

Prova scritta di meccanica razionale 1 A-L del 07.02.2007

Esercizio 1

Sia dato il sistema di vettori applicati:

$$\vec{v}_1 = -2\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - \hat{e}_3, \text{ applicato in } P_1(0, 1, 2);$$

$$\vec{v}_2 = 4\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3, \text{ applicato in } P_2(-1, 0, 1);$$

$$\vec{v}_3 = -6\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 - 3\hat{e}_3, \text{ applicato in } P_3(1, -1, 0).$$

Determinare, motivando la risposta:

- (a) l'equazione parametrica dell'asse centrale, se definito;
- (b) la posizione del centro, se definito.

Esercizio 2

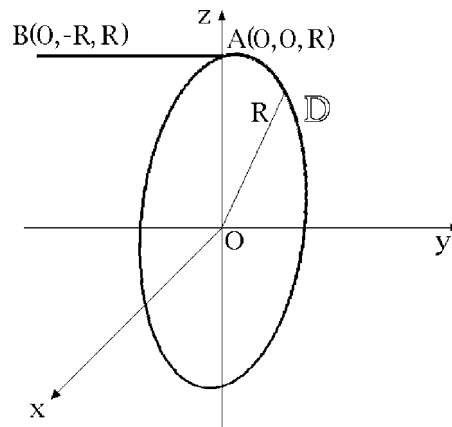
Nel piano Oxz di una terna ortogonale $Oxyz$ è posto un disco circolare \mathbb{D} , di centro O , raggio R e densità areale

$$\sigma(P) = \frac{\mu}{2\pi R^3} |P - O| \quad \forall P \in \mathbb{D},$$

avendo la costante $\mu > 0$ le dimensioni di una massa. Un'asta rettilinea di estremi $A(0, 0, R)$ e $B(0, -R, R)$ ha densità lineare

$$\lambda(P) = \frac{\mu}{R^2} |P - B| \quad \forall P \in AB$$

ed è saldata rigidamente a \mathbb{D} in A .

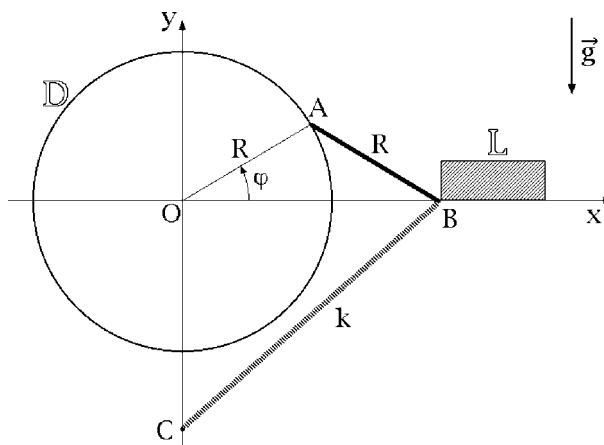


Determinare del sistema:

- (a) il baricentro, verificando che esso appartiene all'involuppo convesso del sistema;
- (b) la matrice d'inerzia in $Oxyz$;
- (c) l'energia cinetica ed il momento angolare in O nell'ipotesi che il sistema abbia punto fisso O e velocità angolare $\vec{\omega} = -\omega\hat{e}_1 + 2\omega\hat{e}_3$, $\omega > 0$.

Esercizio 3

Nel piano Oxy di una terna inerziale $Oxyz$ un disco circolare omogeneo \mathbb{D} , di raggio R e massa m , ruota con asse fisso Oz . In un punto assegnato A del bordo di \mathbb{D} è incernierata un'asta rettilinea omogenea AB , di massa m e lunghezza R , il cui secondo estremo B può muoversi liberamente lungo l'asse Ox . Una ulteriore cerniera connette infine B con una lamina rettangolare \mathbb{L} , di massa m , un lato della quale è vincolato a scorrere lungo Ox . Il sistema è pesante ed una molla ideale di costante elastica k collega B con il punto C posto sull'asse verticale Oy con ordinata $-3R/2$.



Assunti i vincoli ideali e usando l'angolo φ in figura come parametro lagrangiano, determinare del sistema:

- gli equilibri relativi a $Oxyz$;
- la stabilità degli stessi equilibri;
- l'energia cinetica;
- le equazioni pure del moto;
- gli equilibri di confine qualora fosse $-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4$ e $k = mg/16R$.

