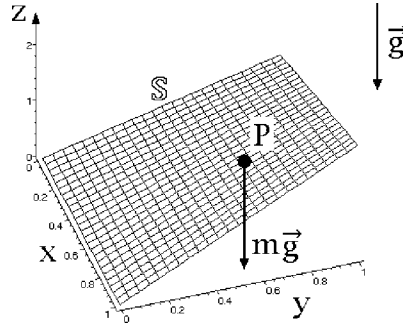


**Esercizio 1**

In una terna inerziale  $Oxyz$ , con asse verticale  $Oz$ , un punto materiale pesante  $P$  di massa  $m$  è vincolato a scorrere senza attrito sulla superficie  $\mathbb{S}$  di parametrizzazione:

$$P(x, y) - O = x \hat{e}_1 + y \hat{e}_2 + (yx + y) \hat{e}_3 \quad \forall (x, y) \in [0, 1]^2.$$



(a) Scrivere le equazioni del moto del punto.

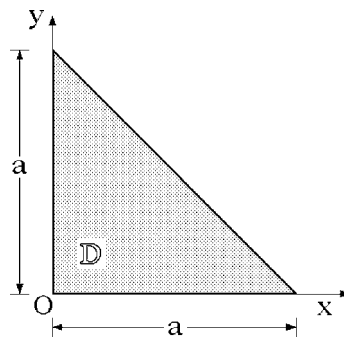
**Esercizio 2**

In una terna  $Oxyz$  una lamina rigida occupa la porzione triangolare del piano coordinato  $Oxy$  corrispondente al dominio:

$$\mathbb{D} = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq a\}$$

con  $a$  costante positiva. La densità areale è data da:

$$\sigma(x, y) = \frac{\mu}{a^3}(x + y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{D}.$$

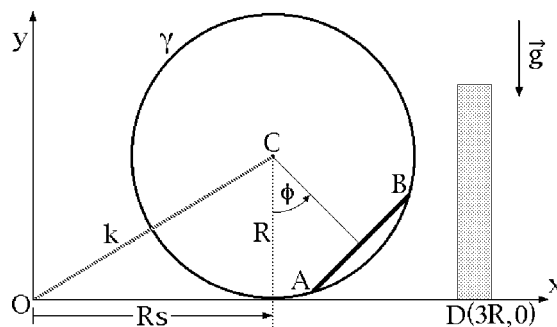


Determinare:

- (a) il baricentro della lamina rispetto alla terna  $Oxyz$ ;
- (b) la matrice d'inerzia in  $O$  rispetto alla stessa terna  $Oxyz$ ;
- (c) l'energia cinetica per  $O$  punto fisso e  $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_1 - \omega \hat{e}_3$ ;
- (d) momento angolare in  $O$ , nelle stesse ipotesi.

### Esercizio 3

Una circonferenza omogenea  $\gamma$ , di centro  $C$ , raggio  $R$ , massa  $m$ , rotola senza strisciare sull'asse orizzontale  $Ox$  di un riferimento inerziale  $Oxyz$  e un ostacolo le impedisce di posizionarsi a sinistra del punto  $D(3R, 0)$ . Un'asta rigida omogenea  $AB$  di lunghezza  $R$  e massa  $m$  può scorrere liberamente con i propri estremi lungo  $\gamma$ . Il sistema è pesante e una molla ideale di costante elastica  $k$  collega il centro  $C$  di  $\gamma$  con l'origine  $O$ .



Si usino le coordinate lagrangiane  $s \in (-\infty, 2]$  e  $\phi \in \mathbb{R}$  illustrate in figura e l'ipotesi dei vincoli ideali per:

- (a) determinare l'energia cinetica del sistema;
- (b) individuare gli equilibri ordinari del sistema;
- (c) analizzare le proprietà di stabilità degli equilibri ordinari;
- (d) scrivere le equazioni di Lagrange;
- (e) stabilire se la configurazione  $(s, \phi) = (2, 0)$  è un equilibrio di confine.

