Prova scritta di meccanica razionale 1 A-L del 09.01.2008

Esercizio 1

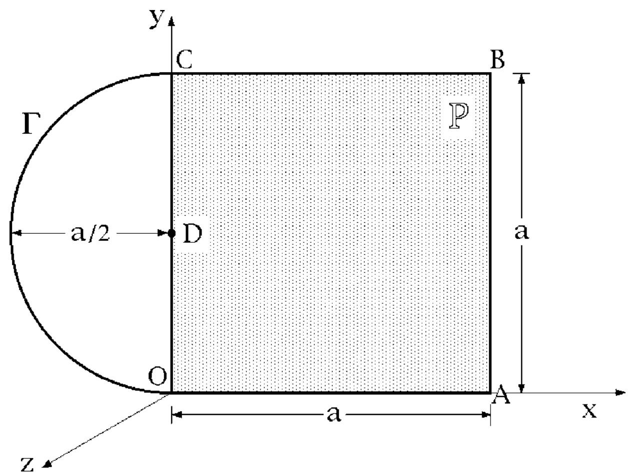
Un punto materiale pesante è vincolato a scorrere lungo la curva di equazione $y = x - (x^2/a)$, $x \in \mathbb{R}$, nel piano Oxy di una terna inerziale con l'asse verticale Oy diretto verso l'alto (a indica una lunghezza caratteristica del sistema). Indicata con m la massa del punto, determinare:

(a) le equazioni pure del moto nell'ipotesi che la curva sia liscia;

(b) gli equilibri del sistema qualora la curva abbia coefficiente di attrito radente statico $\mu_s = 1/5$.

Esercizio 2

Un corpo rigido si compone di una piastra quadrata $\mathbb{P} = OABC$ e di una semicirconferenza Γ di centro D, entrambe collocate nel piano Oxy di una terna cartesiana $Oxyz$. La piastra ha i lati di lunghezza a e paralleli agli assi coordinati, mentre Γ ha raggio $a/2$ ed è saldata a $\mathbb{P}$ nei propri estremi O e C (vedi figura). La curva Γ è omogenea, di massa $\mu/3$. La densità di $\mathbb{P}$ si scrive infine $\sigma(x,y) = \mu xy^2/a^5 \ \forall\,(x,y) \in \mathbb{P}$.



Determinare:

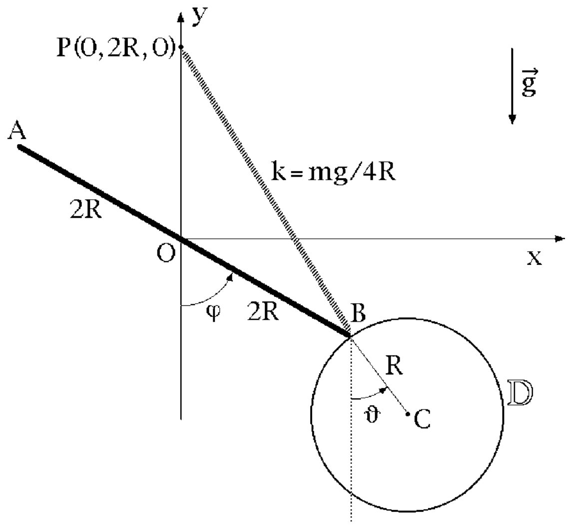
(a) il baricentro del sistema rispetto ad $Oxyz$, verificando la proprietà dell'inviluppo convesso;

(b) la matrice d'inerzia della curva Γ relativamente ad $Oxyz$;

(c) il momento d'inerzia della piastra $\mathbb{P}$ rispetto alla retta OB.

Esercizio 3

Nel piano Oxy di una terna inerziale $Oxyz$ è vincolato a muoversi il sistema pesante composto da: (a) un'asta omogenea AB, di lunghezza $4R$ e massa m, con punto medio fisso nell'origine O e (b) un disco circolare omogeneo $\mathbb{D}$, di centro C, raggio R e massa m, incernierato all'asta in un punto B del proprio bordo. Una molla ideale di costante elastica $k = mg/4R$ congiunge B con il punto fisso $P(0, 2R, 0)$ (vedi figura).



Nell'ipotesi di vincoli ideali, si usino gli angoli φ, ϑ in figura per determinare del sistema:

(a) gli equilibri relativi a $Oxyz$;

(b) la stabilità dei predetti equilibri;

(c) l'energia cinetica relativa a $Oxyz$;

(d) le equazioni pure del moto;

(e) la quantità di moto rispetto a $Oxyz$.

