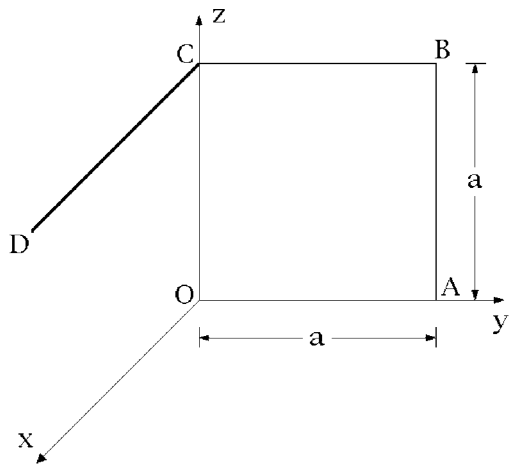
Prova scritta di meccanica razionale 1 A-L del 09.01.2007

Esercizio 1

In una terna di riferimento cartesiana ortogonale $Oxyz$ una lamina quadrata $OABC$, di lato a, ha i lati OA e OC collocati rispettivamente sugli assi Oy e Oz. La sua densità areale è data da

$$\sigma(y,z) = \frac{\mu}{a^5} y z^2 \qquad 0 \leq y,\, z \leq a$$

dove la costante $\mu > 0$ ha le dimensioni di una massa. Alla lamina è saldata rigidamente un'asta rettilinea omogenea di massa μ ed estremi $C(0,0,a)$, $D(a,0,a)$.



Si vogliono determinare del sistema:

(a) il baricentro rispetto ad $Oxyz$;

(b) la matrice d'inerzia relativamente ad $Oxyz$;

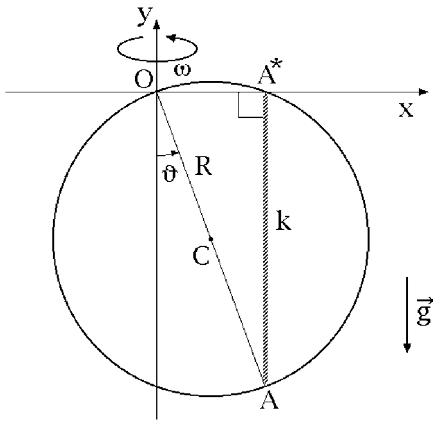
(c) momento angolare in O ed energia cinetica nell'ipotesi che O sia punto fisso e che la velocità angolare sia $\vec{\omega} = -2\omega\,\hat{e}_2 + \omega\,\hat{e}_3$, con $\omega > 0$;

(d) il momento d'inerzia rispetto all'asse $y = x$, $z = 0$;

(e) il momento d'inerzia rispetto alla retta AB.

Esercizio 2

Un telaio circolare omogeneo e pesante, di centro C, raggio R e massa m, si muove nel piano Oxy e con un punto fisso nell'origine O di una terna cartesiana ortogonale $Oxyz$, rotante con velocità angolare costante ω attorno all'asse verticale Oy rispetto ad un riferimento inerziale. Una molla ideale di costante k congiunge l'estremo A del diametro OA del telaio con la proiezione ortogonale $A^\star$ di A su Ox.



Assunti i vincoli ideali e l'angolo ϑ in figura come parametro lagrangiano, determinare del sistema:

- (a) gli equilibri relativi a $Oxyz$;
- (b) la stabilità dei predetti equilibri;
- (c) le equazioni pure del moto;
- (d) la quantità di moto per $\vartheta = \pi/3$ e $\dot{\vartheta} = 2\omega$ rispetto alla terna rotante $Oxyz$;
- (e) l'energia meccanica in $Oxyz$, verificando che si tratta di un integrale primo delle equazioni del moto.

Soluzione dell'esercizio 1
(a) **Baricentro del sistema**
Il baricentro del sistema si determina applicando il teorema distributivo, dopo aver calcolato separatamente massa e baricentro di lamina e asta.

