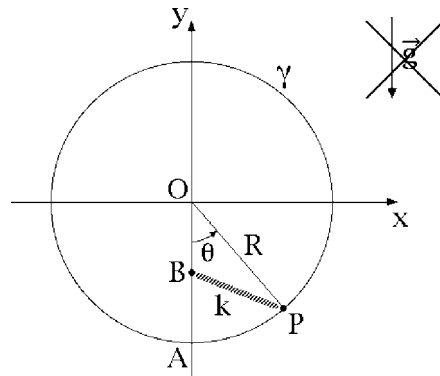


Esercizio 1

Nel piano Oxy di una terna inerziale un punto P , di massa m , è vincolato a scorrere senza attrito sulla circonferenza γ di raggio R e centro O parametrizzata da

$$P(\theta) - O = R \sin \theta \hat{e}_1 - R \cos \theta \hat{e}_2, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Una molla ideale di costante elastica $k > 0$ congiunge P con il punto medio B del raggio OA , parallelo a Oy — vedi figura.



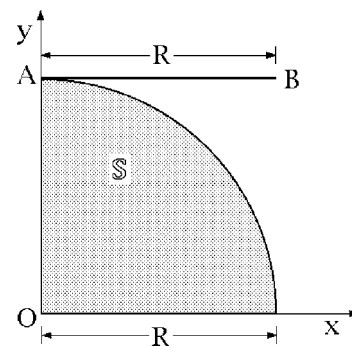
- (a) Scrivere le equazioni del moto del punto.
- (b) Individuare le posizioni di equilibrio.

Esercizio 2

In una terna solidale $Oxyz$ una lamina rigida \mathbb{S} ha la forma di un quarto di cerchio, con centro O , raggio R e i lati posti sugli assi Ox e Oy . All'estremità A del lato lungo Oy e ortogonalmente a questo è saldata rigidamente un'asta rettilinea AB di lunghezza R . Le densità di \mathbb{S} ed AB sono date dalle espressioni

$$\sigma(x, y) = \frac{\mu y}{R^3} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{S}$$

$$\lambda(x) = \frac{\mu}{R^3} x(R - x) \quad \forall x \in [0, R]$$



Determinare:

- (a) la massa del sistema;
- (b) il baricentro G del sistema rispetto alla terna solidale;
- (c) l'involuppo convesso \mathcal{C} del sistema, verificando che $G \in \mathcal{C}$.

Esercizio 3

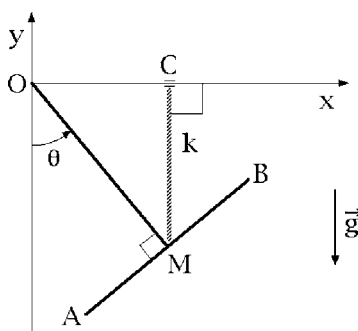
Dopo averne verificato le condizioni di esistenza, calcolare il centro del sistema di vettori:

$$\bar{v}_1 = 2\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + \hat{e}_3, \text{ applicato in } P_1(0, -1, 1), \text{ e}$$

$$\bar{v}_2 = -6\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 - 3\hat{e}_3, \text{ applicato in } P_2(1, 1, 0).$$

Esercizio 4

Nel piano verticale Oxy di una terna inerziale si muove un sistema rigido pesante formato da due aste rettilinee OM e AB , ciascuna di massa m e lunghezza L , saldate perpendicolarmente nel punto medio M di AB . Il punto O è fisso ed una molla ideale di costante elastica k collega M con la proiezione ortogonale C di questo sull'asse orizzontale Ox .



Assunti i vincoli ideali, si usi l'angolo $\theta \in \mathbb{R}$ compreso fra OM ed il semiasse negativo Oy per determinare

- l'energia cinetica del sistema;
- gli equilibri (ordinari) del sistema;
- le proprietà di stabilità degli equilibri;
- le equazioni pure del moto del sistema;
- la velocità del punto B per $\theta = 0$ e $\dot{\theta} = \sqrt{k/m}$.