Soluzione dell'esercizio 1

(a) Equazione parametrica dell'asse centrale

Il sistema ammette asse centrale in quanto dotato di risultante non nullo:

$$\vec{R} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = -4\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 - 2\hat{e}_3 \neq 0.$$

L'equazione parametrica dell'asse centrale si scrive allora

$$A - O = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{|\vec{R}|^2} + \alpha \vec{R}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ma il momento risultante in O del sistema vale

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= (P_1 - O) \wedge \vec{v}_1 + (P_2 - O) \wedge \vec{v}_2 + (P_3 - O) \wedge \vec{v}_3 = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -6 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= (-3\hat{e}_1 - 4\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3) + (2\hat{e}_1 + 6\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3) + (3\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 - 3\hat{e}_3) = 2\hat{e}_1 + 5\hat{e}_2 + \hat{e}_3 \end{aligned}$$

per cui

$$\vec{R} \wedge \vec{M}_O = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 12\hat{e}_1 - 24\hat{e}_3$$

e quindi

$$\frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{|\vec{R}|^2} = \frac{12\hat{e}_1 - 24\hat{e}_3}{(-4)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \frac{12\hat{e}_1 - 24\hat{e}_3}{24} = \frac{1}{2}\hat{e}_1 - \hat{e}_3.$$

L'equazione parametrica dell'asse centrale diventa perciò, in notazione vettoriale,

$$A - O = \frac{1}{2}\hat{e}_1 - \hat{e}_3 + \alpha(-4\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 - 2\hat{e}_3), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

ossia, in forma algebrica,

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - 4\alpha \\ y = 2\alpha \\ z = -1 - 2\alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

(b) Posizione del centro

Il sistema ammette un centro C in quanto costituito da vettori paralleli con risultante non nullo. Si ha infatti:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= -2\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - \hat{e}_3 = f_1(-2\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - \hat{e}_3) \\ \vec{v}_2 &= 4\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3 = f_2(-2\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - \hat{e}_3) \\ \vec{v}_3 &= -6\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 - 3\hat{e}_3 = f_3(-2\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - \hat{e}_3) \end{aligned}$$

con

$$f_1 = 1 \quad f_2 = -2 \quad f_3 = 3.$$

L'equazione del centro si scrive allora:

$$\begin{aligned} C - O &= \frac{\sum_{i=1}^3 f_i (P_i - O)}{\sum_{i=1}^3 f_i} = \frac{(\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3) - 2(-\hat{e}_1 + \hat{e}_3) + 3(\hat{e}_1 - \hat{e}_2)}{1 - 2 + 3} = \\ &= \frac{1}{2}(\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3 + 2\hat{e}_1 - 2\hat{e}_3 + 3\hat{e}_1 - 3\hat{e}_2) = \frac{1}{2}(5\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2) = \frac{5}{2}\hat{e}_1 - \hat{e}_2 \end{aligned}$$

e quindi $C(5/2, -1, 0)$ è il punto cercato.

Soluzione dell'esercizio 2

(a) Baricentro del sistema

Il baricentro del sistema viene calcolato applicando la proprietà distributiva: si determinano preliminarmente massa e baricentro dell'asta AB e del disco circolare \mathbb{D} , per poi calcolare il centro di massa del sistema di due punti materiali fittizi così ottenuto.

Massa dell'asta

Indicata con y l'ordinata di un generico punto P di AB , la densità lineare di massa dell'asta assume la forma

$$\lambda(y) = \frac{\mu}{R^2}(y + R) \quad \forall y \in [-R, 0]$$

ed integrata sul proprio intervallo di definizione fornisce la massa di AB :

$$m_{AB} = \int_{-L}^0 (y + R) \frac{\mu}{R^2} dy = \frac{\mu}{R^2} \left[\frac{(y + R)^2}{2} \right]_{-R}^0 = \frac{\mu}{R^2} \frac{R^2}{2} = \frac{\mu}{2}.$$

Massa del disco

Per calcolare la massa del disco conviene introdurre l'ovvio sistema di coordinate polari (ρ, ϕ) definito nel piano Oxz dalle relazioni

$$x = \rho \cos \phi \quad z = \rho \sin \phi$$

ed esprimere perciò la densità areale σ come

$$\sigma(\rho, \phi) = \frac{\mu}{2\pi R^3} \rho \quad \forall (\rho, \phi) \in [0, R] \times [0, 2\pi).$$