Massa e baricentro della lamina
La massa della lamina quadrata $OABC$ è data dall'integrale

$$m_\ell = \int_0^a dy \int_0^a dz\, \frac{\mu y z^2}{a^5} = \frac{\mu}{a^5}\int_0^a y\,dy \int_0^a z^2 dz = \frac{\mu}{a^5}\frac{a^2}{2}\frac{a^3}{3} = \frac{\mu}{6}\,.$$

Il piano di giacitura Oyz della lamina deve contenere anche il corrispondente baricentro G_ℓ, le cui sole coordinate da calcolare sono dunque l'ordinata

$$y_G^\ell = \frac{6}{\mu}\int_0^a dy \int_0^a dz\, y\, \frac{\mu y z^2}{a^5} = \frac{6}{a^5}\int_0^a y^2 dy \int_0^a z^2 dz = \frac{6}{a^5}\frac{a^3}{3}\frac{a^3}{3} = \frac{2}{3}a$$

e la quota

$$z_G^\ell = \frac{6}{\mu}\int_0^a dy \int_0^a dz\, z\, \frac{\mu y z^2}{a^5} = \frac{6}{a^5}\int_0^a y\,dy \int_0^a z^3 dz = \frac{6}{a^5}\frac{a^2}{2}\frac{a^4}{4} = \frac{3}{4}a$$

sicchè risulta

$$G_\ell - O = \frac{2}{3}a\,\hat{e}_2 + \frac{3}{4}a\,\hat{e}_3\,.$$

Massa e baricentro dell'asta
L'asta rettilinea ha massa $m_a = \mu$ e, in quanto omogenea, il suo baricentro G_a coincide con il corrispondente punto medio del segmento CD:

$$G_a - O = \frac{C-O\,+\,D-O}{2} = \frac{a\,\hat{e}_3\,+\,a\,\hat{e}_1 + a\,\hat{e}_3}{2} = \frac{a}{2}\,\hat{e}_1 + a\,\hat{e}_3\,.$$

Baricentro del sistema
Per il baricentro G del sistema la proprietà distributiva porge l'espressione

$$G-O = \frac{m_\ell(G_\ell - O) + m_a(G_a - O)}{m_\ell + m_a} = \frac{\frac{\mu}{6}\Big(\frac{2}{3}a\,\hat{e}_2 + \frac{3}{4}a\,\hat{e}_3\Big) + \mu\Big(\frac{a}{2}\,\hat{e}_1 + a\,\hat{e}_3\Big)}{\frac{\mu}{6}+\mu} =$$
$$= \frac{6}{7\mu}\left[\frac{\mu a}{9}\,\hat{e}_2 + \frac{\mu a}{8}\,\hat{e}_3 + \frac{\mu a}{2}\,\hat{e}_1 + \mu a\,\hat{e}_3\right] = \frac{6}{7}\Big(\frac{a}{2}\,\hat{e}_1 + \frac{a}{9}\,\hat{e}_2 + \frac{9}{8}a\,\hat{e}_3\Big)$$

per cui

$$G-O = \frac{3}{7}a\,\hat{e}_1 + \frac{2}{21}a\,\hat{e}_2 + \frac{27}{28}a\,\hat{e}_3\,. \qquad (.1)$$

(*b*) **Matrice d'inerzia rispetto alla terna** $Oxyz$

Il modo più appropriato per calcolare la matrice d'inerzia del sistema rispetto alla terna $Oxyz$ assegnata consiste nel determinare separamente le matrici d'inerzia di lamina e asta relativamente allo stesso riferimento, per poi sommare termine a termine le matrici parziali così ottenute.

