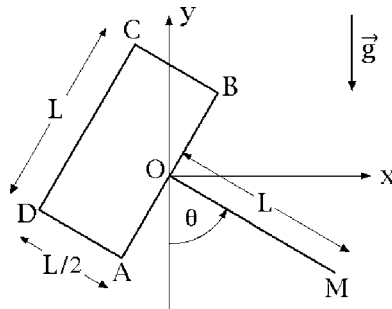


Esercizio 1

Nel piano Oxy di una terna di riferimento inerziale $Oxyz$ un'asta OM ed una lamina rettangolare $ABCD$, entrambe rigide, sono saldate ortogonalmente fra loro nel punto medio O del lato AB . L'asta ha lunghezza L , mentre le dimensioni della lamina sono $|A - B| = L$ e $|B - C| = L/2$. Le densità del sistema si scrivono

$$\lambda(P) = \frac{m}{2L^2}|P - O| \quad \forall P \in OM \quad \text{e} \quad \sigma(P) = \frac{m}{L^4}|P - O|^2 \quad \forall P \in ABCD.$$

Il sistema è pesante e libero di ruotare senza attrito attorno all'asse fisso Oz , secondo un angolo $\theta \in \mathbb{R}$.

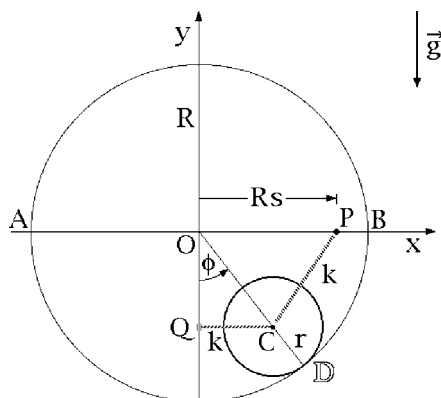


Considerato che l'asse Oy è verticale, determinare:

- (a) il baricentro del sistema;
- (b) il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse fisso Oz ;
- (c) le equazioni pure del moto (senza ricorrere al metodo lagrangiano);
- (d) l'energia cinetica del sistema;
- (e) la velocità istantanea del punto M .

Esercizio 2

Nel piano verticale Oxy di una terna cartesiana $Oxyz$ un disco circolare omogeneo pesante \mathbb{D} , di centro C , raggio r e massa m , è vincolato a rotolare senza strisciare lungo il bordo interno di una circonferenza fissa di centro O e raggio $R > r$. Il centro C è connesso alla sua proiezione ortogonale Q sull'asse verticale Oy e ad un punto P del diametro AB mediante due molle di eguale costante elastica k . Il punto P ha massa μ ed è libero di scorrere lungo il diametro AB della circonferenza, posto sull'asse Ox .



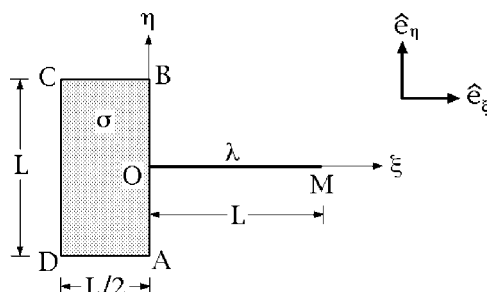
Assunti i vincoli ideali e facendo uso dei parametri ϕ e s illustrati in figura come coordinate generalizzate, determinare del sistema:

- l'energia cinetica;
- gli equilibri ordinari;
- le proprietà di stabilità, secondo Liapunov, degli equilibri ordinari;
- le equazioni lagrangiane del moto;
- un integrale primo.

Soluzione dell'esercizio 1

(a) Baricentro

Per determinare la posizione del baricentro conviene introdurre una terna di riferimento solidale $O\xi\eta z$, di versori $\hat{e}_\xi, \hat{e}_\eta, \hat{e}_3$, in modo che gli assi $O\xi$ e $O\eta$ siano diretti concordemente ai vettori $M - O$ e $B - O$, come illustrato nella figura seguente



Si procede calcolando massa e baricentro dell'asta OM e della lamina $ABCD$ per poi applicare il teorema distributivo.

