Prova scritta di meccanica razionale 1 A-L del 05.02.2008

Esercizio 1

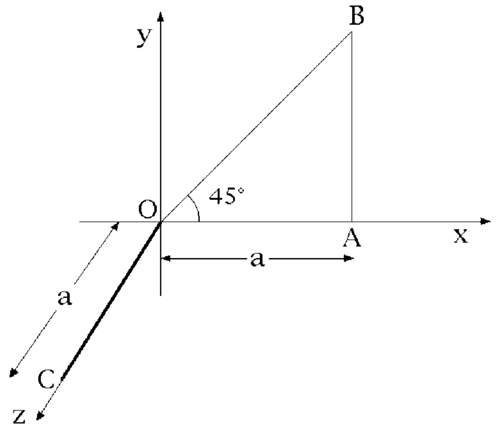
Un corpo rigido si compone di una piastra triangolare OAB, collocata nel piano Oxy di una terna $Oxyz$, e di un'asta OC, posta lungo l'asse Oz della stessa terna (vedi figura). La densità di OAB vale:

$$\sigma(P) = \frac{\mu}{a^4}|P-O|^2 \qquad \forall\, P \in OAB$$

mentre per l'asta si ha

$$\lambda(P) = \frac{\mu}{a^2}|C-P| \qquad \forall\, P \in OC$$

dove μ è una costante con le dimensioni di una massa.



Determinare del sistema:

(*a*) la massa e il baricentro rispetto ad $Oxyz$;

(*b*) la matrice d'inerzia in $Oxyz$;

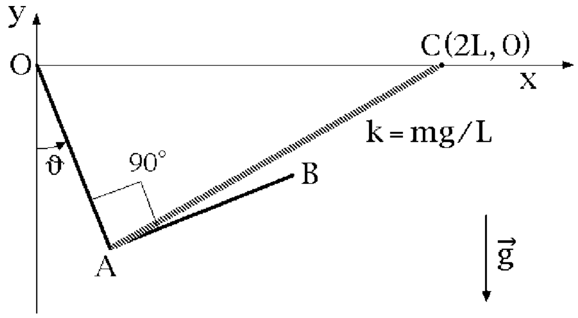
(*c*) il momento d'inerzia rispetto alla retta AB;

(*d*) l'energia cinetica e il momento angolare in O rispetto al riferimento in cui O è un punto fisso e la velocità angolare istantanea vale $\omega\,\hat{e}_1 - 2\omega\,\hat{e}_2 - \omega\,\hat{e}_3$, con $\omega > 0$;

(*e*) se la retta OB è un asse principale d'inerzia in O.

Esercizio 2

Nel piano Oxy di una terna inerziale $Oxyz$ è vincolato a muoversi il sistema pesante composto da due aste omogenee OA e AB, ciascuna di lunghezza L e massa m, saldate ortogonalmente nel comune estremo A (vedi figura). Il punto O è fisso e una molla ideale di costante elastica $k = mg/L$ collega A con il punto fisso $C(2L, 0)$ dell'asse Ox.



Nell'ipotesi di vincoli ideali, si utilizzi langolo $\vartheta \in \mathbb{R}$ in figura per determinare del sistema:

(a) gli equilibri relativi a $Oxyz$;

(b) la stabilità degli equilibri;

(c) l'energia cinetica relativa a $Oxyz$;

(d) le equazioni pure del moto;

(e) gli equilibri del sistema qualora fosse $\vartheta \in [-\pi, 0]$.

Soluzione dell'esercizio 1

(a) **Massa e baricentro del sistema**

Per calcolare la massa e il baricentro del sistema conviene considerare separatamente la lamina triangolare OAB e l'asta rettilinea OC, determinando massa e baricentro di ciascuna di esse. La massa del sistema verrà poi ricavata come somma delle singole masse parziali (proprietà additiva della massa), mentre per il baricentro si potrà applicare il teorema distributivo.

Massa della lamina OAB

La massa della lamina triangolare si ricava integrando la densità areale σ sul triangolo OAB. L'integrale doppio da considerare è il seguente:

$$m_{OAB} = \int_0^a dx \int_0^x dy\, \frac{\mu}{a^4}(x^2+y^2) = \frac{\mu}{a^4}\int_0^a dx \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{x} =$$
$$= \frac{\mu}{a^4}\int_0^a \left(x^3 + \frac{x^3}{3}\right) dx = \frac{\mu}{a^4}\int_0^a \frac{4}{3}x^3 dx = \frac{\mu}{a^4}\,\frac{4}{3}\,\frac{a^4}{4} = \frac{\mu}{3}\,.$$

