Prova in itinere di meccanica razionale 1 A-L del 03.11.2005

□ Esercizio 1-A

Un punto materiale P di massa unitaria è vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse Ox di una terna inerziale. Una molla di costante elastica k=10 congiunge l'origine O con il punto P, che è inoltre soggetto ad una forza di resistenza viscosa con costante di frizione $\beta = 6$. Determinare l'equazione del moto del sistema e la sua soluzione generale, precisando la natura dei moti.

Soluzione

L'equazione del moto del sistema si scrive

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 10x = 0$$

e si identifica con quella di un oscillatore armonico smorzato unidimensionale. L'equazione caratteristica associata assume la forma

$$\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$$

ed ammette le due radici complesse coniugate

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-6 \pm \sqrt{36-40}}{2} = \frac{-6 \pm 2\,i}{2} = -3 \pm i\,.$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale, lineare omogenea a coefficienti costanti, diventa pertanto

$$x(t) = e^{-3t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

e rappresenta un moto oscillatorio smorzato, essendo c_1 e c_2 costanti reali arbitrarie da determinarsi in base alle condizioni iniziali.

□ Esercizio 2-A

Stabilire se il punto $A(3/5, -9/5, 2/5)$ appartiene all'asse centrale del sistema composto dai vettori $\overline{v}_1 = -2\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3$, applicato nel punto $P_1(0, 1, -1)$, e $\overline{v}_2 = \hat{e}_1 - 3\hat{e}_2 - \hat{e}_3$, applicato in $P_2(2, -1, 0)$.

Soluzione

Si osservi preliminarmente che il risultante del sistema di vettori applicati è non nullo

$$\overline{R} = \overline{v}_1 + \overline{v}_2 = -\hat{e}_1 - 2\,\hat{e}_2$$

per cui il corrispondente asse centrale a è effettivamente ed univocamente definito. Si vuole verificare se si abbia o meno $A \in a$. Il problema può essere affrontato essenzialmente in due modi. Un metodo, più diretto, consiste nell'applicare la definizione di asse centrale ricordando che i punti di questo sono tutti e soltanto quelli rispetto ai quali il momento risultante del sistema risulta parallelo ad $\overline{R}$. Nella fattispecie si ha

$$\overline{M}_A = (P_1 - A) \wedge \overline{v}_1 + (P_2 - A) \wedge \overline{v}_2 =$$

$$= \Big(-\frac{3}{5}\,\hat{e}_1 + \frac{14}{5}\,\hat{e}_2 - \frac{7}{5}\,\hat{e}_3\Big) \wedge (-2\,\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3) + \Big(\frac{7}{5}\,\hat{e}_1 + \frac{4}{5}\,\hat{e}_2 - \frac{2}{5}\,\hat{e}_3\Big) \wedge (\hat{e}_1 - 3\,\hat{e}_2 - \hat{e}_3)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -3/5 & 14/5 & -7/5 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 7/5 & 4/5 & -2/5 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{21}{5}\,\hat{e}_1 + \frac{17}{5}\,\hat{e}_2 + 5\,\hat{e}_3 - 2\,\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - 5\,\hat{e}_3$$

$$= \frac{11}{5}\,\hat{e}_1 + \frac{22}{5}\,\hat{e}_2 \;=\; -\frac{11}{5}(-\hat{e}_1 - 2\,\hat{e}_2) \;=\; -\frac{11}{5}\overline{R}\,,$$

in modo che il momento risultante in A è un vettore parallelo al risultante $\overline{R}$ del sistema. Il punto A appartiene dunque all'asse centrale.

Allo stesso risultato si può pervenire calcolando l'equazione parametrica dell'asse centrale ed andando poi a verificare che il punto A la soddisfa. Conviene calcolare il momento risultante in uno dei punti di applicazione, ad esempio in P_1:

$$\begin{aligned} \overline{M}_{P_1} \;&=\; (P_1 - P_1) \wedge \overline{v}_1 + (P_2 - P_1) \wedge \overline{v}_2 \;=\; (2\,\hat{e}_1 - 2\,\hat{e}_2 + \hat{e}_3) \wedge (\hat{e}_1 - 3\,\hat{e}_2 - \hat{e}_3) \;= \\ &= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} \;=\; 5\,\hat{e}_1 + 3\,\hat{e}_2 - 4\,\hat{e}_3\,. \end{aligned}$$

Di qui si deduce che

$$\overline{R} \wedge \overline{M}_{P_1} \;=\; \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 5 & 3 & -4 \end{vmatrix} \;=\; 8\,\hat{e}_1 - 4\,\hat{e}_2 + 7\,\hat{e}_3$$

per cui i punti B dell'asse centrale si esprimono mediante la relazione vettoriale

$$\begin{aligned} B - O \;&=\; P_1 - O \;+\; \frac{\overline{R} \wedge \overline{M}_{P_1}}{|\overline{R}|^2} + \alpha\overline{R} \;= \\ &= \hat{e}_2 - \hat{e}_3 + \frac{8\,\hat{e}_1 - 4\,\hat{e}_2 + 7\,\hat{e}_3}{5} + \alpha(-\hat{e}_1 - 2\,\hat{e}_2) \;= \\ &= \Big(\frac{8}{5} - \alpha\Big)\,\hat{e}_1 + \Big(\frac{1}{5} - 2\alpha\Big)\,\hat{e}_2 + \frac{2}{5}\,\hat{e}_3 \qquad \forall\,\alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

dalla quale segue l'equazione parametrica cercata

$$\begin{cases} x \;=\; \dfrac{8}{5} - \alpha \\[2ex] y \;=\; \dfrac{1}{5} - 2\alpha \\[2ex] z \;=\; \dfrac{2}{5} \end{cases} \qquad\qquad \forall\,\alpha \in \mathbb{R}\,.$$

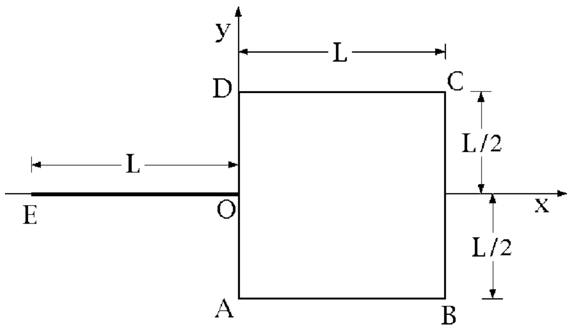
Affinché $A(3/5, -9/5, 2/5)$ sia un punto dell'asse centrale è necessario e sufficiente che abbia una soluzione in α il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} \dfrac{3}{5} = \dfrac{8}{5} - \alpha \\ -\dfrac{9}{5} = \dfrac{1}{5} - 2\alpha \\ \dfrac{2}{5} = \dfrac{2}{5}\,. \end{cases}$$

La condizione è prontamente verificata con $\alpha = 1$, a conferma del risultato già stabilito per via diretta.

□ Esercizio 3-A

Si consideri il sistema illustrato in figura,



composto da una lamina quadrata $ABCD$ di lato L e da un'asta rettilinea OE, di uguale lunghezza. La densità lineare dell'asta si scrive

$$\lambda(x) = -\frac{\mu}{L^2}x \qquad \forall\, x \in [-L, 0]\,,$$

mentre quella della lamina vale

$$\sigma(x, y) = \frac{\mu}{L^4}x(L-y) \qquad \forall\,(x, y) \in [0, L] \times [-L/2, L/2]\,,$$

avendo la costante $\mu > 0$ le dimensioni di una massa. Determinare:

(a) la massa del sistema;

(b) la posizione del baricentro del sistema rispetto alla terna $Oxyz$.

