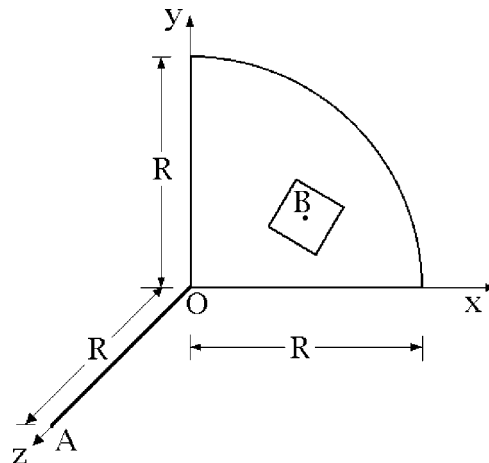


Esercizio 1

Nel primo quadrante del piano Oxy di una terna $Oxyz$ è posta una lamina omogenea di massa m avente la forma di un quarto di cerchio, di centro O e raggio R , nella quale è praticato un foro quadrato di centro $B(R/2, R/3, 0)$ e lato $R/4$. Un'asta rettilinea OA giace lungo il semiasse Oz positivo, avendo lunghezza R e densità

$$\lambda(z) = \frac{\mu}{R^3} z^2.$$



Determinare:

- (a) il baricentro della sola lamina forata;
- (b) la massa ed il baricentro del sistema lamina+asta.

Soluzione

(a) **Baricentro della lamina forata**

La densità della lamina omogenea si ricava dividendone la massa m per l'area corrispondente:

$$\sigma = \frac{m}{\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{16}} = \frac{16}{4\pi - 1} \frac{m}{R^2}.$$

La strategia migliore per ricavare il baricentro della lamina forata consiste nel ricondursi ad un settore circolare completo ricoprendo il foro quadrato con una lamina di uguale forma, dimensioni e densità σ , per poi applicare il teorema distributivo al sistema composto così ottenuto. Si immagina quindi di colmare il foro con una lamina quadrata di lato $R/4$, centro B e densità σ : il baricentro del quarto di cerchio omogeneo si determina per integrazione diretta.

Settore circolare completo

Il baricentro C — o centroide — del settore circolare omogeneo completo non dipende dalla densità costante σ e per l'evidente simmetria può scriversi semplicemente come

$$C - O = x_C \hat{e}_1 + y_C \hat{e}_2$$

con l'ascissa che è immediato calcolare integrando in coordinate polari piane

$$x_C = \frac{1}{\pi R^2/4} \int_0^R d\rho \int_0^{\pi/2} d\phi \rho \cos \phi = \frac{4}{\pi R^2} \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{\pi/2} \cos \phi d\phi = \frac{4}{\pi R^2} \frac{R^3}{3} 1 = \frac{4}{3\pi} R$$

e l'ordinata che assume lo stesso valore

$$y_C = x_C = \frac{4}{3\pi} R,$$

in quanto la bisettrice del primo quadrante nel piano coordinato Oxy rappresenta un evidente asse di simmetria della figura. Si ottiene pertanto

$$C - O = \frac{4}{3\pi} R \hat{e}_1 + \frac{4}{3\pi} R \hat{e}_2.$$

Si osservi che al settore circolare completo va attribuita una massa complessiva pari a

$$m + \sigma \left(\frac{R}{4}\right)^2 = \sigma \left(\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{16}\right) + \frac{\sigma R^2}{16} = \sigma \frac{\pi R^2}{4}.$$

Lamina quadrata ausiliaria

La lamina quadrata fittizia che viene utilizzata idealmente per colmare il foro deve assumersi omogenea, in modo che il settore circolare completo risulti a sua volta omogeneo. Il baricentro della lamina quadrata si identifica con il centro geometrico B , ovvio centro di simmetria della figura. Alla lamina compete una massa totale data da

$$\sigma \left(\frac{R}{4}\right)^2 = \frac{\sigma R^2}{16}.$$

Lamina forata

Indicato con G il baricentro incognito della lamina forata, di massa m , la proprietà distributiva applicata al settore circolare completo porge la relazione

$$C - O = \frac{m(G - O) + \sigma \frac{R^2}{16} (B - O)}{\sigma \frac{\pi R^2}{4}}$$

ossia, sostituendo ai vettori $C - O$ e $B - O$ le corrispondenti espressioni cartesiane,

$$\frac{4}{3\pi} R \hat{e}_1 + \frac{4}{3\pi} R \hat{e}_2 = \frac{m(G - O) + \sigma \frac{R^2}{16} \left(\frac{R}{2} \hat{e}_1 + \frac{R}{3} \hat{e}_2\right)}{\sigma \frac{\pi R^2}{4}}.$$

