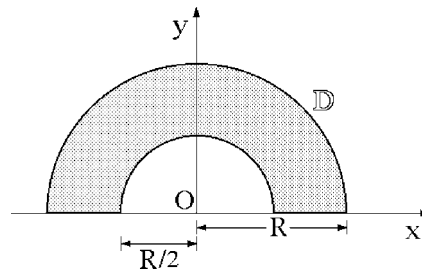


Esercizio 1

Nel piano Oxy di una terna solidale $Oxyz$ si consideri la lamina rigida \mathbb{D} in figura, costituita da una semicorona circolare di centro O , raggio esterno R e raggio interno $R/2$. La densità di \mathbb{D} in un suo generico punto P vale

$$\sigma(P) = \frac{\mu}{R} \frac{1}{|P - O|},$$

la costante $\mu > 0$ avendo le dimensioni di una massa.

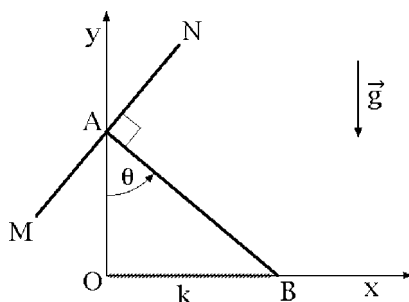


Determinare:

- (a) massa e posizione del baricentro (rispetto alla terna $Oxyz$) della lamina;
- (b) la matrice d'inerzia in $Oxyz$ del sistema;
- (c) il momento d'inerzia relativo all'asse $x = R$ nel piano Oxy ;
- (d) il momento angolare in O e l'energia cinetica della lamina qualora si consideri il punto O dello spazio solidale fisso e la velocità angolare istantanea pari a $\bar{\omega} = \omega(-\hat{e}_1 + 2\hat{e}_3)$, con ω costante;
- (e) la quantità di moto del sistema nelle stesse ipotesi del quesito (d).

Esercizio 2

Nel piano Oxy di una terna inerziale si considera un telaio rigido pesante costituito da due aste rettilinee omogenee AB e MN , entrambe di lunghezza L e massa m , saldate ortogonalmente fra loro nell'estremo A , che coincide con il punto medio di MN . Gli estremi A e B dell'asta AB scorrono rispettivamente lungo l'asse verticale Oy e lungo Ox , mentre una molla di costante elastica k congiunge il punto B con l'origine O .



Assunti i vincoli ideali e usando l'angolo $\theta \in \mathbb{R}$ in figura come parametro lagrangiano determinare, rispetto alla terna $Oxyz$:

- gli equilibri;
- le proprietà di stabilità degli equilibri;
- l'energia cinetica del sistema;
- le equazioni di Lagrange;
- le coordinate del centro di rotazione istantanea lungo un generico moto del sistema, per $\dot{\theta} \neq 0$.

Soluzione dell'esercizio 1

(a) Massa e baricentro

La massa m della lamina si ricava integrando la densità areale di massa σ sull'intera semicorona circolare. Conviene eseguire l'integrale in coordinate polari piane (ρ, ϕ)

$$(x, y) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi), \quad (\rho, \phi) \in [R/2, R] \times [0, \pi]$$

e scrivere dunque

$$m = \int_0^\pi d\phi \int_{R/2}^R d\rho \rho \frac{\mu}{R\rho} = \frac{\mu}{R} \int_0^\pi d\phi \int_{R/2}^R d\rho = \frac{\mu}{R} \pi \frac{R}{2} = \frac{\pi}{2} \mu.$$

