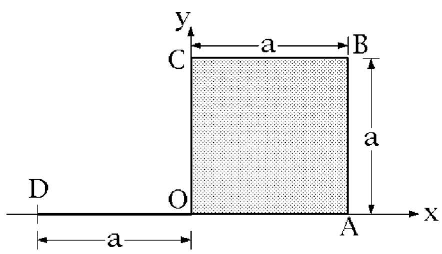
Scritto di meccanica razionale 1 A-L del 13.01.2005

Esercizio 1
Un sistema rigido si compone di una lamina quadrata $OABC$ di lato a e di un'asta rettilinea OD di lunghezza a. Rispetto ad una terna solidale $Oxyz$ l'asta OD si identifica con il segmento $[-a,0]$ dell'asse coordinato Ox e la sua densità lineare è data da

$$\lambda(x) = \frac{\mu}{a^2}(-x) \qquad \forall\, x \in [-a,0].$$

La lamina $OABC$ coincide invece con il quadrato $\{(x,y) \in [0,a]^2\}$ e ha densità areale

$$\sigma(x,y) = \frac{\mu}{a^3}(x+y) \qquad \forall\,(x,y) \in [0,a]\times[0,a]\,.$$



Determinare:

(*a*) la posizione del baricentro rispetto alla terna $Oxyz$;

(*b*) la matrice d'inerzia rispetto alla stessa terna;

(*c*) il momento d'inerzia rispetto all'asse $y = -2x$ nel piano Oxy;

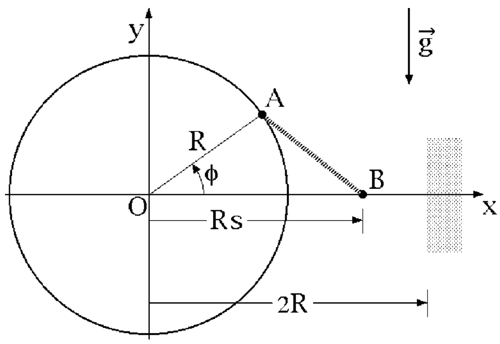
(*d*) energia cinetica e momento angolare in O qualora Oz sia asse fisso del sistema e la velocità angolare istantanea valga $\vec{\omega} = 2\omega\hat{e}_3$, con ω costante;

(*e*) nell'ipotesi che il sistema abbia asse fisso Oz privo di attrito, il valore del parametro β per cui si ha equilibrio sotto l'azione delle forze:

$\vec{F}_B = \hat{e}_1 + \beta\hat{e}_2$ applicata in B, e

$\vec{F}_D = 2\hat{e}_2$ agente in D.

Esercizio 2
Una circonferenza omogenea, di raggio R, massa m e centro O ruota attorno all'asse orizzontale Oz di una terna inerziale $Oxyz$, mantenendosi nel piano Oxy di questa. Sul suo bordo è fissato un punto A di massa m, che una molla di costante elastica $k = mg/2R$ collega ad un altro punto B di pari massa, a sua volta libero di muoversi lungo la semiretta dell'asse Ox definita da $x \leq 2R$. L'intero sistema è soggetto alla forza peso.



Assunti i vincoli ideali e facendo uso delle coordinate lagrangiane ϕ ed s indicate in figura, determinare del sistema, rispetto alla terna $Oxyz$:

(a) l'energia cinetica;

(b) gli equilibri ordinari;

(c) le proprietà di stabilità degli equilibri ordinari;

(d) le equazioni di Lagrange;

(e) un integrale primo;

(f) gli equilibri di confine **(facoltativo)** .

Soluzione dell'esercizio 1
(a) **Baricentro**
Il baricentro del sistema viene calcolato determinando separatamente i baricentri dell'asta OD e della lamina quadrata $OABC$ e applicando poi il teorema distributivo.