Ne deriva che

$$\begin{aligned} m(G - O) &= \sigma \frac{\pi R^2}{4} \left(\frac{4}{3\pi} R \hat{e}_1 + \frac{4}{3\pi} R \hat{e}_2 \right) - \sigma \frac{R^2}{16} \left(\frac{R}{2} \hat{e}_1 + \frac{R}{3} \hat{e}_2 \right) = \\ &= \sigma R^3 \left(\frac{1}{3} \hat{e}_1 + \frac{1}{3} \hat{e}_2 - \frac{1}{32} \hat{e}_1 - \frac{1}{48} \hat{e}_2 \right) = \sigma R^3 \left(\frac{29}{96} \hat{e}_1 + \frac{5}{16} \hat{e}_2 \right) \end{aligned}$$

ed è sufficiente dividere membro a membro per la massa m del sistema per ottenere il vettore posizione di G :

$$G - O = \frac{\sigma R^3}{\sigma R^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{16} \right)} \left(\frac{29}{96} \hat{e}_1 + \frac{5}{16} \hat{e}_2 \right) = \frac{1}{4\pi - 1} \left(\frac{29}{6} \hat{e}_1 + 5 \hat{e}_2 \right) R.$$

(b) Massa e baricentro del sistema

Il sistema è costituito dalla lamina forata e dall'asta OA , di cui conviene scrivere separatamente masse e baricentri per poi applicare il teorema distributivo. Massa m e baricentro G della lamina sono già noti; si devono soltanto determinare le corrispondenti grandezze relative all'asta OA .

Massa dell'asta

La massa dell'asta viene ricavata per integrazione diretta della densità $\lambda(z)$ lungo il segmento $z \in [0, R]$:

$$m_a = \int_0^R \lambda(z) dz = \int_0^R \frac{m}{R^3} z^2 dz = \frac{m}{R^3} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^R = \frac{m}{3}.$$

Baricentro dell'asta

Il baricentro dell'asta deve collocarsi lungo l'asse di giacitura Oz e deve perciò potersi esprimere nella forma

$$G_a - O = z_a \hat{e}_3$$

essendo la quota z_a l'unica coordinata non banale da determinare. Per quest'ultima si ha l'espressione

$$z_a = \frac{1}{m_a} \int_0^R z \lambda(z) dz = \frac{3}{m} \int_0^R z \frac{m z^2}{R^3} dz = \frac{3}{R^3} \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^R = \frac{3}{R^3} \frac{R^4}{4} = \frac{3}{4} R$$

sicché risulta

$$G_a - O = \frac{3}{4} R \hat{e}_3.$$

Massa del sistema

Sommando le masse parziali di lamina e asta si perviene alla massa totale m_s del sistema

$$m_s = m + m_a = m + \frac{m}{3} = \frac{4}{3} m.$$

Baricentro del sistema

Una immediata applicazione della proprietà distributiva consente di ricavare il baricentro G_s del sistema, composto da lamina e asta,

$$\begin{aligned} G_s - O &= \frac{m(G - O) + m_a(G_a - O)}{m + m_a} = \frac{m \frac{1}{4\pi - 1} \left(\frac{29}{6} \hat{e}_1 + 5 \hat{e}_2 \right) R + \frac{m}{3} \frac{3}{4} R \hat{e}_3}{\frac{4}{3} m} = \\ &= \frac{3}{4\pi - 1} \left(\frac{29}{24} R \hat{e}_1 + \frac{5}{4} R \hat{e}_2 \right) + \frac{3}{16} R \hat{e}_3 . \end{aligned}$$

Esercizio 2

Un punto materiale P di massa $m = 1$ è vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse Oy di una terna inerziale. Una molla ideale di costante elastica $k = 4$ collega P all'origine O . Sul punto agisce inoltre una forza di resistenza viscosa con costante di frizione β . Determinare:

- l'equazione del moto del sistema e la condizione su β affinché i moti siano oscillatori smorzati;
- la soluzione generale dell'equazione del moto per $\beta = 2$ ed il moto di dati iniziali $y(0) = 1, \dot{y}(0) = 1$.