L'individuazione del baricentro G del sistema è semplificata dalla presenza di un ovvio elemento di simmetria; la retta Oy si riconosce infatti essere un asse di simmetria per via della relazione

$$\sigma(x, y) = \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\mu}{\sqrt{(-x)^2 + y^2}} = \sigma(-x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{D}$$

dalla quale si deduce che il vettore posizione di G rispetto alla terna di riferimento $Oxyz$ deve assumere la forma

$$G - O = y_G \hat{e}_2.$$

L'ordinata y_G viene calcolata per mezzo della definizione

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{1}{m} \int_0^\pi d\phi \int_{R/2}^R d\rho \rho \frac{\mu}{R\rho} \rho \sin \phi = \frac{2}{\pi\mu} \frac{\mu}{R} \int_0^\pi \sin \phi d\phi \int_{R/2}^R \rho d\rho = \\ &= \frac{2}{\pi R} [-\cos \phi]_0^\pi \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_{R/2}^R = \frac{2}{\pi R} 2 \frac{1}{2} \left(R^2 - \frac{R^2}{4} \right) = \frac{3}{2\pi} R, \end{aligned}$$

per cui

$$G - O = \frac{3}{2\pi} R \hat{e}_2.$$

(b) Matrice d'inerzia rispetto alla terna $Oxyz$

Dall'esame della figura si deduce che Oy è un asse principale d'inerzia in O in quanto asse di simmetria, passante per O , della lamina. Il piano di simmetria Oxy implica poi che anche l'asse Oz sia principale d'inerzia nello stesso punto O . Se ne conclude, per la simmetria dell'operatore d'inerzia in O , che $Oxyz$ è una terna principale d'inerzia. La matrice d'inerzia relativa a $Oxyz$ assume pertanto la forma diagonale

$$[L_O] = \begin{pmatrix} L_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & L_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx} + L_{yy} \end{pmatrix}$$

in cui compaiono due soli momenti principali d'inerzia indipendenti, L_{xx} e L_{yy} , entrambi calcolabili direttamente dalle rispettive definizioni. Per il primo si ha

$$\begin{aligned} L_{xx} &= \int_{\mathbb{D}} y^2 \sigma(x, y) dx dy = \int_0^\pi d\phi \int_{R/2}^R d\rho \rho (\rho \sin \phi)^2 \frac{\mu}{R\rho} = \\ &= \frac{\mu}{R} \int_0^\pi \sin^2 \phi d\phi \int_{R/2}^R \rho^2 d\rho = \frac{\mu}{R} \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\phi}{2} d\phi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{R/2}^R = \\ &= \frac{\mu}{R} \frac{1}{2} \left[\phi - \frac{\sin 2\phi}{2} \right]_0^\pi \frac{1}{3} \left(R^3 - \frac{R^3}{8} \right) = \frac{\mu}{6R} \pi \frac{7}{8} R^3 = \frac{7\pi}{48} \mu R^2 \end{aligned}$$

mentre per il secondo risulta

$$\begin{aligned} L_{yy} &= \int_{\mathbb{D}} x^2 \sigma(x, y) dx dy = \int_0^\pi d\phi \int_{R/2}^R d\rho \rho (\rho \cos \phi)^2 \frac{\mu}{R\rho} = \\ &= \frac{\mu}{R} \int_0^\pi \cos^2 \phi d\phi \int_{R/2}^R \rho^2 d\rho = \frac{\mu}{R} \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2\phi}{2} d\phi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{R/2}^R = \\ &= \frac{\mu}{6R} \left[\phi + \frac{\sin 2\phi}{2} \right]_0^\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{8} \right) = \frac{\pi\mu}{6R} \frac{7}{8} R^3 = \frac{7\pi}{48} \mu R^2 \end{aligned}$$

e la matrice d'inerzia del sistema diventa dunque

$$[L_O] = \mu R^2 \begin{pmatrix} 7\pi/48 & 0 & 0 \\ 0 & 7\pi/48 & 0 \\ 0 & 0 & 7\pi/24 \end{pmatrix}.$$

Vale la pena di verificare che il prodotto d'inerzia L_{xy} , l'unico eventualmente diverso da zero per una lamina piana che abbia in Oxy il proprio piano di giacitura, risulta effettivamente nullo. Si ha, in effetti:

$$\begin{aligned} L_{xy} &= - \int_{\mathbb{D}} xy \sigma(x, y) dx dy = - \int_0^\pi d\phi \int_{R/2}^R d\rho \rho \frac{\mu}{R\rho} \rho^2 \cos \phi \sin \phi = \\ &= - \frac{\mu}{R} \int_0^\pi \sin \phi \cos \phi d\phi \int_{R/2}^R \rho^2 d\rho = - \frac{\mu}{R} \left[\frac{\sin^2 \phi}{2} \right]_0^\pi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{R/2}^R = 0. \end{aligned}$$