## Soluzione dell'esercizio 1

### (a) Equazioni del moto del punto

Avendo componenti polinomiali nei parametri  $x$  e  $y$ , la parametrizzazione della superficie  $\mathbb{S}$  è chiaramente di classe  $C^\infty$  in  $[0, 1]^2$  e le sue derivate parziali prime si scrivono:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \hat{e}_1 + y\hat{e}_3 \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \hat{e}_2 + (x+1)\hat{e}_3$$

Il prodotto vettore di questi vettori tangenti risulta sempre diverso da zero

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = -y\hat{e}_1 - (x+1)\hat{e}_2 + \hat{e}_3 \neq 0 \quad \forall (x, y) \in [0, 1]^2$$

e permette di riconoscere la superficie  $\mathbb{S}$  come regolare, individuando la direzione normale a questa in ogni suo punto. La velocità istantanea del punto  $P$  è data dall'espressione

$$\dot{P} = P_x \dot{x} + P_y \dot{y}$$

mentre l'accelerazione istantanea assume la forma generale

$$\ddot{P} = P_x \ddot{x} + P_y \ddot{y} + P_{xx} \dot{x}^2 + P_{xy} \dot{y} \dot{x} + P_{yx} \dot{x} \dot{y} + P_{yy} \dot{y}^2 = P_x \ddot{x} + P_y \ddot{y} + P_{xx} \dot{x}^2 + 2P_{xy} \dot{y} \dot{x} + P_{yy} \dot{y}^2$$

in termini delle derivate seconde della parametrizzazione:

$$P_{xx} = 0 \quad P_{xy} = \hat{e}_3 \quad P_{yy} = 0.$$

Il postulato delle reazioni vincolari permette di scrivere le relazioni equivalenti

$$m\ddot{P} = \bar{\Phi} - mg\hat{e}_3 \quad \iff \quad \ddot{P} = \frac{1}{m}\bar{\Phi} - g\hat{e}_3$$

che sostituendo le espressioni delle derivate parziali seconde conducono a

$$P_x \ddot{x} + P_y \ddot{y} + 2\dot{x}\dot{y}\hat{e}_3 = \frac{1}{m}\bar{\Phi} - g\hat{e}_3$$

ossia

$$P_x \ddot{x} + P_y \ddot{y} = \frac{1}{m}\bar{\Phi} - (g + 2\dot{x}\dot{y})\hat{e}_3.$$

La reazione vincolare  $\bar{\Phi}$  viene eliminata con la proiezione lungo le direzioni tangenti  $P_x$  e  $P_y$ , linearmente indipendenti,

$$\begin{cases} P_x \cdot P_x \ddot{x} + P_x \cdot P_y \ddot{y} = -(g + 2\dot{x}\dot{y})\hat{e}_3 \cdot P_x \\ P_y \cdot P_x \ddot{x} + P_y \cdot P_y \ddot{y} = -(g + 2\dot{x}\dot{y})\hat{e}_3 \cdot P_y \end{cases}$$

in cui vale:

$$P_x \cdot P_x = 1 + y^2 \quad P_x \cdot P_y = y(x + 1) \quad P_y \cdot P_y = 1 + (x + 1)^2$$

$$\hat{e}_3 \cdot P_x = y \quad \hat{e}_3 \cdot P_y = x + 1.$$

Le equazioni pure del moto del punto sono pertanto

$$\begin{cases} (1 + y^2)\ddot{x} + y(x + 1)\ddot{y} = -(g + 2\dot{x}\dot{y})y \\ y(x + 1)\ddot{x} + [1 + (x + 1)^2]\ddot{y} = -(g + 2\dot{x}\dot{y})(x + 1). \end{cases}$$