Soluzione

(a) **Equazione del moto e condizione per i moti oscillatori smorzati**

Il moto del punto avviene lungo l'asse Oy , che è parametrizzabile nell'ovvia forma

$$P(y) - O = y \hat{e}_2, \quad y \in \mathbb{R}$$

in modo che velocità ed accelerazione istantanee del punto si esprimono come

$$\dot{P} = \dot{y} \hat{e}_2 \quad \ddot{P} = \ddot{y} \hat{e}_2 .$$

Il postulato delle reazioni vincolari porge l'equazione del moto

$$\ddot{P} = -4(P - O) - \beta \dot{P} + \vec{\Phi} \quad (0.1)$$

dove le forze elastica e di resistenza viscosa si riducono a

$$-4(P - O) = -4y \hat{e}_2 \quad -\beta \dot{P} = -\beta \dot{y} \hat{e}_2$$

mentre la reazione vincolare $\vec{\Phi}$ deve ritenersi ortogonale all'asse vincolare, privo di attrito per ipotesi. L'equazione pura del moto si deduce proiettando la (0.1) lungo l'asse Oy , ossia moltiplicando scalarmente membro a membro per \hat{e}_2 la stessa equazione:

$$\ddot{y} = -\beta \dot{y} - 4y .$$

Si perviene così all'equazione pura del moto

$$\ddot{y} + \beta\dot{y} + 4y = 0$$

che è lineare, omogenea e a coefficienti costanti. Ad essa si associa l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + \beta\lambda + 4 = 0$$

di radici

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 16}}{2}.$$

La condizione necessaria e sufficiente affinché i moti del sistema risultino oscillatori smorzati è che le radici λ_1, λ_2 dell'equazione caratteristica siano complesse coniugate, condizione che ricorre unicamente quando il discriminante dell'equazione assume segno negativo

$$\Delta = \beta^2 - 16 < 0.$$

Rilevando che la costante di frizione β deve comunque ritenersi positiva, si conclude che i moti oscillatori smorzati si verificano se e soltanto se

$$0 < \beta < 4.$$

(b) Soluzione generale per $\beta = 2$ e problema di Cauchy

Nel caso si assuma $\beta = 2$ le radici dell'equazione caratteristica si riducono a

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \frac{-2 \pm i2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}$$

e ad esse corrisponde la soluzione generale

$$y(t) = e^{-t} [c_1 \cos(\sqrt{3}t) + c_2 \sin(\sqrt{3}t)] \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

in cui figurano le costanti reali arbitrarie c_1 e c_2 , determinabili per mezzo delle condizioni iniziali. La derivata della soluzione generale è data dall'espressione

$$\dot{y}(t) = e^{-t} [-c_1 \cos(\sqrt{3}t) - c_2 \sin(\sqrt{3}t) - \sqrt{3}c_1 \sin(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}c_2 \cos(\sqrt{3}t)]$$

per cui all'istante $t = 0$ deve aversi

$$y(0) = c_1 \quad \dot{y}(0) = -c_1 + \sqrt{3}c_2$$

e le condizioni iniziali assegnate porgono il sistema lineare di equazioni algebriche in c_1, c_2

$$c_1 = 1 \quad -c_1 + \sqrt{3}c_2 = 1$$

da cui si deduce

$$c_1 = 1 \quad c_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

La soluzione del problema di Cauchy proposto diventa perciò

$$y(t) = e^{-t} \left[\cos(\sqrt{3}t) + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t) \right] \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3

Sia $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ una terna cartesiana ortogonale destra in E^3 . Si ricavi l'equazione parametrica dell'asse centrale del sistema costituito dal vettore $\vec{a} = \hat{e}_1 - 5\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3$, applicato nel punto $A(0, -1, -2)$, e dal vettore $\vec{b} = -\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 - \hat{e}_3$, applicato nel punto $B(1, -2, 3)$.