(c) **Momento d'inerzia rispetto all'asse $x = R, z = 0$**

L'asse di equazione $x = R$ nel piano Oxy è una retta parallela all'asse coordinato Oy , posta a distanza R da questo. Il relativo momento d'inerzia è allora dato dal teorema di Huygens-Steiner:

$$I = I_{Oy} + mR^2 = L_{yy} + \frac{\pi}{2}\mu R^2 = \frac{7\pi}{48}\mu R^2 + \frac{\pi}{2}\mu R^2 = \frac{31\pi}{48}\mu R^2$$

in quanto Oy passa per il baricentro G .

(d) **Momento angolare in O ed energia cinetica**

Rispetto alla base ortonormale destra $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ della terna $Oxyz$ il vettore velocità angolare istantanea $\bar{\omega}$ ed il momento angolare in O , \bar{K}_O , si scrivono

$$\bar{K}_O = \sum_{\alpha=1}^3 K_{\alpha} \hat{e}_{\alpha} \quad \bar{\omega} = \sum_{\alpha=1}^3 \omega_{\alpha} \hat{e}_{\alpha} = \omega(-\hat{e}_1 + 2\hat{e}_3)$$

e le relative componenti sono legate dalla matrice d'inerzia $[L_O]$, espressa rispetto alla terna $Oxyz \equiv O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$,

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = [L_O] \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \mu R^2 \begin{pmatrix} 7\pi/48 & 0 & 0 \\ 0 & 7\pi/48 & 0 \\ 0 & 0 & 7\pi/24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega \\ 0 \\ 2\omega \end{pmatrix} = \mu R^2 \omega \begin{pmatrix} -7\pi/48 \\ 0 \\ 7\pi/12 \end{pmatrix}$$

sicché il momento angolare del sistema diventa

$$\bar{K}_O = \mu R^2 \omega \left(-\frac{7\pi}{48} \hat{e}_1 + \frac{7\pi}{12} \hat{e}_3 \right).$$

L'espressione dell'energia cinetica per il sistema rigido con punto O fisso e velocità angolare istantanea $\bar{\omega}$ si ricava di conseguenza:

$$T = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{K}_O = \frac{1}{2} \omega (-\hat{e}_1 + 2\hat{e}_3) \cdot \mu R^2 \omega \left(-\frac{7\pi}{48} \hat{e}_1 + \frac{7\pi}{12} \hat{e}_3 \right) = \frac{21\pi}{32} \mu R^2 \omega^2.$$

(e) **Quantità di moto**

Per definizione, la quantità di moto del sistema si identifica con il prodotto della massa totale del sistema per la velocità istantanea del baricentro, relativamente all'atto di moto considerato,

$$\bar{Q} = m\dot{G}$$

dove

$$\begin{aligned} \dot{G} &= \bar{\omega} \wedge (G - O) = \omega(-\hat{e}_1 + 2\hat{e}_3) \wedge \frac{3}{2\pi} R \hat{e}_2 = \\ &= \frac{3}{2\pi} R \omega (-\hat{e}_1 + 2\hat{e}_3) \wedge \hat{e}_2 = \frac{3}{2\pi} R \omega (-2\hat{e}_1 - \hat{e}_3) \end{aligned}$$

in quanto il baricentro appartiene sempre allo spazio solidale al sistema rigido. Pertanto:

$$\bar{Q} = \frac{\pi}{2} \mu \frac{3}{2\pi} R\omega(-2\hat{e}_1 - \hat{e}_3) = \frac{3}{4} \mu R\omega(-2\hat{e}_1 - \hat{e}_3).$$

Soluzione dell'esercizio 2

(a) Equilibri

Il sistema è sottoposto unicamente a sollecitazioni posizionali conservative, ciascuna delle quali può essere descritta per mezzo dell'appropriato potenziale: si tratta del peso e delle forze di interazione elastica fra i punti O e B .

