

Prova scritta di meccanica razionale 1 A-L del 12.02.2009

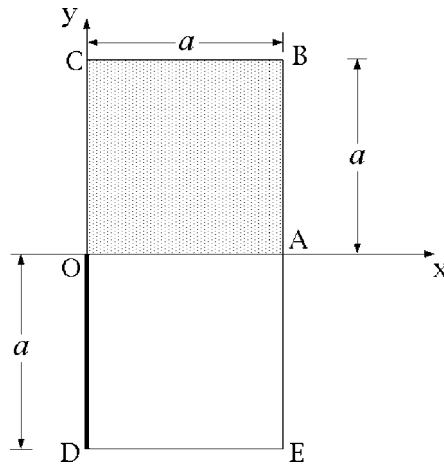
Esercizio 1

Un sistema rigido si compone di una piastra quadrata $OABC$, di una seconda piastra quadrata $ODEA$, e di un'asta rettilinea OD , disposte nel piano coordinato Oxy di una terna cartesiana $Oxyz$ come illustrato in figura. I lati delle due piastre e l'asta OD hanno tutti lunghezza a . Indicata con μ una massa caratteristica, la piastra $OABC$ e l'asta hanno densità rispettive

$$\sigma(x, y) = \frac{4\mu}{a^4}x(a - y) \quad \forall (x, y) \in [0, a]^2$$

$$\lambda(P) = \frac{\mu}{a^3}|P - D|^2 \quad \forall P \in OD$$

mentre la densità di $ODEA$ è trascurabile.

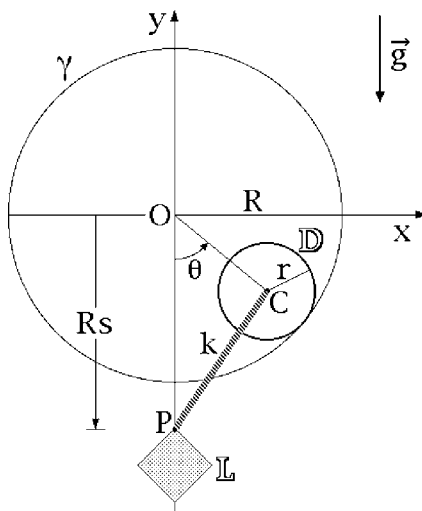


Determinare:

- la massa e il baricentro rispetto ad $Oxyz$ del sistema;
- la matrice d'inerzia in $Oxyz$ del sistema;
- il momento d'inerzia del sistema rispetto alla retta OB ;
- il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse AB ;
- dove va saldata al sistema una massa puntiforme μ in modo che il sistema rigido ottenuto sia dinamicamente equilibrato attorno all'asse fisso Ox .

Esercizio 2

Un disco circolare omogeneo \mathbb{D} , di centro C , raggio r e massa m , rotola senza strisciare all'interno di una circonferenza fissa γ di centro O e raggio $R > r$, posta nel piano coordinato Oxy di una terna cartesiana $Oxyz$. Una molla ideale di costante elastica k connette C con il vertice P di un quadrato \mathbb{L} , di massa m , vincolato a traslare lungo l'asse Oy e al di sotto di γ — vedi figura. L'intero sistema è soggetto al campo delle forze peso.



Supposti i vincoli ideali, si faccia uso delle coordinate $\theta \in \mathbb{R}$ e $s \geq 1$ in figura per determinare:

- l'energia cinetica del sistema;
- gli equilibri ordinari;
- le proprietà di stabilità degli equilibri ordinari;
- le equazioni di Lagrange del moto;
- se la configurazione $(s, \theta) = (1, 0)$ è un equilibrio di confine del sistema.

Soluzione dell'esercizio 1

(a) Massa e baricentro del sistema

Per determinare massa e baricentro del sistema è opportuno considerare questo come l'unione dell'asta OD e della piastra quadrata $OABC$. Poichè l'intersezione $OABC \cap OD$ consta di un solo punto, che dà contributo nullo tanto agli integrali curvilinei su OD quanto a quelli di superficie su $OABC$, piastra e asta possono considerarsi parti disgiunte: la massa del sistema viene così calcolata per mezzo della proprietà additiva, calcolando separatamente e poi sommando le masse di $OABC$ e di OD ; il baricentro del sistema si ricava invece dal teorema distributivo, che richiede l'individuazione dei baricentri parziali di $OABC$ e OD . Per via della sua densità areale trascurabile, la piastra $ODEA$ è irrilevante.