Soluzione dell'esercizio 1

(a) Equazioni del moto

La parametrizzazione del vincolo è data dalla funzione

$$P(\theta) - O = R \sin \theta \hat{e}_1 - R \cos \theta \hat{e}_2, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

che ammette in \mathbb{R} la derivata prima

$$P'(\theta) = R(\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2).$$

Il vettore posizione dell'estremo B della molla ideale si scrive

$$B - O = -\frac{R}{2} \hat{e}_2$$

per cui la molla si dispone secondo il vettore

$$P - B = R \sin \theta \hat{e}_1 + \left(\frac{R}{2} - R \cos \theta\right) \hat{e}_2$$

e sul punto materiale P esercita la forza

$$\vec{F} = -k(P - B) = -kR \sin \theta \hat{e}_1 + kR \left(\cos \theta - \frac{1}{2}\right) \hat{e}_2.$$

Per un generico moto possibile del sistema, individuato da una funzione reale arbitraria $\theta(t)$ in un intervallo reale, la velocità istantanea del punto assume la forma

$$\dot{P} = P'(\theta) \dot{\theta}$$

mentre l'accelerazione istantanea è fornita dall'espressione

$$\ddot{P} = P'(\theta) \ddot{\theta} + P''(\theta) \dot{\theta}^2 = R(\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2) \ddot{\theta} + R(-\sin \theta \hat{e}_1 + \cos \theta \hat{e}_2) \dot{\theta}^2$$

che deve essere sostituita nel postulato delle reazioni vincolari

$$m\ddot{P} = \vec{F} + \vec{\Phi}.$$

L'equazione pura del moto si deduce proiettando lungo la direzione tangente $P'(\theta)$

$$m\ddot{P} \cdot P'(\theta) = \vec{F} \cdot P'(\theta)$$

e vale perciò

$$\begin{aligned} mR^2 \ddot{\theta} &= \left[-kR \sin \theta \hat{e}_1 + kR \left(\cos \theta - \frac{1}{2}\right) \hat{e}_2 \right] \cdot R(\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2) = \\ &= kR^2 \left[-\sin \theta \cos \theta + \left(\cos \theta - \frac{1}{2}\right) \sin \theta \right] = -\frac{1}{2} kR^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

In definitiva, l'equazione richiesta diventa

$$mR^2\ddot{\theta} = -\frac{kR^2}{2}\sin\theta.$$

(b) Posizioni di equilibrio

Le configurazioni di equilibrio del sistema, che è a vincoli indipendenti dal tempo, corrispondono alle soluzioni statiche delle equazioni del moto

$$\theta(t) = \theta_0, \quad \text{costante},$$

per le quali si ha

$$-\frac{kR^2}{2}\sin\theta_0 = 0$$

e dunque $\theta_0 = 0, \theta_0 = \pi$. Gli equilibri del sistema si hanno per

$$\theta = 0 \quad \text{e} \quad \theta = \pi.$$

Soluzione dell'esercizio 2

(a) Massa del sistema

La massa del sistema è data dalla somma delle masse della lamina \mathbb{S} e dell'asta AB , entrambe calcolate integrando le rispettive densità areale e di linea sui rispettivi domini. L'integrale di σ su \mathbb{S} può essere convenientemente espresso in coordinate polari piane

$$(x, y) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi), \quad (\rho, \phi) \in [0, R] \times [0, \pi/2]$$

e risulta così

$$m_{\mathbb{S}} = \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^R d\rho \rho \frac{\mu\rho \sin \phi}{R^3} = \frac{\mu}{R^3} \int_0^{\pi/2} \sin \phi d\phi \int_0^R \rho^2 d\rho = \frac{\mu}{R^3} [-\cos \phi]_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^R = \frac{\mu}{3}.$$

Per la massa dell'asta si ha invece l'integrale

$$m_{AB} = \int_0^R \frac{\mu}{R^3} x(R-x) dx = \frac{\mu}{R^3} \int_0^R (Rx - x^2) dx = \frac{\mu}{R^3} \left[\frac{Rx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^R = \frac{\mu}{R^3} \left(\frac{R^3}{2} - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{\mu}{6}$$

che sommata a quella del settore circolare fornisce la massa totale richiesta

$$m = m_{\mathbb{S}} + m_{AB} = \frac{\mu}{3} + \frac{\mu}{6} = \frac{\mu}{2}.$$

(b) Baricentro

Il sistema si compone di una superficie materiale piana — il settore circolare — e di una curva materiale — l'asta rettilinea. Per determinare il baricentro G del sistema è dunque

necessario calcolare i baricentri del settore circolare \mathbb{S} e dell'asta AB , per poi applicare il teorema distributivo.