Soluzione dell'esercizio 1

(a) **Equazioni pure del moto nel caso la curva sia liscia**

La parametrizzazione della curva vincolare si scrive

$$P(x) - O \;=\; x\,\hat{e}_1 + \Big(x - \frac{x^2}{a}\Big)\hat{e}_2\;, \quad x \in \mathbb{R}$$

ed ammette le derivate

$$P'(x) \;=\; \hat{e}_1 + \Big(1 - \frac{2x}{a}\Big)\hat{e}_2 \qquad\qquad P''(x) \;=\; -\frac{2}{a}\hat{e}_2\,.$$

La curva è chiaramente C^∞ e regolare, in quanto $P'(x) \neq 0\;\forall\, x \in \mathbb{R}$. L'equazione del moto si ricava partendo dal postulato delle reazioni vincolari

$$m\ddot{P} \;=\; -mg\,\hat{e}_2 + \vec{\Phi}$$

dove l'accelerazione istantanea è data dalle relazioni

$$\dot{P} \;=\; P'(x)\dot{x} \qquad\qquad \ddot{P} \;=\; P'(x)\ddot{x} + P''(x)\dot{x}^2$$

e la reazione vincolare $\vec{\Phi}$ deve essere rimossa grazie all'ipotesi di vincolo liscio

$$\vec{\Phi}\cdot P'(x) \;=\; 0\,.$$

L'equazione pura del moto diventa perciò

$$m[P'(x)\ddot{x} + P''(x)\dot{x}^2]\cdot P'(x) \;=\; -mg\,\hat{e}_2\cdot P'(x)$$

ovvero

$$|P'(x)|^2\ddot{x} + P''(x)\cdot P'(x)\,\dot{x}^2 \;=\; -g\,\hat{e}_2\cdot P'(x)\,.$$

Una forma equivalente di questa equazione è

$$|P'(x)|^2\ddot{x} + \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{2}|P'(x)|^2\Big)\dot{x}^2 \;=\; -g\,\hat{e}_2\cdot P'(x)\,.$$

Nella fattispecie si ha

$$|P'(x)|^2 \;=\; 1 + \Big(1 - \frac{2x}{a}\Big)^2 \qquad \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{2}|P'(x)|^2\Big) \;=\; \frac{2}{a}\Big(\frac{2x}{a} - 1\Big)$$

per cui l'equazione del moto richiesta si riduce a

$$\Big[1 + \Big(1 - \frac{2x}{a}\Big)^2\Big]\ddot{x} + \frac{2}{a}\Big(\frac{2x}{a} - 1\Big)\dot{x}^2 \;=\; -g\Big(1 - \frac{2x}{a}\Big)\,.$$

(b) **Equilibri nel caso di curva con attrito**
Poichè la sola forza attiva agente è il peso e la curva vincolare ha la forma $y = f(x)$, la legge di Coulomb-Morin dell'attrito radente statico si riduce a

$$|f'(x)| \leq \mu_s$$

ossia

$$\left|1 - \frac{2x}{a}\right| \leq \frac{1}{5}\,.$$

Quest'ultima relazione si può riscrivere sotto forma di doppia disequazione

$$-\frac{1}{5} \leq \frac{2x}{a} - 1 \leq \frac{1}{5}$$

dalla quale si deduce l'espressione

$$\frac{4}{5} \leq \frac{2x}{a} \leq \frac{6}{5}$$

ed infine la caratterizzazione completa degli equilibri del sistema

$$\frac{2}{5}a \leq x \leq \frac{3}{5}a\,.$$

Le configurazioni di equilibrio si hanno dunque $\forall\, x \in (2a/5, 3a/5)$.

Soluzione dell'esercizio 2
(a) **Baricentro del sistema e verifica della proprietà dell'inviluppo convesso**
Baricentro della piastra
La massa della piastra quadrata si calcola direttamente dalla definizione, mediante l'integrale di superficie

$$m_{\mathbb{P}} = \int_{\mathbb{P}} \sigma\, dA = \int_0^a dx \int_0^a dy\, \frac{\mu}{a^5} x y^2 = \frac{\mu}{a^5} \int_0^a x\, dx \int_0^a y^2 dy = \frac{\mu}{a^5}\frac{a^2}{2}\frac{a^3}{3} = \frac{\mu}{6}\,.$$