Massa della piastra $OABC$

La massa della piastra $OABC$ viene determinata per integrazione diretta della densità areale σ sul quadrato $\{(x, y) \in [0, a]^2\}$:

$$\begin{aligned} m_{OABC} &= \int_0^a dx \int_0^a dy \frac{4\mu}{a^4} x(a-y) = \frac{4\mu}{a^4} \int_0^a x dx \int_0^a (a-y) dy = \\ &= \frac{4\mu}{a^4} \frac{a^2}{2} \left[-\frac{(a-y)^2}{2} \right]_0^a = \frac{2\mu}{a^2} \frac{a^2}{2} = \mu. \end{aligned}$$

Massa dell'asta OD

Mentre l'estremo D è individuato dal vettore posizione $D - O = -a \hat{e}_2$, l'asta ammette l'ovvia parametrizzazione

$$P - O = y \hat{e}_2, \quad y \in [-a, 0],$$

per cui la densità lineare di OD assume la forma esplicita

$$\lambda(P) = \frac{\mu}{a^3} |y \hat{e}_2 - (-a \hat{e}_2)|^2 = \frac{\mu}{a^3} (y+a)^2, \quad y \in [-a, 0].$$

Essendo poi $ds = dy$, la massa dell'asta vale pertanto

$$m_{OD} = \int_{-a}^0 \frac{\mu}{a^3} (y+a)^2 dy = \frac{\mu}{a^3} \left[\frac{(y+a)^3}{3} \right]_{-a}^0 = \frac{\mu}{a^3} \frac{a^3}{3} = \frac{\mu}{3}.$$

Massa del sistema

Per ottenere la massa m del sistema non resta che sommare le masse parziali appena calcolate:

$$m = m_{OABC} + m_{OD} = \mu + \frac{\mu}{3} = \frac{4}{3}\mu.$$

Baricentro della piastra $OABC$

Il baricentro G_{OABC} della piastra deve collocarsi nel piano di giacitura di questa, ossia nel piano coordinato Oxy del sistema di riferimento, rispetto al quale dunque il baricentro sarà individuato da un vettore posizione della forma

$$G_{OABC} - O = x_{OABC} \hat{e}_1 + y_{OABC} \hat{e}_2.$$

L'ascissa è data dalla relazione

$$\begin{aligned} x_{OABC} &= \frac{1}{m_{OABC}} \int_{OABC} x \sigma dA = \frac{1}{\mu} \int_0^a dx \int_0^a dy x \frac{4\mu}{a^4} x(a-y) = \frac{4}{a^4} \int_0^a dx \int_0^a dy x^2(a-y) \\ &= \frac{4}{a^4} \int_0^a x^2 dx \int_0^a (a-y) dy = \frac{4}{a^4} \frac{a^3}{3} \left[-\frac{(a-y)^2}{2} \right]_0^a = \frac{4}{3a} \frac{a^2}{2} = \frac{2}{3}a, \end{aligned}$$

mentre per l'ordinata si ha

$$\begin{aligned} y_{OABC} &= \frac{1}{m_{OABC}} \int_{OABC} y \sigma dA = \frac{1}{\mu} \int_0^a dx \int_0^a dy y \frac{4\mu}{a^4} x(a-y) = \\ &= \frac{4}{a^4} \int_0^a x dx \int_0^a y(a-y) dy = \frac{4}{a^4} \frac{a^2}{2} \left[a \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^a = \frac{2}{a^2} \left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{a}{3} \end{aligned}$$

in modo che risulta

$$G_{OABC} - O = \frac{2}{3}a \hat{e}_1 + \frac{1}{3}a \hat{e}_2.$$

Baricentro dell'asta OD

Il baricentro G_{OD} dell'asta si colloca lungo l'asse Oy , che costituisce un ovvio asse di simmetria di OD :

$$G_{OD} = y_{OD} \hat{e}_2.$$

L'unica coordinata non banale del centro di massa è dunque

$$\begin{aligned} y_{OD} &= \frac{1}{m_{OD}} \int_{OD} y \lambda ds = \frac{3}{\mu} \int_{-a}^0 y \frac{\mu}{a^3} (y+a)^2 dy = \frac{3}{a^3} \int_{-a}^0 (y^3 + 2ay^2 + a^2y) dy = \\ &= \frac{3}{a^3} \left[\frac{y^4}{4} + 2a \frac{y^3}{3} + a^2 \frac{y^2}{2} \right]_{-a}^0 = \frac{3}{a^3} \left(-\frac{a^4}{4} + \frac{2}{3}a^4 - \frac{a^4}{2} \right) = 3a \left(-\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4}a \end{aligned}$$

