

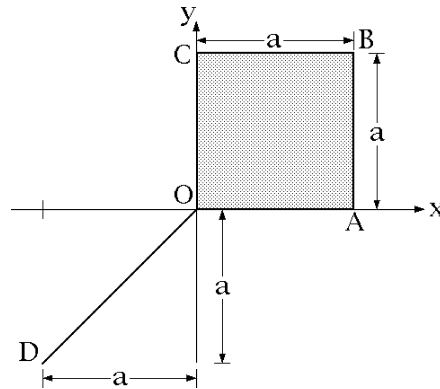
Esercizio 1

Un sistema rigido si compone di una lamina quadrata $OABC$ di lato a e di un'asta rettilinea OD di lunghezza $\sqrt{2}a$. Rispetto ad una terna solidale $Oxyz$ l'asta OD si dispone secondo la bisettrice del terzo quadrante nel piano coordinato Oxy e la sua densità lineare è data da

$$\lambda(x) = \frac{\mu}{\sqrt{2}a^2}(-x) \quad \forall x \in [-a, 0].$$

La lamina $OABC$ coincide invece con il quadrato $\{(x, y) \in [0, a]^2\}$ e ha densità areale

$$\sigma(x, y) = \frac{\mu}{a^3}(x + y) \quad \forall (x, y) \in [0, a] \times [0, a].$$



Determinare:

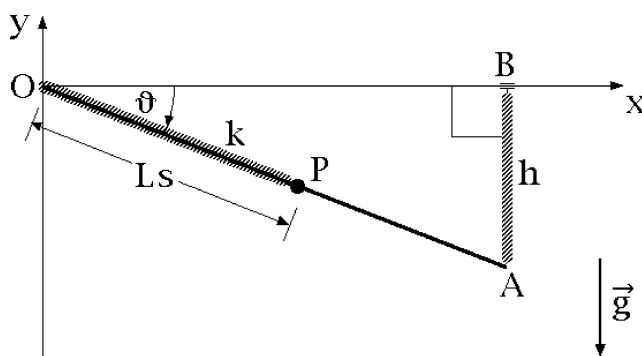
- (a) la posizione del baricentro rispetto alla terna $Oxyz$;
- (b) la matrice d'inerzia rispetto alla stessa terna;
- (c) una terna principale d'inerzia in O ;
- (d) il momento d'inerzia rispetto all'asse $y = -2x$ nel piano Oxy ;
- (e) nell'ipotesi che il sistema abbia asse fisso Oz privo di attrito, il valore del parametro β per cui si ha equilibrio sotto l'azione delle forze:

$$\vec{F}_B = \hat{e}_1 + \beta \hat{e}_2 \text{ applicata in } B, \text{ e}$$

$$\vec{F}_D = 2\hat{e}_1 \text{ agente in } D.$$

Esercizio 2

Un'asta rigida omogenea OA , di massa m e lunghezza L , è vincolata a ruotare nel piano verticale Oxy attorno al punto fisso O . L'estremo libero A dell'asta è connesso alla sua proiezione ortogonale B sull'asse orizzontale Ox mediante una molla ideale di costante elastica h . Un punto P di massa m può scorrere liberamente lungo l'asta, collegato all'origine O da una molla ideale di costante $k > m^2g^2/L^2h$. L'intero sistema è soggetto al proprio peso.



Supponendo i vincoli ideali, si utilizzino le coordinate adimensionali $s \in [0, 1]$ e $\vartheta \in \mathbb{R}$ in figura per determinare del sistema:

- l'espressione dell'energia cinetica relativa alla terna ortogonale destra $Oxyz$;
- le espressioni dell'impulso e del momento angolare in O rispetto a $Oxyz$;
- gli equilibri ordinari e di confine;
- le proprietà di stabilità degli equilibri ordinari;
- le equazioni pure del moto.

Soluzione dell'esercizio 1

(a) Baricentro

Il baricentro del sistema viene calcolato determinando separatamente i baricentri dell'asta OD e della lamina quadrata $OABC$ e applicando poi il teorema distributivo.

Baricentro dell'asta

La massa dell'asta si ricava per integrazione diretta della densità lineare λ sul segmento OD , ricordando che la massa dell'elemento infinitesimo di asta compreso fra i valori x e $x + dx$ dell'ascissa si scrive:

$$dm = \lambda(x)\sqrt{dx^2 + dx^2} = -\frac{\mu}{\sqrt{2}a^2}x\sqrt{2}dx = -\frac{\mu}{a^2}x dx.$$

La massa m_1 dell'asta vale pertanto:

$$m_1 = \int_{-a}^0 -\frac{\mu}{a^2}x dx = -\frac{\mu}{a^2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-a}^0 = \frac{\mu}{2}.$$