Ciò premesso, si osserva che il piano di giacitura Oxy costituisce un piano di simmetria della piastra, per cui il baricentro di $\mathbb{P}$ deve potersi individuare mediante un vettore posizione della forma

$$G_{\mathbb{P}} - O = x_{\mathbb{P}}\hat{e}_1 + y_{\mathbb{P}}\hat{e}_2$$

con ascissa

$$x_{\mathbb{P}} = \frac{1}{m_{\mathbb{P}}} \int_{\mathbb{P}} x\, \sigma\, dA = \frac{6}{\mu} \int_0^a dx \int_0^a dy\, x \frac{\mu}{a^5} x y^2 = \frac{6}{a^5} \int_0^a x^2 dx \int_0^a y^2 dy = \frac{6}{a^5}\frac{a^3}{3}\frac{a^3}{3} = \frac{2}{3}a$$

e ordinata

$$y_{\mathbb{P}} = \frac{1}{m_{\mathbb{P}}} \int_{\mathbb{P}} y\, \sigma\, dA = \frac{6}{\mu} \int_0^a dx \int_0^a dy\, y \frac{\mu}{a^5} x y^2 = \frac{6}{a^5} \int_0^a x\, dx \int_0^a y^3 dy = \frac{6}{a^5}\frac{a^2}{2}\frac{a^4}{4} = \frac{3}{4}a$$

per cui

$$G_{\mathbb{P}} - O = \frac{2}{3}a\,\hat{e}_1 + \frac{3}{4}a\,\hat{e}_2\,.$$

Baricentro della curva Γ

La semicirconferenza Γ può essere descritta per mezzo della parametrizzazione

$$x = -\frac{a}{2}\sin\varphi \qquad y = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos\varphi\ , \quad \varphi \in [0,\pi]\,,$$

ovvero

$$P(\varphi) - O = -\frac{a}{2}\sin\varphi\,\hat{e}_1 + \frac{a}{2}(1+\cos\varphi)\hat{e}_2\ , \quad \varphi \in [0,\pi]\,,$$

alla quale corrisponde l'elemento infinitesimo di lunghezza

$$ds = |P'(\varphi)|d\varphi = \sqrt{\Big(\frac{dx}{d\varphi}\Big)^2 + \Big(\frac{dy}{d\varphi}\Big)^2}d\varphi = \sqrt{\Big(-\frac{a}{2}\cos\varphi\Big)^2 + \Big(-\frac{a}{2}\sin\varphi\Big)^2}d\varphi = \frac{a}{2}d\varphi\,.$$

Trattandosi di curva omogenea, è immediato convincersi che la retta $y = a/2$ nel piano coordinato Oxy costituisce un asse di simmetria di Γ, per cui il vettore posizione del baricentro G_Γ deve risultare del tipo

$$G_\Gamma - O = x_\Gamma\hat{e}_1 + \frac{a}{2}\,\hat{e}_2$$

e la sola coordinata da determinare è l'ascissa

$$x_\Gamma = \frac{1}{m_\Gamma}\int_\Gamma x\,\lambda\,ds = \frac{3}{\mu}\int_0^\pi \Big(-\frac{a}{2}\sin\varphi\Big)\frac{2\mu}{3\pi a}\,\frac{a}{2}d\varphi = -\frac{a}{2\pi}\int_0^\pi \sin\varphi\,d\varphi = -\frac{a}{\pi}\,,$$

essendo per ipotesi $m_\Gamma = \mu/3$ e $\lambda = (\mu/3)/(\pi a/2) = 2\mu/3\pi a$. Per il baricentro G_Γ si ha così l'espressione

$$G_\Gamma - O = -\frac{a}{\pi}\,\hat{e}_1 + \frac{a}{2}\,\hat{e}_2\,.$$

Baricentro del sistema

Per calcolare il baricentro del sistema si può ora ricorrere alla proprietà distributiva, determinando il "baricentro dei baricentri" delle due parti $\mathbb{P}$ e Γ:

$$G - O = \frac{1}{m_\mathbb{P} + m_\Gamma}\big[m_\mathbb{P}(G_\mathbb{P} - O) + m_\Gamma(G_\Gamma - O)\big]\,. \tag{.1}$$