per cui

$$G_{OD} - O = -\frac{1}{4}a \hat{e}_2.$$

Baricentro del sistema

Il baricentro G del sistema è ora determinato dal teorema distributivo, per mezzo della relazione:

$$G - O = \frac{m_{OABC}(G_{OABC} - O) + m_{OD}(G_{OD} - O)}{m_{OABC} + m_{OD}}$$

che sostituiti i valori delle masse e i vettori posizione dei baricentri parziali porge

$$G - O = \frac{\mu \left(\frac{2}{3}a \hat{e}_1 + \frac{1}{3}a \hat{e}_2 \right) + \frac{\mu}{3} \left(-\frac{1}{4}a \hat{e}_2 \right)}{\mu + \frac{\mu}{3}} = \frac{3}{4} \left(\frac{2}{3}a \hat{e}_1 + \frac{1}{3}a \hat{e}_2 - \frac{1}{12}a \hat{e}_2 \right) =$$

$$= \frac{3}{4} \left(\frac{2}{3}a \hat{e}_1 + \frac{1}{4}a \hat{e}_2 \right) = \frac{1}{2}a \hat{e}_1 + \frac{3}{16}a \hat{e}_2.$$

(b) Matrice d'inerzia in Oxyz del sistema

La proprietà additiva assicura che la matrice d'inerzia del sistema può calcolarsi come somma delle matrici d'inerzia della piastra $OABC$ e dell'asta OD rispetto al medesimo riferimento $Oxyz$, mentre trascurabile è il contributo della piastra $ODEA$.

Matrice d'inerzia della piastra OABC

La collocazione della piastra nel piano coordinato Oxy autorizza ad affermare che la relativa matrice d'inerzia in $Oxyz$ deve assumere la forma

$$[L_O^{OABC}] = \begin{pmatrix} L_{xx}^{OABC} & L_{xy}^{OABC} & 0 \\ L_{xy}^{OABC} & L_{yy}^{OABC} & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx}^{OABC} + L_{yy}^{OABC} \end{pmatrix}.$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse Ox è dato da

$$L_{xx}^{OABC} = \int_{OABC} y^2 \sigma dA = \int_0^a dx \int_0^a dy y^2 \frac{4\mu}{a^4} x(a-y) = \frac{4\mu}{a^4} \int_0^a x dx \int_0^a (ay^2 - y^3) dy =$$

$$= \frac{4\mu}{a^4} \frac{a^2}{2} \left[a \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^a = \frac{2\mu}{a^2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) a^4 = 2\mu a^2 \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \mu a^2$$

mentre per il momento d'inerzia relativo ad Oy vale l'espressione

$$L_{yy}^{OABC} = \int_{OABC} x^2 \sigma dA = \int_0^a dx \int_0^a dy x^2 \frac{4\mu}{a^4} x(a-y) = \frac{4\mu}{a^4} \int_0^a x^3 dx \int_0^a (a-y) dy =$$

$$= \frac{4\mu}{a^4} \frac{a^4}{4} \left[-\frac{(a-y)^2}{2} \right]_0^a = \frac{1}{2} \mu a^2.$$

Quanto all'unico prodotto d'inerzia non banalmente nullo, la definizione porge

$$L_{xy}^{OABC} = - \int_{OABC} xy \sigma dA = - \int_0^a dx \int_0^a dy xy \frac{4\mu}{a^4} x(a-y) = - \frac{4\mu}{a^4} \int_0^a x^2 dx \int_0^a (ay - y^2) dy =$$

$$= - \frac{4\mu}{a^4} \frac{a^3}{3} \left(a \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3} \right) = - \frac{4\mu}{3a} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) a^3 = - \frac{4}{3} \mu a^2 \frac{1}{6} = - \frac{2}{9} \mu a^2.$$

La matrice d'inerzia della piastra $OABC$ diventa pertanto

$$[L_O^{OABC}] = \mu a^2 \begin{pmatrix} 1/6 & -2/9 & 0 \\ -2/9 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Matrice d'inerzia dell'asta OD