Massa dell'asta OC

Per determinare la massa dell'asta rettilinea basta applicare la definizione, osservando che $\forall\, P \in OC$ vale $P - O = z\,\hat{e}_3$ e $C - P = (a-z)\,\hat{e}_3$, per cui la densità lineare di massa diventa

$$\lambda(z) = \frac{\mu}{a^2}(a-z) \quad \forall\, z \in [0,a]\,.$$

La massa dell'asta risulta perciò

$$m_{OC} = \int_0^a dz\, \frac{\mu}{a^2}(a-z) = \frac{\mu}{a^2}\int_0^a (a-z)\,dz = \frac{\mu}{a^2}\left[az - \frac{z^2}{2}\right]_0^a = \frac{\mu}{a^2}\left(a^2 - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{\mu}{2}\,.$$

Massa del sistema

La proprietà additiva fornisce la massa dell'intero sistema come somma delle masse delle parti costituenti:

$$m = m_{OAB} + m_{OC} = \frac{\mu}{3} + \frac{\mu}{2} = \frac{5}{6}\mu\,.$$

Baricentro della lamina OAB

Il baricentro G_{OAB} della lamina OAB deve collocarsi nel piano di giacitura Oxy di questa. Un semplice calcolo mostra che:

$$G_{OAB} - O = x_{OAB}\,\hat{e}_1 + y_{OAB}\,\hat{e}_2 = \frac{4}{5}a\,\hat{e}_1 + \frac{9}{20}a\,\hat{e}_2$$

Si ha infatti:

$$
\begin{aligned}
x_{OAB} &= \frac{1}{m_{OAB}}\int_0^a dx\int_0^x dy\, x\,\frac{\mu}{a^4}(x^2+y^2) \;=\; \frac{3}{\mu}\int_0^a dx\int_0^x dy\,\frac{\mu}{a^4}(x^3+xy^2) \;= \\
&= \frac{3}{\mu}\,\frac{\mu}{a^4}\int_0^a dx\left[x^3y+x\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{x} \;=\; \frac{3}{a^4}\int_0^a\Big(x^4+\frac{x^4}{3}\Big)\,dx \;= \\
&= \frac{3}{a^4}\int_0^a \frac{4}{3}x^4dx \;=\; \frac{4}{a^4}\,\frac{a^5}{5} \;=\; \frac{4}{5}a
\end{aligned}
$$

mentre per l'ordinata risulta

$$
\begin{aligned}
y_{OAB} &= \frac{1}{m_{OAB}}\int_0^a dx\int_0^x dy\, y\,\frac{\mu}{a^4}(x^2+y^2) \;=\; \frac{3}{\mu}\int_0^a dx\int_0^x dy\,\frac{\mu}{a^4}(x^2y+y^3) \;= \\
&= \frac{3}{a^4}\int_0^a dx\left[x^2\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{4}\right]_{y=0}^{x} \;=\; \frac{3}{a^4}\int_0^a\Big(\frac{x^4}{2}+\frac{x^4}{4}\Big)\,dx \;= \\
&= \frac{3}{a^4}\int_0^a \frac{3}{4}x^4\,dx \;=\; \frac{9}{4}\,\frac{1}{a^4}\,\frac{a^5}{5} \;=\; \frac{9}{20}a\,.
\end{aligned}
$$

Baricentro dell'asta OC
Il baricentro deve collocarsi lungo il segmento OC e sarà dunque individuato da un vettore posizione del tipo

$$G_{OC}-O \;=\; z_{OC}\,\hat{e}_3$$

dove la quota z_{OC} si calcola direttamente per mezzo della definizione

$$
\begin{aligned}
z_{OC} &= \frac{1}{m_{OC}}\int_0^a dz\, z\,\frac{\mu}{a^2}(a-z) \;=\; \frac{2}{\mu}\int_0^a \frac{\mu}{a^2}(az-z^2)\,dz \;= \\
&= \frac{2}{a^2}\left[a\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}\right]_0^a \;=\; \frac{2}{a^2}\Big(\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3}\Big) \;=\; \frac{2}{a^2}\,\frac{a^3}{6} \;=\; \frac{a}{3}\,.
\end{aligned}
$$