Soluzione

(a) Massa del sistema

La massa dell'asta OE si ricava per integrazione della densità lineare λ sul segmento OE e vale quindi

$$m_{OE} = \int_{-L}^{0} \Big(-\frac{\mu}{L^2}x\Big)\, dx = -\frac{\mu}{L^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-L}^{0} = -\frac{\mu}{L^2}\Big(-\frac{L^2}{2}\Big) = \frac{\mu}{2}\,.$$

La massa della lamina quadrata $ABCD$ è invece data dall'integrale di σ esteso all'intero quadrato e si calcola per mezzo di un ovvio integrale doppio

$$m_{ABCD} = \int_0^L dx \int_{-L/2}^{L/2} dy \frac{\mu}{L^4} x(L-y) = \frac{\mu}{L^4} \int_0^L x\,dx \int_{-L/2}^{L/2} (L-y)\,dy =$$

$$= \frac{\mu}{L^4} \frac{L^2}{2} \left[-\frac{(L-y)^2}{2} \right]_{L/2}^{L/2} = \frac{\mu}{2L^2} \frac{1}{2} \Big(-\frac{L^2}{4} + \frac{9}{4} L^2 \Big) = \frac{\mu}{2} .$$

La massa del sistema segue immediatamente sommando i contributi di asta e lamina

$$m = m_{OE} + m_{ABCD} = \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{2} = \mu .$$

(b) **Baricentro del sistema**

L'idea è quella di applicare il teorema distributivo, dopo avere calcolato separatamente i baricentri di asta e lamina. A causa dell'evidente asse di simmetria Ox, il baricentro dell'asta può ricercarsi nella forma $G_{OE} - O = x_{OE} \hat{e}_1$, calcolando direttamente l'ascissa secondo la definizione

$$x_{OE} = \frac{1}{m_{OE}} \int_{-L}^{0} x \Big(-\frac{\mu}{L^2} x \Big)\,dx = \frac{2}{\mu} \int_{-L}^{0} x^2 dx = -\frac{2}{L^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-L}^{0} = -\frac{2}{L^2} \frac{L^3}{3} = -\frac{2}{3} L$$

in modo che risulta

$$G_{OE} - O = -\frac{2}{3} L\, \hat{e}_1 .$$

Per quanto riguarda la lamina quadrata, l'unico elemento di simmetria che è dato riconoscere è il piano di giacitura Oxy della figura piana, il cui baricentro deve quindi essere individuato da un vettore posizione della forma

$$G_{ABCD} - O = x_{ABCD} \hat{e}_1 + y_{ABCD} \hat{e}_2 .$$

L'ascissa x_{ABCD} si scrive

$$x_{ABCD} = \frac{1}{m_{ABCD}} \int_0^L dx \int_{-L/2}^{L/2} dy\, x \frac{\mu}{L^4} x(L-y) = \frac{2}{\mu} \frac{\mu}{L^4} \int_0^L x^2 dx \int_{-L/2}^{L/2} (L-y)\,dy =$$

$$= \frac{2}{L^4} \frac{L^3}{3} \left[-\frac{(L-y)^2}{2} \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{2}{3L} \frac{1}{2} \Big(-\frac{L^2}{4} + \frac{9}{4} L^2 \Big) = \frac{2}{3} L$$

mentre per l'ordinata y_{ABCD} vale l'espressione analoga

$$y_{ABCD} = \frac{1}{m_{ABCD}} \int_0^L dx \int_{-L/2}^{L/2} dy\, y \frac{\mu}{L^4} x(L-y) = \frac{2}{\mu} \frac{\mu}{L^4} \int_0^L x\,dx \int_{-L/2}^{L/2} y(L-y)\,dy =$$

$$= \frac{2}{L^4} \frac{L^2}{2} \int_{-L/2}^{L/2} (yL - y^2)\,dy = \frac{1}{L^2} \left[L\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{L^2} \left[-\frac{y^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = -\frac{1}{12} L .$$

Si conclude pertanto che

$$G_{ABCD} - O = \frac{2}{3} L\,\hat{e}_1 - \frac{1}{12} L\,\hat{e}_2\,.$$

Non rimane che applicare la proprietà distributiva per ricavare il vettore posizione del baricentro G del sistema

$$\begin{aligned} G - O &= \frac{m_{OE}(G_{OE} - O) + m_{ABCD}(G_{ABCD} - O)}{m_{OE} + m_{ABCD}} = \\ &= \frac{\frac{\mu}{2}(G_{OE} - O) + \frac{\mu}{2}(G_{ABCD} - O)}{\mu} = \frac{G_{OE} - O + G_{ABCD} - O}{2} = \\ &= \frac{1}{2}\Big(-\frac{2}{3} L\,\hat{e}_1 + \frac{2}{3}\,\hat{e}_1 - \frac{1}{12} L\,\hat{e}_2\Big) = -\frac{1}{24} L\,\hat{e}_2\,. \end{aligned}$$

□ Esercizio 4-A

Un punto materiale pesante di massa $m = 1$ è vincolato a scorrere senza attrito lungo la curva di equazione $y = x^2$, $z = 0$, rispetto ad una terna inerziale $Oxyz$ di asse verticale Oy, orientato verso l'alto.

(a) Scrivere le equazioni del moto del sistema.

(b) Determinare le posizioni di equilibrio del sistema.

Soluzione

La parametrizzazione della curva è di classe C^∞

$$P(x) - O = x\,\hat{e}_1 + x^2\hat{e}_2 \quad , \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

nonché regolare, in quanto

$$P'(x) = \hat{e}_1 + 2x\,\hat{e}_2 \neq 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) **Equazioni del moto**

Per l'ipotesi di curva liscia, all'equazione pura del moto si perviene proiettando la seconda legge della dinamica applicata al punto lungo la direzione tangente, individuata dalla derivata $P'(x)$:

$$m\ddot{P} \cdot P'(x) = -mg\,\hat{e}_2 \cdot P'(x)$$

dove $m = 1$ e

$$\dot{P} = P'(x)\,\dot{x} \qquad\qquad \ddot{P} = P'(x)\,\ddot{x} + P''(x)\,\dot{x}^2\,.$$

Vale pertanto

$$P'(x)^2\ddot{x} + P'(x) \cdot P''(x)\dot{x}^2 = -2gx$$

ossia

$$P'(x)^2\ddot{x} + \frac{d}{dx}\left[\frac{P'(x)^2}{2}\right]\dot{x}^2 \;=\; -2gx$$

e, sostituendo la parametrizzazione d'arco,

$$(1+4x^2)\ddot{x} + 4x\dot{x}^2 \;=\; -2gx\,.$$

(b) **Posizioni di equilibrio**
Le posizioni di equilibrio corrispondono alle soluzioni statiche delle equazioni pure del moto

$$x(t) \;=\; x_0\;, \quad \text{costante}\,.$$

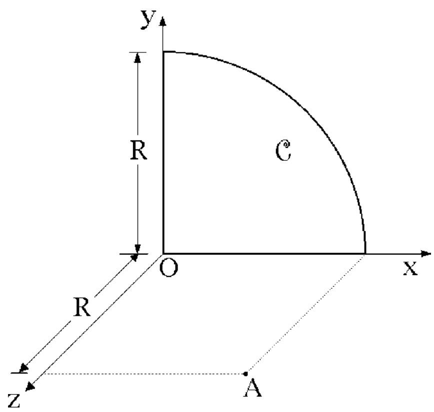
Si ha pertanto, sostituendo nell'equazione ricavata al punto precedente,

$$0 \;=\; -2gx_0$$

da cui si deduce $x_0 = 0$. La sola posizione di equilibrio del sistema ricorre dunque nell'origine della terna di riferimento

$$P(0) - O \;=\; 0\,.$$

□ **Esercizio 5-A**
Nella terna di riferimento $Oxyz$ si considera un settore circolare $\mathcal{C}$ di centro O, raggio R e angolo al centro retto, completamente collocato nel piano coordinato Oxy, come illustrato in figura.