Matrice d'inerzia della lamina quadrata

La lamina $OABC$ giace integralmente nel piano coordinato Oyz e la sua matrice d'inerzia in $Oxyz$ assume perciò la forma generale

$$[L_O^{\mathrm{lam}}] = \begin{pmatrix} L_{yy}^{\ell} + L_{zz}^{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & L_{yy}^{\ell} & L_{yz}^{\ell} \\ 0 & L_{yz}^{\ell} & L_{zz}^{\ell} \end{pmatrix}.$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse coordinato Oy si scrive

$$\begin{aligned} L_{yy}^{\ell} &= \int_0^a dy \int_0^a dz\, z^2 \frac{\mu y z^2}{a^5} = \frac{\mu}{a^5} \int_0^a dy \int_0^a dz\, y z^4 = \\ &= \frac{\mu}{a^5} \int_0^a y\, dy \int_0^a z^4 dz = \frac{\mu}{a^5} \frac{a^2}{2} \frac{a^5}{5} = \frac{1}{10} \mu a^2 \end{aligned}$$

mentre un calcolo analogo fornisce il momento d'inerzia relativo all'asse Oz:

$$L_{zz}^{\ell} = \int_0^a dy \int_0^a dz\, y^2 \frac{\mu y z^2}{a^5} = \frac{\mu}{a^5} \int_0^a y^3 dy \int_0^a z^2 dz = \frac{\mu}{a^5} \frac{a^4}{4} \frac{a^3}{3} = \frac{1}{12} \mu a^2 .$$

Quanto al prodotto d'inerzia L_{yz}^{ℓ} si ha

$$L_{yz}^{\ell} = -\int_0^a dy \int_0^a dz\, yz \frac{\mu y z^2}{a^5} = -\frac{\mu}{a^5} \int_0^a y^2 dy \int_0^a z^3 dz = -\frac{\mu}{a^5} \frac{a^3}{3} \frac{a^4}{4} = -\frac{1}{12} \mu a^2 .$$

La matrice d'inerzia della lamina diventa perciò:

$$[L_O^{\mathrm{lam}}] = \mu a^2 \begin{pmatrix} 11/60 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & -1/12 \\ 0 & -1/12 & 1/12 \end{pmatrix}. \tag{.2}$$

Matrice d'inerzia dell'asta

L'asta CD si colloca nel piano coordinato Oxz della terna di riferimento, per cui la matrice d'inerzia deve potersi scrivere come:

$$[L_O^{\mathrm{asta}}] = \begin{pmatrix} L_{xx}^{a} & 0 & L_{xz}^{a} \\ 0 & L_{xx}^{a} + L_{zz}^{a} & 0 \\ L_{xz}^{a} & 0 & L_{zz}^{a} \end{pmatrix}.$$

Per calcolare gli elementi di matrice richiesti è sufficiente inserire la parametrizzazione dell'asta

$$(x, y, z) = (x, 0, a) \quad , \qquad x \in [0, a] \ ,$$

e la corrispondente densità lineare di massa μ/a nelle definizioni generali di momenti e prodotti d'inerzia. Si ha così:

$$L_{xx}^{a} = \int_{0}^{a} dx \, \frac{\mu}{a} \, a^2 = \mu a^2$$

ed analogamente

$$L_{zz}^{a} = \int_{0}^{a} dx \, \frac{\mu}{a} x^2 = \frac{\mu}{a} \frac{a^3}{3} = \frac{1}{3} \mu a^2$$

mentre

$$L_{xz}^{a} = -\int_{0}^{a} dx \, \frac{\mu}{a} x a = -\mu \int_{0}^{a} x \, dx = -\frac{1}{2} \mu a^2 .$$

In definitiva:

$$[L_O^{\text{asta}}] = \mu a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} . \tag{.3}$$

Matrice d'inerzia del sistema
La somma delle matrici d'inerzia (.2) e (.3) fornisce la matrice d'inerzia del sistema nella terna $Oxyz$:

$$[L_O] = [L_O^{\text{lam}}] + [L_O^{\text{asta}}] = \mu a^2 \begin{pmatrix} 71/60 & 0 & -1/2 \\ 0 & 43/30 & -1/12 \\ -1/2 & -1/12 & 5/12 \end{pmatrix} .$$