L'asta si colloca lungo la retta di equazione $y = x$, $z = 0$, che quindi ne costituisce un ovvio asse di simmetria. Il vettore posizione del suo baricentro assume la forma generale:

$$G_1 - O = x_1 \hat{e}_1 + x_1 \hat{e}_2$$

in cui l'ascissa x_1 è data dall'espressione:

$$x_1 = \frac{1}{m_1} \int_{-a}^0 x dm = \frac{2}{\mu} \int_{-a}^0 -\frac{\mu}{a^2} x^2 dx = -\frac{2}{a^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-a}^0 = -\frac{2}{3}a$$

sicché

$$G_1 - O = -\frac{2}{3}a \hat{e}_1 - \frac{2}{3}a \hat{e}_2.$$

Baricentro della lamina quadrata

La massa m_2 della lamina quadrata segue dall'integrazione della densità areale σ sul dominio $OABC$:

$$\begin{aligned} m_2 &= \int_0^a dx \int_0^a dy \frac{\mu}{a^3} (x + y) = \frac{\mu}{a^3} \int_0^a dx \int_0^a dy (x + y) = \\ &= \frac{\mu}{a^3} \int_0^a dx \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^a = \frac{\mu}{a^3} \int_0^a dx \left(xa + \frac{a^2}{2} \right) = \frac{\mu}{a^3} \left[a \frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{2} x \right]_0^a = \mu. \end{aligned}$$

Il baricentro G_2 della lamina deve collocarsi nel piano coordinato Oxy , evidente piano di simmetria; un asse di simmetria è inoltre identificabile con la bisettrice $y = x$, considerata l'identità:

$$\sigma(x, y) = \frac{\mu}{a^3} (x + y) = \frac{\mu}{a^3} (y + x) = \sigma(y, x) \quad \forall (x, y) \in OABC.$$

Si può perciò scrivere:

$$G_2 - O = x_2 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2$$

con ascissa x_2 determinata da:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{m_2} \int_0^a dx \int_0^a dy x \frac{\mu}{a^3} (x+y) = \frac{1}{\mu a^3} \int_0^a dx \int_0^a dy (x^2 + xy) = \\ &= \frac{1}{a^3} \int_0^a dx \left[x^2 y + x \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^a = \frac{1}{a^3} \int_0^a dx \left(x^2 a + x \frac{a^2}{2} \right) = \frac{1}{a^3} \left[\frac{x^3}{3} a + \frac{x^2}{2} \frac{a^2}{2} \right]_0^a = \frac{7}{12} a. \end{aligned}$$

In definitiva:

$$G_2 - O = \frac{7}{12} a \hat{e}_1 + \frac{7}{12} a \hat{e}_2.$$

Baricentro del sistema

Per determinare il baricentro G del sistema non rimane che applicare la proprietà distributiva alle parti OD e $OABC$:

$$\begin{aligned} G - O &= \frac{m_1(G_1 - O) + m_2(G_2 - O)}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{1}{\frac{\mu}{2} + \mu} \left[\frac{\mu}{2} \left(-\frac{2}{3} a \hat{e}_1 - \frac{2}{3} a \hat{e}_2 \right) + \mu \left(\frac{7}{12} a \hat{e}_1 + \frac{7}{12} a \hat{e}_2 \right) \right] = \\ &= \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} + \frac{7}{12} \right) a (\hat{e}_1 + \hat{e}_2) = \frac{1}{6} a (\hat{e}_1 + \hat{e}_2). \end{aligned}$$

(b) Matrice d'inerzia rispetto rispetto alla terna $Oxyz$

La matrice d'inerzia viene calcolata sfruttando la proprietà di additività. L'asta OD e la lamina $OABC$ si intersecano nel solo punto O , che costituisce un insieme tanto di lunghezza quanto di area nulla — o, più propriamente, di misura nulla. La matrice d'inerzia del sistema si può perciò calcolare come somma delle matrici d'inerzia dell'asta e della lamina relative alla stessa terna di riferimento $Oxyz$.

Matrice d'inerzia dell'asta

L'asta OD è parametrizzata da

$$P(x) - O = x \hat{e}_1 + x \hat{e}_2, \quad x \in [-a, 0],$$

con elemento infinitesimo di lunghezza $ds = |P'(x)| dx = \sqrt{2} dx$ e densità

$$\lambda(x) = -\mu x / \sqrt{2} a^2, \quad x \in [-a, 0].$$

Poichè l'asta giace interamente nel piano Oxy , i prodotti d'inerzia di coordinata z sono tutti nulli

$$L_{xz}^a = L_{yz}^a = 0$$

e il momento d'inerzia relativo a Oz è la somma dei momenti d'inerzia calcolati rispetto agli altri due assi coordinati Ox e Oy :

$$L_{zz}^a = L_{xx}^a + L_{yy}^a.$$

Il momento d'inerzia rispetto a Ox si calcola secondo la definizione:

$$L_{xx}^a = \int_{OD} y^2 \lambda ds = \int_{-a}^0 x^2 \left(-\frac{\mu x}{\sqrt{2} a^2} \right) \sqrt{2} dx = -\frac{\mu}{a^2} \int_{-a}^0 x^3 dx = -\frac{\mu}{a^2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-a}^0 = \frac{1}{4} \mu a^2$$

e coincide con quello relativo all'asse Oy :

$$L_{yy}^a = \int_{OD} x^2 \lambda ds = \int_{-a}^0 x^2 \left(-\frac{\mu x}{\sqrt{2} a^2} \right) \sqrt{2} dx = L_{xx}^a = \frac{1}{4} \mu a^2$$

in modo che

$$L_{zz}^a = \frac{1}{4} \mu a^2 + \frac{1}{4} \mu a^2 = \frac{1}{2} \mu a^2.$$

L'unico prodotto d'inerzia non banale vale infine:

$$L_{xy}^a = - \int_{OD} xy \lambda ds = - \int_{-a}^0 x^2 \left(-\frac{\mu x}{\sqrt{2} a^2} \right) \sqrt{2} dx = -L_{xx}^a = -\frac{1}{4} \mu a^2.$$