La densità superficiale del settore circolare in un suo generico punto $P(x,y)$ è data dall'espressione

$$\sigma(x,y) \;=\; \frac{\mu}{R^4}xy \qquad \forall\,(x,y)\in\mathcal{C}\,,$$

dove $\mu > 0$ ha le dimensioni di una massa. Determinare:

(a) la matrice d'inerzia del sistema rispetto alla terna $Oxyz$;

(b) il momento d'inerzia rispetto alla retta che passa per l'origine e per il punto $A(R,0,R)$;

(c) una terna principale d'inerzia in O del sistema.

Soluzione

(a) **Matrice d'inerzia in** $Oxyz$

Poiché il settore circolare $\mathcal{C}$ giace nel piano coordinato Oxy, la matrice d'inerzia in $Oxyz$ assume la forma

$$[L_O] = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & 0 \\ L_{xy} & L_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx}+L_{yy} \end{pmatrix}.$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse Ox vale, eseguendo l'integrale in coordinate polari piane,

$$\begin{aligned} L_{xx} &= \int_{\mathcal{C}} y^2 \frac{\mu}{R^4} xy\, dxdy = \frac{\mu}{R^4}\int_{\mathcal{C}} xy^3 dxdy = \frac{\mu}{R^4}\int_0^R d\rho \int_0^{\pi/2} d\phi\, \rho\, \rho\cos\phi\, \rho^3 \sin^3\phi = \\ &= \frac{\mu}{R^4}\int_0^R \rho^5 d\rho \int_0^{\pi/2} \sin^3\phi\, \cos\phi\, d\phi = \frac{\mu}{R^4}\frac{R^6}{6}\left[\frac{\sin^4\phi}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\mu R^2}{6}\frac{1}{4} = \frac{1}{24}\mu R^2 \end{aligned}$$

e coincide con quello relativo all'asse Oy

$$\begin{aligned} L_{yy} &= \int_{\mathcal{C}} x^2 \frac{\mu}{R^4} xy\, dxdy = \frac{\mu}{R^4}\int_{\mathcal{C}} x^3 y\; dxdy = \frac{\mu}{R^4}\int_0^R d\rho \int_0^{\pi/2} d\phi\, \rho\, \rho^3\cos^3\phi\, \rho\sin\phi = \\ &= \frac{\mu}{R^4}\int_0^R \rho^5 d\rho \int_0^{\pi/2} \cos^3\phi\, \sin\phi\; d\phi = \frac{\mu}{R^4}\frac{R^6}{6}\left[-\frac{\cos^4\phi}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\mu R^2}{6}\frac{1}{4} = \frac{1}{24}\mu R^2 \end{aligned}$$

come è peraltro evidente dalla presenza dell'asse di simmetria $y = x$, $z = 0$:

$$\sigma(x,y) = \frac{\mu}{R^4}xy = \frac{\mu}{R^4}yx = \sigma(y,x) \qquad \forall (x,y)\in\mathcal{C}.$$

Per il prodotto d'inerzia si ha invece

$$\begin{aligned} L_{xy} &= -\int_{\mathcal{C}} xy \frac{\mu}{R^4} xy\, dxdy = -\frac{\mu}{R^4}\int_{\mathcal{C}} x^2y^2 dxdy = \\ &= -\frac{\mu}{R^4}\int_0^R d\rho \int_0^{\pi/2} d\phi\, \rho\, \rho^2\cos^2\phi\, \rho^2\sin^2\phi = -\frac{\mu}{R^4}\int_0^R \rho^5 d\rho \int_0^{\pi/2} \sin^2\phi\cos^2\phi\; d\phi = \\ &= -\frac{\mu}{R^4}\frac{R^6}{6}\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \sin^2(2\phi)\; d\phi = -\frac{\mu R^2}{24}\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(4\phi)}{2}\, d\phi = \\ &= -\frac{\mu R^2}{48}\left[\phi - \frac{\sin(4\phi)}{4}\right]_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{96}\mu R^2. \end{aligned}$$

La matrice d'inerzia del sistema risulta perciò

$$[L_O] = \mu R^2 \begin{pmatrix} 1/24 & -\pi/96 & 0 \\ -\pi/96 & 1/24 & 0 \\ 0 & 0 & 1/12 \end{pmatrix}.$$

(b) **Momento d'inerzia rispetto ad** OA
La retta OA è individuata dal versore

$$\hat{n} = \frac{A-O}{|A-O|} = \frac{R\,\hat{e}_1 + R\,\hat{e}_3}{|R\,\hat{e}_1 + R\,\hat{e}_3|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{e}_3$$

per cui il relativo momento d'inerzia si calcola per mezzo della relazione matriciale

$$\begin{aligned} I_{OA} &= \frac{1}{2}(1\ 0\ 1)\,\mu R^2 \begin{pmatrix} 1/24 & -\pi/96 & 0 \\ -\pi/96 & 1/24 & 0 \\ 0 & 0 & 1/12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}\mu R^2 (1\ 0\ 1) \begin{pmatrix} 1/24 \\ -\pi/96 \\ 1/12 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\mu R^2 \Big(\frac{1}{24} + \frac{1}{12}\Big) = \frac{1}{16}\mu R^2 . \end{aligned}$$

(c) **Terna principale d'inerzia in** O
Per l'individuazione di una terna principale d'inerzia in O non si rende necessario il calcolo esplicito degli autovettori di $[L_O]$, in quanto sono disponibili elementi di simmetria sufficienti allo scopo. L'ovvio piano di simmetria Oxy permette infatti di riconoscere in Oz un asse principale d'inerzia in O del sistema. A questo si aggiunge l'asse di simmetria $y = x$, $z = 0$, che è a sua volta identificabile come asse principale d'inerzia in O, ortogonale a Oz. Completa la terna, data la simmetria dell'operatore d'inerzia, l'asse di equazione

$$y = -x\,, \quad z = 0\,,$$

ortogonale ai due precedenti.

□ **Esercizio 1-B**
Un punto materiale P di massa $m = 4$ è vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse Oy di una terna inerziale. Una molla di costante elastica $k = 17$ congiunge l'origine O con il punto P, che è peraltro soggetto ad una forza di resistenza viscosa con costante di frizione $\beta = 4$. Determinare l'equazione del moto del sistema e la sua soluzione generale, specificando la natura dei moti.

Soluzione
Si tratta di un oscillatore armonico smorzato unidimensionale, la cui equazione del moto assume la forma lineare omogenea a coefficienti costanti

$$4\ddot{y} + 4\dot{y} + 17y = 0\,.$$

La soluzione generale si determina calcolando le radici dell'equazione caratteristica

$$4\lambda^2 + 4\lambda + 17 \,=\, 0$$

che risultano complesse coniugate

$$\lambda_1,\, \lambda_2 \,=\, \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 4\cdot 17}}{2\cdot 4} \,=\, \frac{-4 \pm 16\, i}{8} \,=\, -\frac{1}{2} \pm 2\, i\,.$$

Si ha pertanto la soluzione

$$y(t) \,=\, e^{-\frac{1}{2}t}[c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)] \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

che dipende dalle costanti arbitrarie $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e descrive un moto oscillatorio smorzato del sistema.

□ **Esercizio 2-B**

Determinare l'equazione dell'asse centrale del sistema composto dai vettori $\overline{F}_1 = 2\hat{e}_1 - 5\hat{e}_2 + \hat{e}_3$, applicato nel punto $A_1(0, -1, 2)$, e $\overline{F}_2 = -\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 - 2\hat{e}_3$, applicato nel punto $A_2(1, -2, 0)$.