Baricentro dell'asta
La massa m_1 dell'asta si ricava per integrazione diretta della densità lineare λ sul segmento OD e vale perciò:

$$m_1 = \int_{-a}^{0} -\frac{\mu}{a^2} x\,dx = -\frac{\mu}{a^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-a}^{0} = \frac{\mu}{2}\,.$$

L'asta si colloca lungo l'asse Ox, che quindi ne costituisce un ovvio asse di simmetria. Il vettore posizione del suo baricentro assume la forma generale:

$$G_1 - O = x_1 \hat{e}_1$$

in cui l'ascissa x_1 è data dall'espressione:

$$x_1 = \frac{1}{m_1}\int_{-a}^{0} x\,dm = \frac{2}{\mu}\int_{-a}^{0} -\frac{\mu}{a^2}x^2\,dx = -\frac{2}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{0} = -\frac{2}{3}a$$

sicché

$$G_1 - O = -\frac{2}{3}a\,\hat{e}_1\,.$$

Baricentro della lamina quadrata
La massa m_2 della lamina quadrata segue dall'integrazione della densità areale σ sul dominio $OABC$:

$$m_2 = \int_0^a dx \int_0^a dy\,\frac{\mu}{a^3}(x+y) = \frac{\mu}{a^3}\int_0^a dx\int_0^a dy\,(x+y) =$$
$$= \frac{\mu}{a^3}\int_0^a dx\left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{a} = \frac{\mu}{a^3}\int_0^a dx\left(xa + \frac{a^2}{2}\right) = \frac{\mu}{a^3}\left[a\frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{2}x\right]_0^a = \mu.$$

Il baricentro G_2 della lamina deve collocarsi nel piano coordinato Oxy, evidente piano di simmetria; un asse di simmetria è inoltre identificabile con la bisettrice $y = x$, considerata l'identità:

$$\sigma(x,y) = \frac{\mu}{a^3}(x+y) = \frac{\mu}{a^3}(y+x) = \sigma(y,x) \qquad \forall\,(x,y)\in OABC\,.$$

Si può perciò scrivere:

$$G_2 - O = x_2\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2$$

con ascissa x_2 determinata da:

$$x_2 = \frac{1}{m_2}\int_0^a dx \int_0^a dy\, x\, \frac{\mu}{a^3}(x+y) = \frac{1}{\mu}\frac{\mu}{a^3}\int_0^a dx \int_0^a dy\,(x^2+xy) =$$

$$= \frac{1}{a^3}\int_0^a dx \left[x^2 y + x\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^a = \frac{1}{a^3}\int_0^a dx \left(x^2 a + x\frac{a^2}{2}\right) = \frac{1}{a^3}\left[\frac{x^3}{3}a + \frac{x^2}{2}\frac{a^2}{2}\right]_0^a = \frac{7}{12}a\,.$$

In definitiva:

$$G_2 - O = \frac{7}{12}a\,\hat{e}_1 + \frac{7}{12}a\,\hat{e}_2\,.$$

Baricentro del sistema
Per determinare il baricentro G del sistema non rimane che applicare la proprietà distributiva alle parti OD e $OABC$:

$$\begin{aligned} G - O &= \frac{m_1(G_1 - O) + m_2(G_2 - O)}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{1}{\frac{\mu}{2} + \mu}\left[\frac{\mu}{2}\Big(-\frac{2}{3}a\,\hat{e}_1\Big) + \mu\Big(\frac{7}{12}a\,\hat{e}_1 + \frac{7}{12}a\,\hat{e}_2\Big)\right] = \\ &= \frac{2}{3}\Big(\frac{1}{4}\hat{e}_1 + \frac{7}{12}\hat{e}_2\Big)\,a = \frac{1}{6}\,a\,\hat{e}_1 + \frac{7}{18}\,a\,\hat{e}_2\,. \end{aligned}$$

(b) **Matrice d'inerzia rispetto rispetto alla terna $Oxyz$**
La matrice d'inerzia del sistema viene calcolata come somma delle matrici d'inerzia, relative alla stessa terna, dell'asta OD e della lamina quadrata $OABC$, che devono essere determinate separatamente.