La matrice d'inerzia dell'asta diventa così:

$$[L_O^a] = \mu a^2 \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Matrice d'inerzia della lamina

Si osserva preliminarmente che la matrice d'inerzia rispetto a $Oxyz$ della lamina deve assumere la forma:

$$[L_O^\ell] = \begin{pmatrix} L_{xx}^\ell & L_{xy}^\ell & 0 \\ L_{xy}^\ell & L_{yy}^\ell & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx}^\ell + L_{yy}^\ell \end{pmatrix}$$

tipica di un qualunque sistema materiale ubicato per intero nel piano coordinato Oxy della terna assegnata. Il momento d'inerzia relativo all'asse Ox si ricava dall'integrale doppio:

$$L_{xx}^\ell = \int_0^a dx \int_0^a dy y^2 \frac{\mu}{a^3} (x+y) = \frac{\mu}{a^3} \int_0^a dx \int_0^a dy (xy^2 + y^3) =$$

$$= \frac{\mu}{a^3} \int_0^a dx \left[x \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right]_{y=0}^a = \frac{\mu}{a^3} \int_0^a \left(x \frac{a^3}{3} + \frac{a^4}{4} \right) dx = \frac{\mu}{a^3} \left[\frac{x^2}{2} \frac{a^3}{3} + \frac{a^4}{4} x \right]_0^a = \frac{5}{12} \mu a^2.$$

Lo stesso valore assume il momento d'inerzia rispetto a Oy , definito da

$$L_{yy}^\ell = \int_0^a dx \int_0^a dy x^2 \frac{\mu}{a^3} (x + y)$$

e riconducibile alla forma

$$L_{yy}^\ell = \int_0^a dy \int_0^a dx y^2 \frac{\mu}{a^3} (y + x) = \int_0^a dx \int_0^a dy x^2 \frac{\mu}{a^3} (x + y) = L_{xx}^\ell = \frac{5}{12} \mu a^2$$

per mezzo del cambiamento di variabili

$$(x, y) \in [0, a]^2 \longrightarrow (y, x) \in [0, a]^2$$

che rappresenta la trasformazione di simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$, $z = 0$, ossia rispetto alla diagonale OB della lamina quadrata. Il prodotto d'inerzia non banalmente nullo è invece dato da:

$$\begin{aligned} L_{xy}^\ell &= - \int_0^a dx \int_0^a dy xy \frac{\mu}{a^3} (x + y) = - \frac{\mu}{a^3} \int_0^a dx \int_0^a dy (x^2 y + xy^2) = \\ &= - \frac{\mu}{a^3} \int_0^a dx \left[x^2 \frac{y^2}{2} + x \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^a = - \frac{\mu}{a^3} \int_0^a \left(x^2 \frac{a^2}{2} + x \frac{a^3}{3} \right) dx = \\ &= - \frac{\mu}{a^3} \left[\frac{x^3}{3} \frac{a^2}{2} + \frac{x^2}{2} \frac{a^3}{3} \right]_0^a = - \frac{1}{3} \mu a^2 \end{aligned}$$

in modo che la matrice d'inerzia in $Oxyz$ della lamina risulta:

$$[L_O^\ell] = \mu a^2 \begin{pmatrix} 5/12 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 5/12 & 0 \\ 0 & 0 & 5/6 \end{pmatrix}.$$

Matrice d'inerzia del sistema

La somma delle matrici d'inerzia parziali calcolate fornisce la matrice d'inerzia dell'intero sistema:

$$\begin{aligned} [L_O] &= [L_O^a] + [L_O^\ell] = \mu a^2 \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} + \mu a^2 \begin{pmatrix} 5/12 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 5/12 & 0 \\ 0 & 0 & 5/6 \end{pmatrix} = \\ &= \mu a^2 \begin{pmatrix} 2/3 & -7/12 & 0 \\ -7/12 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Terna principale d'inerzia in O

L'individuazione di una terna principale d'inerzia in O del sistema non richiede alcun calcolo. Basta infatti osservare che:

- (i) il sistema giace interamente nel piano coordinato Oxy , che quindi costituisce un ovvio piano di simmetria, principale d'inerzia rispetto ad ogni suo punto. Ne deriva che l'asse Oz è principale d'inerzia in O per il sistema;
- (ii) la bisettrice $y = x$, come già osservato, costituisce un asse di simmetria per la lamina. Ma è altresì evidente che la stessa retta rappresenta un asse di simmetria anche per l'asta OD , che si colloca lungo di essa. La retta $y = x$ nel piano Oxy è quindi un asse di simmetria del sistema, principale d'inerzia rispetto ad ogni suo punto. Dal momento che la bisettrice passa per O , si conclude che essa è un asse principale d'inerzia in O del sistema;
- (iii) la retta $y = -x$ nel piano Oxy è ortogonale all'asse Oz e alla bisettrice $y = x$. La simmetria dell'operatore d'inerzia in O assicura che anche la retta $y = -x$ è un asse principale d'inerzia in O del sistema, dovendo necessariamente esistere una terna principale d'inerzia in O .