Soluzione

L'asse centrale è ben definito, trattandosi di sistema di vettori applicati con risultante non nullo

$$\overline{R} \,=\, \overline{F}_1 + \overline{F}_2 \,=\, \hat{e}_1 - 2\,\hat{e}_2 - \hat{e}_3\,.$$

Il momento risultante del sistema rispetto all'origine vale

$$\begin{aligned}\overline{M}_O \,&=\, (A_1 - O)\wedge \overline{F}_1 + (A_2 - O)\wedge \overline{F}_2 \,=\, \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \\ &=\, 9\,\hat{e}_1 + 4\,\hat{e}_2 + 2\,\hat{e}_3 + 4\,\hat{e}_1 + 2\,\hat{e}_2 + \hat{e}_3 \,=\, 13\,\hat{e}_1 + 6\,\hat{e}_2 + 3\,\hat{e}_3\end{aligned}$$

e porge l'ulteriore espressione

$$\overline{R}\wedge\overline{M}_O \,=\, \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 13 & 6 & 3 \end{vmatrix} \,=\, -16\,\hat{e}_2 + 32\,\hat{e}_3\,.$$

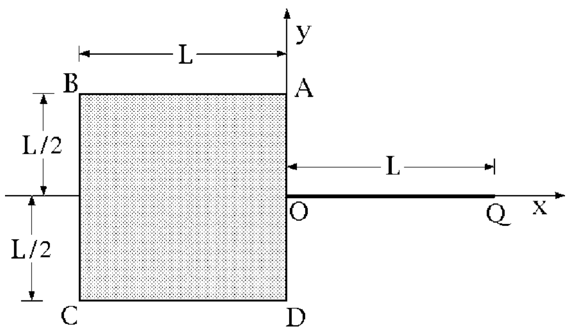
I punti P dell'asse centrale a sono individuati dalla relazione vettoriale

$$\begin{aligned}P - O \,&=\, \frac{\overline{R}\wedge\overline{M}_O}{|\overline{R}|^2} + \alpha\,\overline{R} \,=\, \frac{-16\,\hat{e}_2 + 32\,\hat{e}_3}{6} + \alpha(\hat{e}_1 - 2\,\hat{e}_2 - \hat{e}_3) \,= \\ &=\, -\frac{8}{3}\,\hat{e}_2 + \frac{16}{3}\,\hat{e}_3 + \alpha(\hat{e}_1 - 2\,\hat{e}_2 - \hat{e}_3) \qquad \forall\,\alpha \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

che equivale all'equazione parametrica

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = -\dfrac{8}{3} - 2\alpha \\ z = \dfrac{16}{3} - \alpha \end{cases} \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

□ **Esercizio 3-B**
Si consideri il sistema illustrato in figura,



composto da una lamina quadrata $ABCD$ di lato L e da un'asta rettilinea OQ, di uguale lunghezza. La densità lineare dell'asta si scrive

$$\lambda(x) = \frac{\mu}{L^3}x^2 \qquad \forall\, x \in [0, L]\,,$$

mentre quella della lamina vale

$$\sigma(x, y) = -\frac{\mu}{L^4}x(L - y) \qquad \forall\, (x, y) \in [-L, 0] \times [-L/2, L/2]\,,$$

avendo la costante $\mu > 0$ le dimensioni di una massa. Determinare:

(a) la massa del sistema;

(b) la posizione del baricentro del sistema rispetto alla terna $Oxyz$.

Soluzione
(a) **Massa del sistema**
La massa dell'asta OQ si determina per integrazione della densità λ sull'intero segmento

$$m_{OQ} = \int_0^L \frac{\mu}{L^3}x^2 dx = \frac{\mu}{L^3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L = \frac{\mu}{3}$$

mentre un integrale di superficie, quello della densità areale σ sul dominio $ABCD$, fornisce la massa della lamina quadrata

$$
\begin{aligned}
m_{ABCD} &= \int_{-L}^{0} dx \int_{-L/2}^{L/2} dy \left[-\frac{\mu}{L^4}x(L-y)\right] = -\frac{\mu}{L^4}\int_{-L}^{0} x\,dx \int_{-L/2}^{L/2} (L-y)\,dy = \\
&= -\frac{\mu}{L^4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-L}^{0}\left[-\frac{(L-y)^2}{2}\right]_{-L/2}^{L/2} = -\frac{\mu}{L^4}\Big(-\frac{L^2}{2}\Big)\frac{1}{2}\Big(\frac{L^2}{4}-\frac{9}{4}L^2\Big) = \frac{\mu}{2}
\end{aligned}
$$

in modo che la massa totale del sistema vale

$$m = m_{OQ} + m_{ABCD} = \frac{\mu}{3} + \frac{\mu}{2} = \frac{5}{6}\mu\,.$$

(b) **Baricentro del sistema**

La posizione del baricentro si stabilisce con il semplice ricorso al teorema distributivo, calcolando preliminarmente i baricentri dell'asta e della lamina quadrata. L'evidente asse di simmetria Ox autorizza a ricercare il baricentro dell'asta nella forma $G_{OQ} = x_{OQ}\,\hat{e}_1$, essendo

$$x_{OQ} = \frac{1}{m_{OQ}}\int_0^L x\,\frac{\mu}{L^3}x^2 dx = \frac{3}{\mu}\,\frac{\mu}{L^3}\int_0^L x^3 dx = \frac{3}{L^3}\,\frac{L^4}{4} = \frac{3}{4}L\,.$$

Perciò

$$G_{OQ} = \frac{3}{4}L\,\hat{e}_1\,.$$

Per la lamina quadrata il vettore posizione del baricentro ha la forma

$$G_{ABCD} - O = x_{ABCD}\,\hat{e}_1 + y_{ABCD}\,\hat{e}_2$$

in quanto Oxy costituisce un piano di simmetria. L'ascissa si ricava con una doppia integrazione

$$
\begin{aligned}
x_{ABCD} &= \frac{1}{m_{ABCD}}\int_{-L}^{0} dx \int_{-L/2}^{L/2} dy\, x\left[-\frac{\mu}{L^4}x(L-y)\right] = \frac{2}{\mu}\Big(-\frac{\mu}{L^4}\Big)\int_{-L}^{0} x^2 dx \int_{-L/2}^{L/2} (L-y)\,dy \\
&= -\frac{2}{L^4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L}^{0}\left[-\frac{(L-y)^2}{2}\right]_{-L/2}^{L/2} = -\frac{2}{L^4}\,\frac{L^3}{3}\,\frac{1}{2}\Big(-\frac{L^2}{4}+\frac{9}{4}L^2\Big) = -\frac{2}{3}L
\end{aligned}
$$

e un calcolo analogo conduce all'espressione dell'ordinata corrispondente

$$\begin{aligned}
y_{ABCD} &= \frac{1}{m_{ABCD}} \int_{-L}^{0} dx \int_{-L/2}^{L/2} dy\, x \Big[-\frac{\mu}{L^4} x(L-y)\Big] = \\
&= \frac{2}{\mu}\Big(-\frac{\mu}{L^4}\Big) \int_{-L}^{0} x\, dx \int_{-L/2}^{L/2} (Ly - y^2)\, dy \,=\, -\frac{2}{L^4}\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_{-L}^{0} \Big[L\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\Big]_{-L/2}^{L/2} = \\
&= -\frac{2}{L^4}\Big(-\frac{L^2}{2}\Big)\Big[-\frac{y^3}{3}\Big]_{-L/2}^{L/2} \,=\, \frac{1}{L^2}\Big(-\frac{L^3}{24} - \frac{L^3}{24}\Big) \,=\, -\frac{1}{12}L
\end{aligned}$$

per cui

$$G_{ABCD} - O \,=\, -\frac{2}{3}L\,\hat{e}_1 - \frac{1}{12}L\,\hat{e}_2\,.$$

Il baricentro del sistema segue infine dal teorema distributivo, secondo la relazione

$$\begin{aligned}
G - O &= \frac{m_{OQ}(G_{OQ} - O) + m_{ABCD}(G_{ABCD} - O)}{m_{OQ} + m_{ABCD}} = \\
&= \frac{6}{5\mu}\Big[\frac{\mu}{3}\frac{3}{4}L\,\hat{e}_1 + \frac{\mu}{2}\Big(-\frac{2}{3}L\,\hat{e}_1 - \frac{1}{12}L\,\hat{e}_2\Big)\Big] \,=\, \frac{6}{5}\Big(\frac{1}{4}\,\hat{e}_1 - \frac{1}{3}\,\hat{e}_1 - \frac{1}{24}\,\hat{e}_2\Big)L \,= \\
&= \frac{6}{5}\Big(-\frac{1}{12}\,\hat{e}_1 - \frac{1}{24}\,\hat{e}_2\Big)L \,=\, -\frac{1}{10}\,\hat{e}_1 - \frac{1}{20}\,\hat{e}_2\,.
\end{aligned}$$

□ **Esercizio 4-B**

Un punto materiale pesante di massa unitaria è vincolato a scorrere senza attrito lungo la curva di equazione $y = x^3$, $z = 0$, rispetto ad una terna inerziale $Oxyz$ di asse verticale Oy, orientato verso l'alto.