L'integrazione della densità sul disco porge allora

$$m_{\mathbb{D}} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R d\rho \rho \frac{\mu}{2\pi R^3} \rho = \frac{\mu}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R \rho^2 d\rho = \frac{\mu}{2\pi R^3} 2\pi \frac{R^3}{3} = \frac{\mu}{3}.$$

Baricentro dell'asta

Per il teorema dell'involuppo convesso il baricentro dell'asta deve collocarsi entro il segmento AB ed individuarsi perciò per mezzo del vettore posizione

$$G_{AB} - O = y_{AB} \hat{e}_2 + R \hat{e}_3$$

con ordinata

$$y_{AB} = \frac{1}{m_{AB}} \int_{-R}^0 y \frac{\mu}{R^2} (y + R) dy = \frac{2}{\mu} \int_{-R}^0 \frac{\mu}{R^2} (y^2 + Ry) dy = \frac{2}{R^2} \left[\frac{y^3}{3} + R \frac{y^2}{2} \right]_{-R}^0 = -\frac{R}{3}.$$

Si ha dunque

$$G_{AB} - O = -\frac{R}{3} \hat{e}_2 + R \hat{e}_3.$$

Baricentro del disco

Il baricentro del disco coincide con l'origine O della terna di riferimento, nella quale è immediato riconoscere un centro di simmetria per \mathbb{D} :

$$G_{\mathbb{D}} - O = 0.$$

Baricentro del sistema

Si hanno ora tutti gli elementi per poter applicare la proprietà distributiva e scrivere il vettore posizione G del baricentro di sistema come

$$\begin{aligned} G - O &= \frac{m_{AB}(G_{AB} - O) + m_{\mathbb{D}}(G_{\mathbb{D}} - O)}{m_{AB} + m_{\mathbb{D}}} = \frac{m_{AB}}{m_{AB} + m_{\mathbb{D}}}(G_{AB} - O) = \\ &= \frac{\frac{\mu}{2}}{\frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{3}} \left(-\frac{R}{3} \hat{e}_2 + R \hat{e}_3 \right) = \frac{3}{5} \left(-\frac{R}{3} \hat{e}_2 + R \hat{e}_3 \right) = -\frac{R}{5} \hat{e}_2 + \frac{3}{5} R \hat{e}_3. \end{aligned}$$

Verifica che il baricentro cade nell'involuppo convesso del sistema

L'involuppo convesso del sistema è costituito chiaramente dal cono chiuso di vertice B e base circolare \mathbb{D} . Si può verificare formalmente che il baricentro appartiene a detto cono, conformemente al teorema dell'involuppo convesso, provando che la retta passante per i punti B e G interseca il disco \mathbb{D} . L'equazione parametrica della retta BG si scrive infatti:

$$\begin{cases} x = x_B + (x_G - x_B)\xi = 0 \\ y = y_B + (y_G - y_B)\xi = -R + \left(-\frac{R}{5} + R\right)\xi = -R + \frac{4}{5}R\xi \\ z = z_B + (z_G - z_B)\xi = R + \left(\frac{3}{5}R - R\right)\xi = R - \frac{2}{5}R\xi \end{cases} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

ed il relativo punto di intersezione C con il piano coordinato Oxz , dove giace il disco \mathbb{D} , è individuato da

$$-R + \frac{4}{5}R\xi = 0 \quad \iff \quad \xi = \frac{5}{4}$$

e risulta pertanto

$$C\left(0, 0, \frac{R}{2}\right),$$

ovviamente contenuto in \mathbb{D} — in quanto $y_C = 0$ e $x_C^2 + z_C^2 = 0^2 + (R/2)^2 = R^2/4 < R^2$. Ne deriva che il baricentro G appartiene al segmento avente come estremi i punti B e C del sistema; lo stesso punto deve dunque appartenere, per definizione, anche all'involuppo convesso del sistema — il più piccolo insieme chiuso e convesso che include il sistema.

(b) Matrice d'inerzia rispetto alla terna $Oxyz$

La matrice d'inerzia del sistema viene calcolata come somma delle matrici d'inerzia di asta e disco, relativamente alla stessa terna $Oxyz$.