(c) **Momento angolare ed energia cinetica del sistema**
Se il sistema rigido ha un punto fisso nell'origine O della terna di riferimento le componenti del momento angolare in O rispetto alla base associata si ottengono moltiplicando la matrice d'inerzia in $Oxyz$ del sistema per il vettore colonna delle componenti di $\vec{\omega}$ rispetto alla stessa base. Posto al solito

$$\vec{K}_O = \sum_{\alpha=1}^{3} K_\alpha \hat{e}_\alpha \ ,$$

si ottiene così

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = \mu a^2 \begin{pmatrix} 71/60 & 0 & -1/2 \\ 0 & 43/30 & -1/12 \\ -1/2 & -1/12 & 5/12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2\omega \\ \omega \end{pmatrix} =$$

$$= \mu a^2\omega \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{43}{15} - \dfrac{1}{12} \\ \dfrac{1}{6} + \dfrac{5}{12} \end{pmatrix} = \mu a^2\omega \begin{pmatrix} -1/2 \\ -177/60 \\ 7/12 \end{pmatrix} = \mu a^2\omega \begin{pmatrix} -1/2 \\ -59/20 \\ 7/12 \end{pmatrix}$$

per cui il momento angolare richiesto vale

$$\vec{K}_O = \Big(-\frac{1}{2}\,\hat{e}_1 - \frac{59}{20}\,\hat{e}_2 + \frac{7}{12}\,\hat{e}_3\Big)\,\mu a^2\omega\,.$$

Quanto all'energia cinetica, è immediato ricavare l'espressione

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{K}_O = \frac{1}{2}(0 \quad -2\omega \quad \omega)\,\mu a^2\omega \begin{pmatrix} -1/2 \\ -59/20 \\ 7/12 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\mu a^2\omega^2\Big(\frac{59}{10} + \frac{7}{12}\Big) = \frac{389}{120}\mu a^2\omega^2.$$

(d) **Momento d'inerzia rispetto all'asse $y = x$, $z = 0$**
L'asse in esame è una retta passante per l'origine O della terna di riferimento e si esprime in forma parametrica per mezzo della relazione

$$P(x) - O = x\,\hat{e}_1 + x\,\hat{e}_2\ , \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

cui corrisponde il versore tangente

$$\hat{n} = \frac{P'(x)}{|P'(x)|} = \frac{\hat{e}_1 + \hat{e}_2}{|\hat{e}_1 + \hat{e}_2|} = \frac{\hat{e}_1 + \hat{e}_2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{e}_2$$

di componenti

$$(n_1 \;\; n_2 \;\; n_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad 1 \quad 0)\,.$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse $O\hat{n}$ diventa allora

$$I_{O\hat{n}} = (n_1\ n_2\ n_3)\ [L_O] \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(1\ 1\ 0)\mu a^2 \begin{pmatrix} 71/60 & 0 & -1/2 \\ 0 & 43/30 & -1/12 \\ -1/2 & -1/12 & 5/12 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\mu a^2\Big(\frac{71}{60} \quad \frac{43}{30} \quad -\frac{7}{12}\Big) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\mu a^2\Big(\frac{71}{60} + \frac{43}{30}\Big) = \frac{157}{120}\mu a^2.$$

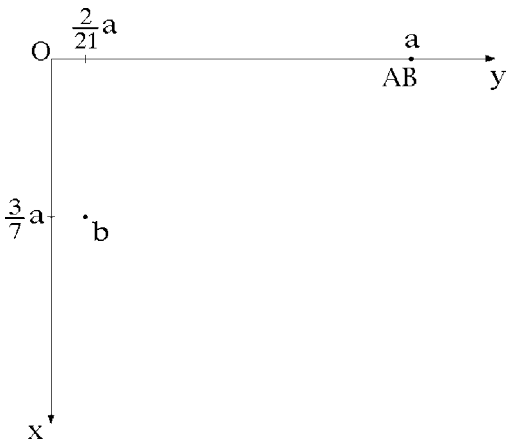
(*e*) **Momento d'inerzia rispetto alla retta AB**
La retta AB non passa per l'origine ed il relativo momento d'inerzia deve essere calcolato ricorrendo al teorema di Huygens-Steiner. Notando che AB è parallelo all'asse Oz e ricordando l'espressione (.1) per il baricentro del sistema

