{5}{12}mL^2\ddot{\theta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= -\frac{1}{2}mgL \sin \theta + kL^2 \cos \theta \sin \theta + \frac{1}{4}mL^2\omega^2 \sin \theta \cos \theta = \\ &= -\frac{1}{2}mgL \sin \theta + \left(kL^2 + \frac{1}{4}mL^2\omega^2\right) \sin \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

L'equazione lagrangiana del moto

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

diventa pertanto:

$$\frac{5}{12}mL^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}mgL \sin \theta - \left(kL^2 + \frac{1}{4}mL^2\omega^2 \right) \sin \theta \cos \theta = 0.$$

(e) Integrale primo

Il sistema scleronomo è posizionale e conservativo. Un ovvio integrale primo è quindi offerto dall'energia meccanica $H = T - U$, che esplicitamente si scrive:

$$H(\theta, \dot{\theta}) = \frac{5}{24}mL^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mgL \cos \theta + \frac{1}{2}kL^2 \cos^2 \theta - \frac{1}{8}mL^2\omega^2 \sin^2 \theta.$$