Matrice d'inerzia dell'asta

L'asta AB giace nel piano coordinato Oyz e rispetto alla terna $Oxyz$ presenta quindi una matrice d'inerzia della forma

$$[L_{AB}] = \begin{pmatrix} L_{yy}^{AB} + L_{zz}^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & L_{yy}^{AB} & L_{yz}^{AB} \\ 0 & L_{yz}^{AB} & L_{zz}^{AB} \end{pmatrix}$$

dove il momento d'inerzia relativo all'asse Oy vale

$$L_{yy}^{AB} = \int_{-R}^0 dy \frac{\mu}{R^2} (R+y) R^2 = \mu \int_{-R}^0 (R+y) dy = \mu \left[\frac{(R+y)^2}{2} \right]_{-R}^0 = \frac{\mu R^2}{2}$$

mentre quello relativo all'asse Oz si scrive

$$\begin{aligned} L_{zz}^{AB} &= \int_{-R}^0 dy \frac{\mu}{R^2} (R+y) y^2 = \frac{\mu}{R^2} \int_{-R}^0 (Ry^2 + y^3) dy = \\ &= \frac{\mu}{R^2} \left[\frac{Ry^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right]_{-R}^0 = \frac{\mu}{R^2} \left(\frac{R^4}{3} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{1}{12} \mu R^2 \end{aligned}$$

e l'unico prodotto d'inerzia non banale risulta

$$\begin{aligned} L_{yz}^{AB} &= - \int_{-R}^0 dy \frac{\mu}{R^2} (R+y) y R = - \frac{\mu}{R} \int_{-R}^0 (Ry + y^2) dy = \\ &= - \frac{\mu}{R} \left[\frac{Ry^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_{-R}^0 = - \frac{\mu}{R} \left(- \frac{R^3}{2} + \frac{R^3}{3} \right) = \frac{1}{6} \mu R^2. \end{aligned}$$

Ne deriva che

$$[L_{AB}] = \mu R^2 \begin{pmatrix} 7/12 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 1/12 \end{pmatrix}.$$

Matrice d'inerzia del disco

Dal momento che il disco \mathbb{D} è completamente collocato nel piano Oxz , il suo contributo alla matrice d'inerzia del sistema in $Oxyz$ assume la forma generale

$$[L_O^{\mathbb{D}}] = \begin{pmatrix} L_{xx}^{\mathbb{D}} & 0 & L_{xz}^{\mathbb{D}} \\ 0 & L_{xx}^{\mathbb{D}} + L_{zz}^{\mathbb{D}} & 0 \\ L_{xz}^{\mathbb{D}} & 0 & L_{zz}^{\mathbb{D}} \end{pmatrix}.$$

Si ha in effetti, integrando nelle coordinate polari $(\rho, \phi) \in [0, R] \times [0, 2\pi)$,

$$\begin{aligned} L_{xx}^{\mathbb{D}} &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R d\rho \rho \frac{\mu}{2\pi R^3} \rho (\rho \sin \phi)^2 = \frac{\mu}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi \int_0^R \rho^4 d\rho = \\ &= \frac{\mu}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\phi}{2} d\phi \frac{R^5}{5} = \frac{\mu R^2}{20\pi} \left[\phi - \frac{\sin 2\phi}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{\mu R^2}{20\pi} 2\pi = \frac{1}{10} \mu R^2 \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} L_{zz}^{\mathbb{D}} &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R d\rho \rho \frac{\mu}{2\pi R^3} \rho (\rho \cos \phi)^2 = \frac{\mu}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \int_0^R \rho^4 d\rho = \\ &= \frac{\mu}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\phi}{2} d\phi \frac{R^5}{5} = \mu R^2 \frac{1}{20\pi} \left[\phi + \frac{\sin 2\phi}{2} \right]_0^{2\pi} = \mu R^2 \frac{1}{20\pi} 2\pi = \frac{1}{10} \mu R^2 \end{aligned}$$

ed infine

$$\begin{aligned} L_{xz}^{\mathbb{D}} &= - \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R d\rho \rho \frac{\mu}{2\pi R^3} \rho \cos \phi \rho \sin \phi = \\ &= - \frac{\mu}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi} \sin \phi \cos \phi d\phi \int_0^R \rho^4 d\rho = - \frac{\mu}{2\pi R^3} \left[\frac{\sin^2 \phi}{2} \right]_0^{2\pi} \frac{R^5}{5} = 0 \end{aligned}$$

in modo che

$$[L_O^{\mathbb{D}}] = \mu R^2 \begin{pmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 \end{pmatrix}.$$

Il risultato è compatibile con gli elementi di simmetria presenti nel sistema: Ox , Oy e Oz sono infatti assi di simmetria del disco e costituiscono pertanto una terna principale d'inerzia in O di questo.