Matrice d'inerzia dell'asta
Dal momento che l'asta è ubicata lungo l'asse coordinato Ox, la sua matrice d'inerzia relativa alla terna $Oxyz$ deve avere il momento d'inerzia rispetto all'asse Oy come unico elemento non banalmente nullo:

$$[L_O]^{\text{Asta}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{yy}^{\text{Asta}} & 0 \\ 0 & 0 & L_{yy}^{\text{Asta}} \end{pmatrix}.$$

Il momento d'inerzia incognito si ricava dalla definizione, per mezzo dell'integrale:

$$L_{yy}^{\text{Asta}} = \int_{OD} x^2 \lambda\, dx = \int_{-a}^0 x^2\Big(-\frac{\mu}{a^2}x\Big)\,dx = -\frac{\mu}{a^2}\int_{-a}^0 x^3 dx = -\frac{\mu}{a^2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-a}^0 = \frac{1}{4}\mu a^2$$

in modo che la matrice d'inerzia cercata diventa:

$$[L_O]^{\text{Asta}} = \mu a^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Matrice d'inerzia della lamina

La lamina quadrata di lato a è completamente contenuta nel piano coordinato Oxy. Di conseguenza, la sua matrice d'inerzia relativa a $Oxyz$ deve assumere la forma generale:

$$[L_O]^{\text{Lamina}} = \begin{pmatrix} L_{xx}^{\text{Lamina}} & L_{xy}^{\text{Lamina}} & 0 \\ L_{xy}^{\text{Lamina}} & L_{yy}^{\text{Lamina}} & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx}^{\text{Lamina}} + L_{yy}^{\text{Lamina}} \end{pmatrix}.$$

Per il momento d'inerzia relativo all'asse Ox si ha:

$$\begin{aligned} L_{xx}^{\text{Lamina}} &= \int\limits_{[0,a]^2} y^2 \sigma \, dxdy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^a dy \, y^2 \frac{\mu}{a^3}(x+y) = \\ &= \frac{\mu}{a^3} \int\limits_0^a dx \int\limits_0^a dy \, (xy^2 + y^3) = \frac{\mu}{a^3} \int\limits_0^a dx \left[x\frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right]_{y=0}^a = \\ &= \frac{\mu}{a^3} \int\limits_0^a \left(x\frac{a^3}{3} + \frac{a^4}{4} \right) dx = \frac{\mu}{a^3} \left[\frac{x^2}{2}\frac{a^3}{3} + \frac{a^4}{4}x \right]_0^a = \frac{5}{12}\mu a^2 \end{aligned}$$

e per simmetria si riconosce coincidere con il momento d'inerzia rispetto all'asse ortogonale Oy:

$$\begin{aligned} L_{yy}^{\text{Lamina}} &= \int\limits_{[0,a]^2} x^2 \sigma(x,y) \, dxdy = \int\limits_{[0,a]^2} y^2 \sigma(y,x) \, dydx = \\ &= \int\limits_{[0,a]^2} y^2 \sigma(x,y) \, dydx = L_{xx}^{\text{Lamina}} = \frac{5}{12}\mu a^2 \end{aligned}.$$

Non rimane che calcolare il prodotto d'inerzia L_{xy}^{Lamina}, che è dato dall'espressione:

$$\begin{aligned} L_{xy}^{\text{Lamina}} &= -\int\limits_{[0,a]^2} xy \, \sigma \, dxdy = -\int\limits_0^a dx \int\limits_0^a dy \, xy \, \frac{\mu}{a^3}(x+y) = \\ &= -\frac{\mu}{a^3} \int\limits_0^a dx \int\limits_0^a dy \, (x^2 y + xy^2) = -\frac{\mu}{a^3} \int\limits_0^a dx \left[x^2 \frac{y^2}{2} + x\frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^a = \\ &= -\frac{\mu}{a^3} \int\limits_0^a \left(x^2 \frac{a^2}{2} + x\frac{a^3}{3} \right) dx = -\frac{\mu}{a^3} \left[\frac{a^2}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\frac{a^3}{3} \right]_0^a = -\frac{1}{3}\mu a^2. \end{aligned}$$