Il baricentro dell'asta è dato pertanto dal vettore posizione

$$G_{OC}-O \;=\; \frac{a}{3}\,\hat{e}_3\,.$$

Baricentro del sistema
Per il baricentro G del sistema il teorema distributivo porge l'espressione

$$G-O \;=\; \frac{m_{OAB}(G_{OAB}-O)+m_{OC}(G_{OC}-O)}{m_{OAB}+m_{OC}} \;=$$

$$= \frac{6}{5\mu}\left[\frac{\mu}{3}\Big(\frac{4}{5}a\,\hat{e}_1 + \frac{9}{20}a\,\hat{e}_2\Big) + \frac{\mu}{2}\,\frac{a}{3}\,\hat{e}_3\right] =$$

$$= \frac{6}{5}\Big(\frac{4}{15}a\,\hat{e}_1 + \frac{3}{20}a\,\hat{e}_2 + \frac{1}{6}a\,\hat{e}_3\Big) \;=\; \frac{8}{25}a\,\hat{e}_1 + \frac{9}{50}a\,\hat{e}_2 + \frac{1}{5}a\,\hat{e}_3\,.$$

(b) **Matrice d'inerzia in Oxyz**
La matrice d'inerzia del sistema rispetto alla terna $Oxyz$ può essere determinata calcolando le matrici d'inerzia, rispetto allo stesso riferimento, della piastra OAB e dell'asta OC, sommando poi i risultati parziali ottenuti.

Matrice d'inerzia dell'asta OC
L'asta si trova allineata con l'asse Oz della terna di riferimento, per cui la relativa matrice d'inerzia deve assumere la forma

$$[L_O^{OC}] \;=\; \begin{pmatrix} L_{xx}^{OC} & 0 & 0 \\ 0 & L_{yy}^{OC} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \mu a^2 \begin{pmatrix} 1/12 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in quanto

$$L_{xx}^{OC} \;=\; \int_0^a z^2\,\frac{\mu}{a^2}(a-z)\,dz \;=\; \frac{\mu}{a^2}\int_0^a (az^2 - z^3)\,dz \;=$$

$$= \frac{\mu}{a^2}\left[a\frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4}\right]_0^a \;=\; \frac{\mu}{a^2}\Big(\frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4}\Big) \;=\; \frac{1}{12}\mu a^2$$

mentre è chiaramente

$$L_{yy}^{OC} \;=\; L_{xx}^{OC} \;=\; \frac{1}{12}\mu a^2.$$

Matrice d'inerzia della piastra OAB
La lamina giace per intero nel piano coordinato Oxy della terna di riferimento prescelta per il calcolo. La matrice d'inerzia deve perciò assumere la forma generale

$$[L_O^{OAB}] \;=\; \begin{pmatrix} L_{xx}^{OAB} & L_{xy}^{OAB} & 0 \\ L_{xy}^{OAB} & L_{yy}^{OAB} & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx}^{OAB} + L_{yy}^{OAB} \end{pmatrix}.$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse Ox vale

$$L_{xx}^{OAB} \;=\; \int_{OAB} y^2\sigma\,dxdy \;=\; \int_0^a dx\int_0^x dy\,y^2\,\frac{\mu}{a^4}(x^2+y^2) \;=$$

$$= \frac{\mu}{a^4}\int_0^a dx\int_0^x dy\,(x^2y^2 + y^4) \;=\; \frac{\mu}{a^4}\int_0^a dx\,\left[x^2\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right]_{y=0}^x \;=$$

$$= \frac{\mu}{a^4}\int_0^a \Big(\frac{x^5}{3} + \frac{x^5}{5}\Big)\,dx \;=\; \frac{\mu}{a^4}\int_0^a \frac{8}{15}x^5 dx \;=\; \frac{8}{15}\,\frac{\mu}{a^4}\,\frac{a^6}{6} \;=\; \frac{4}{45}\mu a^2$$

mentre per quello relativo all'asse Oy si ha l'espressione

$$
\begin{aligned}
L_{yy}^{OAB} &= \int\limits_{OAB} x^2 \sigma\, dxdy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^x dy\, x^2 \frac{\mu}{a^4}(x^2+y^2) = \\
&= \frac{\mu}{a^4} \int\limits_0^a dx \int\limits_0^x dy\,(x^4 + x^2y^2) = \frac{\mu}{a^4} \int\limits_0^a dx \left[x^4 y + x^2 \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^x = \\
&= \frac{\mu}{a^4} \int\limits_0^a \Big(x^5 + \frac{x^5}{3}\Big) dx = \frac{\mu}{a^4} \int\limits_0^a \frac{4}{3} x^5 dx = \frac{\mu}{a^4} \frac{4}{3} \frac{a^6}{6} = \frac{2}{9}\mu a^2
\end{aligned}
$$