Asta

La massa m_1 dell'asta si ricava integrando sul segmento $[0, L]$ la densità λ

$$m_1 = \int_0^L \lambda(\xi) d\xi = \int_0^L \frac{m}{2L^2} \xi d\xi = \frac{m}{2L^2} \frac{L^2}{2} = \frac{m}{4}.$$

È altresì evidente che la retta OM costituisce un asse di simmetria dell'asta, il cui baricentro G_1 risulta perciò collocato lungo lo stesso asse e dunque esprimibile nella forma

$$G_1 - O = \xi_1 \hat{e}_\xi.$$

L'ascissa ξ_1 è data dalla definizione di baricentro

$$\xi_1 = \frac{1}{m_1} \int_0^L \lambda(\xi) \xi d\xi = \frac{4}{m} \int_0^L \frac{m}{2L^2} \xi^2 d\xi = \frac{2}{L^2} \frac{L^3}{3} = \frac{2}{3}L$$

per cui

$$G_1 - O = \frac{2}{3}L \hat{e}_\xi.$$

Lamina

La massa m_2 della lamina si ottiene per integrazione della densità σ

$$\begin{aligned} m_2 &= \int_{-L/2}^0 d\xi \int_{-L/2}^{L/2} d\eta \frac{m}{L^4} (\xi^2 + \eta^2) = \frac{m}{L^4} \int_{-L/2}^0 d\xi \left[\xi^2 \eta + \frac{\eta^3}{3} \right]_{\eta=-L/2}^{L/2} = \\ &= \frac{m}{L^4} \int_{-L/2}^0 d\xi \left[\xi^2 L + \frac{L^3}{12} \right] = \frac{m}{L^4} \left[L \frac{\xi^3}{3} + \frac{L^3}{12} \xi \right]_{-L/2}^0 = \frac{m}{L^4} \left(\frac{L^4}{24} + \frac{L^4}{24} \right) = \frac{m}{12}. \end{aligned}$$

Il piano di giacitura della lamina è un ovvio piano di simmetria di questa e deve contenerne il baricentro G_2

$$G_2 - O = \xi_2 \hat{e}_\xi + \eta_2 \hat{e}_\eta.$$

L'ascissa ξ_2 vale

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \frac{1}{m_2} \int_{-L/2}^0 d\xi \int_{-L/2}^{L/2} d\eta \sigma(\xi, \eta) \xi = \frac{12}{m} \int_{-L/2}^0 d\xi \int_{-L/2}^{L/2} d\eta \frac{m}{L^4} (\xi^3 + \eta^2 \xi) = \\ &= \frac{12}{L^4} \int_{-L/2}^0 d\xi \left[\xi^3 \eta + \xi \frac{\eta^3}{3} \right]_{\eta=-L/2}^{L/2} = \frac{12}{L^4} \int_{-L/2}^0 d\xi \left(\xi^3 L + \xi \frac{L^3}{12} \right) = \\ &= \frac{12}{L^4} \left[L \frac{\xi^4}{4} + L^3 \frac{\xi^2}{24} \right]_{-L/2}^0 = -\frac{12}{L^4} \left[\frac{L^5}{64} + \frac{L^5}{96} \right] = -12L \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{96} \right) = -\frac{5}{16} L \end{aligned}$$

mentre la relativa ordinata si annulla

$$\begin{aligned} \eta_2 &= \frac{1}{m_2} \int_{-L/2}^0 d\xi \int_{-L/2}^{L/2} d\eta \sigma(\xi, \eta) \eta = \frac{12}{m} \int_{-L/2}^0 d\xi \int_{-L/2}^{L/2} d\eta \frac{m}{L^4} (\xi^2 \eta + \eta^3) = \\ &= \frac{12}{L^4} \int_{-L/2}^0 d\xi \left[\xi^2 \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^4}{4} \right]_{\eta=-L/2}^{L/2} = 0 \end{aligned}$$

come è peraltro evidente dalla proprietà di simmetria della densità

$$\sigma(\xi, -\eta) = \sigma(\xi, \eta) \quad (\xi, \eta) \in [-L/2, 0] \times [-L/2, L/2]$$

che porta a riconoscere in $O\xi$ un asse di simmetria della lamina. In definitiva, il baricentro è individuato dal vettore posizione

$$G_2 - O = -\frac{5}{16} L \hat{e}_\xi.$$

Baricentro del sistema

Per il baricentro G del sistema il teorema distributivo porge l'espressione

$$\begin{aligned} G - O &= \frac{m_1(G_1 - O) + m_2(G_2 - O)}{m_1 + m_2} = \frac{1}{\frac{m}{4} + \frac{m}{12}} \left(\frac{m}{4} \frac{2}{3} L \hat{e}_\xi - \frac{m}{12} \frac{5}{16} L \hat{e}_\xi \right) = \\ &= 3 \left(\frac{L}{6} - \frac{5}{12 \cdot 16} L \right) \hat{e}_\xi = \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{64} \right) L \hat{e}_\xi = \frac{27}{64} L \hat{e}_\xi \end{aligned}$$

(b) Momento d'inerzia rispetto all'asse fisso

Il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse fisso Oz è la somma dei momenti d'inerzia di asta e lamina relativamente allo stesso asse.