Si conclude pertanto che la matrice d'inerzia della lamina vale:

$$[L_O]^{\text{Lamina}} = \mu a^2 \begin{pmatrix} 5/12 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 5/12 & 0 \\ 0 & 0 & 5/6 \end{pmatrix}.$$

Matrice d'inerzia del sistema
Sommando le matrici $[L_O]^{\text{Asta}}$ e $[L_O]^{\text{Lamina}}$ si perviene al risultato richiesto:

$$[L_O] = [L_O]^{\text{Asta}} + [L_O]^{\text{Lamina}} = \mu a^2 \begin{pmatrix} 5/12 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 13/12 \end{pmatrix}.$$

(c) **Momento d'inerzia rispetto all'asse** $y = -2x$
L'asse $y = -2x$ passa evidentemente per l'origine e la sua direzione è completamente specificata dal versore:

$$\hat{n} = \frac{\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2}{|\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2|} = \frac{\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{e}_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{e}_2.$$

Il momento d'inerzia relativo alla retta considerata si esprime allora nella forma:

$$\begin{aligned} I &= (n_1\ n_2\ n_3)[L_O] \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \\ &= \Big(\frac{1}{\sqrt{5}}\ \ -\frac{2}{\sqrt{5}}\ \ 0\Big)\mu a^2 \begin{pmatrix} 5/12 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 13/12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{5}\mu a^2 (1\ \ -2\ \ 0) \begin{pmatrix} 5/12 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 13/12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{5}\mu a^2 (1\ \ -2\ \ 0) \begin{pmatrix} 13/12 \\ -5/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\mu a^2 \Big(\frac{13}{12} + \frac{10}{3}\Big) = \frac{53}{60}\mu a^2. \end{aligned}$$

(d) **Energia cinetica e momento angolare**
Se il sistema rigido ruota attorno all'asse Oz con velocità angolare $\vec{\omega} = 2\omega\hat{e}_3$, il suo momento angolare in O è dato dalla formula generale:

$$\vec{K}_O = L_O(\vec{\omega}) = K_1\hat{e}_1 + K_2\hat{e}_2 + K_3\hat{e}_3$$

con le componenti K_1, K_2, K_3 specificate dalla relazione matriciale:

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = [L_O] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\omega \end{pmatrix} = \mu a^2 \begin{pmatrix} 5/12 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 13/12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\omega \end{pmatrix} = \mu a^2 \omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 13/6 \end{pmatrix}.$$

Si ha pertanto:

$$\vec{K}_O = \frac{13}{6} \mu a^2 \omega \, \hat{e}_3 \, .$$

Quanto all'energia cinetica, si ha:

$$T = \frac{1}{2} \vec{K}_O \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} \frac{13}{6} \mu a^2 \omega \, \hat{e}_3 \cdot 2\omega \, \hat{e}_3 = \frac{13}{6} \mu a^2 \omega^2.$$

(e) **Equilibrio**
Se il sistema rigido ha asse fisso Oz privo di attrito, condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio è il momento risultante, rispetto allo stesso asse, delle forze attive applicate sia nullo. Il momento in O della forza $\vec{F}_B = \hat{e}_1 + \beta \, \hat{e}_2$ agente in $B(a, a, 0)$ vale:

$$(B - O) \wedge \vec{F}_B = (a \, \hat{e}_1 + a \, \hat{e}_2) \wedge (\hat{e}_1 + \beta \, \hat{e}_2) = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a & a & 0 \\ 1 & \beta & 0 \end{vmatrix} = a(\beta - 1) \, \hat{e}_3$$

mentre quello della forza $\vec{F}_D = 2 \, \hat{e}_2$ applicata in $D(-a, 0, 0)$ risulta:

$$(D - O) \wedge \vec{F}_D = (-a \, \hat{e}_1) \wedge 2 \, \hat{e}_2 = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2a \, \hat{e}_3 \, .$$

Il momento assiale risultante delle sollecitazioni attive applicate diventa quindi:

$$[(B - O) \wedge \vec{F}_B + (D - O) \wedge \vec{F}_D] \cdot \hat{e}_3 = a(\beta - 1) - 2a = a(\beta - 3)$$

e si annulla se e soltanto se $\beta = 3$.