Soluzione

Il sistema è costituito da due vettori applicati:

$$\vec{a} = \hat{e}_1 - 5\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3 \text{ applicato in } A(0, -1, -2) \text{ e}$$

$$\vec{b} = -\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 - \hat{e}_3 \text{ applicato in } B(1, -2, 3),$$

con risultante non nullo

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} = -3\hat{e}_2 + \hat{e}_3$$

per cui sono assicurate esistenza ed unicità del relativo asse centrale. Il momento risultante del sistema rispetto al polo A si scrive

$$\begin{aligned} \vec{M}_A &= (B - A) \wedge \vec{b} = (\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + 5\hat{e}_3) \wedge (-\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 - \hat{e}_3) = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -9\hat{e}_1 - 4\hat{e}_2 + \hat{e}_3 \end{aligned}$$

in modo che

$$\vec{R} \wedge \vec{M}_A = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & -3 & 1 \\ -9 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \hat{e}_1 - 9\hat{e}_2 - 27\hat{e}_3$$

e osservato che $|\vec{R}|^2 = 9 + 1 = 10$, l'equazione parametrica dell'asse centrale diventa

$$P - A = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_A}{|\vec{R}|^2} + \alpha \vec{R} = \frac{\hat{e}_1 - 9\hat{e}_2 - 27\hat{e}_3}{10} + \alpha(-3\hat{e}_2 + \hat{e}_3)$$

ossia, riferendo il risultato all'origine O della terna di riferimento,

$$P - O = A - O + \frac{1}{10} \hat{e}_1 - \frac{9}{10} \hat{e}_2 - \frac{27}{10} \hat{e}_3 - 3\alpha \hat{e}_2 + \alpha \hat{e}_3 =$$

$$\begin{aligned}
&= -\hat{e}_2 - 2\hat{e}_3 + \frac{1}{10}\hat{e}_1 - \frac{9}{10}\hat{e}_2 - \frac{27}{10}\hat{e}_3 - 3\alpha\hat{e}_2 + \alpha\hat{e}_3 = \\
&= \frac{1}{10}\hat{e}_1 - \frac{19}{10}\hat{e}_2 - \frac{47}{10}\hat{e}_3 - 3\alpha\hat{e}_2 + \alpha\hat{e}_3 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

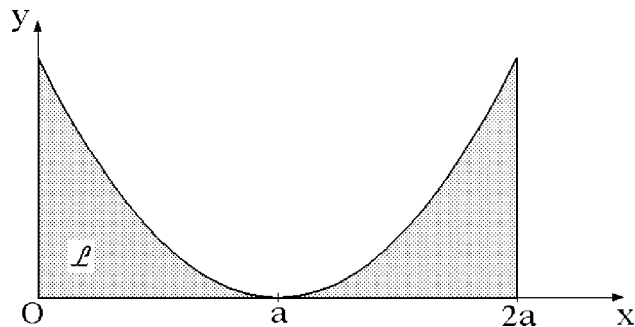
Evidenziando le componenti, si ottiene la seguente rappresentazione parametrica dell'asse centrale

$$\begin{cases} x = \frac{1}{10} \\ y = -\frac{19}{10} - 3\alpha \\ z = -\frac{47}{10} + \alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 4

Nel piano Oxy di una terna $Oxyz$ è posta una lamina omogenea di densità $\sigma = m/a^2$, essendo m ed a una massa ed una lunghezza caratteristiche del sistema. In tale piano la lamina occupa l'insieme, illustrato in figura, definito da

$$\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2a, 0 \leq y \leq (x-a)^2/a\}.$$



Determinare della lamina:

- la matrice d'inerzia rispetto alla terna $Oxyz$;
- il momento d'inerzia rispetto all'asse di equazione $12y - 5x = 0, z = 0$;
- il momento d'inerzia rispetto all'asse $x = 3a, z = 0$.