$$G - O = \frac{3}{7}a\,\hat{e}_1 + \frac{2}{21}a\,\hat{e}_2 + \frac{27}{28}a\,\hat{e}_3\,,$$

si deduce che l'asse b parallelo ad AB e passante per il baricentro G ha equazione parametrica

$$x = \frac{3}{7}a \qquad y = \frac{2}{21}a\,.$$

I punti di intersezione delle rette AB e b con il piano coordinato Oxy sono illustrati nella figura seguente:



Il teorema di Huygens-Steiner permette allora di scrivere le relazioni:

$$I_{Oz} = I_b + \frac{7}{6}\mu\left[\left(\frac{3}{7}a\right)^2 + \left(\frac{2}{21}a\right)^2\right]$$

$$I_{AB} = I_b + \frac{7}{6}\mu\left[\left(\frac{3}{7}a\right)^2 + \left(a - \frac{2}{21}a\right)^2\right]$$

dalle quali, sottraendo membro a membro, si deduce

$$\begin{aligned} I_{AB} - I_{Oz} &= \frac{7}{6}\mu\left[\left(a - \frac{2}{21}a\right)^2 - \left(\frac{2}{21}a\right)^2\right] = \frac{7}{6}\mu\left[\left(\frac{19}{21}a\right)^2 - \left(\frac{2}{21}a\right)^2\right] = \\ &= \frac{7}{6}\mu a^2\frac{361-4}{441} = \mu a^2\frac{1}{6}\,\frac{357}{63} = \frac{17}{18}\mu a^2. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$I_{AB} = I_{Oz} + \frac{17}{18}\mu a^2 = \frac{5}{12}\mu a^2 + \frac{17}{18}\mu a^2 = \frac{49}{36}\mu a^2.$$

Soluzione dell'esercizio 2

Il sistema descritto è scleronomo a vincoli bilaterali ideali e soggetto unicamente a sollecitazioni posizionali conservative: la gravità, l'interazione elastica e la forza centrifuga. Le forze di Coriolis, che al pari delle forze centrifughe agiscono nella terna rotante $Oxyz$, hanno componente lagrangiana nulla:

$$Q_\vartheta^{\mathrm{Cor}} = \sum_P -2m\omega\, \hat{e}_3 \wedge \dot{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial \vartheta} = \sum_P -2m\omega\, \hat{e}_3 \wedge \frac{\partial P}{\partial \vartheta}\dot{\vartheta} \cdot \frac{\partial P}{\partial \vartheta} = 0$$

in quanto ortogonali al piano Oxy del moto, al quale le derivate parziali $\partial P/\partial\vartheta$ per tutti i punti P del telaio risultano ovviamente parallele.

(a) **Equilibri**

Gli equilibri del sistema sono tutti e soli i punti critici del potenziale, che consiste nella somma di un contributo gravitazionale, uno elastico ed uno centrifugo.

Potenziale gravitazionale

Il baricentro del telaio circolare omogeneo coincide con il centro C dello stesso. Il potenziale gravitazionale è dato perciò dall'espressione

$$U_{\mathrm{g}} = -mg\hat{e}_2 \cdot (C-O) = -mg(-R\cos\vartheta) = mgR\cos\vartheta\,.$$

Potenziale elastico

All'interazione elastica fra il punto A, di coordinate

$$A - O = 2R\sin\vartheta\,\hat{e}_1 - 2R\cos\vartheta\,\hat{e}_2\ ,$$

e la sua proiezione ortogonale $A^\star$ sull'asse Ox è associato il potenziale:

$$U_{\mathrm{el}} = -\frac{k}{2}|A-A^\star|^2 = -\frac{k}{2}(2R\cos\vartheta)^2 = -2kR^2\cos^2\vartheta = 2kR^2\sin^2\vartheta - 2kR^2\,.$$