(a) Scrivere le equazioni del moto del sistema.

(b) Determinare le posizioni di equilibrio del sistema.

Soluzione

La parametrizzazione della curva è di classe C^∞

$$P(x) - O \,=\, x\,\hat{e}_1 + x^3\hat{e}_2\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

e regolare, in quanto dotata di derivata prima sempre diversa da zero

$$P'(x) \,=\, \hat{e}_1 + 3x^2\hat{e}_2 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Per un generico moto possibile del sistema, $P(t) = P[x(t)]$, la velocità e l'accelerazione istantanea sono date dalle relazioni

$$\dot{P}(t) \,=\, P'(x)\,\dot{x} \qquad \ddot{P}(t) \,=\, P'(x)\,\ddot{x} + P''(x)\,\dot{x}^2.$$

(a) **Equazioni del moto**

L'ipotesi di curva liscia autorizza a determinare l'equazione pura del moto come proiezione della seconda legge della dinamica lungo la direzione tangente alla curva, individuata da $P'(x)$

$$m\ddot{P} \cdot P'(x) \;=\; -mg\,\hat{e}_2 \cdot P'(x)\,.$$

Ricordando che la massa del punto è unitaria, l'equazione diventa

$$P'(x)^2\ddot{x} + P''(x) \cdot P'(x)\,\dot{x}^2 \;=\; -g\,\hat{e}_2 \cdot P'(x)$$

ossia

$$P'(x)^2\ddot{x} + \frac{d}{dx}\left[\frac{P'(x)^2}{2}\right]\dot{x}^2 \;=\; -g\,\hat{e}_2 \cdot P'(x)$$

e basta sostituire la parametrizzazione per ottenere l'equazione esplicita

$$(1 + 9x^4)\,\ddot{x} + 18x^3\dot{x}^2 \;=\; -3gx^2\,.$$

(b) **Posizioni di equilibrio**

Gli equilibri del sistema sono identificabili con le soluzioni statiche dell'equazione pura del moto:

$$x(t) \;=\; x_0\;, \quad \text{costante}\,, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$$

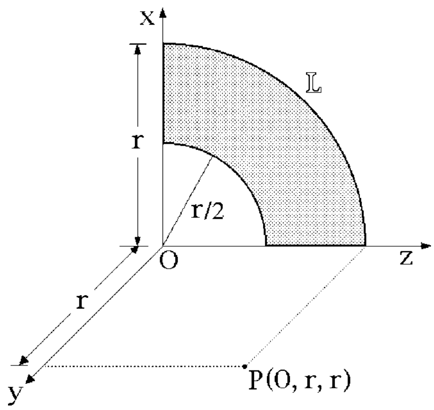
L'equazione del moto si riduce a

$$-3gx_0^2 \;=\; 0$$

e porge l'unica soluzione $x_0 = 0$. Il solo equilibrio del sistema si situa nell'origine della terna di riferimento.

□ **Esercizio 5-B**

Nella terna di riferimento $Oxyz$ si considera un quarto di corona circolare $\mathbb{L}$ di centro O, raggio interno $r/2$ e raggio esterno r, posto nel piano coordinato Ozx, come illustrato in figura.



La densità superficiale di $\mathbb{L}$ in un suo generico punto $Q(z,x)$ è data dall'espressione

$$\sigma(z,x) \;=\; \frac{64}{21}\frac{\mu}{r^4}zx \qquad \forall\,(z,x) \in \mathbb{L}\,,$$

con μ costante positiva. Determinare:

(a) la matrice d'inerzia del sistema rispetto alla terna $Oxyz$;

(b) il momento d'inerzia rispetto alla retta che passa per l'origine e per il punto $P(0, r, r)$;

(c) una terna principale d'inerzia in O del sistema.

Soluzione
È importante rilevare preliminarmente che la superficie materiale ammette l'asse di simmetria

$$x = z\,, \quad y = 0\,,$$

in quanto il dominio $\mathbb{L}$ è invariante per lo scambio delle coordinate x, z, al pari della densità areale:

$$\sigma(z,x) = \sigma(x,z) \qquad \forall\,(x,z) \in \mathbb{L}\,.$$

Un altro ovvio elemento di simmetria è il piano di giacitura Oxz.

(a) **Matrice d'inerzia relativa a** $Oxyz$
Siccome la superficie materiale risulta completamente ubicata nel piano coordinato Oxz, la relativa matrice d'inerzia è del tipo

$$[L_O] = \begin{pmatrix} L_{xx} & 0 & L_{xz} \\ 0 & L_{xx} + L_{zz} & 0 \\ L_{xz} & 0 & L_{zz} \end{pmatrix}$$

e se ne devono determinare i momenti L_{xx}, L_{zz} ed il prodotto d'inerzia L_{xz} incogniti. In coordinate polari $(z,x) = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)$, $(\rho,\phi) \in [r/2, r] \times [0, \pi/2]$, il momento d'inerzia rispetto ad Ox si calcola come

$$\begin{aligned} L_{xx} &= \int_{r/2}^{r} d\rho \int_{0}^{\pi/2} d\phi\, \rho\,(\rho\cos\phi)^2 \frac{64}{21}\frac{\mu}{r^4}\rho\sin\phi\rho\cos\phi = \frac{64}{21}\frac{\mu}{r^4}\int_{r/2}^{r} \rho^5 d\rho \int_{0}^{\pi/2} \sin\phi\cos^3\phi\; d\phi = \\ &= \frac{64}{21}\frac{\mu}{r^4}\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_{r/2}^{r}\left[-\frac{\cos^4\phi}{4}\right]_{0}^{\pi/2} = \frac{64}{21}\frac{\mu}{r^4}\frac{r^6}{6}\frac{63}{64}\frac{1}{4} = \frac{1}{8}\mu r^2 \end{aligned}$$

e coincide con quello relativo a Oz a causa dell'asse di simmetria $z = x$:

$$L_{zz} = \int_{\mathbb{L}} x^2\sigma(x,z)\,dxdz = \int_{\mathbb{L}} z^2\sigma(z,x)\,dzdx = \int_{\mathbb{L}} z^2\sigma(x,z)\,dzdx = L_{xx} = \frac{1}{8}\mu r^2.$$