Potenziale gravitazionale

Il baricentro G del telaio rigido costituito dalle due aste omogenee AB e MN si ricava per mezzo del teorema distributivo

$$G-O = \frac{m(A-O) + m\frac{A-O+B-O}{2}}{2m} = \frac{A-O}{2} + \frac{A-O}{4} + \frac{B-O}{4} = A-O + \frac{B-A}{4}$$

e basta dunque sostituire le ovvie relazioni esplicite

$$A-O = L \cos \theta \hat{e}_2 \quad \frac{B-A}{4} = \frac{L}{4} \sin \theta \hat{e}_1 - \frac{L}{4} \cos \theta \hat{e}_2$$

per ottenere

$$G-O = \frac{L}{4} \sin \theta \hat{e}_1 + \frac{3}{4} L \cos \theta \hat{e}_2.$$

Il potenziale gravitazione del sistema diventa così

$$U_g(\theta) = -2mg \hat{e}_2 \cdot (G-O) = -2mg \frac{3}{4} L \cos \theta = -\frac{3}{2} mgL \cos \theta.$$

Potenziale elastico

Alla molla ideale OB di costante elastica k è associato il potenziale

$$U_{el}(\theta) = -\frac{k}{2} |B-O|^2 = -\frac{k}{2} |L \sin \theta \hat{e}_1|^2 = -\frac{kL^2}{2} \sin^2 \theta.$$

Potenziale del sistema

Il potenziale del sistema è dato dalla somma dei potenziali gravitazionale ed elastico

$$U(\theta) = -\frac{3}{2} mgL \cos \theta - \frac{kL^2}{2} \sin^2 \theta$$

e deve intendersi definito $\forall \theta \in \mathbb{R}$.

Equilibri

Trattandosi di sistema scleronomo a vincoli bilaterali ideali, soggetto unicamente a sollecitazioni posizionali conservative, le configurazioni di equilibrio — tutte ordinarie — sono tutti e soltanto i punti critici del potenziale $U(\theta)$. Esse si ricavano perciò uguagliando a zero la derivata prima di U e risolvendo l'equazione trigonometrica

$$U'(\theta) = \frac{3}{2}mgL \sin \theta - kL^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

ossia

$$kL^2 \sin \theta \left(\frac{3mg}{2kL} - \cos \theta \right) = 0.$$

Dalla condizione $\sin \theta = 0$ si deducono gli equilibri

$$\theta = 0, \quad \pi,$$

sempre definiti, mentre dalla relazione residua $\frac{3mg}{2kL} - \cos \theta = 0$ si traggono le ulteriori configurazioni di equilibrio

$$\theta = \pm \arccos \left(\frac{3mg}{2kL} \right) := \pm \theta^*$$

definite e distinte dalle precedenti a patto di assumere $3mg/2kL < 1$.

(b) Stabilità degli equilibri

Si applicano i teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale, come è lecito, data la presenza di sole sollecitazioni posizionali conservative. A questo scopo conviene calcolare la derivata seconda del potenziale

$$U''(\theta) = \frac{3}{2}mgL \cos \theta - kL^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

il cui segno va studiato in corrispondenza di ciascuna configurazione di equilibrio.

Configurazione $\theta = 0$

La derivata seconda del potenziale vale

$$U''(0) = \frac{3}{2}mgL - kL^2 = kL^2 \left(\frac{3mg}{2kL} - 1 \right)$$

e permette di distinguere tre diversi casi di stabilità:

- per $3mg/2kL > 1$ si ha $U''(0) > 0$ e la configurazione di equilibrio risulta instabile per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet;
- se $3mg/2kL < 1$ vale invece $U''(0) < 0$. La configurazione di equilibrio costituisce perciò un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità segue dal teorema di Lagrange-Dirichlet;

- se infine $3mg/2kL = 1$ la derivata seconda del potenziale si annulla e nulla può direttamente concludersi circa la stabilità o instabilità della configurazione. Uno sviluppo di Taylor al quarto ordine di U nell'intorno di $\theta = 0$ mostra che in questo caso la configurazione costituisce un minimo relativo proprio del potenziale: ricorre dunque un caso critico, per il quale non è possibile affermare alcunché sulla base dei soli teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale — l'instabilità dell'equilibrio può dedursi dall'analisi di Weierstrass, trattandosi di sistema scleronomo ad un solo grado di libertà e posizionale conservativo.