Baricentro del settore circolare

La lamina piana si colloca nel piano coordinato Oxy e il suo baricentro G_1 deve quindi essere individuato da un vettore posizione della forma

$$G_1 - O = x_1 \hat{e}_1 + y_1 \hat{e}_2$$

essendo certamente nulla la quota z_1 di G_1 — il baricentro deve appartenere al piano Oxy in quanto piano di giacitura, e dunque di simmetria, della figura. L'ascissa del baricentro si calcola con un integrale di superficie, applicando la definizione,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{m_{\mathbb{S}}} \int_{\mathbb{S}} x \sigma \, dx dy = \frac{3}{\mu} \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^R d\rho \rho \cos \phi \frac{\mu \rho \sin \phi}{R^3} = \\ &= \frac{3}{R^3} \int_0^{\pi/2} \sin \phi \cos \phi \, d\phi \int_0^R \rho^3 \, d\rho = \frac{3}{R^3} \left[\frac{\sin^2 \phi}{2} \right]_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^R = \frac{3}{8} R \end{aligned}$$

mentre per l'ordinata si ha

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{m_{\mathbb{S}}} \int_{\mathbb{S}} y \sigma \, dx dy = \frac{3}{\mu} \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^R d\rho \rho \sin \phi \frac{\mu \rho \sin \phi}{R^3} = \\ &= \frac{3}{R^3} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi \, d\phi \int_0^R \rho^3 \, d\rho = \frac{3}{R^3} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2\phi}{2} \, d\phi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^R = \\ &= \frac{3}{R^3} \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2\phi) \, d\phi \frac{R^4}{4} = \frac{3}{8} R \left[\phi - \frac{\sin 2\phi}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{16} R. \end{aligned}$$

Se ne deduce il vettore posizione

$$G_1 - O = \frac{3}{8} R \hat{e}_1 + \frac{3\pi}{16} R \hat{e}_2.$$

Baricentro dell'asta

L'asta giace lungo la retta di equazione $y = R$, $z = 0$, che per la proprietà dell'involuppo convesso deve contenere anche il corrispondente baricentro G_2 . Il vettore posizione di G_2 viene quindi è dato quindi dall'espressione

$$G_2 - O = x_2 \hat{e}_1 + R \hat{e}_2,$$

nella quale la sola ascissa x_2 deve essere calcolata ricorrendo alla definizione

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{m_{AB}} \int_0^R x \lambda(x) dx = \frac{6}{\mu} \int_0^R \frac{\mu}{R^3} x^2 (R-x) dx = \frac{6}{R^3} \int_0^R (Rx^2 - x^3) dx = \\ &= \frac{6}{R^3} \left[\frac{Rx^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^R = \frac{6}{R^3} \left(\frac{R^4}{3} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{R}{2}. \end{aligned}$$

Si ha così:

$$G_2 - O = \frac{R}{2} \hat{e}_1 + R \hat{e}_2.$$

Baricentro del sistema

Per calcolare il baricentro complessivo del sistema non rimane che applicare il teorema distributivo, che fornisce

$$\begin{aligned} G - O &= \frac{m_{\mathbb{S}}(G_1 - O) + m_{AB}(G_2 - O)}{m_{\mathbb{S}} + m_{AB}} = \\ &= \frac{\frac{\mu}{3} \left(\frac{3}{8} R \hat{e}_1 + \frac{3\pi}{16} R \hat{e}_2 \right) + \frac{\mu}{6} \left(\frac{R}{2} \hat{e}_1 + R \hat{e}_2 \right)}{\frac{\mu}{2}} = \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{3}{8} R \hat{e}_1 + \frac{3\pi}{16} R \hat{e}_2 \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{R}{2} \hat{e}_1 + R \hat{e}_2 \right) = \frac{5}{12} R \hat{e}_1 + \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{3} \right) R \hat{e}_2. \end{aligned}$$

(c) **Inviluppo convesso**

L'inviluppo convesso \mathcal{C} del sistema è dato dal quadrato chiuso $[0, R]^2$, il più piccolo insieme chiuso e convesso che include il dominio $\mathbb{S} \cup AB$. È evidente che

$$O \leq \frac{5}{12} R \leq R \quad \text{e} \quad 0 \leq \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{3} \right) R \leq R$$

per cui il baricentro appartiene all'inviluppo convesso \mathcal{C} , come deve essere.