Matrice d'inerzia del sistema

La matrice d'inerzia in $Oxyz$ del sistema è la somma delle matrici d'inerzia di asta e disco precedentemente calcolate:

$$[L_O] = [L_O^{AB}] + [L_O^D] = \mu R^2 \begin{pmatrix} 7/12 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 1/12 \end{pmatrix} + \mu R^2 \begin{pmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 \end{pmatrix}$$

e risulta quindi

$$[L_O] = \mu R^2 \begin{pmatrix} 41/60 & 0 & 0 \\ 0 & 7/10 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 11/60 \end{pmatrix}.$$

(c) **Energia cinetica e momento angolare**

Supposto che il punto del sistema collocato nell'origine O sia fisso, e che $\vec{\omega} = -\omega \hat{e}_1 + 2\omega \hat{e}_3$ costituisca il vettore velocità angolare istantanea, le componenti del momento angolare in O

$$\vec{K}_O = K_1 \hat{e}_1 + K_2 \hat{e}_2 + K_3 \hat{e}_3$$

si esprimono per mezzo della relazione matriciale

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = [L_O] \begin{pmatrix} -\omega \\ 0 \\ 2\omega \end{pmatrix} = \mu R^2 \begin{pmatrix} 41/60 & 0 & 0 \\ 0 & 7/10 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 11/60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega \\ 0 \\ 2\omega \end{pmatrix} = \mu R^2 \omega \begin{pmatrix} -41/60 \\ 1/3 \\ 11/30 \end{pmatrix}$$

fornendo perciò

$$\vec{K}_O = \mu R^2 \omega \left(-\frac{41}{60} \hat{e}_1 + \frac{1}{3} \hat{e}_2 + \frac{11}{30} \hat{e}_3 \right).$$

L'energia cinetica è invece data da

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{K}_O = \frac{1}{2} (-\omega \ 0 \ 2\omega) \mu R^2 \omega \begin{pmatrix} -41/60 \\ 1/3 \\ 11/30 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \mu R^2 \omega^2 \left(\frac{41}{60} + \frac{11}{15} \right) = \frac{17}{24} \mu R^2 \omega^2.$$

Soluzione dell'esercizio 3

(a) **Equilibri relativi a $Oxyz$**

Il sistema in esame è scleronomo, a vincoli ideali e sottoposto unicamente a sollecitazioni posizionali conservative: il peso e l'interazione elastica fra i punti B e C . Queste vengono descritte completamente per mezzo dei relativi potenziali.

Potenziale elastico

Il potenziale associato all'interazione elastica fra B e C si scrive direttamente per mezzo della formula generale, notando che i vettori posizione dei punti interagenti si scrivono

$$B - O = 2R \cos \varphi \hat{e}_1 \quad C - O = -\frac{3}{2} R \hat{e}_2$$

per cui

$$B - C = 2R \cos \varphi \hat{e}_1 + \frac{3}{2}R \hat{e}_2.$$

Si ottiene così:

$$U_{el} = -\frac{k}{2}(B - C)^2 = -\frac{k}{2}\left(4R^2 \cos^2 \varphi + \frac{9}{4}R^2\right) = -2kR^2 \cos^2 \varphi + \text{costante}.$$

Potenziale gravitazionale

Il baricentro del disco omogeneo si identifica con il suo centro geometrico, fisso nell'origine O : a \mathbb{D} non è quindi associato alcun potenziale gravitazionale. La stessa considerazione può esprimersi a proposito della lamina rettangolare \mathbb{L} che, animata di moto traslatorio rettilineo lungo l'asse Ox , vede mantenersi il proprio baricentro ad una altezza costante sopra il piano orizzontale Oxz . Il solo contributo non banale al potenziale gravitazionale proviene dall'asta AB , omogenea e di massa m , i cui estremi sono specificati dai vettori posizione:

$$A - O = R \cos \varphi \hat{e}_1 + R \sin \varphi \hat{e}_2 \quad B - O = 2R \cos \varphi \hat{e}_1$$

ed il cui baricentro è dato da

$$\frac{A - O + B - O}{2} = \frac{R}{2} \cos \varphi \hat{e}_1 + \frac{R}{2} \sin \varphi \hat{e}_2 + R \cos \varphi \hat{e}_1 = \frac{3}{2}R \cos \varphi \hat{e}_1 + \frac{R}{2} \sin \varphi \hat{e}_2.$$