Soluzione

(a) **Matrice d'inerzia in $Oxyz$**

La lamina è situata nel piano coordinato Oxy della terna $Oxyz$, per cui la relativa matrice d'inerzia deve assumere la forma generale

$$[L_O] = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & 0 \\ L_{xy} & L_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx} + L_{yy} \end{pmatrix}$$

potendosi individuare il piano di giacitura come piano principale d'inerzia in O . Il momento d'inerzia rispetto all'asse Ox è dato da

$$\begin{aligned} L_{xx} &= \int_0^{2a} dx \int_0^{(x-a)^2/a} dy y^2 \frac{m}{a^2} = \frac{m}{a^2} \int_0^{2a} dx \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{(x-a)^2/a} = \\ &= \frac{m}{3a^2} \int_0^{2a} \frac{(x-a)^6}{a^3} dx = \frac{m}{3a^5} \left[\frac{(x-a)^7}{7} \right]_0^{2a} = \frac{m}{3a^5} \frac{2a^7}{7} = \frac{2}{21} ma^2 \end{aligned}$$

mentre quello relativo all'asse Oy risulta

$$\begin{aligned} L_{yy} &= \int_0^{2a} dx \int_0^{(x-a)^2/a} dy x^2 \frac{m}{a^2} = \frac{m}{a^2} \int_0^{2a} dx x^2 [y]_{y=0}^{(x-a)^2/a} = \frac{m}{a^2} \int_0^{2a} x^2 \frac{(x-a)^2}{a} dx = \\ &= \frac{m}{a^3} \int_0^{2a} x^2 (x^2 - 2ax + a^2) dx = \frac{m}{a^3} \left[\frac{x^5}{5} - 2a \frac{x^4}{4} + a^2 \frac{x^3}{3} \right]_0^{2a} = \frac{16}{15} ma^2. \end{aligned}$$

Quanto al prodotto d'inerzia si ha

$$\begin{aligned} L_{xy} &= - \int_0^{2a} dx \int_0^{(x-a)^2/a} dy xy \frac{m}{a^2} = - \int_0^{2a} dx x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{(x-a)^2/a} = \\ &= - \frac{m}{2a^2} \int_0^{2a} x \frac{(x-a)^4}{a^2} dx = - \frac{m}{2a^4} \int_0^{2a} x (x^4 - 4x^3a + 6x^2a^2 - 4xa^3 + a^4) dx = \\ &= - \frac{m}{2a^4} \int_0^{2a} (x^5 - 4x^4a + 6x^3a^2 - 4x^2a^3 + xa^4) dx = \\ &= - \frac{m}{2a^4} \left[\frac{x^6}{6} - 4 \frac{x^5}{5} a + 6 \frac{x^4}{4} a^2 - 4 \frac{x^3}{3} a^3 + \frac{x^2}{2} a^4 \right]_0^{2a} = \\ &= - \frac{m}{2a^4} \left(\frac{64}{6} a^6 - \frac{4}{5} 32a^6 + \frac{3}{2} 16a^6 - \frac{4}{3} 8a^6 + 4 \frac{a^6}{2} \right) = \\ &= - \frac{ma^2}{2} \left(\frac{32}{3} - \frac{128}{5} + 24 - \frac{32}{3} + 2 \right) = - \frac{1}{5} ma^2. \end{aligned}$$

In definitiva, la matrice d'inerzia della lamina nella terna $Oxyz$ diventa

$$[L_O] = ma^2 \begin{pmatrix} 2/21 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 16/15 & 0 \\ 0 & 0 & 122/105 \end{pmatrix}.$$