in modo che il momento relativo all'asse Oz risulta

$$
L_{xx}^{OAB} + L_{yy}^{OAB} = \frac{14}{45}\mu a^2 .
$$

Per l'unico prodotto d'inerzia non banale si ottiene infine

$$
\begin{aligned}
L_{xy}^{OAB} &= -\int\limits_{OAB} \sigma\, xy\, dxdy = -\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x dy\, xy\, \frac{\mu}{a^4}(x^2+y^2) = \\
&= -\frac{\mu}{a^4} \int\limits_0^a dx \int\limits_0^x dy\,(x^3 y + xy^3) = -\frac{\mu}{a^4} \int\limits_0^a dx \left[x^3 \frac{y^2}{2} + x\frac{y^4}{4}\right]_{y=0}^x = \\
&= -\frac{\mu}{a^4} \int\limits_0^a \Big(\frac{x^5}{2} + \frac{x^5}{4}\Big) dx = -\frac{\mu}{a^4} \int\limits_0^a \frac{3}{4} x^5 dx = -\frac{\mu}{a^4} \frac{3}{4} \frac{a^6}{6} = -\frac{1}{8}\mu a^2 .
\end{aligned}
$$

La matrice d'inerzia della piastra rispetto alla terna $Oxyz$ diventa così

$$
[L_O^{OAB}] = \mu a^2 \begin{pmatrix} 4/45 & -1/8 & 0 \\ -1/8 & 2/9 & 0 \\ 0 & 0 & 14/45 \end{pmatrix} .
$$

Matrice d'inerzia del sistema
La somma delle matrici d'inerzia L_O^{OC} e $[L_O^{OAB}]$ fornisce la matrice d'inerzia del sistema rispetto al riferimento $Oxyz$:

$$
\begin{aligned}
[L_O] = L_O^{OC} + [L_O^{OAB}] &= \mu a^2 \begin{pmatrix} 1/12 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu a^2 \begin{pmatrix} 4/45 & -1/8 & 0 \\ -1/8 & 2/9 & 0 \\ 0 & 0 & 14/45 \end{pmatrix} = \\
&= \mu a^2 \begin{pmatrix} 31/180 & -1/8 & 0 \\ -1/8 & 11/36 & 0 \\ 0 & 0 & 14/45 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

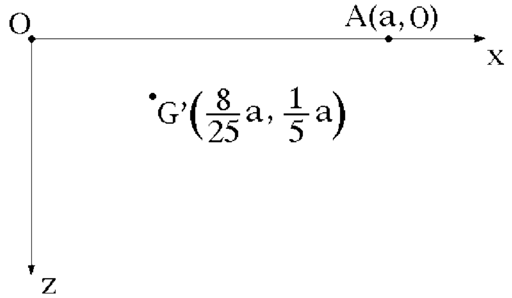
(c) **Momento d'inerzia rispetto alla retta AB**

La retta AB non passa per l'origine O della terna $Oxyz$, rispetto alla quale la matrice d'inerzia del sistema è stata determinata. La stessa retta è però parallela all'asse coordinato Oy, per cui il momento d'inerzia relativo ad AB può essere calcolato ricorrendo al teorema di Huygens-Steiner. In realtà, siccome né la retta AB né l'asse Oy passano per il baricentro G del sistema, la formula di Huygens-Steiner deve essere applicata *due volte*.

A questo scopo, si indichi con G' la proiezione ortogonale del baricentro G sul piano coordinato Oxz; la proiezione è individuata dal vettore posizione

$$G' - O \;=\; \frac{8}{25} a\,\hat{e}_1 + \frac{1}{5} a\,\hat{e}_3\,.$$

Si devono considerare i momenti d'inerzia relativi agli assi paralleli Oy, $G'y = Gy$ e $Ay = AB$.



Fra le rette parallele Oy e $G'y$ il teorema di Huygens-Steiner fornisce la relazione

$$L_{yy} \;=\; I_{Oy} \;=\; I_{G'y} + m|G' - O|^2 \tag{.1}$$

mentre per i momenti d'inerzia relativi alle rette Ay e $G'y$ si ha

$$I_{AB} \;=\; I_{Ay} \;=\; I_{G'y} + m|G' - A|^2. \tag{.2}$$

Sottraendo membro a membro la (.1) dalla (.2) si ottiene quindi la relazione

$$I_{AB} - L_{yy} \;=\; m|G' - A|^2 - m|G' - O|^2$$

che una volta sostituiti i valori numerici del momento L_{yy} e dei vettori posizione $G' - A$ e $G' - O$ diventa

$$I_{AB} - \frac{11}{36}\mu a^2 \;=\; \frac{5}{6}\mu\left|-\frac{17}{25} a\,\hat{e}_1 + \frac{1}{5} a\,\hat{e}_3\right|^2 - \frac{5}{6}\mu\left|\frac{8}{25} a\,\hat{e}_1 + \frac{1}{5} a\,\hat{e}_3\right|^2$$

ossia

$$I_{AB} \;=\; \frac{11}{36}\mu a^2 + \frac{5}{6}\mu\Big(\frac{289}{625}a^2 + \frac{1}{25}a^2\Big) - \frac{5}{6}\mu\Big(\frac{64}{625}a^2 + \frac{1}{25}a^2\Big)\,.$$