Basta osservare che la massa del sistema vale

$$m_\mathbb{P} + m_\Gamma = \frac{\mu}{6} + \frac{\mu}{3} = \frac{\mu}{2}$$

mentre l'espressione entro parentesi quadrate nella (.1) risulta

$$m_\mathbb{P}(G_\mathbb{P} - O) + m_\Gamma(G_\Gamma - O) = \frac{\mu}{6}\Big(\frac{2}{3}a\,\hat{e}_1 + \frac{3}{4}a\,\hat{e}_2\Big) + \frac{\mu}{3}\Big(-\frac{a}{\pi}\,\hat{e}_1 + \frac{a}{2}\,\hat{e}_2\Big)$$

in modo che il vettore posizione del baricentro diventa

$$\begin{aligned} G - O \;&=\; \frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}a\,\hat{e}_1 + \frac{3}{4}a\,\hat{e}_2\Big) + \frac{2}{3}\Big(-\frac{a}{\pi}\,\hat{e}_1 + \frac{a}{2}\,\hat{e}_2\Big) \;= \\ &=\; \frac{2}{9}a\,\hat{e}_1 + \frac{1}{4}a\,\hat{e}_2 - \frac{2}{3\pi}a\,\hat{e}_1 + \frac{a}{3}\,\hat{e}_2 \;=\; \Big(\frac{2}{9} - \frac{2}{3\pi}\Big)a\,\hat{e}_1 + \frac{7}{12}a\,\hat{e}_2\,. \end{aligned}$$

Il baricentro G appartiene al quadrato $OABC$, in quanto

$$0 \,<\, \Big(\frac{2}{9} - \frac{2}{3\pi}\Big)a \,<\, a \qquad \text{e} \qquad 0 \,<\, \frac{7}{12}a \,<\, a$$

per cui G è certamente contenuto nell'inviluppo convesso del sistema (l'unione del quadrato chiuso $OABC$ e del semidisco chiuso delimitato dal diametro OC e dalla curva Γ).

(b) **Matrice d'inerzia della curva materiale**
La semicirconferenza Γ giace interamente nel piano coordinato Oxy; ne deriva che la matrice d'inerzia di Γ relativa alla terna $Oxyz$ deve assumere la forma generale

$$[L_O^\Gamma] \;=\; \begin{pmatrix} L_{xx}^\Gamma & L_{xy}^\Gamma & 0 \\ L_{xy}^\Gamma & L_{yy}^\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx}^\Gamma + L_{yy}^\Gamma \end{pmatrix}.$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse Ox viene ricavato per mezzo della definizione

$$\begin{aligned} L_{xx}^\Gamma \;&=\; \int_\Gamma y^2\lambda\,ds \;=\; \int_0^\pi \Big(\frac{a}{2}\Big)^2(1+\cos\varphi)^2\,\frac{2\mu}{3\pi a}\,\frac{a}{2}\,d\varphi \;=\; \frac{a^2}{4}\,\frac{2\mu}{3\pi a}\,\frac{a}{2}\int_0^\pi (1+\cos\varphi)^2 d\varphi \;= \\ &=\; \frac{1}{12\pi}\mu a^2 \int_0^\pi (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi \;= \\ &=\; \frac{1}{12\pi}\mu a^2 \int_0^\pi \Big(1 + 2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\Big)\,d\varphi \;= \\ &=\; \frac{1}{12\pi}\mu a^2 \Big[\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big]_0^\pi \;=\; \frac{1}{12\pi}\mu a^2\frac{3}{2}\pi \;=\; \frac{1}{8}\mu a^2 \end{aligned}$$

e in modo analogo si provvede al calcolo del momento d'inerzia relativo ad Oy

$$\begin{aligned} L_{yy}^\Gamma \;&=\; \int_\Gamma x^2\lambda\,ds \;=\; \int_0^\pi \frac{a^2}{4}\sin^2\varphi\,\frac{2\mu}{3\pi a}\,\frac{a}{2}\,d\varphi \;=\; \frac{1}{12\pi}\mu a^2 \int_0^\pi \sin^2\varphi\,d\varphi \;= \\ &=\; \frac{1}{12\pi}\mu a^2 \int_0^\pi \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi \;=\; \frac{1}{12\pi}\mu a^2 \Big[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4}\Big]_0^\pi \;=\; \frac{1}{24}\mu a^2. \end{aligned}$$

Per il prodotto d'inerzia non banale si ha infine

$$
\begin{aligned}
L_{xy}^{\Gamma} &= -\int_{\Gamma} xy\,\lambda\,ds = -\int_0^{\pi}\Big(-\frac{a}{2}\sin\varphi\Big)\,\frac{a}{2}(1+\cos\varphi)\,\frac{2\mu}{3\pi a}\,\frac{a}{2}\,d\varphi = \\
&= \frac{1}{12\pi}\mu a^2\int_0^{\pi}(\sin\varphi+\sin\varphi\cos\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{12\pi}\mu a^2\Big[-\cos\varphi+\frac{\sin^2\varphi}{2}\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{6\pi}\mu a^2.
\end{aligned}
$$