In definitiva, una terna principale d'inerzia in O del sistema è individuata dalla bisettrice $y = x$ del primo e terzo quadrante nel piano Oxy , dalla retta $y = -x$ nello stesso piano e dall'asse Oz del riferimento assegnato.

(d) Momento d'inerzia rispetto all'asse $y = -2x$

L'asse di equazione $y = -2x, z = 0$, passa chiaramente per l'origine ed ammette una parametrizzazione della forma:

$$P(\xi) - O = \xi \hat{e}_1 - 2\xi \hat{e}_2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

cui corrisponde il versore direttore

$$\hat{n} = \frac{P'(\xi)}{|P'(\xi)|} = \frac{\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2}{|\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2|} = \frac{\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \hat{e}_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse $y = -2x, z = 0$ è quindi dato dalla formula:

$$\begin{aligned} I_{O\hat{n}} &= \hat{n} \cdot L_O(\hat{n}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1 \quad -2 \quad 0) \mu a^2 \begin{pmatrix} 2/3 & -7/12 & 0 \\ -7/12 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{5} \left[\frac{2}{3} \cdot 1^2 + 2 \left(-\frac{7}{12} \right) \cdot 1(-2) + \frac{2}{3} \cdot (-2)^2 + \frac{4}{3} \cdot 0^2 \right] \mu a^2 = \frac{17}{15} \mu a^2. \end{aligned}$$

(e) Equilibrio

Se il sistema rigido ha asse fisso Oz privo di attrito, condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio è il momento risultante, rispetto allo stesso asse, delle forze attive applicate sia nullo. Il momento in O della forza $\vec{F}_B = \hat{e}_1 + \beta \hat{e}_2$ agente in $B(a, a, 0)$ vale:

$$(B - O) \wedge \vec{F}_B = (a \hat{e}_1 + a \hat{e}_2) \wedge (\hat{e}_1 + \beta \hat{e}_2) = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a & a & 0 \\ 1 & \beta & 0 \end{vmatrix} = a(\beta - 1) \hat{e}_3$$

mentre quello della forza $\vec{F}_D = 2\hat{e}_1$ applicata in $D(-a, -a, 0)$ risulta:

$$(D - O) \wedge \vec{F}_D = (-a\hat{e}_1 - a\hat{e}_2) \wedge 2\hat{e}_1 = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -a & -a & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2a\hat{e}_3.$$

Il momento assiale risultante delle sollecitazioni attive applicate diventa quindi:

$$[(B - O) \wedge \vec{F}_B + (D - O) \wedge \vec{F}_D] \cdot \hat{e}_3 = a(\beta - 1) + 2a = a(\beta + 1)$$

e si annulla se e soltanto se $\beta = -1$.

Soluzione dell'esercizio 2

(a) Energia cinetica

L'energia cinetica del sistema è definita come somma delle energie cinetiche delle parti che lo costituiscono, nella fattispecie l'asta omogenea OA e il punto materiale P .

Energia cinetica dell'asta OA

L'asta omogenea OA ruota con velocità angolare $-\dot{\vartheta}\hat{e}_3$ attorno all'asse fisso Oz , rispetto al quale il suo momento d'inerzia risulta $I_{Oz}^{OA} = mL^2/3$. L'energia cinetica dell'asta si scrive perciò:

$$T_{OA} = \frac{1}{2} I_{Oz}^{OA} |-\dot{\vartheta}\hat{e}_3|^2 = \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \dot{\vartheta}^2 = \frac{mL^2}{6} \dot{\vartheta}^2.$$

Energia cinetica del punto P

Il vettore posizione del punto rispetto al riferimento assegnato risulta

$$P - O = Ls \cos \vartheta \hat{e}_1 - Ls \sin \vartheta \hat{e}_2$$

e la relativa velocità istantanea è data dal vettore

$$\dot{P} = L(\dot{s} \cos \vartheta - s \sin \vartheta \dot{\vartheta}) \hat{e}_1 - L(\dot{s} \sin \vartheta + s \cos \vartheta \dot{\vartheta}) \hat{e}_2 \quad (.1)$$

con modulo quadrato:

$$\begin{aligned} \dot{P}^2 &= L^2(\dot{s}^2 \cos^2 \vartheta + s^2 \sin^2 \vartheta \dot{\vartheta}^2 - 2s \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{s} \dot{\vartheta} + \\ &+ \dot{s}^2 \sin^2 \vartheta + s^2 \cos^2 \vartheta \dot{\vartheta}^2 + 2s \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{s} \dot{\vartheta}) = L^2(\dot{s}^2 + s^2 \dot{\vartheta}^2). \end{aligned}$$

Per l'energia cinetica del punto P si ha così la relazione:

$$T_P = \frac{mL^2}{2} (\dot{s}^2 + s^2 \dot{\vartheta}^2).$$

Energia cinetica del sistema

Per ottenere l'energia cinetica del sistema non rimane che sommare le energie cinetiche parziali appena calcolate:

$$T = T_{OA} + T_P = \frac{mL^2}{2} \left[\dot{s}^2 + \left(s^2 + \frac{1}{3} \right) \dot{\vartheta}^2 \right].$$

(b) Impulso e momento angolare in O

Come per l'energia cinetica, anche per il calcolo dell'impulso e del momento angolare in O del sistema si ricorre alla proprietà additiva, sommando i contributi dell'asta e del punto materiale P .