Il potenziale corrispondente assume allora la forma

$$U_g = -mg \hat{e}_2 \cdot \frac{A - O + B - O}{2} = -\frac{1}{2}mgR \sin \varphi.$$

Potenziale del sistema

Il potenziale del sistema si ricava sommando i potenziali elastico e gravitazionale appena calcolati

$$U(\varphi) = U_{el} + U_g = -2kR^2 \cos^2 \varphi - \frac{1}{2}mgR \sin \varphi = 2kR^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2}mgR \sin \varphi + 2kR^2. \quad (.1)$$

Equilibri

Trattandosi di sistema scleronomo posizionale conservativo a vincoli bilaterali ideali, i suoi equilibri sono tutti e soli i punti critici del potenziale (.1), ossia le soluzioni dell'equazione ottenuta annullando la derivata prima:

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi}(\varphi) = 4kR^2 \sin \varphi \cos \varphi - \frac{1}{2}mgR \cos \varphi = 4kR^2 \cos \varphi \left(\sin \varphi - \frac{mg}{8kR} \right).$$

L'equazione di equilibrio si riduce alla forma equivalente

$$\cos \varphi \left(\sin \varphi - \frac{mg}{8kR} \right) = 0$$

che ammette per $\cos \varphi = 0$ le soluzioni comunque definite

$$\varphi = +\frac{\pi}{2} \quad , \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

e per $\sin \varphi = mg/8kR$ le ulteriori soluzioni

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{mg}{8kR}\right) = \varphi^* \quad , \quad \varphi = \pi - \arcsin\left(\frac{mg}{8kR}\right) = \pi - \varphi^* \quad ,$$

definite e distinte dalle precedenti a condizione che si abbia

$$\frac{mg}{8kR} < 1. \quad (.2)$$

(b) Stabilità degli equilibri

Per l'analisi di stabilità degli equilibri è dato affidarsi ai teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale, causa la natura posizionale conservativa del sistema scleronomo. Alla base dell'analisi è il calcolo della derivata seconda del potenziale

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}(\varphi) = 4kR^2 \left(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + \frac{mg}{8kR} \sin \varphi \right) = 4kR^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + \lambda \sin \varphi)$$

in ciascuna configurazione di equilibrio, essendosi posto per brevità $\lambda = mg/8kR$.

Configurazione $\varphi = \pi/2$

In questa configurazione la derivata seconda del potenziale diventa

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}(\pi/2) = 4kR^2(\lambda - 1)$$

e non ha segno definito, per cui si rende necessario distinguere tre diversi casi:

- per $\lambda > 1$ si ha $\partial^2 U / \partial \varphi^2(\pi/2) > 0$ e l'instabilità della configurazione segue dal teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet;
- se $\lambda < 1$ risulta $\partial^2 U / \partial \varphi^2(\pi/2) < 0$, per cui la configurazione $\varphi = \pi/2$ viene riconosciuta essere un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità è assicurata dal teorema di Lagrange-Dirichlet;
- se infine $\lambda = 1$ la derivata seconda del potenziale si annulla e, formalmente, ricorre un caso critico. La natura dell'equilibrio è determinabile ponendo $\varphi = \pi/2 + \xi$ nell'espressione del potenziale, che si riduce a:

$$\begin{aligned} U\left(\frac{\pi}{2} + \xi\right) &= 4kR^2 \left[\frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \xi\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \xi\right) \right] = 4kR^2 \left(\frac{1}{2} \cos^2 \xi - \cos \xi \right) = \\ &= 4kR^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin^2 \xi - \cos^2 \frac{\xi}{2} + \sin^2 \frac{\xi}{2} \right) = 4kR^2 \left(\frac{1}{2} - 2 \sin^2 \frac{\xi}{2} \cos^2 \frac{\xi}{2} - 1 + 2 \sin^2 \frac{\xi}{2} \right) \end{aligned}$$

ossia, semplificando,

$$U\left(\frac{\pi}{2} + \xi\right) = 4kR^2\left(-\frac{1}{2} + 2\sin^4\frac{\xi}{2}\right).$$

L'equilibrio costituisce pertanto un minimo relativo proprio del potenziale e non è possibile applicare né Lagrange-Dirichlet e la relativa inversione parziale — l'instabilità della configurazione può tuttavia essere provata facendo uso dell'analisi di Weierstrass.