Soluzione dell'esercizio 2
(a) **Energia cinetica**
Grazie alla proprietà di additività, l'energia cinetica del sistema si può determinare come somma delle energie cinetiche della circonferenza e del punto B.

Circonferenza
La circonferenza, cui è fissato solidalmente il punto A, rispetto all'asse di rotazione Oz ha momento d'inerzia:

$$I_{Oz} = I_{Oz}^{\mathrm{circ}} + m|A - O|^2 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2$$

e velocità angolare istantanea:

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\,\hat{e}_3$$

per cui la sua energia cinetica si scrive:

$$T_{\text{circ}} = \frac{1}{2} I_{Oz} |\vec{\omega}|^2 = \frac{1}{2} 2mR^2 |\dot{\phi}\,\hat{e}_3|^2 = mR^2 \dot{\phi}^2 .$$

Punto B
Il punto B è vincolato a scorrere lungo l'asse Ox e la sua posizione è completamente individuata da:

$$B - O = Rs\,\hat{e}_1$$

e la relativa velocità istantanea vale

$$\dot{B} = \dot{s}R\,\hat{e}_1 .$$

L'energia cinetica del punto risulta pertanto:

$$T_B = \frac{1}{2} m\dot{B}^2 = \frac{1}{2} mR^2 \dot{s}^2.$$

Energia cinetica del sistema
L'energia cinetica del sistema segue ora dalla somma delle energie cinetiche di circonferenza e punto B:

$$T = T_{\text{circ}} + T_B = mR^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} mR^2 \dot{s}^2 .$$

(b) **Equilibri ordinari**
Le sollecitazioni attive applicate al sistema sono la forza peso e l'interazione elastica fra i punti A e B, entrambe di natura posizionale conservativa. Nel calcolo del potenziale gravitazionale il punto B e la circonferenza omogenea possono essere ignorati, dal momento che i rispettivi baricentri non subiscono alcuna variazione di ordinata al variare dei parametri lagrangiani s e ϕ. La sola forza peso da tenere in conto è dunque quella del punto A, al quale si può associare il potenziale

$$U_{\text{g}} = -mg\,\hat{e}_2 \cdot (A - O) = -mgR\sin\phi.$$

Quanto all'interazione elastica, è evidente che:

$$A - O = R\cos\phi\,\hat{e}_1 + R\sin\phi\,\hat{e}_2 \qquad B - O = Rs\,\hat{e}_1$$

per cui

$$A - B = R\cos\phi\,\hat{e}_1 + R\sin\phi\,\hat{e}_2 - Rs\,\hat{e}_1 = R(\cos\phi - s)\,\hat{e}_1 + R\sin\phi\,\hat{e}_2$$

ed il potenziale elastico diventa:

$$U_{\text{el}} = -\frac{k}{2}|A - B|^2 = -\frac{kR^2}{2}(s^2 - 2s\cos\phi + 1) .$$

Omesse le costanti additive inessenziali, il potenziale del sistema è la somma dei potenziali gravitazionale ed elastico:

$$U(s,\phi) \;=\; -mgR\sin\phi - \frac{kR^2}{2}(s^2 - 2s\cos\phi) \qquad \forall\,(s,\phi)\in(-\infty,2]\times\mathbb{R}\,.$$

Gli equilibri ordinari del sistema si ricavano uguagliando a zero le derivate parziali prime del potenziale:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial s}(s,\phi) \;&=\; -\frac{kR^2}{2}(2s - 2\cos\phi) \;=\; -kR^2(s-\cos\phi)\\
\frac{\partial U}{\partial \phi}(s,\phi) \;&=\; -mgR\cos\phi - kR^2 s\sin\phi
\end{aligned}$$

e quindi risolvendo nel dominio aperto $\{(s,\phi)\in(-\infty,2)\times\mathbb{R}\}$ il sistema di equazioni trigonometriche:

$$\begin{cases} s-\cos\phi \;=\; 0\\ -mgR\cos\phi - kR^2 s\sin\phi \;=\; 0. \end{cases}$$