Asta

Il momento d'inerzia dell'asta si calcola per mezzo della definizione e vale

$$I_1 = \int_0^L \lambda(\xi) \xi^2 d\xi = \int_0^L \frac{m}{2L^2} \xi^3 d\xi = \frac{mL^2}{8}.$$

Lamina

Per il momento d'inerzia della lamina si ha l'espressione

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-L/2}^0 d\xi \int_{-L/2}^{L/2} d\eta \sigma(\xi, \eta) (\xi^2 + \eta^2) = \int_{-L/2}^0 d\xi \int_{-L/2}^{L/2} d\eta \frac{m}{L^4} (\xi^2 + \eta^2)^2 = \\ &= \frac{m}{L^4} \int_{-L/2}^0 d\xi \int_{-L/2}^{L/2} d\eta (\xi^4 + 2\xi^2\eta^2 + \eta^4) = \\ &= \frac{m}{L^4} \int_{-L/2}^0 d\xi \left[\xi^4\eta + \frac{2}{3}\xi^2\eta^3 + \frac{\eta^5}{5} \right]_{\eta=-L/2}^{L/2} = \\ &= \frac{m}{L^4} \int_{-L/2}^0 d\xi \left[\xi^4 L + \frac{1}{6}\xi^2 L^3 + \frac{L^5}{80} \right] = \\ &= \frac{m}{L^4} \left[L \frac{\xi^5}{5} + \frac{1}{18}\xi^3 L^3 + \frac{1}{80}\xi L^5 \right]_{-L/2}^0 = \\ &= \frac{m}{L^4} L^6 \left(\frac{1}{160} + \frac{1}{144} + \frac{1}{160} \right) = \frac{7}{360} mL^2. \end{aligned}$$

Momento d'inerzia del sistema

Il momento richiesto si determina come somma dei momenti d'inerzia di asta e lamina

$$I = I_1 + I_2 = \left(\frac{1}{8} + \frac{7}{360} \right) mL^2 = \frac{13}{90} mL^2.$$

(c) Equazioni pure del moto

Poiché per ipotesi l'asse fisso è privo di attrito e il sistema risulta soggetto alla sola forza peso, l'equazione del moto è la proiezione lungo l'asse Oz dell'equazione cardinale del momento angolare in O e si scrive

$$I\ddot{\theta} = (G - O) \wedge \frac{m}{3}\bar{g} \cdot \hat{e}_3$$

essendo

$$I = \frac{13}{90} mL^2$$

e

$$\begin{aligned} (G - O) \wedge \frac{m}{3}\bar{g} \cdot \hat{e}_3 &= |G - O| (\sin \theta \hat{e}_1 - \cos \theta \hat{e}_2) \wedge \left(-\frac{m}{3}g \hat{e}_2 \right) \cdot \hat{e}_3 = \\ &= -\frac{m}{3}g |G - O| \sin \theta \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 = -\frac{m}{3}g |G - O| \sin \theta = -\frac{9}{64} mgL \sin \theta. \end{aligned}$$

Perciò

$$\frac{13}{90}mL^2\ddot{\theta} = -\frac{9}{64}mgL \sin \theta.$$

(d) Energia cinetica

La velocità angolare istantanea del sistema è data da $\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{e}_3$. L'energia cinetica vale pertanto

$$T = \frac{1}{2}I |\dot{\theta} \hat{e}_3|^2 = \frac{1}{2} \frac{13}{90} mL^2 \dot{\theta}^2 = \frac{13}{180} mL^2 \dot{\theta}^2.$$

(e) Velocità istantanea del punto M

La velocità istantanea del punto M si determina per mezzo del teorema di Poisson, considerato che $\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{e}_3$ e

$$M - O = L \sin \theta \hat{e}_1 - L \cos \theta \hat{e}_2$$

Si ha così

$$\dot{M} = \vec{\omega} \wedge (M - O) = \dot{\theta} \hat{e}_3 \wedge L(\sin \theta \hat{e}_1 - \cos \theta \hat{e}_2) = L(\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2) \dot{\theta}.$$

Soluzione dell'esercizio 2

(a) Energia cinetica

Per la proprietà di additività, l'energia cinetica del sistema risulta dalla somma dei contributi relativi al punto materiale P e al disco omogeneo \mathbb{D}

$$T = T_P + T_{\mathbb{D}}$$

che conviene quindi calcolare separatamente.