Potenziale centrifugo

Il potenziale centrifugo si calcola applicando la formula generale

$$U_{\mathrm{cf}}(\vartheta) = \frac{\omega^2}{2} I_{Oy}(\vartheta)$$

in cui compare il momento d'inerzia $I_{Oy}(\vartheta)$ del sistema rispetto all'asse di rotazione Oy della terna $Oxyz$ relativamente al riferimento inerziale. Conviene applicare il teorema di Huygens-Steiner e scrivere

$$I_{Oy} = I_{Cy} + m[(C-O)\cdot\hat{e}_1]^2 = \frac{mR^2}{2} + mR^2\sin^2\vartheta$$

per ottenere il potenziale

$$U_{\rm cf}(\vartheta) \;=\; \frac{\omega^2}{2}\Big(\frac{mR^2}{2} + mR^2\sin^2\vartheta\Big) \;=\; \frac{1}{2}m\omega^2R^2\sin^2\vartheta + \text{costante}\,.$$

Potenziale del sistema
Il potenziale del sistema è la somma dei potenziali parziali appena calcolati:

$$U(\vartheta) \;=\; U_{\rm g} + U_{\rm el} + U_{\rm cf} \;=\; mgR\cos\vartheta + \Big(2k + \frac{m\omega^2}{2}\Big)R^2\sin^2\vartheta + \text{costante}\,.$$

Equilibri
Gli equilibri — tutti ordinari — del sistema si ottengono uguagliando a zero la derivata prima del potenziale

$$\begin{aligned} U'(\vartheta) \;&=\; -mgR\sin\vartheta + (4k+m\omega^2)R^2\sin\vartheta\cos\vartheta \;= \\ &=\; (4k+m\omega^2)R^2\sin\vartheta\left[\cos\vartheta - \frac{mg}{(4k+m\omega^2)R}\right] \end{aligned}$$

ossia risolvendo l'equazione trigonometrica

$$\sin\vartheta\left[\cos\vartheta - \frac{mg}{(4k+m\omega^2)R}\right] \;=\; 0\,.$$

Di questa equazione due soluzioni sono definite per qualsiasi scelta delle costanti caratteristiche del sistema:

$$\vartheta \;=\; 0\,, \qquad \vartheta \;=\; \pi\,,$$

mentre altre due risultano definite e distinte dalle precedenti a condizione che si abbia $\lambda := mg/(4k+m\omega^2)R < 1$:

$$\vartheta \;=\; +\vartheta^\star\,, \qquad \vartheta \;=\; -\vartheta^\star\,,$$

essendosi posto

$$\vartheta^\star \;=\; \arccos\lambda\,.$$

(*b*) **Stabilità degli equilibri**
Trattandosi di sistema scleronomo posizionale e conservativo, l'analisi di stabilità degli equilibri può essere condotta facendo uso dei teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale. A questo scopo si rende necessario calcolare la derivata seconda del potenziale del sistema:

$$U''(\vartheta) \;=\; -mgR\cos\vartheta + (4k+m\omega^2)R^2(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\,.$$

Si esaminano una ad una le configurazioni di equilibrio determinate al punto precedente.