Per il prodotto d'inerzia vale l'espressione

$$
\begin{aligned}
L_{xz} &= -\int_{r/2}^{r} d\rho \int_{0}^{\pi/2} d\phi\, \rho\, \rho \sin\phi\, \rho\cos\phi\, \frac{64}{21}\frac{\mu}{r^4} \rho \sin\phi\, \cos\phi \;= \\
&= -\frac{64}{21}\frac{\mu}{r^4}\int_{r/2}^{r} \rho^5 d\rho \int_{0}^{\pi/2} \sin^2\!\phi \cos^2\!\phi\; d\phi \;=\; -\frac{64}{21}\frac{\mu}{r^4}\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_{r/2}^{r}\frac{1}{4}\int_{0}^{\pi/2} \sin^2(2\phi)\; d\phi \;= \\
&= -\frac{64}{21}\frac{\mu}{r^4}\frac{1}{6}r^6\frac{63}{64}\frac{1}{4}\int_{0}^{\pi/2}\frac{1-\cos(4\phi)}{2}\, d\phi \;=\; -\frac{1}{16}\mu r^2\left[\phi - \frac{\sin(4\phi)}{4}\right]_{0}^{\pi/2} \;=\; -\frac{\pi}{32}\mu r^2 .
\end{aligned}
$$

La matrice d'inerzia in $Oxyz$ diventa perciò

$$
[L_O] \;=\; \mu r^2 \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & -\pi/32 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ -\pi/32 & 0 & 1/8 \end{pmatrix} .
$$

(*b*) **Momento d'inerzia relativo a OP**
La retta OP è individuata dal versore tangente

$$
\hat{n} \;=\; \frac{P-O}{|P-O|} \;=\; \frac{r\,\hat{e}_2 + r\,\hat{e}_3}{|r\,\hat{e}_2 + r\,\hat{e}_3|} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{e}_3\,.
$$

Il momento d'inerzia rispetto ad OP può così calcolarsi per mezzo della relazione matriciale

$$
I_{OP} \;=\; \frac{1}{2}(0\;1\;1)\,\mu r^2 \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & -\pi/32 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ -\pi/32 & 0 & 1/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

dalla quale segue

$$
I_{OP} \;=\; \frac{1}{2}\mu r^2 (0\;1\;1) \begin{pmatrix} -\pi/32 \\ 1/4 \\ 1/8 \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{2}\mu r^2\Big(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\Big) \;=\; \frac{3}{16}\mu r^2 .
$$

(*c*) **Terna principale d'inerzia in O**
L'individuazione di una terna principale d'inerzia non richiede la soluzione del problema agli autovalori, potendosi ottenere sulla base dei soli elementi di simmetria. La retta $x=z$, $y=0$, è già stata riconosciuta come asse di simmetria del sistema, di cui costituisce perciò anche un asse principale d'inerzia in O. Un secondo asse principale è dato da Oy, in quanto retta perpendicolare al piano di simmetria Oxz. Il terzo asse principale dovrà essere ortogonale ai precedenti e si identificherà pertanto con la retta $x=-z$, $y=0$.

☐ Esercizio 1-C

Un punto materiale S di massa $m = 1$ scorre senza attrito lungo l'asse Oz di una terna inerziale. Una molla di costante elastica $k = 5$ congiunge l'origine O con il punto S, che è peraltro soggetto ad una forza di resistenza viscosa con costante di frizione $\beta = 2$. Determinare l'equazione del moto del sistema e la sua soluzione generale, specificando la natura dei moti.

Soluzione

È immediato riconoscere nel sistema un oscillatore armonico smorzato unidimensionale, la cui equazione del moto si scrive direttamente facendo uso del secondo principio della dinamica

$$\ddot{z} + 2\dot{z} + 5z = 0 .$$

Si tratta chiaramente di una equazione differenziale lineare, omogenea, a coefficienti costanti, la cui soluzione è individuata attraverso l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

le cui radici sono complesse coniugate

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{-2 \pm 4\,i}{2} = -1 \pm 2\,i .$$

In termini delle costanti arbitrarie c_1 e c_2, reali, la soluzione generale assume perciò la forma

$$z(t) = e^{-t}[c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)] \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

e descrive un moto oscillatorio smorzato del sistema.

☐ Esercizio 2-C

Verificare se il punto $S(-2, 1, 14/5)$ appartiene all'asse centrale del sistema composto dai vettori $\overline{T}_1 = 2\hat{e}_1 - \hat{e}_3$, applicato nel punto $P_1(-1, 2, 3)$, e $\overline{T}_2 = -\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 + \hat{e}_3$, applicato nel punto $P_2(-1, 0, 2)$.

Soluzione

Il risultante del sistema è diverso da zero

$$\overline{R} = \overline{T}_1 + \overline{T}_2 = \hat{e}_1 + 3\,\hat{e}_2$$

ed assicura esistenza ed unicità del relativo asse centrale. Il momento risultante del sistema rispetto all'origine O si scrive

$$\overline{M}_O = (P_1 - O) \wedge \overline{T}_1 + (P_2 - O) \wedge \overline{T}_2 = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\,\hat{e}_1 + 5\,\hat{e}_2 - 4\,\hat{e}_3 - 6\,\hat{e}_1 - \hat{e}_2 - 3\,\hat{e}_3 = -8\,\hat{e}_1 + 4\,\hat{e}_2 - 7\,\hat{e}_3$$

e da esso segue l'espressione

$$\overline{R} \wedge \overline{M}_O = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 1 & 3 & 0 \\ -8 & 4 & -7 \end{vmatrix} = -21\,\hat{e}_1 + 7\,\hat{e}_2 + 28\,\hat{e}_3 \,.$$

I punti A dell'asse centrale sono determinati dall'equazione

$$\begin{aligned} A - O &= \frac{\overline{R} \wedge \overline{M}_O}{|\overline{R}|^2} + \alpha\,\overline{R} = \frac{-21\,\hat{e}_1 + 7\,\hat{e}_2 + 28\,\hat{e}_3}{10} + \alpha(\hat{e}_1 + 3\,\hat{e}_2) = \\ &= -\frac{21}{10}\,\hat{e}_1 + \frac{7}{10}\,\hat{e}_2 + \frac{14}{5}\,\hat{e}_3 + \alpha(\hat{e}_1 + 3\,\hat{e}_2) \qquad \forall\,\alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

che equivale alla rappresentazione parametrica

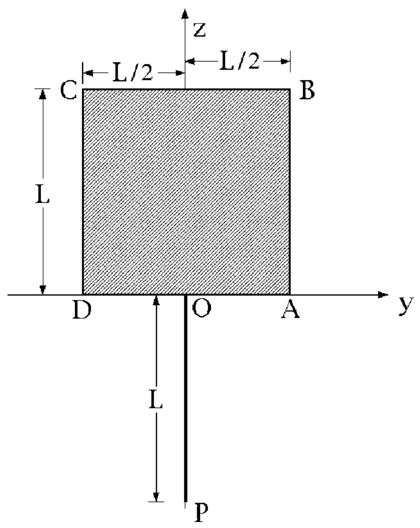
$$\begin{cases} x = -\dfrac{21}{10} + \alpha \\ y = \dfrac{7}{10} + 3\alpha \\ z = \dfrac{14}{5} \end{cases} \qquad \forall\,\alpha \in \mathbb{R}\,.$$

È immediato verificare che il punto $S(-2, 1, 14/5)$ appartiene alla retta — basta assumere $\alpha = 1/10$.
Allo stesso risultato si perviene andando a verificare direttamente che il momento risultante in S del sistema è parallelo al risultante $\overline{R}$: l'asse centrale è infatti il luogo dei punti rispetto ai quali il momento risultante del sistema di vettori applicati è parallelo al risultante — non nullo. Si ha, in effetti,

$$\begin{aligned} \overline{M}_S &= (P_1 - S) \wedge \overline{T}_1 + (P_2 - S) \wedge \overline{T}_2 = \\ &= \Big(\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \frac{1}{5}\,\hat{e}_3\Big) \wedge (2\,\hat{e}_1 - \hat{e}_3) + \Big(\hat{e}_1 - \hat{e}_2 - \frac{4}{5}\,\hat{e}_3\Big) \wedge (-\hat{e}_1 + 3\,\hat{e}_2 + \hat{e}_3) = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 1 & 1 & 1/5 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 1 & -1 & -4/5 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\hat{e}_1 + \frac{7}{5}\,\hat{e}_2 - 2\,\hat{e}_3 + \frac{7}{5}\,\hat{e}_1 - \frac{1}{5}\,\hat{e}_2 + 2\,\hat{e}_3 = \\ &= \frac{2}{5}\,\hat{e}_1 + \frac{6}{5}\,\hat{e}_2 = \frac{2}{5}(\hat{e}_1 + 3\,\hat{e}_2) = \frac{2}{5}\,\overline{R}\,, \end{aligned}$$

per cui i vettori $\overline{M}_S$ ed $\overline{R}$ risultano paralleli, come affermato.