Poichè l'asta è situata lungo l'asse Oy , tutti i suoi prodotti d'inerzia sono nulli, al pari del momento d'inerzia rispetto allo stesso asse. I soli momenti d'inerzia non nulli sono quelli relativi agli assi ortogonali Ox e Oz , peraltro coincidenti per via dell'evidente simmetria. Ne deriva la matrice d'inerzia seguente:

$$[L_O^{OD}] = \begin{pmatrix} L_{xx}^{OD} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx}^{OD} \end{pmatrix} = \mu a^2 \begin{pmatrix} 1/30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/30 \end{pmatrix}$$

in quanto

$$\begin{aligned} L_{xx}^{OD} &= \int_{OD} y^2 \lambda ds = \int_{-a}^0 y^2 \frac{\mu}{a^3} (y+a)^2 dy = \frac{\mu}{a^3} \int_{-a}^0 (y^4 + 2ay^3 + a^2y^2) dy = \\ &= \frac{\mu}{a^3} \left[\frac{y^5}{5} + 2a \frac{y^4}{4} + a^2 \frac{y^3}{3} \right]_{-a}^0 = \frac{\mu}{a^3} \left(\frac{a^5}{5} - 2a \frac{a^4}{4} + a^2 \frac{a^3}{3} \right) = \frac{1}{30} \mu a^2. \end{aligned}$$

Matrice d'inerzia del sistema

La somma delle matrici d'inerzia parziali, relative a piastra ed asta, fornisce la matrice d'inerzia in $Oxyz$ del sistema

$$[L_O] = [L_O^{OABC}] + [L_O^{OD}] = \mu a^2 \begin{pmatrix} 1/5 & -2/9 & 0 \\ -2/9 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 7/10 \end{pmatrix}.$$

(c) Momento d'inerzia del sistema rispetto alla retta OB

La retta OB passa chiaramente per l'origine O della terna di riferimento ed un suo versore direttore (tangente) è dato da

$$\hat{n} = \frac{B-O}{|B-O|} = \frac{a \hat{e}_1 + a \hat{e}_2}{|a \hat{e}_1 + a \hat{e}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_2.$$

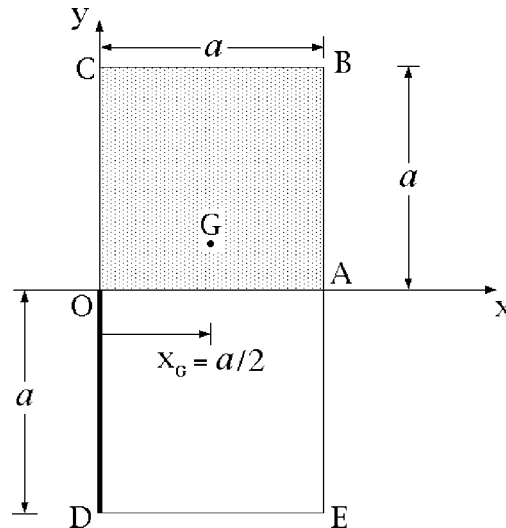
Il momento d'inerzia relativo a tale retta è quindi espresso per tramite dell'operatore d'inerzia in O :

$$I_{OB} = I_{O\hat{n}} = \hat{n} \cdot L_O(\hat{n}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \mu a^2 \begin{pmatrix} 1/5 & -2/9 & 0 \\ -2/9 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 7/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\mu a^2 (1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 1/5 & -2/9 & 0 \\ -2/9 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 7/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\mu a^2 \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} + \frac{1}{2} \right) = \frac{23}{180}\mu a^2.$$

(d) Momento d'inerzia del sistema rispetto alla retta AB

La retta AB risulta parallela all'asse Oy , rispetto al quale il momento d'inerzia $I_{Oy} = L_{yy} = \mu a^2/2$ è già stato calcolato. Convien dunque considerare l'asse baricentrale Gy , parallelo ai precedenti, e applicare due volte il teorema di Huygens-Steiner.



Indicata con $x_G = a/2$ l'ascissa del baricentro G del sistema, si hanno le relazioni

$$I_{AB} = I_{Gy} + m(a - x_G)^2 \qquad I_{Oy} = I_{Gy} + mx_G^2$$

dalle quali, sottraendo membro a membro, si ricava

$$I_{AB} - I_{Oy} = m(a - x_G)^2 - mx_G^2$$

e quindi

$$I_{AB} = I_{Oy} + m(a - x_G)^2 - mx_G^2 = \frac{1}{2}\mu a^2 + \frac{4}{3}\mu \left(a - \frac{a}{2} \right)^2 - \frac{4}{3}\mu \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}\mu a^2.$$

Si osservi che il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse AB coincide con quello relativo all'asse coordinato Oy . Ciò è dovuto al fatto che i due assi si trovano alla stessa distanza $a - x_G = x_G = a/2$ dall'asse baricentrale Gy .