Semplificando, ne deriva che

$$
\begin{aligned}
I_{AB} &= \frac{11}{36}\mu a^2 + \frac{5}{6}\mu a^2\Big(\frac{289}{625} + \frac{1}{25} - \frac{64}{625} - \frac{1}{25}\Big) = \\
&= \frac{11}{36}\mu a^2 + \frac{5}{6}\mu a^2\frac{225}{625} = \frac{11}{36}\mu a^2 + \frac{5}{6}\mu a^2\frac{9}{25} = \frac{11}{36}\mu a^2 + \frac{3}{10}\mu a^2 = \frac{109}{180}\mu a^2 \,.
\end{aligned}
$$

(d) **Energia cinetica e momento angolare in O**

Il sistema rigido viene descritto in una terna di riferimento rispetto alla quale il punto O è fisso e la velocità angolare istantanea risulta pari a

$$\vec{\omega} = \omega\,\hat{e}_1 - 2\omega\,\hat{e}_2 - \omega\,\hat{e}_3 \,.$$

Come ben noto, il vettore velocità angolare in O del sistema assume la forma

$$\vec{K}_O = L_O(\vec{\omega})$$

e le sue componenti K_1, K_2, K_3 rispetto alla terna $Oxyz$

$$\vec{K}_O = K_1\,\hat{e}_1 + K_2\,\hat{e}_2 + K_3\,\hat{e}_3$$

sono date dalla relazione matriciale

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = [L_O] \begin{pmatrix} \omega \\ -2\omega \\ -\omega \end{pmatrix} .$$

Basta sostituire la matrice calcolata $[L_O]$ per ottenere le componenti richieste

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} &= \mu a^2 \begin{pmatrix} 31/180 & -1/8 & 0 \\ -1/8 & 11/36 & 0 \\ 0 & 0 & 14/45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ -2\omega \\ -\omega \end{pmatrix} = \\
&= \mu a^2\omega \begin{pmatrix} \dfrac{31}{180} + \dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{1}{8} - \dfrac{11}{18} \\ -\dfrac{14}{45} \end{pmatrix} = \mu a^2\omega \begin{pmatrix} 76/180 \\ -\,53/72 \\ -14/45 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

e scrivere così l'espressione del momento angolare in O del sistema

$$\vec{K}_O = \mu a^2\omega\Big(\frac{19}{45}\,\hat{e}_1 - \frac{53}{72}\,\hat{e}_2 - \frac{14}{45}\,\hat{e}_3\Big).$$

Per l'energia cinetica del sistema, nel medesimo riferimento, si ha invece la relazione

$$T = \frac{1}{2}\omega\cdot L_O(\omega) = \frac{1}{2}\omega\cdot\vec{K}_O = \frac{1}{2}\mu a^2\omega^2(\hat{e}_1 - 2\,\hat{e}_2 - \hat{e}_3)\cdot\Big(\frac{19}{45}\,\hat{e}_1 - \frac{53}{72}\,\hat{e}_2 - \frac{14}{45}\,\hat{e}_3\Big)$$

che eseguendo il prodotto scalare diventa

$$T = \frac{1}{2}\mu a^2\omega^2\Big(\frac{19}{45} + \frac{53}{36} + \frac{14}{45}\Big) = \frac{397}{360}\,\mu a^2\omega^2.$$

(e) **La retta OB è un asse principale d'inerzia in O del sistema?**
Per definizione, la retta OB costituisce un asse principale d'inerzia in O del sistema se e solo se il versore direttore della retta — o comunque un vettore non nullo a questo proporzionale — è un autovettore dell'operatore d'inerzia in O del sistema, se cioè

$$L_O(B-O) = \lambda(B-O) \tag{.3}$$

per un qualche scalare $\lambda > 0$. Nella fattispecie vale

$$B-O = a\,\hat{e}_1 + a\,\hat{e}_2 \neq, 0$$

per cui nella base $\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ associata alla terna $Oxyz$ il problema agli autovalori (.3) assume la forma matriciale