□ **Esercizio 3-C**
Si consideri il sistema illustrato in figura,



composto da una lamina quadrata $ABCD$ di lato L e da un'asta rettilinea OP, di lunghezza pari a L. La densità lineare dell'asta si scrive

$$\lambda(z) \;=\; -\frac{\mu}{L^2}z \qquad \forall\, z \in [-L, 0]\,,$$

mentre quella della lamina vale

$$\sigma(y,z) \;=\; \frac{\mu}{L^5}z^2(L-y) \qquad \forall\,(y,z) \in\; [-L/2, L/2] \times [0, L]\,,$$

essendo μ una costante positiva avente le dimensioni di una massa. Determinare:

(a) la massa del sistema;

(b) la posizione del baricentro del sistema rispetto alla terna $Oxyz$.

Soluzione
(a) **Massa del sistema**
L'integrale della densità lineare λ fornisce la massa dell'asta OP

$$m_{OP} \;=\; \int_{-L}^{0} \Bigl(-\frac{\mu}{L^2}z\Bigr)\,dz \;=\; -\frac{\mu}{L^2}\biggl[\frac{z^2}{2}\biggr]_{-L}^{0} \;=\; -\frac{\mu}{L^2}\Bigl(-\frac{L^2}{2}\Bigr) \;=\; \frac{\mu}{2}\,.$$

Per la lamina quadrata $ABCD$ si ha, in modo analogo,

$$\begin{aligned} m_{ABCD} \;&=\; \int_{-L/2}^{L/2} dy \int_{0}^{L} dz\, \frac{\mu}{L^5}z^2(L-y) \;=\; \frac{\mu}{L^5}\int_{-L/2}^{L/2}(L-y)\,dy\int_{0}^{L} z^2 dz \;= \\ &=\; \frac{\mu}{L^5}\biggl[-\frac{(L-y)^2}{2}\biggr]_{-L/2}^{L/2}\biggl[\frac{z^3}{3}\biggr]_{0}^{L} \;=\; \frac{\mu}{L^5}\,\frac{1}{2}\Bigl(-\frac{L^2}{4}+\frac{9}{4}L^2\Bigr)\,\frac{L^3}{3} \;=\; \frac{\mu}{6L^2}\,2L^2 \;=\; \frac{\mu}{3} \end{aligned}$$

sicché la massa del sistema risulta

$$m \,=\, m_{OP} + m_{ABCD} \,=\, \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{3} \,=\, \frac{5}{6}\mu\,.$$

(b) **Baricentro del sistema**
Data l'evidente simmetria, la sola coordinata non nulla del baricentro G_{OP} dell'asta OP è la quota

$$z_{OP} \,=\, \frac{1}{m_{OP}}\int_{-L}^{0} z\Big(-\frac{\mu}{L^2}z\Big)\,dz \,=\, \frac{2}{\mu}\Big(-\frac{\mu}{L^2}\Big)\bigg[\frac{z^3}{3}\bigg]_{-L}^{0} \,=\, -\frac{2}{3L^2}\,L^3 \,=\, -\frac{2}{3}L$$

e di conseguenza

$$G_{OP} - O \,=\, -\frac{2}{3}L\,\hat{e}_3\,.$$

Quanto alla lamina quadrata, l'esistenza del piano di simmetria Oyz consente di scrivere il vettore posizione del baricentro come

$$G_{ABCD} - O \,=\, y_{ABCD}\hat{e}_2 + z_{ABCD}\hat{e}_3\,,$$

dove l'ordinata vale

$$y_{ABCD} \,=\, \frac{1}{m_{ABCD}}\int_{-L/2}^{L/2} dy\int_0^L dz\, y\,\frac{\mu}{L^5}z^2(L-y) \,=\, \frac{3}{\mu}\,\frac{\mu}{L^5}\int_{-L/2}^{L/2} y(L-y)\,dy\int_0^L z^2dz \,=$$

$$=\, \frac{3}{L^5}\bigg[L\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\bigg]_{-L/2}^{L/2}\bigg[\frac{z^3}{3}\bigg]_0^L \,=\, \frac{3}{L^5}\,\frac{1}{3}\Big(-\frac{L^3}{8} - \frac{L^3}{8}\Big)\frac{L^3}{3} \,=\, -\frac{1}{12}L$$

mentre la quota risulta

$$z_{ABCD} \,=\, \frac{1}{m_{ABCD}}\int_{-L/2}^{L/2} dy\int_0^L dz\, z\,\frac{\mu}{L^5}z^2(L-y) \,=\, \frac{3}{\mu}\,\frac{\mu}{L^5}\int_{-L/2}^{L/2}(L-y)\,dy\int_0^L z^3dz \,=$$

$$=\, \frac{3}{L^5}\bigg[Ly - \frac{y^2}{2}\bigg]_{-L/2}^{L/2}\frac{L^4}{4} \,=\, \frac{3}{4L}\,L^2 \,=\, \frac{3}{4}L\,.$$

In definitiva

$$G_{ABCD} - O \,=\, -\frac{1}{12}L\,\hat{e}_2 + \frac{3}{4}L\,\hat{e}_3\,.$$

Dal teorema distributivo si deduce poi in vettore posizione del baricentro

$$G - O \,=\, \frac{m_{OP}(G_{OP} - O) + m_{ABCD}(G_{ABCD} - O)}{m_{OP} + m_{ABCD}} \,=$$

$$=\, \frac{6}{5\mu}\bigg[\frac{\mu}{2}\Big(-\frac{2}{3}L\,\hat{e}_3\Big) + \frac{\mu}{3}\Big(-\frac{1}{12}L\,\hat{e}_2 + \frac{3}{4}L\,\hat{e}_3\Big)\bigg] \,=\, \frac{6}{5}\Big(-\frac{1}{3}\,\hat{e}_3 - \frac{1}{36}\,\hat{e}_2 + \frac{1}{4}\,\hat{e}_3\Big)L \,=$$

$$=\, \frac{6}{5}\Big(-\frac{1}{36}\,\hat{e}_2 - \frac{1}{12}\,\hat{e}_3\Big) \,=\, -\frac{1}{30}\,\hat{e}_2 - \frac{1}{10}\,\hat{e}_3\,.$$

□ **Esercizio 4-C**
Un punto materiale pesante di massa unitaria è vincolato a scorrere senza attrito lungo la curva di equazione $y = -x^2$, $z = 0$, rispetto ad una terna inerziale $Oxyz$ di asse verticale Oy, orientato verso l'alto.

(a) Scrivere le equazioni del moto del sistema.

(b) Determinare le posizioni di equilibrio del sistema.