La matrice d'inerzia della curva materiale Γ vale perciò

$$
[L_O^{\Gamma}] = \mu a^2\begin{pmatrix} 1/8 & 1/6\pi & 0 \\ 1/6\pi & 1/24 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}. \tag{.2}
$$

(c) **Momento d'inerzia della piastra rispetto alla retta OB**
Anche in questo caso la matrice d'inerzia da determinare è quella di un sistema ubicato nel piano coordinato Oxy della terna di riferimento:

$$
[L_O^{\mathbb{P}}] = \begin{pmatrix} L_{xx}^{\mathbb{P}} & L_{xy}^{\mathbb{P}} & 0 \\ L_{xy}^{\mathbb{P}} & L_{yy}^{\mathbb{P}} & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx}^{\mathbb{P}}+L_{yy}^{\mathbb{P}} \end{pmatrix}.
$$

Il momento d'inerzia relativo a Ox è dato dall'integrale doppio

$$
L_{xx}^{\mathbb{P}} = \int_{\mathbb{P}} y^2\sigma\,dA = \int_0^a dx\int_0^a dy\,y^2\,\frac{\mu}{a^5}xy^2 = \frac{\mu}{a^5}\int_0^a x\,dx\int_0^a y^4dy = \frac{\mu}{a^5}\,\frac{a^2}{2}\,\frac{a^5}{5} = \frac{1}{10}\mu a^2
$$

mentre quello rispetto a Oy vale

$$
L_{yy}^{\mathbb{P}} = \int_{\mathbb{P}} x^2\sigma\,dA = \int_0^a dx\int_0^a dy\,x^2\,\frac{\mu}{a^5}xy^2 = \frac{\mu}{a^5}\int_0^a x^3dx\int_0^a y^2dy = \frac{\mu}{a^5}\,\frac{a^4}{4}\,\frac{a^3}{3} = \frac{1}{12}\mu a^2.
$$

Da ultimo si calcola il prodotto d'inerzia residuo

$$
\begin{aligned}
L_{xy}^{\mathbb{P}} &= -\int_{\mathbb{P}} xy\,\sigma\,dA = -\int_0^a dx\int_0^a dy\,xy\frac{\mu}{a^5}xy^2 = \\
&= -\frac{\mu}{a^5}\int_0^a x^2dx\int_0^a y^3dy = -\frac{\mu}{a^5}\,\frac{a^3}{3}\,\frac{a^4}{4} = -\frac{1}{12}\mu a^2.
\end{aligned}
$$

Ne risulta così la matrice d'inerzia

$$[L_O^{\mathbb{P}}] \;=\; \mu a^2 \begin{pmatrix} 1/10 & -1/12 & 0 \\ -1/12 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 11/60 \end{pmatrix}.$$

La retta OB passa chiaramente per l'origine O della terna di riferimento in cui è nota la matrice d'inerzia. Per calcolare il momento d'inerzia relativo ad OB della piastra basta quindi determinare il versore direttore della retta

$$\hat{n} \;=\; \frac{B-O}{|B-O|} \;=\; \frac{a\,\hat{e}_1 + a\,\hat{e}_2}{|a\,\hat{e}_1 + a\,\hat{e}_2|} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{e}_2$$

e fare uso della formula generale

$$\begin{aligned} I_{OB} \;=\; I_{O\hat{n}} \;=\; \hat{n}\cdot L_O^{\mathbb{P}}(\hat{n}) \;=\; \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\;\;\frac{1}{\sqrt{2}}\;\;0\Big)[L_O^{\mathbb{P}}]\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \\ =\; \frac{1}{2}(1\;\;1\;\;0)\;\mu a^2 \begin{pmatrix} 1/10 & -1/12 & 0 \\ -1/12 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 11/60 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \\ =\; \frac{1}{2}\mu a^2\,(1\;\;1\;\;0)\begin{pmatrix} 1/60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{120}\mu a^2. \end{aligned}$$

Soluzione dell'esercizio 3
(a) **Equilibri relativi a** $Oxyz$
Si tratta di un sistema scleronomo a vincoli bilaterali ideali, soggetto unicamente a sollecitazioni posizionali e conservative. I suoi equilibri si identificano perciò con tutti e soli i punti critici del potenziale di sistema, $U(\varphi,\vartheta)$, che può essere ricavato facilmente sommando i potenziali relativi alle forze peso e all'interazione elastica fra i punti B e P.