## Soluzione dell'esercizio 2

### (a) Baricentro della lamina

La massa della lamina triangolare si ottiene per integrazione sul dominio  $\mathbb{D}$  della densità areale

$$\begin{aligned} m &= \int_{\mathbb{D}} \sigma \, dx dy = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \frac{\mu}{a^3} (x + y) = \frac{\mu}{a^3} \int_0^a dx \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{a-x} = \\ &= \frac{\mu}{a^3} \int_0^a dx \left[ x(a-x) + \frac{(a-x)^2}{2} \right] = \frac{\mu}{a^3} \int_0^a \left( ax - x^2 + \frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2} \right) dx = \\ &= \frac{\mu}{a^3} \int_0^a \left( \frac{a^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{\mu}{2a^3} \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{\mu}{2a^3} \left[ a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{\mu}{3}. \end{aligned}$$

L'ascissa  $x_G$  del baricentro è definito dalla relazione

$$\begin{aligned} mx_G &= \int_{\mathbb{D}} x \sigma \, dx dy = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy x \frac{\mu}{a^3} (x + y) = \frac{\mu}{a^3} \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy (x^2 + xy) = \\ &= \frac{\mu}{a^3} \int_0^a dx \left[ x^2 y + x \frac{y^2}{2} \right]_0^{a-x} = \frac{\mu}{a^3} \int_0^a \left[ x^2(a-x) + \frac{x}{2}(a-x)^2 \right] dx = \\ &= \frac{\mu}{a^3} \int_0^a \left( ax^2 - x^3 + \frac{a^2}{2}x - ax^2 + \frac{x^3}{2} \right) dx = \frac{\mu}{a^3} \int_0^a \left( -\frac{x^3}{2} + \frac{a^2}{2}x \right) dx = \\ &= \frac{\mu}{a^3} \left[ -\frac{x^4}{8} + \frac{a^2}{4}x^2 \right]_0^a = \frac{\mu}{a^3} \left( -\frac{a^4}{8} + \frac{a^4}{4} \right) = \frac{1}{8}\mu a \end{aligned}$$

e vale perciò

$$x_G = \frac{1}{8}\mu a \frac{1}{m} = \frac{1}{8}\mu a \frac{3}{\mu} = \frac{3}{8}a.$$

Poiché

$$\sigma(y, x) = \frac{\mu}{a^3}(y + x) = \frac{\mu}{a^3}(x + y) = \sigma(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{D}$$

è evidente che la bisettrice  $y = x$  costituisce un asse di simmetria del sistema, per cui ascissa e ordinata del baricentro coincidono:

$$x_G = y_G.$$

La quota  $z_G$  risulta infine nulla, in quanto il piano  $Oxy$  di giacitura della lamina è un piano di simmetria:

$$z_G = 0.$$

In definitiva, il vettore posizione del baricentro rispetto alla terna  $Oxyz$  è dato da

$$G - O = x_G \hat{e}_1 + x_G \hat{e}_2 = \frac{3}{8}a \hat{e}_1 + \frac{3}{8}a \hat{e}_2.$$

### (b) Matrice d'inerzia

Il sistema è costituito da una lamina piana interamente ubicata nel piano coordinato  $Oxy$  della terna cartesiana  $Oxyz$ . La relativa matrice d'inerzia si presenta dunque nella forma generale:

$$[L_O] = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & 0 \\ L_{xy} & L_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx} + L_{yy} \end{pmatrix}.$$

Il cambiamento di variabili  $(x, y) \rightarrow (y, x)$  permette di verificare agevolmente che i momenti d'inerzia  $L_{xx}$  e  $L_{yy}$  sono identici

$$\begin{aligned} L_{xx} &= \int_{\mathbb{D}} y^2 \sigma \, dx dy = \int_{\mathbb{D}} y^2 \frac{\mu}{a^3} (x + y) \, dx dy = \\ &= \int_{\mathbb{D}} x^2 \frac{\mu}{a^3} (y + x) \, dy dx = \int_{\mathbb{D}} x^2 \frac{\mu}{a^3} (x + y) \, dx dy = L_{yy} \end{aligned}$$

per cui è sufficiente determinare uno solo di essi:

$$\begin{aligned} L_{xx} &= \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \frac{\mu}{a^3} (x^2 y + x^3) = \int_0^a dx \frac{\mu}{a^3} \left[ x^2 \frac{y^2}{2} + x^3 y \right]_0^{a-x} = \\ &= \frac{\mu}{a^3} \int_0^a dx \left[ \frac{x^2}{2} (a-x)^2 + x^3 (a-x) \right] = \\ &= \frac{\mu}{a^3} \int_0^a \left( \frac{a^2}{2} x^2 - ax^3 + \frac{x^4}{2} + ax^3 - x^4 \right) dx = \\ &= \frac{\mu}{a^3} \left[ \frac{a^2}{2} \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{10} \right]_0^a = \frac{\mu}{a^3} \left( \frac{a^5}{6} - \frac{a^5}{10} \right) = \frac{1}{15} \mu a^2. \end{aligned}$$

Quanto al prodotto d'inerzia  $L_{xy}$  si ha:

$$\begin{aligned}
 L_{xy} &= - \int_{\mathbb{D}} xy \sigma \, dx dy = - \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy xy \frac{\mu}{a^3} (x+y) = \\
 &= - \frac{\mu}{a^3} \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy (x^2 y + xy^2) = - \frac{\mu}{a^3} \int_0^a dx \left[ x^2 \frac{y^2}{2} + x \frac{y^3}{3} \right]_0^{a-x} = \\
 &= - \frac{\mu}{a^3} \int_0^a dx \left[ \frac{x^2}{2} (a-x)^2 + \frac{x}{3} (a-x)^3 \right] = \\
 &= - \frac{\mu}{a^3} \int_0^a \left( \frac{a^2}{2} x^2 - ax^3 + \frac{x^4}{2} + \frac{a^3}{3} x - a^2 x^2 + ax^3 - \frac{x^4}{3} \right) dx = \\
 &= - \frac{\mu}{a^3} \int_0^a \left( \frac{x^4}{6} - \frac{a^2}{2} x^2 + \frac{a^3}{3} x \right) dx = - \frac{\mu}{a^3} \left[ \frac{x^5}{30} - \frac{a^2}{6} x^3 + \frac{a^3}{6} x^2 \right]_0^a = \\
 &= - \frac{\mu}{a^3} \left( \frac{a^5}{30} - \frac{a^5}{6} + \frac{a^5}{6} \right) = - \frac{1}{30} \mu a^2.
 \end{aligned}$$

La matrice d'inerzia del sistema risulta pertanto:

$$[L_O] = \mu a^2 \begin{pmatrix} 1/15 & -1/30 & 0 \\ -1/30 & 1/15 & 0 \\ 0 & 0 & 2/15 \end{pmatrix}.$$

### (c) Energia cinetica

Nell'ipotesi che il punto  $O$  della lamina sia fisso, l'energia cinetica del sistema si esprime per mezzo della relazione

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} (\omega \ 0 \ -\omega) [L_O] \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{\omega^2}{2} (1 \ 0 \ -1) \mu a^2 \begin{pmatrix} 1/15 & -1/30 & 0 \\ -1/30 & 1/15 & 0 \\ 0 & 0 & 2/15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{2} \mu a^2 \omega^2 (1 \ 0 \ -1) \begin{pmatrix} 1/15 \\ -1/30 \\ -2/15 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \mu a^2 \omega^2 \left( \frac{1}{15} + \frac{2}{15} \right) = \frac{1}{10} \mu a^2 \omega^2.
 \end{aligned}$$

### (d) Momento angolare in $O$

Il momento angolare del sistema rispetto al polo fisso  $O$  si scrive

$$\overline{K}_O = K_1 \hat{e}_1 + K_2 \hat{e}_2 + K_3 \hat{e}_3$$

e le sue componenti possono essere ricavate per mezzo della relazione matriciale

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = [L_O] \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix} = \mu a^2 \omega \begin{pmatrix} 1/15 & -1/30 & 0 \\ -1/30 & 1/15 & 0 \\ 0 & 0 & 2/15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \mu a^2 \omega \begin{pmatrix} 1/15 \\ -1/30 \\ -2/15 \end{pmatrix}$$

dalla quale si conclude che

$$\overline{K}_O = \mu a^2 \omega \left( \frac{1}{15} \hat{e}_1 - \frac{1}{30} \hat{e}_2 - \frac{2}{15} \hat{e}_3 \right).$$