(e) Equilibratura dinamica dell'asse fisso Ox

Sia $P - O = x_P \hat{e}_1 + y_P \hat{e}_2$ il vettore posizione della massa addizionale μ , rappresentata dal punto P . Lo scopo è quello di determinare le coordinate x_P e y_P in modo che l'asse Ox

risultati centrale d'inerzia per il sistema modificato con l'introduzione di P . Si deve perciò richiedere: (i) che il baricentro del nuovo sistema appartenga all'asse Ox (equilibratura statica), e (ii) che il versore \hat{e}_1 sia autovettore dell'operatore d'inerzia in G del sistema modificato.

Equilibratura statica del sistema con asse fisso Ox

Il baricentro G' del sistema modificato si calcola immediatamente ricorrendo al teorema distributivo, applicato al sistema originario di massa m e al punto P di massa μ ,

$$\begin{aligned} G' - O &= \frac{m(G - O) + \mu(P - O)}{m + \mu} = \\ &= \frac{\frac{4}{3}\mu\left(\frac{1}{2}a\hat{e}_1 + \frac{3}{16}a\hat{e}_2\right) + \mu(x_P\hat{e}_1 + y_P\hat{e}_2)}{\frac{4}{3}\mu + \mu} = \frac{3}{7}\left(\frac{2}{3}a + x_P\right)\hat{e}_1 + \frac{3}{7}\left(\frac{1}{4}a + y_P\right)\hat{e}_2. \end{aligned}$$

Per l'equilibratura statica dell'asse Ox occorre e basta che $G' \in Ox$, ossia

$$0 = (G' - O) \cdot \hat{e}_2 = \frac{3}{7}\left(\frac{1}{4}a + y_P\right)$$

e quindi

$$y_P = -\frac{1}{4}a.$$

Equilibratura dinamica del sistema con asse fisso Ox

Per la proprietà additiva, la matrice d'inerzia del nuovo sistema vale

$$[L'_O] = [L_O] + \mu \begin{pmatrix} y_P^2 & -x_P y_P & 0 \\ -x_P y_P & x_P^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_P^2 + y_P^2 \end{pmatrix}.$$

Se il versore \hat{e}_1 è un autovettore dell'operatore d'inerzia L'_O del sistema modificato, allora Ox costituisce un asse principale d'inerzia in O del sistema. Ciò equivale a richiedere che per un qualche scalare λ si abbia:

$$[L'_O] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (.1)$$

D'altra parte, poichè $G \in Ox$, in tali condizioni il teorema di Huygens-Steiner generalizzato assicura che Ox è anche asse centrale d'inerzia. Posto $G' - O = x_{G'}\hat{e}_1$, vale infatti:

$$[L'_{G'}] = [L'_O] - (m + \mu) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{G'}^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_{G'}^2 \end{pmatrix}$$

per cui

$$[L'_{G'}] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [L'_O] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - (m + \mu) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{G'}^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_{G'}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [L'_O] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e dunque \hat{e}_1 risulta anche autovettore dell'operatore d'inerzia in G' del nuovo sistema rigido. Non rimane così che calcolare esplicitamente la matrice d'inerzia $[L'_O]$

$$[L'_O] = \mu \begin{pmatrix} \frac{1}{5}a^2 + \left(-\frac{1}{4}a\right)^2 & -\frac{2}{9}a^2 - x_P \left(-\frac{1}{4}a\right) & 0 \\ -\frac{2}{9}a^2 - x_P \left(-\frac{1}{4}a\right) & \frac{1}{2}a^2 + x_P^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{10}a^2 + x_P^2 + \left(-\frac{1}{4}a\right)^2 \end{pmatrix}$$

in modo che la condizione (.1) si riduce a

$$\mu \begin{pmatrix} \frac{21}{80}a^2 \\ -\frac{2}{9}a^2 + \frac{1}{4}ax_P \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ed è soddisfatta unicamente per

$$-\frac{2}{9}a^2 + \frac{1}{4}ax_P = 0$$

ossia

$$x_P = \frac{8}{9}a.$$

In definitiva, la massa addizionale μ va saldata al sistema rigido nella posizione

$$P - O = x_P \hat{e}_1 + y_P \hat{e}_2 = \frac{8}{9}a \hat{e}_1 - \frac{1}{4}a \hat{e}_2$$

corrispondente ad un punto della piastra $ODEA$.