Configurazione $\vartheta = 0$
In questa configurazione la derivata seconda del potenziale assume la forma

$$U''(0) \;=\; -mgR + (4k+m\omega^2)R^2 \;=\; (4k+m\omega^2)R^2(1-\lambda)$$

e non ha segno definito. È dunque necessario distinguere tre casi possibili:

- per $\lambda > 1$ si ha $U''(0) < 0$, per cui la configurazione $\vartheta = 0$ costituisce un massimo relativo proprio del potenziale, stabile in virtù del teorema di Lagrange-Dirichlet;
- se $\lambda < 1$ la derivata seconda del potenziale assume segno positivo, assicurando l'instabilità della configurazione per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet;
- se infine $\lambda = 1$ la derivata seconda del potenziale si annulla e l'analisi di stabilità diventa più complessa. In effetti, la derivata seconda del potenziale del sistema si riduce a

  $$U''(\vartheta) \;=\; (4k + m\omega^2)R^2(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta - \lambda\cos\vartheta) \;=\; (4k + m\omega^2)R^2(\cos 2\vartheta - \cos\vartheta)$$

  in modo che le derivate terza e quarta diventano:

  $$U^{(3)}(\vartheta) \;=\; (4k + m\omega^2)R^2(-2\sin 2\vartheta + \sin\vartheta)$$

  $$U^{(4)}(\vartheta) \;=\; (4k + m\omega^2)R^2(-4\cos 2\vartheta + \cos\vartheta)$$

  e quindi

  $$U^{(3)}(0) \;=\; 0 \qquad\qquad U^{(4)}(0) \;=\; -3(4k + m\omega^2)R^2\,.$$

  La configurazione viene così riconosciuta come un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità è assicurata dal teorema di Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $\vartheta = \pi$
In questa configurazione la derivata seconda del potenziale è comunque di segno positivo

$$U''(\pi) \;=\; mgR + (4k + m\omega^2)R^2 \;>\; 0\,.$$

Se ne conclude che l'equilibrio è instabile per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

Configurazioni simmetriche $\vartheta = \vartheta^\star$ e $\vartheta = \vartheta^\star$
Nelle due configurazioni simmetriche la derivata seconda del potenziale assume lo stesso valore

$$\begin{aligned} U''(\pm\vartheta^\star) \;&=\; -mgR\cos\vartheta^\star + (4k + m\omega^2)R^2(\cos^2\vartheta^\star - \sin^2\vartheta^\star) \;= \\ &=\; (4k + m\omega^2)R^2(\cos^2\vartheta^\star - \sin^2\vartheta^\star - \lambda\cos\vartheta^\star) \end{aligned}$$

per cui le proprietà di stabilità dei due equilibri sono identiche. Nella fattispecie, essendo $\cos\vartheta^\star = \lambda < 1$, deve aversi

$$U''(\pm\vartheta^\star) \;=\; -(4k + m\omega^2)R^2\sin^2\vartheta^\star \;=\; -(4k + m\omega^2)R^2(1 - \lambda^2) \;<\; 0\,.$$

Dal teorema di Lagrange-Dirichlet si deduce che gli equilibri $\vartheta = \vartheta^\star$ e $\vartheta = -\vartheta^\star$, quando definiti, sono entrambi stabili.

(c) **Equazioni pure del moto**
Il sistema olonomo è a vincoli ideali e soggetto esclusivamente a sollecitazioni posizionali conservative, essendosi già rilevato che le forze di Coriolis presentano componente lagrangiana identicamente nulla. Le equazioni pure del moto possono perciò scriversi in forma lagrangiana:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot\vartheta}\Big) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \vartheta} = 0\,.$$

L'energia cinetica è quella di un sistema rigido con asse fisso, di momento d'inerzia I_{Oz}^{telaio} e velocità angolare $\vec\omega_{\mathrm{telaio}}$:

$$T(\vartheta,\dot\vartheta) \;=\; \frac{1}{2}I_{Oz}^{\mathrm{telaio}}|\vec\omega_{\mathrm{telaio}}|^2 \;=\; \frac{1}{2}(mR^2 + I_{Cz}^{\mathrm{telaio}})|\dot\vartheta\,\hat e_3|^2 \;=\; \frac{1}{2}(mR^2+mR^2)\dot\vartheta^2 \;=\; mR^2\dot\vartheta^2.$$