$$[L_O]\begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{.4}$$

Il primo membro di (.4) si determina esplicitamente sostituendo l'espressione della matrice d'inerzia ed eseguendo il relativo prodotto matriciale

$$[L_O]\begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \mu a^2\begin{pmatrix} 31/180 & -1/8 & 0 \\ -1/8 & 11/36 & 0 \\ 0 & 0 & 14/45 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \mu a^3\begin{pmatrix} \dfrac{31}{180} - \dfrac{1}{8} \\ -\dfrac{1}{8} + \dfrac{11}{36} \\ 0 \end{pmatrix} = \mu a^3\begin{pmatrix} \dfrac{17}{360} \\ \dfrac{13}{72} \\ 0 \end{pmatrix}$$

e *non è proporzionale al vettore colonna* $(a\ a\ 0)^T$. Ne deriva che $B-O$ non rappresenta un autovettore di L_O, e che pertanto la retta OB non è identificabile come un asse principale d'inerzia in O del sistema.

Soluzione dell'esercizio 2
(a) **Equilibri relativi a** $Oxyz$
Le sollecitazioni attive agenti sul sistema si riducono al sistema delle forze peso e all'interazione elastica fra i punti A e C; entrambe le sollecitazioni hanno natura posizionale conservativa e possono essere descritte per mezzo dei relativi potenziali. Il potenziale del sistema risulterà perciò dalla somma di un contributo gravitazionale e di un termine elastico, che conviene calcolare separatamente.

Potenziale gravitazionale
Il potenziale gravitazionale può essere determinato per via additiva, sommando i potenziali gravitazionali delle due aste:

$$U_{\mathrm{g}} = -mg\,\hat{e}_2 \cdot (G_1 - O) - mg\,\hat{e}_2 \cdot (G_2 - O) \tag{.5}$$

in cui G_1 e G_2 indicano i baricentri di OA e AB rispettivamente. Il baricentro dell'asta omogenea OA si identifica con il punto medio G_1 del segmento OA ed è quindi individuato dal vettore posizione

$$G_1 - O = \frac{A - O}{2} = \frac{L}{2}\sin\vartheta\,\hat{e}_1 - \frac{L}{2}\cos\vartheta\,\hat{e}_2 \tag{.6}$$

essendo chiaramente

$$A - O = L\sin\vartheta\,\hat{e}_1 - L\cos\vartheta\,\hat{e}_2\,.$$

In modo analogo, il baricentro dell'asta AB è il punto medio G_2 della stessa

$$\begin{aligned} G_2 - O &= A - O + G_2 - A = A - O + \frac{B - A}{2} = \\ &= L\sin\vartheta\,\hat{e}_1 - L\cos\vartheta\,\hat{e}_2 + \frac{1}{2}(L\cos\vartheta\,\hat{e}_1 + L\sin\vartheta\,\hat{e}_2) = \\ &= L\Big(\sin\vartheta + \frac{1}{2}\cos\vartheta\Big)\hat{e}_1 + L\Big(-\cos\vartheta + \frac{1}{2}\sin\vartheta\Big)\hat{e}_2\,. \end{aligned} \tag{.7}$$

Sostituendo le relazioni (.6) e (.7) nell'espressione (.5) del potenziale si ottiene così

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{g}} &= -mg\,\hat{e}_2 \cdot (G_1 - O) - mg\,\hat{e}_2 \cdot (G_2 - O) = \\ &= mg\frac{L}{2}\cos\vartheta - mgL\Big(-\cos\vartheta + \frac{1}{2}\sin\vartheta\Big) = mgL\Big(\frac{3}{2}\cos\vartheta - \frac{1}{2}\sin\vartheta\Big)\,. \end{aligned}$$

Potenziale elastico
Gli estremi della molla elastica sono individuati dai vettori posizione

$$A - O = L\sin\vartheta\,\hat{e}_1 - L\cos\vartheta\,\hat{e}_2 \qquad\qquad C - O = 2L\,\hat{e}_1$$

cui corrisponde il vettore distanza

$$A - C = L(\sin\vartheta - 2)\,\hat{e}_1 - L\cos\vartheta\,\hat{e}_2\,,$$

in modo che il potenziale elastico assume la forma

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{el}} &= -\frac{k}{2}(A - C)^2 = -\frac{1}{2}\frac{mg}{L}\,L^2\big[(\sin\vartheta - 2)^2 + \cos^2\vartheta\big] = \\ &= -\frac{1}{2}mgL(\sin^2\vartheta + 4 - 4\sin\vartheta + \cos^2\vartheta) = mgL\Big(2\sin\vartheta - \frac{5}{2}\Big)\,. \end{aligned}$$