Configurazione $\varphi = -\pi/2$

Questa configurazione rappresenta sempre un massimo relativo proprio del potenziale per via del segno negativo della derivata seconda

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}(-\pi/2) = -4kR^2(\lambda + 1) < 0$$

e risulta perciò stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

Configurazioni $\varphi = \varphi^$ e $\varphi = \pi - \varphi^*$*

Le due configurazioni, definite soltanto per $\lambda < 1$, presentano le stesse proprietà di stabilità, essendo

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}(\varphi^*) = \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}(\pi - \varphi^*).$$

Più precisamente, ricordando che $\lambda = \sin \varphi^*$, si ha

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}(\varphi^*) = 4kR^2(\cos^2 \varphi^* - \sin^2 \varphi^* + \lambda \sin \varphi^*) = 4kR^2 \cos^2 \varphi^* > 0$$

e si conclude che gli equilibri sono instabili per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

(c) **Energia cinetica**

L'energia cinetica si esprime come somma delle energie cinetiche del disco \mathbb{D} , dell'asta AB e della lamina \mathbb{L} .

Energia cinetica del disco

Il disco omogeneo è un corpo rigido con asse fisso Oz , con angolo di rotazione φ . La sua velocità angolare istantanea è data da $\vec{\omega}_{\mathbb{D}} = \dot{\varphi} \hat{e}_3$ e la relativa energia cinetica si scrive

$$T_{\mathbb{D}} = \frac{1}{2} I_{Oz}^{\mathbb{D}} |\vec{\omega}_{\mathbb{D}}|^2 = \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} |\dot{\varphi} \hat{e}_3|^2 = \frac{mR^2}{4} \dot{\varphi}^2.$$

Energia cinetica dell'asta AB

L'asta omogenea AB è priva di punti fissi, per cui si rende necessario calcolarne l'energia cinetica ricorrendo al teorema di König. A questo scopo si ricorda che il vettore posizione del baricentro G vale

$$G - O = \frac{A - O + B - O}{2} = \left(\frac{3}{2} \cos \varphi \hat{e}_1 + \frac{1}{2} \sin \varphi \hat{e}_2\right) R$$

e la corrispondente velocità istantanea diventa

$$\dot{G} = \left(-\frac{3}{2} \sin \varphi \hat{e}_1 + \frac{1}{2} \cos \varphi \hat{e}_2 \right) R \dot{\varphi}$$

con modulo quadrato

$$|\dot{G}|^2 = \left(\frac{9}{4} \sin^2 \varphi + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi \right) R^2 \dot{\varphi}^2 .$$

La velocità angolare istantanea dell'asta viene ricavata notando che $O\hat{B}A = \varphi$, in quanto OBA è un triangolo isoscele con $OA = AB$, e tenendo conto della convenzione sinistrorsa — l'asse Oz è orientato in senso uscente rispetto al piano del foglio per una terna $Oxyz$ che, al solito, si intende ortogonale destra:

$$\vec{\omega}_{AB} = -\dot{\varphi} \hat{e}_3 .$$

Il teorema di König porge allora

$$\begin{aligned} T_{AB} &= \frac{m}{2} \dot{G}^2 + \frac{1}{2} I_{Oz}^{AB} |\vec{\omega}_{AB}|^2 = \frac{m}{2} \left(\frac{9}{4} \sin^2 \varphi + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi \right) R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{12} |-\dot{\varphi} \hat{e}_3|^2 = \\ &= \frac{mR^2}{8} \left(9 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi + \frac{1}{3} \right) \dot{\varphi}^2 = \frac{mR^2}{8} \left(\frac{4}{3} + 8 \sin^2 \varphi \right) \dot{\varphi}^2 = mR^2 \left(\frac{1}{6} + \sin^2 \varphi \right) \dot{\varphi}^2 . \end{aligned}$$