### Soluzione dell'esercizio 3

#### (a) Energia cinetica

L'energia cinetica del sistema risulta dalla somma di due contributi, l'uno relativo alla circonferenza  $\gamma$  e l'altro imputabile all'asta  $AB$ . Conviene calcolare separatamente le energie cinetiche delle due parti rigide.

#### *Energia cinetica della circonferenza $\gamma$*

Il baricentro della circonferenza omogenea coincide con il centro  $C$  di questa ed il suo vettore posizione si scrive

$$C - O = R s \hat{e}_1 + R \hat{e}_2$$

e la sua velocità istantanea si ottiene derivando l'espressione rispetto al tempo:

$$\dot{C} = R \dot{s} \hat{e}_1.$$

La velocità angolare istantanea  $\overline{\omega}_\gamma = \omega_\gamma \hat{e}_3$  di  $\gamma$  è determinata dalla condizione di puro rotolamento, imponendo l'annullarsi della velocità del punto  $P$  di contatto fra la circonferenza e l'asse orizzontale  $Ox$ :

$$0 = \dot{P} = \dot{C} + \overline{\omega}_\gamma \wedge (P - C) = R \dot{s} \hat{e}_1 + \omega_\gamma \hat{e}_3 \wedge (-R \hat{e}_2) = R(\dot{s} + \omega_\gamma) \hat{e}_3,$$

in modo che risulta

$$\overline{\omega}_\gamma = -\dot{s} \hat{e}_3.$$

Il momento d'inerzia della circonferenza rispetto all'asse  $Cz$  vale infine

$$I_{Cz}^\gamma = mR^2.$$

L'energia cinetica di  $\gamma$  è allora esprimibile per mezzo del teorema di König:

$$T_\gamma = \frac{m}{2} \dot{C}^2 + \frac{1}{2} I_{Cz}^\gamma |\overline{\omega}_\gamma|^2 = \frac{m}{2} R^2 \dot{s}^2 + \frac{1}{2} m R^2 |-\dot{s} \hat{e}_3|^2 = \frac{mR^2}{2} \dot{s}^2 + \frac{mR^2}{2} \dot{s}^2 = mR^2 \dot{s}^2.$$

### *Energia cinetica dell'asta AB*

L'asta omogenea ha il proprio baricentro  $G$  nel suo punto medio; poichè il triangolo  $ABC$  è per ipotesi isoscele, il segmento  $CG$  rappresenta la distanza dell'asta dal centro della circonferenza  $\gamma$  e la sua distanza risulta

$$|G - C| = \frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

Il vettore posizione del baricentro rispetto alla terna  $Oxyz$  si scrive perciò

$$\begin{aligned} G - O &= C - O + G - C = Rs\hat{e}_1 + R\hat{e}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}R\sin\phi\hat{e}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}R\cos\phi\hat{e}_2 = \\ &= R\left(s + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\phi\right)\hat{e}_1 + R\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\phi\right)\hat{e}_2 \end{aligned}$$

in modo che la corrispondente velocità istantanea in  $Oxyz$  risulta

$$\dot{G} = R\left(\dot{s} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\phi\dot{\phi}\right)\hat{e}_1 + R\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\phi\dot{\phi}\hat{e}_2$$

con modulo quadrato

$$|\dot{G}|^2 = R^2\left[\dot{s}^2 + \sqrt{3}\cos\phi\dot{s}\dot{\phi} + \frac{3}{4}\dot{\phi}^2\right].$$