Impulso

Il baricentro G dell'asta coincide con il punto medio di questa ed è perciò individuato dal vettore posizione:

$$G - O = \frac{A - O}{2} = \frac{L}{2} \cos \vartheta \hat{e}_1 - \frac{L}{2} \sin \vartheta \hat{e}_2$$

con velocità istantanea relativa a Oxy :

$$\dot{G} = \left(-\frac{L}{2} \sin \vartheta \hat{e}_1 - \frac{L}{2} \cos \vartheta \hat{e}_2 \right) \dot{\vartheta}.$$

L'impulso dell'asta vale dunque:

$$\vec{Q}^{OA} = m\dot{G} = -\frac{mL}{2} (\sin \vartheta \hat{e}_1 + \cos \vartheta \hat{e}_2) \dot{\vartheta}. \quad (.2)$$

La quantità di moto del punto P si calcola invece direttamente secondo la definizione, ricordando l'espressione (.1) della velocità istantanea:

$$\vec{Q}^P = m\dot{P} = mL(\dot{s} \cos \vartheta - s \sin \vartheta \dot{\vartheta}) \hat{e}_1 - mL(\dot{s} \sin \vartheta + s \cos \vartheta \dot{\vartheta}) \hat{e}_2. \quad (.3)$$

La somma delle equazioni (.2) e (.3) fornisce l'impulso cercato:

$$\begin{aligned} \vec{Q} &= \vec{Q}^{OA} + \vec{Q}^P = \\ &= -\frac{mL}{2} (\sin \vartheta \hat{e}_1 + \cos \vartheta \hat{e}_2) \dot{\vartheta} + mL(\dot{s} \cos \vartheta - s \sin \vartheta \dot{\vartheta}) \hat{e}_1 - mL(\dot{s} \sin \vartheta + s \cos \vartheta \dot{\vartheta}) \hat{e}_2. \end{aligned}$$

Momento angolare in O

Il momento angolare in O dell'asta OA si calcola agevolmente osservando che l'asse di rotazione Oz è un asse principale d'inerzia in O del corpo, per cui

$$\vec{K}_O^{OA} = L_O(-\dot{\vartheta} \hat{e}_3) = I_{Oz}^{OA}(-\dot{\vartheta} \hat{e}_3) = \frac{mL^2}{3}(-\dot{\vartheta} \hat{e}_3) = -\frac{mL^2}{3} \dot{\vartheta} \hat{e}_3.$$

Per quanto riguarda il punto P , basta applicare la definizione

$$\begin{aligned}\vec{K}_O^P &= (P - O) \wedge m\dot{P} = \\ &= Ls(\cos\vartheta \hat{e}_1 - \sin\vartheta \hat{e}_2) \wedge mL[(\dot{s}\cos\vartheta - s\sin\vartheta\dot{\vartheta})\hat{e}_1 - (\dot{s}\sin\vartheta + s\cos\vartheta\dot{\vartheta})\hat{e}_2] = \\ &= -mL^2s^2\dot{\vartheta}\hat{e}_3.\end{aligned}$$

Il momento angolare in O del sistema è dato dalla somma dei momenti angolari parziali:

$$\vec{K}_O = \vec{K}_O^{OA} + \vec{K}_O^P = -\frac{mL^2}{3}\dot{\vartheta}\hat{e}_3 - mL^2s^2\dot{\vartheta}\hat{e}_3 = \left(-\frac{mL^2}{3}\dot{\vartheta} - mL^2s^2\dot{\vartheta}\right)\hat{e}_3.$$

(c) Equilibri ordinari e di confine

Il sistema è scleronomo posizionale conservativo a vincoli ideali e i suoi equilibri, ordinari e di confine, possono essere caratterizzati mediante il potenziale associato alle forze peso e alle interazioni elastiche.

Potenziale delle forze peso

Il baricentro dell'asta omogenea coincide con il punto medio G di questa e la sua posizione è determinata dal vettore:

$$G - O = \frac{A - O}{2} = \frac{L}{2}\cos\vartheta\hat{e}_1 - \frac{L}{2}\sin\vartheta\hat{e}_2.$$

Il potenziale gravitazionale è la somma di due termini, l'uno relativo all'asta e l'altro al punto P :

$$U_g = -mg\hat{e}_2 \cdot (G - O) - mg\hat{e}_2 \cdot (P - O) = \frac{mgL}{2}\sin\vartheta + mgLs\sin\vartheta.$$

Potenziale delle forze elastiche

Le sollecitazioni elastiche agiscono fra i punti P ed O , con costante elastica k , e fra il punto A e la proiezione ortogonale B di questo sull'asse Ox , con costante elastica k . Il potenziale elastico complessivo è pari alla somma dei potenziali elastici relativi alle singole molle ideali:

$$U_{el} = -\frac{k}{2}|P - O|^2 - \frac{h}{2}|A - B|^2 = -\frac{kL^2}{2}s^2 - \frac{hL^2}{2}\sin^2\vartheta.$$

Potenziale del sistema

La somma dei potenziali gravitazionale ed elastico definisce il potenziale del sistema, che vale dunque:

$$U(s, \vartheta) = U_g + U_{el} = \frac{mgL}{2}\sin\vartheta + mgLs\sin\vartheta - \frac{kL^2}{2}s^2 - \frac{hL^2}{2}\sin^2\vartheta \quad \forall (s, \vartheta) \in [0, 1] \times \mathbb{R}.$$