Soluzione dell'esercizio 3

Il sistema di vettori

$$\bar{v}_1 = 2 \hat{e}_1 - \hat{e}_2 + \hat{e}_3, \quad \text{applicato in } P_1(0, -1, 1), \text{ e}$$

$$\bar{v}_2 = -6 \hat{e}_1 + 3 \hat{e}_2 - 3 \hat{e}_3, \text{ applicato in } P_2(1, 1, 0)$$

ammette centro in quanto i vettori sono paralleli

$$\bar{v}_2 = -6 \hat{e}_1 + 3 \hat{e}_2 - 3 \hat{e}_3 = -3(2 \hat{e}_1 - \hat{e}_2 + \hat{e}_3) = -3 \bar{v}_1$$

e la loro risultante è non nulla

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = 2 \hat{e}_1 - \hat{e}_2 + \hat{e}_3 - 6 \hat{e}_1 + 3 \hat{e}_2 - 3 \hat{e}_3 = -4 \hat{e}_1 + 2 \hat{e}_2 - 2 \hat{e}_3 \neq 0.$$

I vettori si scrivono:

$$\begin{aligned}\bar{v}_1 &= 2\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + \hat{e}_3 = \bar{n} = f_1\bar{n} \\ \bar{v}_2 &= -3(2\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + \hat{e}_3) = -3\bar{n} = f_2\bar{n},\end{aligned}$$

per cui il vettore posizione in O del centro C del sistema è dato dalla formula generale

$$\begin{aligned}C - O &= \frac{f_1(P_1 - O) + f_2(P_2 - O)}{f_1 + f_2} = \frac{-\hat{e}_2 + \hat{e}_3 + (-3)(\hat{e}_1 + \hat{e}_2)}{1 - 3} = \\ &= \frac{-\hat{e}_2 + \hat{e}_3 - 3\hat{e}_1 - 3\hat{e}_2}{-2} = \frac{-3\hat{e}_1 - 4\hat{e}_2 + \hat{e}_3}{-2} = \frac{3}{2}\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 - \frac{1}{2}\hat{e}_3.\end{aligned}$$

Il centro del sistema di vettori applicati è dunque il punto

$$C\left(\frac{3}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right).$$

Soluzione dell'esercizio 4

(a) Energia cinetica

Il momento d'inerzia dell'asta OM rispetto all'asse fisso Oz si scrive immediatamente, essendo l'asta omogenea, di lunghezza L e massa m ,

$$I_{Oz}^{OM} = \frac{mL^2}{3}.$$

Per l'asta AB è opportuno ricorrere al teorema di Huygens-Steiner

$$I_{Oz}^{AB} = m|M - O|^2 + I_{Mz}^{AB} = mL^2 + \frac{mL^2}{12} = \frac{13}{12}mL^2$$

ricordando che $I_{Mz}^{AB} = mL^2/12$. Il momento d'inerzia del sistema relativamente allo stesso asse si ricava infine sommando i contributi delle due aste, per la proprietà di additività,

$$I_{Oz} = I_{Oz}^{OM} + I_{Oz}^{AB} = \frac{mL^2}{3} + \frac{13}{12}mL^2 = \frac{17}{12}mL^2.$$

Essendo poi $\dot{\theta}\hat{e}_3$ il vettore velocità angolare istantanea del telaio, la corrispondente energia cinetica risulta

$$T = \frac{1}{2}I_{Oz}|\dot{\theta}\hat{e}_3|^2 = \frac{1}{2}\frac{17}{12}mL^2\dot{\theta}^2 = \frac{17}{24}mL^2\dot{\theta}^2.$$

(b) Equilibri ordinari

Il sistema è soggetto alla forza peso ed all'interazione elastica fra il punto M e la proiezione ortogonale C di questo sull'asse delle ascisse: si tratta di sollecitazioni posizionali conservative, che vengono descritte per mezzo degli appropriati potenziali.