Configurazione $\theta = \pi$

In questo caso la derivata seconda ha segno definito e negativo

$$U''(\pi) = -\frac{3}{2}mgL - kL^2 < 0$$

e permette di riconoscere nella configurazione un massimo relativo proprio del potenziale, stabile per Lagrange-Dirichlet.

Configurazioni $\theta = \theta^*$ e $\theta = -\theta^*$

I due equilibri presentano le stesse proprietà di stabilità, in quanto condividono lo stesso valore della derivata seconda. Ricordando che $\cos \theta^* = 3mg/2kL$ si ha infatti l'espressione

$$\begin{aligned} U''(\pm\theta^*) &= \frac{3}{2}mgL \cos \theta^* - kL^2(\cos^2 \theta^* - \sin^2 \theta^*) = \\ &= kL^2 \left(\frac{3mg}{2kL} \cos \theta^* - \cos^2 \theta^* + \sin^2 \theta^* \right) = kL^2 \sin^2 \theta^* > 0 \end{aligned}$$

dalla quale si deduce che le due configurazioni di equilibrio, quando definite, sono entrambe instabili.

(c) Energia cinetica

La proprietà di additività consente di esprimere l'energia cinetica T del sistema come la somma delle energie cinetiche delle aste AB e MN

$$T = T_{AB} + T_{MN},$$

ambedue omogenee, di lunghezza L e di massa m . Le energie cinetiche parziali sono facilmente calcolabili facendo uso del teorema di König.

Asta AB

L'energia cinetica dell'asta AB si esprime per mezzo della relazione di König

$$T_{AB} = \frac{m}{2} \dot{G}_1^2 + I_{G_1 z}^{AB} |\bar{\omega}_{AB}|^2$$

nella quale il vettore posizione del baricentro G_1 dell'asta è dato da

$$G_1 - O = \frac{A - O}{2} + \frac{B - O}{2} = \frac{L}{2} \cos \theta \hat{e}_1 + \frac{L}{2} \sin \theta \hat{e}_2$$

con velocità istantanea

$$\dot{G}_1 = \frac{L}{2}(-\sin \theta \hat{e}_1 + \cos \theta \hat{e}_2) \dot{\theta}$$

di modulo quadrato

$$\dot{G}_1^2 = \frac{L^2}{4} \dot{\theta}^2.$$

La velocità angolare istantanea si ricava invece derivando rispetto al tempo l'angolo di rotazione θ e moltiplicando la derivata per il versore associato all'asse istantaneo di rotazione

$$\bar{\omega}_{AB} = \dot{\theta} \hat{e}_3.$$

Il momento d'inerzia dell'asta relativamente all'asse baricentrale perpendicolare al piano fisso $Oxy - G_1z$ — è fornito peraltro dalla semplice relazione

$$I_{G_1z}^{AB} = \frac{mL^2}{12},$$

per cui l'energia cinetica cercata risulta

$$T_{AB} = \frac{m}{2} \frac{L^2}{4} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{mL^2}{12} \dot{\theta}^2 = \frac{mL^2}{8} \dot{\theta}^2 + \frac{mL^2}{24} \dot{\theta}^2 = \frac{mL^2}{6} \dot{\theta}^2.$$

Asta MN

L'energia cinetica dell'asta MN si ricava in modo analogo

$$T_{MN} = \frac{m}{2} \dot{A}^2 + \frac{1}{2} I_{Az}^{MN} |\bar{\omega}_{MN}|^2$$

notando che il baricentro dell'asta omogenea viene a coincidere con il suo punto medio A . Il vettore posizione di questo si scrive

$$A - O = L \cos \theta \hat{e}_2$$

in modo che la relativa velocità istantanea diventa

$$\dot{A} = -L \sin \theta \dot{\theta} \hat{e}_2$$

con modulo quadrato

$$\dot{A}^2 = L^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2.$$

La velocità angolare è la stessa dell'asta AB — le due aste sono per ipotesi **rigidamente** saldate fra loro, in modo da costituire un unico sistema rigido —

$$\bar{\omega}_{MN} = \dot{\theta} \hat{e}_3$$

come pure il momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrale Az

$$I_{Az}^{MN} = \frac{mL^2}{12}.$$

Non resta che sostituire le espressioni precedenti nella relazione generale di T_{MN} per ottenere la funzione richiesta

$$T_{MN} = \frac{m}{2}L^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}mL^2\left(\frac{1}{12} + \sin^2\theta\right)\dot{\theta}^2.$$