Equilibri ordinari

Gli equilibri ordinari del sistema coincidono con i punti critici del potenziale all'interno del dominio di definizione della parametrizzazione. La condizione di equilibrio è quindi espressa dal sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial s}(s, \vartheta) = mgL \sin \vartheta - kL^2 s = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \vartheta}(s, \vartheta) = \frac{mgL}{2} \cos \vartheta + mgLs \cos \vartheta - hL^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = 0 \end{cases} \quad \forall (s, \vartheta) \in (0, 1) \times \mathbb{R}.$$

La prima equazione consente di ricavare il valore di equilibrio di s in funzione di quello di ϑ :

$$s = \frac{mg}{kL} \sin \vartheta \quad (.4)$$

in modo che la seconda condizione per l'equilibrio ordinario diventa:

$$\frac{mgL}{2} \cos \vartheta + \frac{m^2 g^2}{k} \sin \vartheta \cos \vartheta - hL^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = 0$$

ossia

$$\frac{mgL}{2} \cos \vartheta - hL^2 \left(1 - \frac{m^2 g^2}{L^2 kh}\right) \sin \vartheta \cos \vartheta = 0.$$

Due radici, definite incondizionatamente, si ottengono imponendo $\cos \vartheta = 0$:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} \quad \vartheta = -\frac{\pi}{2}$$

mentre altre due vengono ricavate dall'equazione

$$\frac{mgL}{2} - hL^2 \left(1 - \frac{m^2 g^2}{L^2 kh}\right) \sin \vartheta = 0,$$

sono date da

$$\vartheta = \arcsin \left[\frac{mg}{2hL} \left(1 - \frac{m^2 g^2}{hkL^2}\right)^{-1} \right] := \vartheta^* \in (0, \pi/2) \quad \vartheta = \pi - \vartheta^*$$

e risultano definite e distinte dalle precedenti a condizione che si abbia

$$\frac{mg}{2hL} \left(1 - \frac{m^2 g^2}{hkL^2}\right)^{-1} < 1$$

— si osservi che per ipotesi deve aversi $1 - (m^2 g^2 / hkL^2) > 0$. Per sincerarsi che a queste radici in ϑ corrispondano effettivamente degli equilibri ordinari del sistema occorre calcolare, tramite la (.4), i relativi valori di s e imporre che questi siano ricompresi nell'intervallo $(0, 1)$. Si ha così che:

- $(s, \vartheta) = (mg/kL, \pi/2)$ è un equilibrio ordinario se e solo se $mg/kL < 1$;

- $(s, \vartheta) = (-mg/kL, -\pi/2)$ non costituisce in nessun caso un equilibrio ordinario del sistema, essendo comunque $-mg/kL < 0$;
- $(s, \vartheta) = \left(\frac{mg}{kL} \sin \vartheta^*, \vartheta^*\right)$ rappresenta un equilibrio ordinario se e solo se sono soddisfatte *entrambe* le condizioni

$$\frac{mg}{2hL} \left(1 - \frac{m^2 g^2}{hkL^2}\right)^{-1} < 1 \quad \text{e} \quad \frac{m^2 g^2}{2hkL^2} \left(1 - \frac{m^2 g^2}{hkL^2}\right)^{-1} < 1, \quad (.5)$$

la seconda delle quali equivale a richiedere che sia $3m^2 g^2 / 2hkL^2 < 1$;

- $(s, \vartheta) = \left(\frac{mg}{kL} \sin \vartheta^*, \pi - \vartheta^*\right)$ sussiste come equilibrio ordinario nelle stesse condizioni della configurazione precedente (simmetrica).

Equilibri di confine

Le configurazioni di confine del sistema corrispondono alla frontiera del dominio della parametrizzazione:

$$\{(s, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : s = 0\} \cup \{(s, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : s = 1\},$$

che consiste delle rette $s = 0$ e $s = 1$.

Retta $s = 0$

Per le configurazioni di confine lungo questa retta il teorema dei lavori virtuali stabilisce la condizione di equilibrio:

$$\frac{\partial U}{\partial s}(0, \vartheta) \delta s + \frac{\partial U}{\partial \vartheta}(0, \vartheta) \delta \vartheta \leq 0 \quad \forall \delta s \geq 0 \quad \forall \delta \vartheta \in \mathbb{R}$$

ossia

$$\frac{\partial U}{\partial s}(0, \vartheta) = mgL \sin \vartheta \leq 0 \quad \frac{\partial U}{\partial \vartheta}(0, \vartheta) = \left(\frac{mgL}{2} - hL^2 \sin \vartheta\right) \cos \vartheta = 0. \quad (.6)$$