Potenziale gravitazionale

Il potenziale gravitazionale del sistema è la somma dei potenziali gravitazionali delle due aste

$$\begin{aligned} U_g &= -mg \hat{e}_2 \cdot \frac{M - O}{2} - mg \hat{e}_2 \cdot (M - O) = \\ &= -\frac{3}{2}mg \hat{e}_2 \cdot (L \sin \theta \hat{e}_1 - L \cos \theta \hat{e}_2) = \frac{3}{2}mgL \cos \theta. \end{aligned}$$

Potenziale elastico

Il potenziale associato alla molla ideale che congiunge i punti M e C è dato dalla relazione generale

$$U_{el} = -\frac{k}{2}|M - C|^2 = -\frac{k}{2}(L \cos \theta)^2 = -\frac{kL^2}{2}\cos^2\theta.$$

Potenziale del sistema

Il potenziale del sistema si ottiene sommando tutti i potenziali parziali, gravitazionale ed elastico, e risulta perciò

$$U(\theta) = \frac{3}{2}mgL \cos \theta - \frac{kL^2}{2}\cos^2\theta \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Equilibri

Gli equilibri di questo sistema scleronomo a vincoli bilaterali ideali, soggetto unicamente a sollecitazioni posizionali conservative, si identificano con i punti stazionari del potenziale U e vanno quindi ricavati ponendo uguale a zero la derivata prima

$$U'(\theta) = -\frac{3}{2}mgL \sin \theta + kL^2 \cos \theta \sin \theta$$

ovvero risolvendo l'equazione trigonometrica

$$-\frac{3}{2}mgL \sin \theta + kL^2 \cos \theta \sin \theta = 0$$

che può anche porsi nella forma equivalente

$$\sin \theta \left(\cos \theta - \frac{3mg}{2kL} \right) = 0.$$

Le configurazioni di equilibrio che soddisfano l'equazione parziale $\sin \theta = 0$ sono definite per qualsiasi scelta dei coefficienti caratteristici del sistema

$$\theta = 0 \quad , \quad \theta = \pi.$$

All'equazione parziale $\cos \theta = 3mg/2kL$ sono inoltre associate due ulteriori configurazioni di equilibrio

$$\theta = \arccos\left(\frac{3mg}{2kL}\right) = \theta^* \quad \text{e} \quad \theta = -\arccos\left(\frac{3mg}{2kL}\right) = -\theta^*,$$

definite e distinte dalle precedenti a condizione che si abbia

$$\frac{3mg}{2kL} < 1.$$

(c) Stabilità degli equilibri ordinari

Le caratteristiche di stabilità o instabilità degli equilibri ordinari del sistema vengono analizzate facendo ricorso ai teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale, dato il carattere scleronomo del sistema vincolato e la natura posizionale conservativa di tutte le sollecitazioni attive applicate. Un ruolo centrale nell'analisi gioca la derivata seconda del potenziale

$$U''(\theta) = -\frac{3}{2}mgL \cos \theta + kL^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

che deve essere calcolata in ciascuna delle configurazioni di equilibrio.

Configurazione $\theta = 0$

In questa configurazione la derivata seconda del potenziale non ha segno definito

$$U''(0) = -\frac{3}{2}mgL + kL^2 = kL^2 \left(1 - \frac{3mg}{2kL}\right)$$

e richiede che si distinguano diversi casi:

- se $3mg/2kL < 1$ la derivata seconda del potenziale in $\theta = 0$ è positiva ed implica l'instabilità della configurazione per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet;
- per $3mg/2kL > 1$ si ha invece $U''(0) < 0$ e la configurazione risulta un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità segue dal teorema di Lagrange-Dirichlet;
- se infine $3mg/2kL = 1$ la derivata seconda del potenziale si annulla in $\theta = 0$, circostanza che esclude l'applicabilità del teorema di inversione parziale. Per brevità si può qualificare questo caso come critico, sebbene vi sia la possibilità che la configurazione costituisca un massimo relativo proprio del potenziale e che dunque sia stabile per Lagrange-Dirichlet.