Potenziale del sistema
La somma dei potenziali gravitazionale ed elastico fornisce il potenziale del sistema

$$U(\vartheta) \;=\; U_{\mathrm{g}} + U_{\mathrm{el}} \;=\; mgL\Big(\frac{3}{2}\cos\vartheta - \frac{1}{2}\sin\vartheta\Big) + 2mgL\sin\vartheta \;=$$
$$=\; mgL\Big(\frac{3}{2}\cos\vartheta + \frac{3}{2}\sin\vartheta\Big) \;=\; \frac{3}{2}mgL(\cos\vartheta + \sin\vartheta)\,.$$

Equilibri
Trattandosi di sistema scleronomo posizionale e conservativo, a vincoli bilaterali ideali, gli equilibri del sistema sono tutti e soli i punti critici del potenziale U. Essi si ricavano pertanto eguagliando a zero la derivata prima del potenziale

$$U'(\vartheta) \;=\; \frac{3}{2}mgL(-\sin\vartheta + \cos\vartheta) \;=\; 0$$

e risolvendo l'equazione trigonometrica così ottenuta

$$\sin\vartheta \;=\; \cos\vartheta \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{tg}\ \vartheta \;=\; 1$$

che ammette le soluzioni

$$\vartheta \;=\; \frac{\pi}{4} \qquad \vartheta \;=\; \frac{5}{4}\pi$$

a meno di multipli interi di 2π, che sono fisicamente irrilevanti.

(b) **Stabilità degli equilibri**
La stabilità degli equilibri — tutti ordinari — può essere discussa applicando i teoremi standard di Lagrange-DIrichlet e di inversione parziale. Alla base della discussione sta, al solito, il calcolo della derivata seconda del potenziale

$$U''(\vartheta) \;=\; \frac{3}{2}mgL(-\cos\vartheta - \sin\vartheta)$$

che va valutata in ciascun equilibrio,

Configurazione $\vartheta = \pi/4$
In questa configurazione si ha

$$U''(\pi/4) \;=\; \frac{3}{2}mgL\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) \;=\; -\frac{3}{\sqrt{2}}mgL \;<\; 0$$

per cui $\vartheta = \pi/4$ costituisce un massimo relativo proprio del potenziale. Di esso il teorema di Lagrange-DIrichlet assicura la stabilità, mentre la conservazione dell'energia meccanica consente di escludere l'attrattività e dunque la stabilità asintotica.

Configurazione $\vartheta = 5\pi/4$
Nella fattispecie si ha invece

$$U''(5\pi/4) \;=\; \frac{3}{2}mgL\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) \;=\; \frac{3}{\sqrt{2}}mgL \;>\; 0$$

e l'equilibrio risulta instabile per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

(c) **Energia cinetica relativa a $Oxyz$**
È conveniente calcolare l'energia cinetica del sistema sfruttando la proprietà additiva, calcolando cioè separatamente e poi sommando le energie cinetiche delle aste omogenee OA e AB.

Energia cinetica dell'asta OA
L'asta OA si muove nel piano coordinato Oxy ruotando attorno all'asse fisso Oz, con angolo di rotazione ϑ e velocità angolare istantanea $\dot{\vartheta}\,\hat{e}_3$. Ne deriva che la corrispondente energia cinetica è data dalla semplice espressione

$$T_{OA} \;=\; \frac{1}{2} I_{Oz}^{OA} |\dot{\vartheta}\,\hat{e}_3|^2 \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{mL^2}{3}\dot{\vartheta}^2 \;=\; \frac{mL^2}{6}\dot{\vartheta}^2.$$

Energia cinetica dell'asta AB
Anche l'asta AB si muove nel piano Oxy ma è priva di punti fissi; la sua energia cinetica deve dunque essere valutata ricorrendo al teorema di König:

$$T_{AB} \;=\; \frac{1}{2} m\dot{G}_2^2 + \frac{1}{2} I_{G_2 z}^{AB} |\dot{\vartheta}\,\hat{e}_3|^2$$

dove il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse baricentrale $G_2 z$ vale

$$I_{G_2 z}^{AB} \;=\; \frac{mL^2}{12}$$

e la velocità istantanea del baricentro si ricava derivando in t il vettore posizione (.7)

$$\dot{G}_2 \;=\; L\Big(\cos\vartheta - \frac{1}{2}\sin\vartheta\Big)\,\dot{\vartheta}\,\hat{e}_1 + L\Big(\sin\vartheta + \frac{1}{2}\cos\vartheta\Big)\,\dot{\vartheta}\,\hat{e}_2$$

per cui

$$\begin{aligned}
\dot{G}_2^2 \;&=\; L^2\dot{\vartheta}^2\bigg[\Big(\cos\vartheta - \frac{1}{2}\sin\vartheta\Big)^2 + \Big(\sin\vartheta + \frac{1}{2}\cos\vartheta\Big)^2\bigg] \;= \\
&=\; L^2\dot{\vartheta}^2\bigg[\cos^2\vartheta + \frac{1}{4}\sin^2\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta + \sin^2\vartheta + \frac{1}{4}\cos^2\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta\bigg] \;=\; \frac{5}{4}L^2\dot{\vartheta}^2.
\end{aligned}$$