Energia cinetica della lamina \mathbb{L}

La lamina \mathbb{L} è vincolata a muoversi di moto traslatorio rettilineo e la sua velocità istantanea è identificabile con quella del suo vertice B , che ha vettore posizione

$$B - O = 2R \cos \varphi \hat{e}_1$$

e soddisfa perciò

$$\dot{B} = -2R \sin \varphi \dot{\varphi} \hat{e}_1 .$$

L'energia cinetica della lamina vale dunque

$$T_{\mathbb{L}} = \frac{1}{2} m \dot{B}^2 = \frac{m}{2} | -2R \sin \varphi \dot{\varphi} \hat{e}_1 |^2 = 2mR^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2 .$$

Energia cinetica del sistema

Non resta che sommare le energie cinetiche parziali di disco, asta e lamina per ottenere l'espressione dell'energia cinetica totale:

$$T = \frac{mR^2}{4} \dot{\varphi}^2 + mR^2 \left(\frac{1}{6} + \sin^2 \varphi \right) \dot{\varphi}^2 + 2mR^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2 = mR^2 \left(\frac{5}{12} + 3 \sin^2 \varphi \right) \dot{\varphi}^2 .$$

(d) Equazioni pure del moto

Poiché il sistema è olonomo e a vincoli ideali, le equazioni pure del moto si riducono all'unica equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$$

con la lagrangiana

$$\mathcal{L} = T + U = mR^2 \left(\frac{5}{12} + 3\sin^2 \varphi \right) \dot{\varphi}^2 + 2kR^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} mgR \sin \varphi.$$

Ricordando che le variabili φ e $\dot{\varphi}$ vanno riguardate come indipendenti nel calcolo delle relative derivate parziali, è immediato verificare le relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} &= mR^2 \left(\frac{5}{6} + 6\sin^2 \varphi \right) \dot{\varphi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= mR^2 \left(\frac{5}{6} + 6\sin^2 \varphi \right) \ddot{\varphi} + 12mR^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}^2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= 6mR^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}^2 + 4kR^2 \sin \varphi \cos \varphi - \frac{1}{2} mgR \cos \varphi \end{aligned}$$

dalle quali si deduce l'equazione pura del moto:

$$mR^2 \left(\frac{5}{6} + 6\sin^2 \varphi \right) \ddot{\varphi} + 6mR^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}^2 - 4kR^2 \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{2} mgR \cos \varphi = 0.$$

(e) Equilibri di confine

Nell'ipotesi che il sistema scleronomo sia a vincoli unilaterali, con $-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4$, esistono due configurazioni di confine:

$$\varphi = -\frac{\pi}{4} \quad \text{e} \quad \varphi = +\frac{\pi}{4}$$

mentre la componente lagrangiana delle sollecitazioni attive per $k = mg/16R$ si riduce a

$$\begin{aligned} Q_\varphi &= \frac{\partial U}{\partial \varphi}(\varphi) = 4kR^2 \cos \varphi \left(\sin \varphi - \frac{mg}{8kR} \right) = 4 \frac{mg}{16R} R^2 \cos \varphi (\sin \varphi - 2) = \\ &= \frac{mgR}{4} \cos \varphi (\sin \varphi - 2) \quad \forall \varphi \in [-\pi/4, \pi/4]. \end{aligned}$$

Si deve applicare il teorema dei lavori virtuali per stabilire se le configurazioni di confine sono o meno di equilibrio per il sistema.

Configurazione $\varphi = -\pi/4$

La configurazione è di equilibrio se e soltanto se è soddisfatta la condizione di nonnegatività del lavoro virtuale per tutti gli spostamenti virtuali definiti nella configurazione assegnata:

$$Q_\varphi(-\pi/4) \delta\varphi \leq 0 \quad \forall \delta\varphi \geq 0$$

vale a dire, più esplicitamente,

$$Q_\varphi(-\pi/4) \leq 0.$$

Detta condizione equivale alla

$$\frac{mgR}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \right) \leq 0$$

e risulta ovviamente soddisfatta: la configurazione è sempre un equilibrio di confine per il sistema.

Configurazione $\varphi = +\pi/4$

In questa posizione l'equilibrio ricorre se e soltanto se è verificata la condizione

$$Q_\varphi(\pi/4) \delta\varphi \leq 0 \quad \forall \delta\varphi \leq 0$$

ossia

$$Q_\varphi(\pi/4) \geq 0$$

che, scritta in modo esplicito, diventa

$$\frac{mgR}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \right) \geq 0$$

ed è palesemente violata. Se ne deduce che la configurazione non costituisce un equilibrio di confine per il sistema.