Soluzione
La regolarità della parametrizzazione C^∞ della curva

$$P(x) - O \;=\; x\,\hat{e}_1 - x^2\hat{e}_2 \quad , \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

è evidente per via del fatto che

$$P'(x) \;=\; \hat{e}_1 - 2x\,\hat{e}_2 \neq 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) **Equazioni del moto**
Grazie all'ipotesi di curva liscia, all'equazione pura del moto si perviene scrivendo la seconda legge della dinamica per il punto materiale e proiettandola lungo la direzione tangente, individuata dalla derivata $P'(x)$:

$$m\ddot{P}\cdot P'(x) \;=\; -mg\,\hat{e}_2\cdot P'(x)$$

dove

$$\dot{P} \;=\; P'(x)\,\dot{x} \qquad \text{e} \qquad \ddot{P} \;=\; P'(x)\,\ddot{x} + P''(x)\,\dot{x}^2$$

ed inoltre $m = 1$. Vale perciò

$$P'(x)^2\ddot{x} + P'(x)\cdot P''(x)\dot{x}^2 \;=\; 2gx$$

ossia

$$P'(x)^2\ddot{x} + \frac{d}{dx}\Big[\frac{P'(x)^2}{2}\Big]\,\dot{x}^2 \;=\; 2gx$$

e, sostituendo la parametrizzazione d'arco,

$$(1+4x^2)\ddot{x} + 4x\dot{x}^2 \;=\; 2gx\,.$$

(b) **Posizioni di equilibrio**
Le posizioni di equilibrio corrispondono alle soluzioni statiche delle equazioni pure del moto

$$x(t) \;=\; x_0\;, \quad \text{costante}$$

e si identificano quindi con le soluzioni dell'equazione algebrica

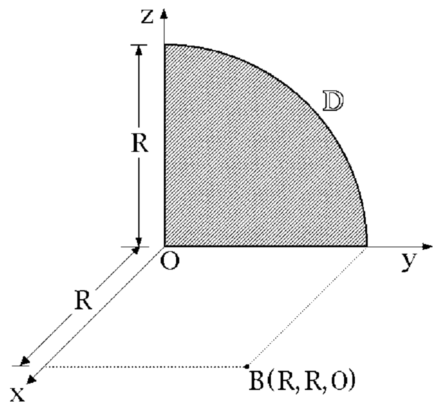
$$0 \;=\; 2gx_0$$

dalla quale si deduce $x_0 = 0$. La sola posizione di equilibrio del sistema ricorre nell'origine della terna di riferimento

$$P(0) - O = 0 .$$

□ Esercizio 5-C

Nella terna di riferimento $Oxyz$ si considera un settore circolare $\mathbb{D}$ di centro O, raggio R e angolo al centro retto, completamente collocato nel piano coordinato Oyz, come illustrato in figura.



La densità superficiale del settore circolare in un suo generico punto $P(y,z)$ è data dall'espressione

$$\sigma(y,z) = \frac{\mu}{R^4} yz \qquad \forall\,(y,z) \in \mathbb{D} .$$

Determinare:

(a) la matrice d'inerzia del sistema rispetto alla terna $Oxyz$;

(b) il momento d'inerzia rispetto alla retta che passa per l'origine e per il punto $B(R,R,0)$;

(c) una terna principale d'inerzia in O del sistema.

Soluzione

(a) **Matrice d'inerzia in** $Oxyz$

Poiché il settore circolare $\mathbb{D}$ giace nel piano coordinato Oyz, la matrice d'inerzia in $Oxyz$ assume la forma

$$[L_O] = \begin{pmatrix} L_{yy} + L_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & L_{yy} & L_{yz} \\ 0 & L_{yz} & L_{zz} \end{pmatrix} .$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse Oy vale, eseguendo l'integrale in coordinate polari piane,

$$L_{yy} = \int_{\mathbb{D}} z^2 \frac{\mu}{R^4} yz\, dydz = \frac{\mu}{R^4} \int_{\mathbb{D}} yz^3 dydz = \frac{\mu}{R^4} \int_0^R d\rho \int_0^{\pi/2} d\phi\, \rho\, \rho \cos\phi\, \rho^3 \sin^3\phi =$$

$$= \frac{\mu}{R^4} \int_0^R \rho^5 d\rho \int_0^{\pi/2} \sin^3\phi\, \cos\phi\, d\phi = \frac{\mu}{R^4} \frac{R^6}{6} \left[\frac{\sin^4\phi}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\mu R^2}{6} \frac{1}{4} = \frac{1}{24} \mu R^2$$

e coincide con quello relativo all'asse Oz

$$L_{zz} = \int_{\mathbb{D}} y^2 \frac{\mu}{R^4} yz\, dydz = \frac{\mu}{R^4} \int_{\mathbb{D}} y^3 z\; dydz = \frac{\mu}{R^4} \int_0^R d\rho \int_0^{\pi/2} d\phi\, \rho\, \rho^3 \cos^3\phi\, \rho \sin\phi =$$

$$= \frac{\mu}{R^4} \int_0^R \rho^5 d\rho \int_0^{\pi/2} \cos^3\phi\, \sin\phi\; d\phi = \frac{\mu}{R^4} \frac{R^6}{6} \left[-\frac{\cos^4\phi}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\mu R^2}{6} \frac{1}{4} = \frac{1}{24} \mu R^2$$

come è peraltro evidente per via dell'asse di simmetria $z = y$, $x = 0$:

$$\sigma(y,z) = \frac{\mu}{R^4} yz = \frac{\mu}{R^4} zy = \sigma(z,y) \qquad \forall (y,z) \in \mathbb{D}\,.$$

Per il prodotto d'inerzia si ha invece

$$L_{yz} = -\int_{\mathbb{D}} yz \frac{\mu}{R^4} yz\, dydz = -\frac{\mu}{R^4} \int_{\mathbb{D}} y^2 z^2 dydz =$$

$$= -\frac{\mu}{R^4} \int_0^R d\rho \int_0^{\pi/2} d\phi\, \rho\, \rho^2 \cos^2\phi\, \rho^2 \sin^2\phi = -\frac{\mu}{R^4} \int_0^R \rho^5 d\rho \int_0^{\pi/2} \sin^2\phi \cos^2\phi\; d\phi =$$

$$= -\frac{\mu}{R^4} \frac{R^6}{6} \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2(2\phi)\; d\phi = -\frac{\mu R^2}{24} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(4\phi)}{2}\, d\phi =$$

$$= -\frac{\mu R^2}{48} \left[\phi - \frac{\sin(4\phi)}{4}\right]_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{96} \mu R^2\,.$$

La matrice d'inerzia del sistema risulta perciò

$$[L_O] = \mu R^2 \begin{pmatrix} 1/12 & 0 & 0 \\ 0 & 1/24 & -\pi/96 \\ 0 & -\pi/96 & 1/24 \end{pmatrix}.$$

(b) **Momento d'inerzia rispetto ad OB**
La retta OB è individuata dal versore

$$\hat{n} = \frac{B-O}{|B-O|} = \frac{R\,\hat{e}_1 + R\,\hat{e}_2}{|R\,\hat{e}_1 + R\,\hat{e}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{e}_2$$

per cui il relativo momento d'inerzia si calcola per mezzo della relazione matriciale

$$I_{OB} = \frac{1}{2}(1\ 1\ 0)\,\mu R^2 \begin{pmatrix} 1/12 & 0 & 0 \\ 0 & 1/24 & -\pi/96 \\ 0 & -\pi/96 & 1/24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dalla quale segue

$$I_{OB} = \frac{1}{2}\mu R^2 (1\ 1\ 0) \begin{pmatrix} 1/12 \\ 1/24 \\ -\pi/96 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\mu R^2 \Big(\frac{1}{12} + \frac{1}{24}\Big) = \frac{1}{16}\mu R^2 \,.$$

(c) **Terna principale d'inerzia in O**
Per individuare di una terna principale d'inerzia in O non è necessario calcolare esplicitamente gli autovettori di $[L_O]$, in quanto sono disponibili elementi di simmetria sufficienti allo scopo. L'ovvio piano di simmetria Oyz permette infatti di riconoscere in Ox un asse principale d'inerzia in O del sistema. A questo si aggiunge l'asse di simmetria $z = y$, $x = 0$, che è a sua volta identificabile come asse principale d'inerzia in O, ortogonale a Ox. Completa la terna, grazie alla simmetria dell'operatore d'inerzia, l'asse di equazione

$$z = -y \,, \quad x = 0 \,,$$

ortogonale ai due precedenti.