Di conseguenza, si ha

$$T_{AB} \;=\; \frac{1}{2} m\,\frac{5}{4}L^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}\,\frac{mL^2}{12}\dot{\vartheta}^2 \;=\; \frac{5}{8}mL^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{24}mL^2\dot{\vartheta}^2 \;=\; \frac{2}{3}mL^2\dot{\vartheta}^2\,.$$

Energia cinetica del sistema
Per calcolare l'energia cinetica del sistema non rimane che sommare i contributi parziali delle due aste:

$$T = T_{OA} + T_{AB} = \frac{1}{6}mL^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{2}{3}mL^2\dot{\vartheta}^2 = \frac{5}{6}mL^2\dot{\vartheta}^2 .$$

(d) **Equazioni pure del moto**
Le equazioni pure del moto si riducono all'unica equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{\vartheta}}\Big) - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\vartheta} = 0$$

con la lagrangiana

$$\mathfrak{L} = T + U = \frac{5}{6}mL^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{3}{2}mgL(\cos\vartheta + \sin\vartheta) .$$

Si hanno le ovvie relazioni

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{\vartheta}}\Big) = \frac{5}{3}mL^2\ddot{\vartheta} \qquad\qquad \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\vartheta} = \frac{3}{2}mgL(-\sin\vartheta + \cos\vartheta)$$

che consentono di scrivere l'equazione pura del moto nella forma

$$\frac{5}{3}mL^2\ddot{\vartheta} + \frac{3}{2}mgL(\sin\vartheta - \cos\vartheta) = 0 .$$

(e) **Equilibri in presenza di vincoli unilaterali**
Nel caso il sistema sia soggetto a vincoli unilaterali tali da rendere possibili soltanto i valori $\vartheta \in [-\pi, 0]$ della coordinata generalizzata, è evidente che la configurazione

$$\vartheta = -\frac{3}{4}\pi$$

costituisce ancora un equilibrio ordinario del sistema — equivalente alla configurazione $\vartheta = 5\pi/4$, da cui differisce per un intero angolo giro 2π. Occorre però considerare la possibilità che accanto a questo equilibrio ordinario possano sorgere degli equilibri di confine. Le configurazioni di confine del sistema sono soltanto due, $\vartheta = -\pi$ e $\vartheta = 0$.

Configurazione $\vartheta = -\pi$
Il teorema dei lavori virtuali stabilisce che condizione necessaria e sufficiente affinchè $\vartheta = -\pi$ sia un equilibrio del sistema è che si abbia

$$Q_\vartheta(-\pi)\,\delta\vartheta \le 0 \qquad \forall\,\delta\vartheta \ge 0$$

ossia

$$Q_\vartheta(-\pi) \le 0 .$$

Risulta in effetti

$$Q_\vartheta(-\pi) \,=\, U'(-\pi) \,=\, \frac{3}{2}mgL(-\sin\vartheta + \cos\vartheta)\Big|_{\vartheta=-\pi} \,=\, \frac{3}{2}mgL(-0-1) \,=\, -\frac{3}{2}mgL \,<\, 0$$

nbper cui $\vartheta = -\pi$ costituisce un equilibrio di confine per il sistema.

Configurazione $\vartheta = 0$
Per questa configurazione il teorema dei lavori virtuali prevedere il sussistere di equilibrio se e soltanto se

$$Q_\vartheta(0)\,\delta\vartheta \,\leq\, 0 \qquad \forall\,\delta\vartheta \,\leq\, 0$$

ovvero

$$Q_\vartheta(0) \,\geq\, 0\,.$$

Ma

$$Q_\vartheta(0) \,=\, U'(0) \,=\, \frac{3}{2}mgL(-\sin\vartheta + \cos\vartheta)\Big|_{\vartheta=0} \,=\, \frac{3}{2}mgL(-0+1) \,=\, \frac{3}{2}mgL \,>\, 0$$

e si deve perciò concludere che anche questa configurazione rappresenta un equilibrio di confine del sistema.