La prima equazione porge la relazione:

$$s \;=\; \cos\phi$$

che sostituita nella seconda conduce all'equazione trigonometrica nella sola variabile angolare ϕ:

$$-mgR\cos\phi - kR^2\cos\phi\sin\phi \;=\; 0$$

ossia:

$$-\cos\phi(mgR + kR^2\sin\phi) \;=\; 0\,.$$

Essendo $k = mg/2R$ è evidente che l'espressione entro parentesi tonde non può annullarsi per alcun valore reale di ϕ:

$$mgR + kR^2\sin\phi \;=\; mgR + \frac{1}{2}mgR\sin\phi \;>\; 0 \qquad \forall\,\phi\in\mathbb{R}$$

per cui i soli equilibri ordinari possono aversi per $\cos\phi = 0$:

$$\phi \;=\; \frac{\pi}{2} \qquad\quad \phi \;=\; -\frac{\pi}{2}\,.$$

Ad entrambe queste radici corrisponde, in effetti, lo stesso valore $s = 0$ del secondo parametro lagrangiano. Gli equilibri ordinari del sistema sono pertanto individuati tutti e soltanto dai valori:

$$(s,\phi) \;=\; \Big(0,\frac{\pi}{2}\Big) \qquad (s,\phi) \;=\; \Big(0,-\frac{\pi}{2}\Big)$$

dei parametri.

(*c*) **Stabilità degli equilibri ordinari**
L'analisi di stabilità degli equilibri ordinari viene condotta per mezzo dei teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale, visto che tutte le sollecitazioni attive hanno carattere posizionale conservativo. Il primo passo è, al solito, la determinazione delle derivate parziali seconde del potenziale:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}(s,\phi) = -kR^2 \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}(s,\phi) = mgR\sin\phi - kR^2 s\cos\phi$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \phi \partial s}(s,\phi) = \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial \phi}(s,\phi) = -kR^2\sin\phi$$

e della relativa matrice hessiana:

$$H_U(s,\phi) = \begin{pmatrix} -kR^2 & -kR^2\sin\phi \\ -kR^2\sin\phi & mgR\sin\phi - kR^2 s\cos\phi \end{pmatrix}$$

che deve essere valutata nelle singole configurazioni di equilibrio.

Configurazione $(s,\phi) = (0,\pi/2)$
L'hessiana del potenziale è data da:

$$H_U(0,\pi/2) = \begin{pmatrix} -kR^2 & -kR^2 \\ -kR^2 & mgR \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mgR/2 & -mgR/2 \\ -mgR/2 & mgR \end{pmatrix}$$

e il suo determinante ha chiaramente segno negativo:

$$\det H_U(0,\pi/2) = (mgR)^2\Big(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\Big) = -\frac{3}{4}(mgR)^2 < 0.$$

Gli autovalori — reali — della matrice sono quindi di segno opposto. La presenza di un autovalore positivo consente di applicare il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet e di concludere che la configurazione di equilibrio è instabile.

Configurazione $(s,\phi) = (0,-\pi/2)$
In questo caso l'hessiana del potenziale vale:

$$H_U(0,-\pi/2) = \begin{pmatrix} -kR^2 & kR^2 \\ kR^2 & -mgR \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mgR/2 & mgR/2 \\ mgR/2 & -mgR \end{pmatrix}$$

con determinante positivo:

$$\det H_U(0,-\pi/2) = \frac{1}{4}(mgR)^2 > 0$$

e traccia negativa:

$$\mathrm{tr} H_U(0,-\pi/2) \;=\; -\frac{3}{2}mgR \;<\; 0$$

in modo che i relativi autovalori risultanto entrambi negativi. La configurazione costituisce pertanto un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità è assicurata dal teorema di Lagrange-Dirichlet.