Basta così sommare il potenziale delle sollecitazioni per ottenere la relativa lagrangiana

$$\mathfrak{L}(\vartheta,\dot\vartheta) \;=\; T+U \;=\; mR^2\dot\vartheta^2 + mgR\cos\vartheta + \Big(2k+\frac{m\omega^2}{2}\Big)R^2\sin^2\vartheta$$

dalla quale si deducono le relazioni immediate:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot\vartheta} = 2mR^2\dot\vartheta \qquad\Longrightarrow\qquad \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot\vartheta}\Big) = 2mR^2\ddot\vartheta$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \vartheta} \;=\; -mgR\sin\vartheta + (4k+m\omega^2)R^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,.$$

Le equazioni lagrangiane del moto si scrivono perciò

$$2mR^2\ddot\vartheta + mgR\sin\vartheta - (4k+m\omega^2)R^2\sin\vartheta\cos\vartheta \;=\; 0\,.$$

(d) **Quantità di moto del sistema**
Come ben noto dalla meccanica dei sistemi, la quantità di moto del telaio si identifica con il prodotto fra la massa del sistema e la velocità istantanea del baricentro:

$$\vec Q \;=\; m\dot C$$

dove nella fattispecie il vettore posizione in $Oxyz$ del baricentro vale

$$C-O \;=\; R\sin\vartheta\,\hat e_1 - R\cos\vartheta\,\hat e_2$$

e la relativa velocità assume la forma

$$\dot C \;=\; R(\cos\vartheta\,\hat e_1 + \sin\vartheta\,\hat e_2)\dot\vartheta\,.$$

Di conseguenza

$$\vec Q \;=\; mR(\cos\vartheta\,\hat e_1 + \sin\vartheta\,\hat e_2)\dot\vartheta\,.$$

Nel caso considerato, per $\vartheta = \pi/3$ e $\dot\vartheta = 2\omega$ si deduce

$$\vec{Q} \,=\, mR\Big(\frac{1}{2}\,\hat{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{e}_2\Big)\,2\omega \,=\, mR\omega(\hat{e}_1 + \sqrt{3}\,\hat{e}_2).$$

(*e*) **Energia meccanica**
L'energia meccanica è data, per definizione, dalla somma dell'energia cinetica $T(\vartheta, \dot\vartheta)$ e dell'energia potenziale $-U(\vartheta)$ del sistema:

$$H(\vartheta, \dot\vartheta) \,=\, T(\vartheta, \dot\vartheta) - U(\vartheta) \,=\, mR^2\dot\vartheta^2 - mgR\cos\vartheta - \Big(2k + \frac{m\omega^2}{2}\Big)R^2\sin^2\vartheta\,.$$

Si tratta di un integrale primo delle equazioni del moto, che possono porsi nella forma normale equivalente del primo ordine

$$\begin{cases} \dot\vartheta \,=\, v \\ \dot v \,=\, \dfrac{1}{2mR^2}\big[-mgR\sin\vartheta + (4k + m\omega^2)R^2\sin\vartheta\cos\vartheta\big]. \end{cases}$$

Risulta infatti:

$$\begin{aligned} \dot H(\vartheta, v) \,&=\, \frac{\partial H}{\partial\vartheta}(\vartheta, v)\,\dot\vartheta + \frac{\partial H}{\partial v}(\vartheta, v)\,\dot v \,= \\ &=\, \big[mgR\sin\vartheta - (4k + m\omega^2)R^2\sin\vartheta\cos\vartheta\big]\,v + \\ &+\, 2mR^2 v\,\frac{1}{2mR^2}\big[-mgR\sin\vartheta + (4k + m\omega^2)R^2\sin\vartheta\cos\vartheta\big] \,=\, 0 \end{aligned}$$

identicamente $\forall\,(\vartheta, v) \in \mathbb{R}^2$. Il risultato segue allora dal teorema di caratterizzazione degli integrali primi — si osservi che $H(\vartheta, v)$ è una funzione C^∞ in $\mathbb{R}^2$.