Soluzione dell'esercizio 2

(a) Energia cinetica

L'energia cinetica del sistema è data dalla somma delle energie cinetiche del disco circolare \mathbb{D} e del quadrato omogeneo \mathbb{L} .

Energia cinetica del disco \mathbb{D}

Dal momento che il disco \mathbb{D} risulta privo di punti fissi, conviene determinarne l'energia cinetica ricorrendo al teorema di König e scrivere

$$T_{\mathbb{D}} = \frac{m}{2} \dot{C}^2 + \frac{1}{2} I_{Cz} |\vec{\omega}_{\mathbb{D}}|^2$$

dove il baricentro del disco è individuato dal vettore posizione

$$C - O = (R - r) \sin \theta \hat{e}_1 - (R - r) \cos \theta \hat{e}_2$$

ed ha velocità istantanea

$$\dot{C} = (R - r)(\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2)\dot{\theta}$$

con modulo quadrato

$$\dot{C}^2 = (R - r)^2 \dot{\theta}^2,$$

il momento d'inerzia del disco omogeneo rispetto all'asse baricentrale Cz vale

$$I_{Cz} = \frac{mr^2}{2}$$

e la velocità angolare istantanea di \mathbb{D} è data dalla nota formula

$$\vec{\omega}_{\mathbb{D}} = -\left(\frac{R}{r} - 1\right)\dot{\theta}\hat{e}_3.$$

Sostituendo i dati nella formula di König si ottiene così:

$$T_{\mathbb{D}} = \frac{m}{2}(R - r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{mr^2}{2} \left| -\left(\frac{R}{r} - 1\right)\dot{\theta}\hat{e}_3 \right|^2 = \frac{3}{4}m(R - r)^2 \dot{\theta}^2.$$

Energia cinetica della lamina quadrata \mathbb{L}

La lamina quadrata è vincolata a traslare lungo l'asse Oy : tutti i suoi punti hanno perciò la stessa velocità istantanea, identificabile con quella del punto P . Dalla relazione $P - O = -Rs\hat{e}_2$ si ha

$$\dot{P} = -R\dot{s}\hat{e}_2$$

e l'energia cinetica della lamina quadrata diventa così:

$$T_{\mathbb{L}} = \frac{m}{2}\dot{P}^2 = \frac{mR^2}{2}\dot{s}^2.$$

Energia cinetica del sistema

Basta ora sommare le energie cinetica di disco e lamina per ottenere quella dell'intero sistema:

$$T = T_{\mathbb{D}} + T_{\mathbb{L}} = \frac{3}{4}m(R - r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{mR^2}{2}\dot{s}^2. \quad (.2)$$

(b) Equilibri ordinari

Le sollecitazioni che agiscono sul sistema scleronomo hanno tutte natura posizionale conservativa: si tratta delle forze peso agenti sul disco \mathbb{D} e sulla lamina quadrata \mathbb{L} e dell'interazione elastica fra i punti C e P . Ognuna di queste interazioni viene rappresentata dall'appropriato potenziale.

Potenziale gravitazionale

Il potenziale gravitazionale è la somma dei potenziali gravitazionali di disco e asta. Il baricentro del disco omogeneo coincide con il suo centro geometrico (e di simmetria) C , individuato dal vettore posizione:

$$C - O = (R - r) \sin \theta \hat{e}_1 - (R - r) \cos \theta \hat{e}_2$$

per cui il potenziale gravitazionale del disco si scrive:

$$U_g^{\mathbb{D}} = -mg \hat{e}_2 \cdot (C - O) = mg(R - r) \cos \theta.$$

Una relazione analoga si dovrebbe applicare alla lamina quadrata \mathbb{L} ma la posizione del baricentro G di \mathbb{L} non è nota, non essendo specificata la densità areale del corpo — il testo del problema non precisa se la lamina quadrata sia omogenea o meno. Ciò nonostante, siccome la lamina è per ipotesi vincolata a *traslare* lungo l'asse Oy il vettore posizione $G - P$ si mantiene costante lungo qualsiasi moto possibile del sistema. Il potenziale gravitazionale della piastra quadrata diventa così:

$$\begin{aligned} U_g^{\mathbb{L}} &= -mg \hat{e}_2 \cdot (G - O) = -mg \hat{e}_2 \cdot (G - P + P - O) = \\ &= -mg \hat{e}_2 \cdot (G - P) - mg \hat{e}_2 \cdot (P - O) = -mg \hat{e}_2 \cdot (G - P) - mg \hat{e}_2 \cdot (-Rs \hat{e}_2) = \\ &= mgRs + \text{costante}. \end{aligned}$$