(*d*) **Equazioni di Lagrange**
La lagrangiana $\mathfrak{L} = T + U$ del sistema si scrive

$$\mathfrak{L} \;=\; mR^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{s}^2 - mgR\,\sin\phi - \frac{kR^2}{2}(s^2 - 2s\cos\phi)$$

e da essa si deducono le relazioni:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{s}}\Big) \;=\; mR^2\ddot{s} \qquad\qquad \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial s} \;=\; -kR^2(s-\cos\phi)$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{\phi}}\Big) \;=\; 2mR^2\ddot{\phi} \qquad\qquad \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi} \;=\; -mgR\cos\phi - kR^2 s\sin\phi$$

che inserite nelle equazioni di Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{s}}\Big) - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial s} \;=\; 0 \qquad\qquad \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{\phi}}\Big) - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi} \;=\; 0$$

porgono le equazioni pure del moto:

$$mR^2\ddot{s} + kR^2(s-\cos\phi) \;=\; 0$$

$$2mR^2\ddot{\phi} + mgR\cos\phi + kR^2 s\sin\phi \;=\; 0$$

ovvero — si ricordi che $k = mg/2R$:

$$\begin{cases} \ddot{s} + \dfrac{g}{2R}(s-\cos\phi) \;=\; 0 \\[2mm] \ddot{\phi} + \dfrac{g}{2R}\cos\phi + \dfrac{g}{4R}s\sin\phi \;=\; 0. \end{cases}$$

(*e*) **Integrale primo**
Il sistema è scleronomo e soggetto unicamente a sollecitazioni posizionali conservative. Un ovvio integrale primo è allora offerto dall'energia meccanica $H = T - U$, che esplicitamente si scrive:

$$H(s,\phi,\dot{s},\dot{\phi}) \;=\; mR^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{s}^2 + mgR\,\sin\phi + \frac{kR^2}{2}(s^2 - 2s\cos\phi)\,.$$

(f) **Equilibri di confine**
In una generica configurazione (s,ϕ) il lavoro virtuale delle forze attive, per un qualsiasi spostamento virtuale $(\delta s,\delta\phi)$ relativo alla configurazione considerata, è dato dall'espressione:

$$\delta L \;=\; \frac{\partial U}{\partial s}(s,\phi)\,\delta s + \frac{\partial U}{\partial \phi}(s,\phi)\,\delta\phi$$

che esplicitamente si legge:

$$\delta L \;=\; -kR^2(s-\cos\phi)\,\delta s - (mgR\cos\phi + kR^2 s\sin\phi)\,\delta\phi\,.$$

Le configurazioni di confine del sistema sono tutte e soltanto quelle della forma:

$$(s,\phi) \;=\; (2,\phi)\;, \qquad \phi\in\mathbb{R}\,,$$

con gli spostamenti virtuali dati da:

$$(\delta s,\delta\phi)\;, \qquad \forall\,\delta s\le 0\,,\;\forall\,\delta\phi\in\mathbb{R}.$$

In una qualsiasi configurazione di confine si ha pertanto:

$$\delta L \;=\; -kR^2(2-\cos\phi)\,\delta s - (mgR\cos\phi + 2kR^2\sin\phi)\,\delta\phi$$

e l'equilibrio ricorre se e soltanto se:

$$-kR^2(2-\cos\phi)\,\delta s - (mgR\cos\phi + 2kR^2\sin\phi)\,\delta\phi \;\le\; 0 \qquad \forall\,\delta s\le 0\,,\;\forall\,\delta\phi\in\mathbb{R}$$

ossia:

$$\begin{cases} -kR^2(2-\cos\phi) \;\ge\; 0 \\ -(mgR\cos\phi + 2kR^2\sin\phi) \;=\; 0. \end{cases}$$

È evidente che la prima delle due condizioni non è mai verificata, per cui il sistema non ammette alcun equilibrio di confine.