Potenziale gravitazionale
Il potenziale gravitazionale del sistema consiste nella somma di due contributi, l'uno relativo all'asta AB e l'altro relativo al disco circolare $\mathbb{D}$. Poichè l'asta è omogenea e vincolata a ruotare attorno al proprio punto medio e baricentro O, il potenziale gravitazionale di AB è costantemente nullo e può essere ignorato. Quanto al disco, si hanno le utili relazioni:

$$B-O \;=\; 2R\sin\varphi\,\hat{e}_1 - 2R\cos\varphi\,\hat{e}_2 \tag{.3}$$

$$C-O \;=\; B-O \,+\, C-B \;=\; 2R\sin\varphi\,\hat{e}_1 - 2R\cos\varphi\,\hat{e}_2 + R\sin\vartheta\,\hat{e}_1 - R\cos\vartheta\,\hat{e}_2$$

dalle quali si deduce che il potenziale gravitazionale ha l'espressione:

$$U_{\rm g} \;=\; -mg\,\hat{e}_2\cdot(C-O) \;=\; -mg(-2R\cos\varphi - R\cos\vartheta) \;=\; mgR(2\cos\varphi+\cos\vartheta)\,. \tag{.4}$$

Potenziale elastico
L'equazione (.3) e l'ovvia relazione $P - O = 2R\,\hat{e}_2$ implicano che si abbia

$$B - P \;=\; 2R\sin\varphi\,\hat{e}_1 - 2R\cos\varphi\,\hat{e}_2 - 2R\,\hat{e}_2 \;=\; 2R\sin\varphi\,\hat{e}_1 - 2R(\cos\varphi + 1)\,\hat{e}_2$$

per cui il potenziale associato all'interazione elastica fra il punto fisso P e l'estremo B assume la forma

$$\begin{aligned} U_{\rm el} \;&=\; -\frac{k}{2}|B-P|^2 \;=\; -\frac{k}{2}4R^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi + 2\cos\varphi + 1) \;= \\ &=\; -2kR^2(2 + 2\cos\varphi) \;=\; -4kR^2\cos\varphi + \text{costante} \end{aligned}$$

e con $k = mg/4R$ si riduce a

$$U_{\rm el} \;=\; -mgR\cos\varphi\,. \tag{.5}$$

Potenziale del sistema
Non rimane che sommare i potenziali parziali (.4) e (.5) per ottenere il potenziale del sistema:

$$U(\varphi,\vartheta) \;=\; U_{\rm g} + U_{\rm el} \;=\; mgR(2\cos\varphi + \cos\vartheta) - mgR\cos\varphi \;=\; mgR(\cos\varphi + \cos\vartheta)\,. \tag{.6}$$

Equilibri
In quanto punti critici del potenziale, gli equilibri del sistema si ricavano annullando simultaneamente le derivate parziali prime di U:

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi} \;=\; -mgR\sin\varphi \;=\; 0 \qquad\qquad \frac{\partial U}{\partial\vartheta} \;=\; -mgR\sin\vartheta \;=\; 0$$

ossia risolvendo il semplice sistema di equazioni trigonometriche

$$\begin{cases} \sin\varphi \;=\; 0 \\ \sin\vartheta \;=\; 0 \end{cases}$$

dal quale si deducono le ovvie soluzioni

$$(\varphi,\vartheta) \;=\; (0,0)\;, \quad (\varphi,\vartheta) \;=\; (0,\pi)\;, \quad (\varphi,\vartheta) \;=\; (\pi,0)\;, \quad (\varphi,\vartheta) \;=\; (\pi,\pi)$$

che individuano quattro distinte configurazioni di equilibrio del sistema — gli angoli di equilibrio sono definiti a meno di multipli interi di 2π, fisicamente irrilevanti.

(*b*) **Stabilità degli equilibri**
Il sistema scleronomo è soggetto unicamente a sollecitazioni posizionali conservative. La stabilità dei suoi equilibri ordinari può essere analizzata facendo uso dei teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale. A questo scopo occorre determinare le derivate parziali seconde del potenziale U:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} \;=\; -mgR\cos\varphi \qquad\quad \frac{\partial^2 U}{\partial\vartheta^2} \;=\; -mgR\cos\vartheta \qquad\quad \frac{\partial^2 U}{\partial\vartheta\partial\varphi} \;=\; \frac{\partial^2 U}{\partial\varphi\partial\vartheta} \;=\; 0$$

per poi valutare il segno degli autovalori della matrice hessiana corrispondente in ciascuna configurazione di equilibrio. Da notare che la matrice hessiana è in ogni caso diagonale, per cui gli autovalori sono immediatamente identificabili con i suoi elementi diagonali.