Punto P

L'energia cinetica del punto materiale P si ottiene direttamente dalla definizione

$$T_P = \frac{\mu}{2}(R\dot{s})^2 = \frac{\mu R^2}{2}\dot{s}^2$$

notato che $P - O = Rs \hat{e}_1$ e che di conseguenza $\dot{P} = R\dot{s} \hat{e}_1$.

Disco \mathbb{D}

Il disco rigido non presenta punti fissi, per cui nel calcolo dell'energia cinetica ci si avvale del teorema di König. Si ha così la formula:

$$T_{\mathbb{D}} = \frac{1}{2}m\dot{C}^2 + \frac{1}{2}I_{Cz}^{\mathbb{D}}|\vec{\omega}|^2$$

nella quale il baricentro del disco si è riconosciuto coincidere con il centro geometrico C . Questo ha vettore posizione

$$C - O = (R - r) \sin \phi \hat{e}_1 - (R - r) \cos \phi \hat{e}_2$$

e velocità istantanea

$$\dot{C} = (R - r)(\cos \phi \hat{e}_1 + \sin \phi \hat{e}_2) \dot{\phi}$$

di modulo quadrato

$$\dot{C}^2 = (R - r)^2 \dot{\phi}^2,$$

mentre il momento d'inerzia del disco omogeneo vale

$$I_{Cz}^{\mathbb{D}} = \frac{mr^2}{2}$$

e il vettore velocità angolare istantanea si scrive

$$\vec{\omega} = -\frac{R - r}{r} \dot{\phi} \hat{e}_3$$

in virtù della condizione di puro rotolamento. L'energia cinetica del disco diventa pertanto

$$T_{\mathbb{D}} = \frac{m}{2}(R - r)^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \frac{mr^2}{2} \frac{(R - r)^2}{r^2} \dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}m(R - r)^2 \dot{\phi}^2.$$

Non rimane che sommare le espressioni di T_P e $T_{\mathbb{D}}$ per ottenere l'energia cinetica del sistema richiesta:

$$T = \frac{\mu R^2}{2} \dot{s}^2 + \frac{3}{4}m(R - r)^2 \dot{\phi}^2.$$

(b) Equilibri ordinari

Il sistema è palesemente scleronomo e tutte le sollecitazioni attive ad esso applicate — le forze elastiche ed il peso — hanno natura posizionale e conservativa. Le configurazioni di equilibrio ordinarie si identificano perciò con tutti e soli i punti critici del potenziale U del sistema. Il potenziale delle forze peso consta di due contributi, l'uno relativo al punto P e l'altro riguardante il disco:

$$U_g = -\mu g \hat{e}_2 \cdot (P - O) - mg \hat{e}_2 \cdot (C - O) = mg(R - r) \cos \phi.$$

Il potenziale delle interazioni elastiche è costituito da due termini, uno per ciascuna molla ideale,

$$U_{\text{el}} = -\frac{k}{2}|C - Q|^2 - \frac{k}{2}|C - P|^2$$

dove:

$$C - Q = (R - r) \sin \phi \hat{e}_1$$

$$C - P = C - O - (P - O) = [(R - r) \sin \phi - Rs] \hat{e}_1 - (R - r) \cos \phi \hat{e}_2$$

e quindi

$$|C - Q|^2 = (R - r)^2 \sin^2 \phi$$

$$|C - P|^2 = (R - r)^2 - 2R(R - r)s \sin \phi + R^2 s^2$$

sicché

$$U_{\text{el}} = -\frac{k}{2}[(R-r)^2 \sin^2 \phi + (R-r)^2 - 2R(R-r)s \sin \phi + R^2 s^2].$$

Il potenziale del sistema si ricava infine sommando i potenziali parziali, gravitazionale ed elastico, ed omettendo le inessenziali costanti additive

$$U(s, \phi) = U_g + U_{\text{el}} = mg(R-r) \cos \phi - \frac{k}{2}(R-r)^2 \sin^2 \phi + kR(R-r)s \sin \phi - \frac{kR^2}{2}s^2.$$