L'equazione porge le possibili soluzioni:

$$\vartheta = \pi/2 \quad \vartheta = -\pi/2,$$

sempre definite, e

$$\vartheta = \arcsin\left(\frac{mg}{2hL}\right) \quad \vartheta = \pi - \arcsin\left(\frac{mg}{2hL}\right),$$

definite e distinte dalle precedenti per $mg/2hL < 1$. Di queste soluzioni, tuttavia, soltanto $\vartheta = -\pi/2$ soddisfa la prima disequazione in (.6) e porge pertanto l'unico equilibrio di confine:

$$(s, \vartheta) = (0, -\pi/2).$$

Retta $s = 1$

In questo caso il teorema dei lavori virtuali porge la condizione di equilibrio

$$\frac{\partial U}{\partial s}(1, \vartheta) \delta s + \frac{\partial U}{\partial \vartheta}(1, \vartheta) \delta \vartheta \leq 0 \quad \forall \delta s \leq 0 \quad \forall \delta \vartheta \in \mathbb{R}$$

che si riduce immediatamente a

$$\frac{\partial U}{\partial s}(1, \vartheta) = mgL \sin \vartheta - kL^2 \geq 0 \quad \frac{\partial U}{\partial \vartheta}(1, \vartheta) = \left(\frac{3}{2} mgL - hL^2 \sin \vartheta \right) \cos \vartheta = 0.$$

Dall'equazione si deducono due soluzioni definite incondizionatamente:

$$\vartheta = \pi/2 \quad \vartheta = -\pi/2$$

e due definite e distinte dalle precedenti per $3mg/2hL < 1$:

$$\vartheta = \arcsin\left(\frac{3mg}{2hL}\right) \quad \vartheta = \pi - \arcsin\left(\frac{3mg}{2hL}\right).$$

Dovendo però essere soddisfatta anche la diseuguaglianza di equilibrio, si conclude che:

- $(s, \vartheta) = (1, \pi/2)$ individua un equilibrio di confine se e solo se $mg/kL \geq 1$;
- $(s, \vartheta) = (1, -\pi/2)$ non costituisce in nessun caso un equilibrio di confine del sistema;
- $(s, \vartheta) = (1, \arcsin(3mg/2hL))$ è un equilibrio di confine se $3mg/2hL < 1$ ed inoltre $3m^2g^2/2hkL^2 \geq 1$;
- $(s, \vartheta) = (1, \pi - \arcsin(3mg/2hL))$ individua un equilibrio di confine per $3mg/2hL < 1$ e $3m^2g^2/2hkL^2 \geq 1$, come nella configurazione precedente (simmetrica).

(d) Stabilità degli equilibri ordinari

L'analisi di stabilità degli equilibri ordinari di questo sistema posizionale conservativo viene condotta ricorrendo ai teoremi standard di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale e quindi calcolando le derivate parziali seconde del potenziale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} &= -kL^2 & \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta \partial s} &= mgL \cos \vartheta \\ \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial \vartheta} &= mgL \cos \vartheta & \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} &= -\frac{mgL}{2} \sin \vartheta - mgLs \sin \vartheta - hL^2(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta), \end{aligned}$$

ovvero la corrispondente matrice hessiana:

$$H_U(s, \vartheta) = \begin{pmatrix} -kL^2 & mgL \cos \vartheta \\ mgL \cos \vartheta & -\frac{mgL}{2} \sin \vartheta - mgLs \sin \vartheta - hL^2(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \end{pmatrix}$$

in ciascun equilibrio ordinario.

Configurazione $(s, \vartheta) = (mg/kL, \pi/2)$ per $mg/kL < 1$

In questo caso la matrice hessiana del potenziale assume la forma diagonale:

$$\begin{aligned} H_U(mg/kL, \pi/2) &= \begin{pmatrix} -kL^2 & 0 \\ 0 & -\frac{mgL}{2} - mgL \frac{mg}{kL} + hL^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -kL^2 & 0 \\ 0 & hL^2 \left(-\frac{mg}{2hL} - \frac{m^2g^2}{hkL^2} + 1 \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e avendo un autovalore negativo $(-kL^2)$ il suo carattere definito negativo o indefinito dipende unicamente dal segno del secondo elemento diagonale. La matrice è definita negativa per

$$-\frac{mg}{2hL} - \frac{m^2g^2}{hkL^2} + 1 < 0$$

ossia, ricordando che nelle nostre ipotesi deve aversi $1 - m^2g^2/hkL^2 > 0$, per

$$1 < \frac{mg}{2hL} \left(1 - \frac{m^2g^2}{hkL^2} \right)^{-1},$$

nel qual caso l'equilibrio costituisce un massimo proprio del potenziale, stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet. Per contro, se

$$-\frac{mg}{2hL} - \frac{m^2g^2}{hkL^2} + 1 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 > \frac{mg}{2hL} \left(1 - \frac{m^2g^2}{hkL^2} \right)^{-1}$$

l'hessiana presenta un autovalore positivo e l'equilibrio deve ritenersi instabile per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet. Il caso residuo

$$-\frac{mg}{2hL} - \frac{m^2g^2}{hkL^2} + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 = \frac{mg}{2hL} \left(1 - \frac{m^2g^2}{hkL^2} \right)^{-1}$$

vede infine la matrice hessiana risultare semidefinita non definita negativa, per cui ricorre un caso critico di stabilità.