Configurazione $(\varphi, \vartheta) = (0, 0)$
La matrice hessiana del potenziale vale in questo caso

$$H_U(0,0) \;=\; mgR \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ed ha due autovalori negativi. Ne deriva che la configurazione di equilibrio costituisce un massimo relativo proprio del potenziale e che la sua stabilità è garantita dal teorema di Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $(\varphi, \vartheta) = (0, \pi)$
Nella fattispecie la matrice hessiana di U diventa

$$H_U(0,\pi) \;=\; mgR \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed ammette un autovalore positivo. L'instabilità della configurazione segue dal teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $(\varphi, \vartheta) = (\pi, 0)$
Anche in questa configurazione la matrice hessiana del potenziale presenta un autovalore positivo:

$$H_U(\pi,0) \;=\; mgR \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che implica l'instabilità dell'equilibrio in virtù del teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $(\varphi, \vartheta) = (\pi, \pi)$
In quest'ultimo caso la matrice hessiana del potenziale presenta due autovalori positivi (la configurazione rappresenta perciò un minimo relativo proprio di U):

$$H_U(\pi,\pi) \;=\; mgR \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per cui l'equilibrio è instabile.

(c) **Energia cinetica**
L'energia cinetica T del sistema è determinata dalla somma delle energie cinetiche parziali dell'asta AB e del disco $\mathbb{D}$.

Energia cinetica dell'asta AB
L'asta ruota attorno all'asse fisso Oz secondo l'angolo di rotazione φ. Il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse fisso è dato da

$$I_{Oz}^{AB} = \frac{1}{12}m(4R)^2 = \frac{4}{3}mR^2$$

per cui la relativa energia cinetica si scrive

$$T_{AB} = \frac{1}{2}I_{Oz}^{AB}|\dot{\varphi}\,\hat{e}_3|^2 = \frac{1}{2}\frac{4}{3}mR^2\,\dot{\varphi}^2 = \frac{2}{3}mR^2\,\dot{\varphi}^2.$$

Energia cinetica del disco $\mathbb{D}$
Il disco si muove nel piano Oxy, ma senza alcun punto fisso. L'energia cinetica deve essere valutata ricorrendo al teorema di König. Il disco è omogeneo, per cui il suo baricentro coincide con il centro geometrico C. Il teorema di König porge perciò l'espressione

$$T_{\mathbb{D}} = \frac{m}{2}\dot{C}^2 + \frac{1}{2}I_{Cz}^{\mathbb{D}}|\dot{\vartheta}\,\hat{e}_3|^2$$

dove il vettore posizione del baricentro si scrive

$$C - O = R(\sin\vartheta + 2\sin\varphi)\,\hat{e}_1 - R(\cos\vartheta + 2\cos\varphi)\,\hat{e}_2$$

e la corrispondente velocità istantanea assume la forma

$$\dot{C} = R(\cos\vartheta\,\dot{\vartheta} + 2\cos\varphi\,\dot{\varphi})\,\hat{e}_1 + R(\sin\vartheta\,\dot{\vartheta} + 2\sin\varphi\,\dot{\varphi})\,\hat{e}_2$$

con modulo quadrato

$$\begin{aligned}\dot{C}^2 &= R^2\big(\cos^2\vartheta\,\dot{\vartheta}^2 + 4\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 + 4\cos\vartheta\cos\varphi\,\dot{\vartheta}\dot{\varphi} + \\ &\qquad + \sin^2\vartheta\,\dot{\vartheta}^2 + 4\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 + 4\sin\vartheta\sin\varphi\,\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\big) = \\ &= R^2\big[\dot{\vartheta}^2 + 4\dot{\varphi}^2 + 4\cos(\vartheta-\varphi)\,\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\big]\end{aligned}$$

mentre il momento d'inerzia risulta

$$I_{Cz}^{\mathbb{D}} = \frac{mR^2}{2}\,.$$

L'energia cinetica del disco vale pertanto

$$T_{\mathbb{D}} = \frac{mR^2}{2}\big[\dot{\vartheta}^2 + 4\dot{\varphi}^2 + 4\cos(\vartheta-\varphi)\,\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\big] + \frac{1}{4}mR^2\dot{\vartheta}^2 = \frac{mR^2}{2}\left[4\,\dot{\varphi}^2 + \frac{3}{2}\dot{\vartheta}^2 + 4\cos(\vartheta-\varphi)\,\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\right].$$