La funzione potenziale deve intendersi definita $\forall (s, \phi) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}$. Per determinare le configurazioni di equilibrio ordinarie è sufficiente calcolare le derivate parziali prime del potenziale:

$$\frac{\partial U}{\partial s}(s, \phi) = kR(R-r) \sin \phi - kR^2 s$$

$$\frac{\partial U}{\partial \phi}(s, \phi) = -mg(R-r) \sin \phi - k(R-r)^2 \sin \phi \cos \phi + kR(R-r)s \cos \phi$$

ed uguagliarle a zero

$$\begin{cases} s = \frac{R-r}{R} \sin \phi \\ -mg(R-r) \sin \phi - k(R-r)^2 \sin \phi \cos \phi + kR(R-r)s \cos \phi = 0 \end{cases}$$

ottenendo il sistema di equazioni algebrico-trigonometriche

$$\begin{cases} s = \frac{R-r}{R} \sin \phi \\ -mg(R-r) \sin \phi = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} s = 0 \\ \sin \phi = 0. \end{cases}$$

Gli equilibri del sistema sono perciò:

$$(s, \phi) = (0, 0), \quad (0, \pi).$$

(c) Stabilità degli equilibri ordinari

Dal momento che il sistema è scleronomo posizionale conservativo, l'analisi di stabilità delle configurazioni di equilibrio si esegue per mezzo dei teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale. A questo scopo il primo passo è il calcolo delle derivate parziali seconde del potenziale:

$$U_{ss}(s, \phi) = -kR^2$$

$$U_{s\phi}(s, \phi) = U_{\phi s}(s, \phi) = kR(R-r) \cos \phi$$

$$U_{\phi\phi}(s, \phi) = -mg(R-r) \cos \phi - k(R-r)^2(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) - kR(R-r)s \sin \phi$$

e la corrispondente matrice hessiana. Si può quindi procedere alla discussione delle singole configurazioni di equilibrio.

Configurazione $(s, \phi) = (0, 0)$

La matrice hessiana del potenziale vale

$$H_U(0, 0) = \begin{pmatrix} -kR^2 & kR(R-r) \\ kR(R-r) & -mg(R-r) - k(R-r)^2 \end{pmatrix}$$

e ha determinante strettamente positivo

$$\det H_U(0, 0) = kR^2 mg(R-r) > 0$$

mentre la traccia si mantiene negativa

$$\text{tr} H_U(0, 0) = -kR^2 - mg(R-r) - k(R-r)^2 < 0.$$

Se ne deduce che i due autovalori reali della matrice hessiana sono entrambi di segno negativo, per cui la configurazione costituisce un massimo relativo proprio del potenziale e la sua stabilità è assicurata dal teorema di Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $(s, \phi) = (0, \pi)$

L'hessiana del potenziale assume in questo caso la forma

$$H_U(0, \pi) = \begin{pmatrix} -kR^2 & -kR(R-r) \\ -kR(R-r) & mg(R-r) - k(R-r)^2 \end{pmatrix}$$

con determinante di segno negativo per qualsivoglia scelta dei parametri

$$\det H_U(0, \pi) = -kR^2 mg(R-r) < 0$$

e quindi autovalori reali di segno opposto. La presenza di un autovalore positivo implica l'instabilità della configurazione in virtù del teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

(d) Equazioni di Lagrange

La lagrangiana $\mathcal{L} = T + U$ del sistema si scrive:

$$\mathcal{L} = \frac{\mu R^2}{2} \dot{s}^2 + \frac{3}{4} m(R-r)^2 \dot{\phi}^2 + mg(R-r) \cos \phi - \frac{k}{2} (R-r)^2 \sin^2 \phi + kR(R-r)s \sin \phi - \frac{kR^2}{2} s^2$$

e da essa si ricavano le espressioni

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = \mu R^2 \dot{s} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \right) = \mu R^2 \ddot{s}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = kR(R-r) \sin \phi - kR^2 s$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{3}{2}m(R-r)^2\dot{\phi} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) = \frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\phi}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -mg(R-r)\sin\phi - k(R-r)^2\sin\phi\cos\phi + kR(R-r)s\cos\phi$$

nonché le corrispondenti equazioni lagrangiane del moto:

$$\begin{cases} \mu R^2\ddot{s} - kR(R-r)\sin\phi + kR^2s = 0 \\ \frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\phi} + mg(R-r)\sin\phi + k(R-r)^2\sin\phi\cos\phi - kR(R-r)s\cos\phi = 0. \end{cases}$$

(e) Integrale primo

Data la sua natura posizionale conservativa, il sistema ammette un ovvio integrale primo che è quello dell'energia meccanica $H = T - U$

$$H = \frac{\mu R^2}{2}\dot{s}^2 + \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\phi}^2 - mg(R-r)\cos\phi + \frac{k}{2}(R-r)^2\sin^2\phi - kR(R-r)s\sin\phi + \frac{kR^2}{2}s^2.$$