In effetti, per $3mg/2kL = 1$ la derivata seconda del potenziale si riduce a

$$U''(\theta) = kL^2(-\cos \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

per cui le derivate terza e quarta diventano

$$U^{(3)}(\theta) = kL^2(\sin \theta - 4 \sin \theta \cos \theta) \quad \text{e} \quad U^{(4)}(\theta) = kL^2(\cos \theta - 4 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta)$$

e in $\theta = 0$ valgono

$$U^{(3)}(0) = 0 \quad U^{(4)}(0) = -3kL^2$$

assicurando il ricorrere in $\theta = 0$ di un massimo relativo proprio del potenziale. Anche nel caso critico, la configurazione di equilibrio è in realtà stabile.

Configurazione $\theta = \pi$

La derivata seconda del potenziale è sempre strettamente positiva in questa configurazione

$$U''(\pi) = \frac{3}{2}mgL + kL^2 > 0,$$

che risulta perciò instabile per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $\theta = \theta^*$

La configurazione è definita per $3mg/2kL < 1$ e soddisfa $\cos \theta^* = 3mg/2kL$. La derivata seconda del potenziale in θ^* ha sempre segno negativo

$$\begin{aligned} U''(\theta^*) &= -\frac{3}{2}mgL \cos \theta^* + kL^2(\cos^2 \theta^* - \sin^2 \theta^*) = \\ &= kL^2 \left(-\frac{3mg}{2kL} \cos \theta^* + \cos^2 \theta^* - \sin^2 \theta^* \right) = -kL^2 \sin^2 \theta^* < 0. \end{aligned}$$

La configurazione, quando definita, costituisce un massimo relativo proprio del potenziale ed è dunque stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $\theta = -\theta^*$

Le proprietà di stabilità di questa configurazione sono identiche a quelle della configurazione simmetrica $\theta = \theta^*$, in quanto il potenziale U è una funzione pari

$$U(-\theta) = U(\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

e le derivate seconde coincidono

$$U''(-\theta^*) = U''(\theta^*).$$

(d) Equazioni pure del moto

Il sistema è olonomo a vincoli bilaterali ideali, con un solo grado di libertà, per cui le corrispondenti equazioni pure del moto si riducono all'unica equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \quad (.1)$$

dove la lagrangiana vale

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = T + U = \frac{17}{24}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{2}mgL \cos \theta - \frac{kL^2}{2}\cos^2 \theta.$$

Se ne deducono facilmente le espressioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{17}{12}mL^2\dot{\theta} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{17}{12}mL^2\ddot{\theta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= -\frac{3}{2}mgL \sin \theta + kL^2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

che sostituite nella (.1) porgono l'equazione del moto richiesta

$$\frac{17}{12}mL^2\ddot{\theta} + \frac{3}{2}mgL \sin \theta - kL^2 \sin \theta \cos \theta = 0.$$

(e) **Velocità del punto B**

Il telaio rigido ha un punto fisso in O , per cui l'atto di moto corrispondente è di tipo rotatorio, con velocità angolare $\dot{\theta} \hat{e}_3$. Per la velocità istantanea del punto B in una generica configurazione il teorema di Poisson porge allora l'espressione

$$\begin{aligned} \dot{B} &= \dot{\theta} \hat{e}_3 \wedge (B - O) = \dot{\theta} \hat{e}_3 \wedge (M - O + B - M) = \\ &= \dot{\theta} \hat{e}_3 \wedge \left[L \sin \theta \hat{e}_1 - L \cos \theta \hat{e}_2 + \frac{L}{2} \cos \theta \hat{e}_1 + \frac{L}{2} \sin \theta \hat{e}_2 \right] = \\ &= L \dot{\theta} \hat{e}_3 \wedge \left[\left(\sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta \right) \hat{e}_1 + \left(-\cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \right) \hat{e}_2 \right] = \\ &= L \dot{\theta} \left[\left(\cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \right) \hat{e}_1 + \left(\sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta \right) \hat{e}_2 \right] \end{aligned}$$

che nella fattispecie, essendo $\theta = 0$ e $\dot{\theta} = \sqrt{k/m}$, si riduce a

$$\dot{B} = L \sqrt{\frac{k}{m}} \left(\hat{e}_1 + \frac{1}{2} \hat{e}_2 \right).$$