Energia cinetica del sistema
Per ricavare l'energia cinetica del sistema non rimane che sommare le energie cinetiche appena calcolate per l'asta e per il disco:

$$\begin{aligned}T &= \frac{2}{3}mR^2\,\dot{\varphi}^2 + \frac{mR^2}{2}\left[4\,\dot{\varphi}^2 + \frac{3}{2}\dot{\vartheta}^2 + 4\cos(\vartheta-\varphi)\,\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\right] = \\ &= \frac{mR^2}{2}\left[\frac{16}{3}\dot{\varphi}^2 + \frac{3}{2}\dot{\vartheta}^2 + 4\cos(\vartheta-\varphi)\,\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\right].\end{aligned}$$

(d) **Equazioni pure del moto**

Il sistema è a vincoli bilaterali ideali, posizionale e conservativo. Le equazioni pure del moto sono quelle di Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\varphi}}\Big) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \varphi} = 0 \qquad\qquad \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\vartheta}}\Big) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \vartheta} = 0$$

con la lagrangiana

$$\mathfrak{L} = T + U = \frac{mR^2}{2}\left[\frac{16}{3}\dot{\varphi}^2 + \frac{3}{2}\dot{\vartheta}^2 + 4\cos(\vartheta-\varphi)\,\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\right] + mgR(\cos\varphi + \cos\vartheta)$$

dalla quale è immediato calcolare le espressioni seguenti:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{mR^2}{2}\left[\frac{32}{3}\dot{\varphi} + 4\cos(\varphi-\vartheta)\,\dot{\vartheta}\right] = mR^2\left[\frac{16}{3}\dot{\varphi} + 2\cos(\varphi-\vartheta)\,\dot{\vartheta}\right] \\
\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\varphi}}\Big) &= mR^2\left[\frac{16}{3}\ddot{\varphi} + 2\cos(\varphi-\vartheta)\,\ddot{\vartheta} - 2\sin(\varphi-\vartheta)(\dot{\varphi}\dot{\vartheta} - \dot{\vartheta}^2)\right] \\
\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \varphi} &= -2mR^2\sin(\varphi-\vartheta)\,\dot{\varphi}\dot{\vartheta} - mgR\sin\varphi \\
\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\vartheta}} &= \frac{mR^2}{2}\left[3\dot{\vartheta} + 4\cos(\varphi-\vartheta)\,\dot{\varphi}\right] = mR^2\left[\frac{3}{2}\dot{\vartheta} + 2\cos(\varphi-\vartheta)\,\dot{\varphi}\right] \\
\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\vartheta}}\Big) &= mR^2\left[\frac{3}{2}\ddot{\vartheta} + 2\cos(\varphi-\vartheta)\,\ddot{\varphi} - 2\sin(\varphi-\vartheta)(\dot{\varphi}^2 - \dot{\vartheta}\dot{\varphi})\right] \\
\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \vartheta} &= +2mR^2\sin(\varphi-\vartheta)\dot{\varphi}\dot{\vartheta} - mgR\sin\vartheta\,.
\end{aligned}$$

Le equazioni del moto diventano pertanto

$$\begin{aligned}
mR^2\left[\frac{16}{3}\ddot{\varphi} + 2\cos(\varphi-\vartheta)\,\ddot{\vartheta} + 2\sin(\varphi-\vartheta)\dot{\vartheta}^2\right] + mgR\sin\varphi &= 0 \\
mR^2\left[\frac{3}{2}\ddot{\vartheta} + 2\cos(\varphi-\vartheta)\,\ddot{\varphi} - 2\sin(\varphi-\vartheta)\dot{\varphi}^2\right] + mgR\sin\vartheta &= 0\,.
\end{aligned}$$

(e) **Quantità di moto**

La quantità di moto del sistema è la somma delle quantità di moto delle sue parti costituenti, l'asta AB e il disco $\mathbb{D}$. A loro volta, le quantità di moto parziali si ottengono moltiplicando le rispettive masse per le velocità istantanee dei relativi baricentri. Si ha pertanto:

$$\begin{aligned}
\vec{Q} = \vec{Q}^{AB} + \vec{Q}^{\mathbb{D}} &= m\dot{O} + m\dot{C} = m\dot{C} = \\
&= mR(\cos\vartheta\,\dot{\vartheta} + 2\cos\varphi\,\dot{\varphi})\,\hat{e}_1 + mR(\sin\vartheta\,\dot{\vartheta} + 2\sin\varphi\,\dot{\varphi})\,\hat{e}_2\,.
\end{aligned}$$