L'angolo che l'asta  $AB$  forma con la direzione positiva dell'asse  $Ox$  coincide con il parametro lagrangiano  $\phi$ , che peraltro è orientato rispetto all'asse  $Gz$  conformemente alla convenzione levogira, per cui la velocità angolare istantanea dell'asta si esprime come

$$\bar{\omega}_{AB} = \dot{\phi}\hat{e}_3.$$

Il momento d'inerzia dell'asta relativo all'asse  $Gz$  vale infine

$$I_{Gz}^{AB} = \frac{mR^2}{12}.$$

Non rimane che applicare il teorema di König per ottenere l'energia cinetica cercata:

$$\begin{aligned} T_{AB} &= \frac{m}{2}\dot{G}^2 + \frac{1}{2}I_{Gz}^{AB}|\bar{\omega}_{AB}|^2 = \\ &= \frac{m}{2}R^2\left[\dot{s}^2 + \sqrt{3}\cos\phi\dot{s}\dot{\phi} + \frac{3}{4}\dot{\phi}^2\right] + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{12}\dot{\phi}^2 = \frac{mR^2}{2}\left(\dot{s}^2 + \sqrt{3}\cos\phi\dot{s}\dot{\phi} + \frac{5}{6}\dot{\phi}^2\right). \end{aligned}$$

### *Energia cinetica del sistema*

L'energia cinetica del sistema si deduce ora come somma dei contributi calcolati:

$$\begin{aligned} T &= T_\gamma + T_{AB} = mR^2\dot{s}^2 + \frac{mR^2}{2}\left(\dot{s}^2 + \sqrt{3}\cos\phi\dot{s}\dot{\phi} + \frac{5}{6}\dot{\phi}^2\right) = \\ &= \frac{mR^2}{2}\left(3\dot{s}^2 + \sqrt{3}\cos\phi\dot{s}\dot{\phi} + \frac{5}{6}\dot{\phi}^2\right). \end{aligned}$$

### (b) Equilibri ordinari

Tutte le sollecitazioni attive agenti sul sistema hanno natura posizionale conservativa, essendo costituite dal campo delle forze peso e dall'interazione elastica fra il centro  $C$  della circonferenza e l'origine  $O$ . Il potenziale gravitazionale è la somma dei contributi relativi alla circonferenza e all'asta  $AB$ :

$$\begin{aligned} U_g &= -mg\hat{e}_2 \cdot (C - O) - mg\hat{e}_2 \cdot (G - O) = \\ &= -mgR + mg\frac{\sqrt{3}}{2}R \cos \phi - mgR = \frac{\sqrt{3}}{2}mgR \cos \phi + \text{costante} \end{aligned}$$

mentre quello elastico assume la forma

$$U_{el} = -\frac{k}{2}|C - O|^2 = -\frac{k}{2}(R^2 + R^2s^2) = -\frac{kR^2}{2}s^2 + \text{costante}$$

per cui, omesse le costanti additive inessenziali, il potenziale del sistema diventa:

$$U(s, \phi) = \frac{\sqrt{3}}{2}mgR \cos \phi - \frac{kR^2}{2}s^2 \quad \forall (s, \phi) \in (-\infty, 2] \times \mathbb{R}.$$

Gli equilibri ordinari del sistema sono tutti e soli i punti critici del potenziale, purchè ricompresi nell'interno del dominio di definizione della parametrizzazione:

$$\frac{\partial U}{\partial s}(s, \phi) = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial \phi}(s, \phi) = 0 \quad (s, \phi) \in (-\infty, 2) \times \mathbb{R}.$$

Essi si identificano perciò con le soluzioni del sistema di equazioni algebriche:

$$-kR^2s = 0 \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}mgR \sin \phi = 0 \quad (s, \phi) \in (-\infty, 2) \times \mathbb{R}$$

che a meno di multipli interi di  $2\pi$  nella variabile angolare, fisicamente irrilevanti, sono date da:

$$(s, \phi) = (0, 0), \quad (0, \pi).$$

### (c) Stabilità degli equilibri ordinari

Le proprietà di stabilità degli equilibri ordinari possono essere analizzate mediante i teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale. A questo scopo si devono calcolare le derivate seconde del potenziale:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} = -k \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}mgR \cos \phi \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \phi \partial s} = \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial \phi} = 0$$

e la corrispondente matrice hessiana:

$$H_U(s, \phi) = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}mgR \cos \phi \end{pmatrix}$$

per poi procedere all'analisi di stabilità delle singole configurazioni.