Omessa la costante additiva, il potenziale gravitazionale totale è pertanto:

$$U_g = U_g^{\mathbb{D}} + U_g^{\mathbb{L}} = mg(R - r) \cos \theta + mgRs.$$

Potenziale elastico

Gli estremi della molla ideale di costante k sono individuati dai vettori posizione:

$$C - O = (R - r) \sin \theta \hat{e}_1 - (R - r) \cos \theta \hat{e}_2 \quad P - O = -Rs \hat{e}_2,$$

per cui si ha

$$C - P = (R - r) \sin \theta \hat{e}_1 + [Rs - (R - r) \cos \theta] \hat{e}_2$$

e il potenziale associato diventa:

$$\begin{aligned} U_{\text{el}} &= -\frac{k}{2}(C - P)^2 = -\frac{k}{2}[(R - r)^2 \sin^2 \theta + R^2 s^2 + (R - r)^2 \cos^2 \theta - 2R(R - r)s \cos \theta] = \\ &= -\frac{k}{2}[(R - r)^2 + R^2 s^2 - 2R(R - r)s \cos \theta]. \end{aligned}$$

Potenziale del sistema

La somma dei potenziali gravitazionale ed elastico porge il potenziale del sistema:

$$U(s, \theta) = U_g + U_{\text{el}} = mg(R - r) \cos \theta + mgRs - \frac{kR^2}{2}s^2 + kR(R - r)s \cos \theta$$

definito per ogni $(s, \theta) \in [1, +\infty) \times \mathbb{R}$.

Equilibri

Gli equilibri ordinari di un sistema scleronomo posizionale conservativo sono dati dei punti critici del potenziale nell'interno del dominio della parametrizzazione. Nella fattispecie si devono quindi porre simultaneamente uguali a zero le derivate parziali prime:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial s}(s, \theta) &= mgR - kR^2s + kR(R - r) \cos \theta \\ \frac{\partial U}{\partial \theta}(s, \theta) &= -mg(R - r) \sin \theta - kR(R - r) s \sin \theta\end{aligned}$$

e risolvere il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} mgR - kR^2s + kR(R - r) \cos \theta = 0 \\ -mg(R - r) \sin \theta - kR(R - r) s \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (s, \theta) \in (1, +\infty) \times \mathbb{R}$$

che con qualche semplificazione si riduce alla forma equivalente:

$$\begin{cases} mg - kRs + k(R - r) \cos \theta = 0 \\ (mg + kRs) \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (s, \theta) \in (1, +\infty) \times \mathbb{R}. \quad (.3)$$

La seconda equazione di equilibrio è verificata per

$$s = -mg/kR$$

oppure per

$$\theta = 0 \quad \theta = \pi.$$

Si esaminano separatamente i tre casi:

(i) se $s = -mg/kR$ non si hanno soluzioni accettabili, a causa della condizione $s \geq 1$;

(ii) per $\theta = 0$ la prima equazione di equilibrio porge

$$mg - kRs + k(R - r) = 0$$

e quindi:

$$s = \frac{mg + k(R - r)}{kR} = 1 + \frac{mg - kr}{kR},$$

valore ricompreso nell'intervallo di definizione se e solo se $mg > kr$;

(iii) se infine $\theta = \pi$ dalla prima delle (.3) si deduce:

$$mg - kRs - k(R - r) = 0$$

ossia

$$s = \frac{mg - k(R - r)}{kR},$$

purchè sia $[mg - k(R - r)]/kR > 1$.

Riassumendo, gli equilibri del sistema sono:

$$(s, \theta) = \left(1 + \frac{mg - kr}{kR}, 0\right),$$

definito per $mg > kr$, e

$$(s, \theta) = \left(\frac{mg - k(R - r)}{kR}, \pi\right),$$

definito per $[mg - k(R - r)]/kR > 1$.

(c) Stabilità degli equilibri ordinari

Per analizzare le proprietà di stabilità degli equilibri si calcolano le derivate parziali seconde del potenziale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial s^2}(s, \theta) &= -kR^2 & \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial s}(s, \theta) &= -kR(R - r) \sin \theta \\ \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial \theta}(s, \theta) &= -kR(R - r) \sin \theta & \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(s, \theta) &= -mg(R - r) \cos \theta - kR(R - r)s \cos \theta \end{aligned}$$

e la corrispondente matrice hessiana:

$$H_U(s, \theta) = \begin{pmatrix} -kR^2 & -kR(R - r) \sin \theta \\ -kR(R - r) \sin \theta & -mg(R - r) \cos \theta - kR(R - r)s \cos \theta \end{pmatrix}$$

in tutte le configurazioni di equilibrio determinate.