Telaio

Sommando i contributi delle due aste si perviene all'espressione generale per l'energia cinetica del sistema

$$T = \frac{mL^2}{6}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mL^2\left(\frac{1}{12} + \sin^2\theta\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}mL^2\left(\frac{5}{12} + \sin^2\theta\right)\dot{\theta}^2.$$

(d) Equazioni di Lagrange

Il sistema è scleronomo a vincoli bilaterali ideali, posizionale e conservativo; le relative equazioni pure del moto sono quindi date dall'equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0$$

in termini dell'unica coordinata generalizzata θ e della lagrangiana

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}mL^2\left(\frac{5}{12} + \sin^2\theta\right)\dot{\theta}^2 - \frac{3}{2}mgL\cos\theta - \frac{kL^2}{2}\sin^2\theta.$$

Un semplice calcolo porge le espressioni

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} &= mL^2\left(\frac{5}{12} + \sin^2\theta\right)\dot{\theta} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) &= mL^2\left(\frac{5}{12} + \sin^2\theta\right)\ddot{\theta} + 2mL^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta} \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} &= mL^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2 + \frac{3}{2}mgL\sin\theta - kL^2\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

dalle quali si deduce l'equazione del moto cercata

$$mL^2\left(\frac{5}{12} + \sin^2\theta\right)\ddot{\theta} + mL^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2 - \frac{3}{2}mgL\sin\theta + kL^2\sin\theta\cos\theta = 0.$$

(e) Centro di rotazione istantanea

La condizione $\dot{\theta} \neq 0$ assicura che il vettore velocità angolare istantanea $\bar{\omega} = \dot{\theta}\hat{e}_3$ del sistema risulta diverso da zero, in modo che asse e centro di rotazione istantanea sono univocamente definiti. Il modo più semplice e diretto per determinare il centro di rotazione istantanea consiste nel considerare i punti A e B che, in quanto vincolati ai rispettivi assi coordinati Oy ed Ox , hanno velocità dirette secondo gli stessi assi. Per il teorema di Chasles il centro di rotazione istantanea deve collocarsi all'intersezione delle rette condotte per A e B e

ortogonali alle rispettive velocità istantanee $\dot{A} \parallel Oy$ e $\dot{B} \parallel Ox$. È immediato concludere che il centro di rotazione istantanea C ha la stessa ascissa di B e la stessa ordinata di A :

$$C(x_B, y_A) = C(L \sin \theta, L \cos \theta),$$

in modo che il suo vettore posizione rispetto all'origine O si scrive

$$C - O = x_B \hat{e}_1 + y_A \hat{e}_2 = L \sin \theta \hat{e}_1 + L \cos \theta \hat{e}_2.$$

Allo stesso risultato si perviene, in modo puramente algebrico, applicando la formula generale

$$C - A = \frac{\bar{\omega} \wedge \dot{A}}{|\bar{\omega}|^2}$$

nella quale si è scelto A come punto dello spazio solidale al moto — un'altra scelta ragionevole per questo problema poteva essere costituita dall'estremo B . Considerato che

$$A - O = L \cos \theta \hat{e}_2 \quad \text{e} \quad \dot{A} = -L \sin \theta \dot{\theta} \hat{e}_2,$$

il vettore posizione del centro rispetto ad A diventa

$$C - A = \frac{\dot{\theta} \hat{e}_3 \wedge (-L \sin \theta \hat{e}_2)}{|\dot{\theta} \hat{e}_3|^2} = L \sin \theta \hat{e}_1$$

per cui

$$C - O = C - A + A - O = L \sin \theta \hat{e}_1 + L \cos \theta \hat{e}_2,$$

a conferma del risultato già ottenuto.