*Configurazione*  $(s, \phi) = (0, 0)$

In questo caso l'hessiana del potenziale si riduce a

$$H_U(0, 0) = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}mgR \end{pmatrix}$$

nella quale si riconoscono immediatamente gli elementi diagonali come gli autovalori, entrambi negativi, della matrice. Ne segue che la configurazione  $(s, \phi) = (0, 0)$  costituisce un massimo relativo proprio del potenziale, stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

*Configurazione*  $(s, \phi) = (0, \pi)$

In questa configurazione l'hessiana del potenziale ammette autovalori di segno opposto:

$$H_U(0, \pi) = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}mgR \end{pmatrix};$$

la presenza dell'autovalore positivo autorizza ad applicare il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet e a concludere che l'equilibrio è instabile.

#### (d) **Equazioni di Lagrange**

La lagrangiana del sistema è la somma  $\mathcal{L} = T + U$  dell'energia cinetica e del potenziale:

$$\mathcal{L} = \frac{mR^2}{2} \left( 3\dot{s}^2 + \sqrt{3} \cos \phi \dot{s}\dot{\phi} + \frac{5}{6}\dot{\phi}^2 \right) + \frac{\sqrt{3}}{2}mgR \cos \phi - \frac{kR^2}{2}s^2$$

e da essa si deducono le relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} &= mR^2 \left( 3\dot{s} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \phi \dot{\phi} \right) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \right) &= mR^2 \left( 3\ddot{s} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \phi \ddot{\phi} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \phi \dot{\phi}^2 \right) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} &= -kR^2 s \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} &= mR^2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \phi \dot{s} + \frac{5}{6} \dot{\phi} \right) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) &= mR^2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \phi \ddot{s} + \frac{5}{6} \ddot{\phi} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \phi \dot{s}\dot{\phi} \right) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= -\frac{\sqrt{3}}{2}mR^2 \sin \phi \dot{s}\dot{\phi} - \frac{\sqrt{3}}{2}mgR \sin \phi. \end{aligned}$$

Le equazioni di Lagrange del moto:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = 0 \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

diventano pertanto:

$$\begin{cases} mR^2 \left( 3\ddot{s} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \phi \ddot{\phi} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \phi \dot{\phi}^2 \right) + kR^2 s = 0 \\ mR^2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \phi \ddot{s} + \frac{5}{6} \ddot{\phi} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} mgR \sin \phi = 0. \end{cases}$$

(e) **Equilibrio in**  $(s, \phi) = (2, 0)$

Il teorema dei lavori virtuali stabilisce che la configurazione di confine  $(s, \phi) = (2, 0)$  costituisce un equilibrio del sistema se e soltanto se il lavoro virtuale delle forze attive risulta non positivo per ogni spostamento virtuale relativo alla configurazione considerata:

$$\frac{\partial U}{\partial s}(2, 0) \delta s + \frac{\partial U}{\partial \phi}(2, 0) \delta \phi \leq 0 \quad \forall \delta s \leq 0 \quad \forall \delta \phi \in \mathbb{R}$$

vale a dire se e soltanto se risulta:

$$\frac{\partial U}{\partial s}(2, 0) \geq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial \phi}(2, 0) = 0.$$

Nella fattispecie si ha:

$$\frac{\partial U}{\partial s}(2, 0) = -kR^2 s \Big|_{(s, \phi) = (2, 0)} = -2kR^2 \quad \frac{\partial U}{\partial \phi}(2, 0) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \phi \Big|_{(s, \phi) = (2, 0)} = 0$$

per cui la condizione del teorema dei lavori virtuali non è soddisfatta. La configurazione non costituisce, pertanto, un equilibrio di confine del sistema.