Configurazione $(s, \theta) = \left(1 + \frac{mg - kr}{kR}, 0\right)$

Per la matrice hessiana del potenziale si ha in questo caso la forma diagonale:

$$H_U\left(1 + \frac{mg - kr}{kR}, 0\right) = \begin{pmatrix} -kR^2 & 0 \\ 0 & -(R - r)(2mg + kR - kr) \end{pmatrix}$$

dove anche il secondo autovalore presenta segno negativo

$$-(R - r)(2mg + kR - kr) < 0$$

per via della condizione di esistenza $mg - kr > 0$ dell'equilibrio, il quale risulta quindi stabile per Lagrange-Dirichlet quale massimo relativo proprio del potenziale.

Configurazione $(s, \theta) = \left(\frac{mg - k(R - r)}{kR}, \pi\right)$

Nella fattispecie si ha ancora una matrice hessiana diagonale:

$$H_U\left(\frac{mg - k(R - r)}{kR}, \pi\right) = \begin{pmatrix} -kR^2 & 0 \\ 0 & [2mg - k(R - r)](R - r) \end{pmatrix}$$

dove il primo autovalore $-kR^2$ è certamente negativo, ma non il secondo:

$$[2mg - k(R - r)](R - r) > 0$$

dovendosi avere $mg - k(R - r) > kR$ per l'esistenza dell'equilibrio ordinario. Il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet implica perciò l'instabilità dell'equilibrio.

(d) Equazioni di Lagrange

Il sistema in esame è olonomo posizionale conservativo a vincoli ideali. Le equazioni del moto possono quindi esprimersi in forma lagrangiana:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = 0 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

con il potenziale cinetico $\mathcal{L} = T + U$:

$$\mathcal{L} = \frac{3}{4}m(R - r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{mR^2}{2}\dot{s}^2 + mg(R - r)\cos\theta + mgRs - \frac{kR^2}{2}s^2 + kR(R - r)s\cos\theta.$$

I binomi di Lagrange a primo membro richiedono il calcolo delle espressioni seguenti:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \right) &= mR^2\ddot{s} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} &= mgR - kR^2s + kR(R - r)\cos\theta \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{3}{2}m(R - r)^2\ddot{\theta} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= -mg(R - r)\sin\theta - kR(R - r)s\sin\theta \end{aligned}$$

e le equazioni di Lagrange diventano così:

$$\begin{cases} mR^2\ddot{s} - mgR + kR^2s - kR(R - r)\cos\theta = 0 \\ \frac{3}{2}m(R - r)^2\ddot{\theta} + mg(R - r)\sin\theta + kR(R - r)s\sin\theta = 0, \end{cases}$$

ossia, semplificando alcuni fattori costanti,

$$\begin{cases} mR\ddot{s} - mg + kRs - k(R - r)\cos\theta = 0 \\ \frac{3}{2}m(R - r)\ddot{\theta} + mg\sin\theta + kRs\sin\theta = 0. \end{cases}$$

(e) Equilibrio di confine in $(s, \theta) = (1, 0)$

Grazie all'ipotesi dei vincoli ideali la completa caratterizzazione della configurazione $(s, \theta) = (1, 0)$ come equilibrio di confine è fornita dal teorema dei lavori virtuali, che nella fattispecie assume la forma:

$$\frac{\partial U}{\partial s}(1, 0)\delta s + \frac{\partial U}{\partial \theta}(1, 0)\delta\theta \leq 0 \quad \forall \delta s \geq 0 \quad \forall \delta\theta \in \mathbb{R},$$

ovvero:

$$\frac{\partial U}{\partial s}(1, 0) \leq 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial \theta}(1, 0) = 0, \qquad (.4)$$

con:

$$\frac{\partial U}{\partial s}(1, 0) = +mgR - kR^2s + kR(R - r) \cos \theta \Big|_{(s,\theta)=(1,0)} = (mg - kr)R$$
$$\frac{\partial U}{\partial \theta}(1, 0) = -mg(R - r) \sin \theta - kR(R - r)s \sin \theta \Big|_{(s,\theta)=(1,0)} = 0.$$

L'equazione (.4) è dunque sempre verificata, mentre la disequazione risulta soddisfatta se e soltanto se

$$mg - kr \leq 0.$$