Configurazione $\left(\frac{mg}{kL} \sin \vartheta^*, \vartheta^* \right)$ sotto le condizioni (.5)

Nella fattispecie, la matrice hessiana di U si scrive:

$$\begin{aligned} H_U \left(\frac{mg}{kL} \sin \vartheta^*, \vartheta^* \right) &= \\ &= \begin{pmatrix} -kL^2 & mgL \cos \vartheta^* \\ mgL \cos \vartheta^* & -\frac{mgL}{2} \sin \vartheta^* - \frac{m^2g^2}{k} \sin^2 \vartheta^* - hL^2 (\cos^2 \vartheta^* - \sin^2 \vartheta^*) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

con il primo minore fondamentale negativo — $-kL^2 < 0$ — e il determinante di segno positivo:

$$\begin{aligned}
& \det \begin{pmatrix} -kL^2 & & & mgL \cos \vartheta^* \\ mgL \cos \vartheta^* & -\frac{mgL}{2} \sin \vartheta^* - \frac{m^2 g^2}{k} \sin^2 \vartheta^* - hL^2 (\cos^2 \vartheta^* - \sin^2 \vartheta^*) & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} = \\
& = kL^2 \left[\frac{mgL}{2} \sin \vartheta^* + \frac{m^2 g^2}{k} \sin^2 \vartheta^* + hL^2 (\cos^2 \vartheta^* - \sin^2 \vartheta^*) \right] - m^2 g^2 L^2 \cos^2 \vartheta^* = \\
& = khL^4 \left[\frac{mg}{2hL} \sin \vartheta^* + \left(1 - \frac{m^2 g^2}{khL^2} \right) (\cos^2 \vartheta^* - \sin^2 \vartheta^*) \right] = \\
& = khL^4 \left(1 - \frac{m^2 g^2}{khL^2} \right) \left[\frac{mg}{2hL} \left(1 - \frac{m^2 g^2}{khL^2} \right)^{-1} \sin \vartheta^* + \cos^2 \vartheta^* - \sin^2 \vartheta^* \right] = \\
& = khL^4 \left(1 - \frac{m^2 g^2}{khL^2} \right) \left[\sin \vartheta^* \sin \vartheta^* + \cos^2 \vartheta^* - \sin^2 \vartheta^* \right] = \\
& = khL^4 \left(1 - \frac{m^2 g^2}{khL^2} \right) \cos^2 \vartheta^* > 0
\end{aligned}$$

in modo che la matrice risulta definita negativa per il criterio di Sylvester ed individua l'equilibrio come un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità è assicurata dal teorema di Lagrange-Dirichlet. *Quando definito, l'equilibrio risulta stabile.*

Configurazione $\left(\frac{mg}{kL} \sin \vartheta^*, \pi - \vartheta^* \right)$ *sotto le condizioni* (.5)

Si ha in questo caso:

$$\begin{aligned}
& H_U \left(\frac{mg}{kL} \sin \vartheta^*, \pi - \vartheta^* \right) = \\
& = \begin{pmatrix} -kL^2 & & & -mgL \cos \vartheta^* \\ -mgL \cos \vartheta^* & -\frac{mgL}{2} \sin \vartheta^* - \frac{m^2 g^2}{k} \sin^2 \vartheta^* - hL^2 (\cos^2 \vartheta^* - \sin^2 \vartheta^*) & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e questa matrice hessiana presenta esattamente lo stesso primo minore fondamentale e lo stesso determinante già calcolati per l'equilibrio simmetrico. Anche questa configurazione è stabile per Lagrange-Dirichlet, quale massimo relativo proprio del potenziale di sistema.

(e) Equazioni pure del moto

Data l'ipotesi dei vincoli ideali e la presenza di forze esclusivamente posizionali conservative, le equazioni pure del moto del sistema si possono scrivere in forma lagrangiana

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = 0 \qquad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} = 0$$

con la funzione di Lagrange $\mathcal{L} = T + U$ definita da:

$$\mathcal{L} = \frac{mL^2}{2} \left[\dot{s}^2 + \left(s^2 + \frac{1}{3} \right) \dot{\vartheta}^2 \right] + \frac{mgL}{2} \sin \vartheta + mgLs \sin \vartheta - \frac{kL^2}{2} s^2 - \frac{hL^2}{2} \sin^2 \vartheta.$$

Con semplici derivazioni, ricordando che le derivate parziali nei binomi di Lagrange vanno calcolate trattando le coordinate s, ϑ e le velocità generalizzate $\dot{s}, \dot{\vartheta}$ come variabili indipendenti, si ottengono le espressioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} &= mL^2 \dot{s} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \right) &= mL^2 \ddot{s} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} &= mL^2 s \dot{\vartheta}^2 + mgL \sin \vartheta - kL^2 s \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} &= mL^2 \left(s^2 + \frac{1}{3} \right) \dot{\vartheta} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} \right) &= mL^2 \left(s^2 + \frac{1}{3} \right) \ddot{\vartheta} + 2mL^2 s \dot{s} \dot{\vartheta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} &= \frac{mgL}{2} \cos \vartheta + mgLs \cos \vartheta - hL^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \end{aligned}$$

in modo che le equazioni del moto diventano:

$$\begin{cases} mL^2 \ddot{s} - mL^2 s \dot{\vartheta}^2 - mgL \sin \vartheta + kL^2 s = 0 \\ mL^2 \left(s^2 + \frac{1}{3} \right) \ddot{\vartheta} + 2mL^2 s \dot{s} \dot{\vartheta} - \frac{mgL}{2} \cos \vartheta - mgLs \cos \vartheta + hL^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = 0. \end{cases}$$