(b) **Momento d'inerzia rispetto alla retta** $12y - 5x = 0, z = 0$

L'equazione della retta si può esprimere nella forma equivalente

$$y = \frac{5}{12}x, \quad z = 0,$$

dalla quale appare evidente che la retta passa per l'origine O della terna di riferimento. Il versore tangente alla retta si scrive

$$\hat{n} = \frac{\hat{e}_1 + \frac{dy}{dx} \hat{e}_2}{\left| \hat{e}_1 + \frac{dy}{dx} \hat{e}_2 \right|} = \frac{\hat{e}_1 + \frac{5}{12} \hat{e}_2}{\left| \hat{e}_1 + \frac{5}{12} \hat{e}_2 \right|} = \frac{\hat{e}_1 + \frac{5}{12} \hat{e}_2}{\sqrt{1 + \frac{5^2}{12^2}}} = \frac{12 \hat{e}_1 + 5 \hat{e}_2}{13}$$

con componenti

$$n_1 = \frac{12}{13} \quad n_2 = \frac{5}{13} \quad n_3 = 0.$$

Il momento d'inerzia rispetto alla retta $O\hat{n}$ è allora dato dalla relazione generale

$$I_{O\hat{n}} = (n_1 \ n_2 \ n_3) [L_O] \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

che nella fattispecie si riduce a

$$\begin{aligned} I_{O\hat{n}} &= (12/13 \ 5/13 \ 0) ma^2 \begin{pmatrix} 2/21 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 16/15 & 0 \\ 0 & 0 & 122/105 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12/13 \\ 5/13 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{169} ma^2 (12 \ 5 \ 0) \begin{pmatrix} \frac{8}{7} - 1 \\ -\frac{12}{5} + \frac{16}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{169} ma^2 (12 \ 5 \ 0) \begin{pmatrix} 1/7 \\ 44/15 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{169} ma^2 \left(\frac{12}{7} + \frac{44}{3} \right) = \frac{344}{3549} ma^2. \end{aligned}$$

(c) **Momento d'inerzia rispetto alla retta** $x = 3a, z = 0$

L'asse di equazione $x = 3a, z = 0$, che si indicherà come asse s , è parallelo all'asse coordinato Oy : il momento d'inerzia della lamina rispetto a s può essere comodamente calcolato usando il teorema di Huygens-Steiner. Ciò richiede tuttavia la determinazione della massa e del baricentro del sistema. In realtà del baricentro G interessa soltanto l'ascissa x_G , la sola da cui dipende la distanza interassiale. Risulta immediatamente

$$x_G = a$$

a causa dell'evidente asse di simmetria $x = a$, $z = 0$ — la figura è omogenea e l'intervallo $[0, 2a]$ di definizione dell'ascissa x è invariante sotto la trasformazione di inversione dello stesso intervallo

$$x \longrightarrow 2a - x$$

al pari della funzione che descrive il bordo superiore della lamina

$$\frac{(x-a)^2}{a} \longrightarrow \frac{(2a-x-a)^2}{a} = \frac{(a-x)^2}{a} = \frac{(x-a)^2}{a} \quad \forall x \in [0, 2a],$$

lamina che perciò è complessivamente invariante rispetto alla stessa trasformazione. Ne deriva che l'asse baricentrale parallelo a Oy è identificato dall'equazione $x = a$, $z = 0$: lo si indicherà come asse r . Rimane da calcolare la sola massa, che si esprime per mezzo dell'integrale doppio della densità sull'intero supporto della superficie

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2a} dx \int_0^{(x-a)^2/a} dy \frac{m}{a^2} = \frac{m}{a^2} \int_0^{2a} dx \frac{(x-a)^2}{a} = \frac{m}{a^3} \int_0^{2a} (x-a)^2 dx = \\ &= \frac{m}{a^3} \left[\frac{(x-a)^3}{3} \right]_0^{2a} = \frac{m}{3a^3} (a^3 + a^3) = \frac{2}{3}m. \end{aligned}$$

Per il momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrale r il teorema di Huygens-Steiner fornisce allora l'espressione

$$I_r = I_{Oy} - Ma^2 = L_{yy} - Ma^2 = \frac{16}{15}ma^2 - \frac{2}{3}ma^2 = \frac{2}{5}ma^2$$

e quello relativo all'asse s diventa dunque

$$I_s = I_r + M(2a)^2 = \frac{2}{5}ma^2 + \frac{2}{3}m4a^2 = \frac{2}{5}ma^2 + \frac{8}{3}ma^2 = \frac{46}{15}ma^2,$$

essendo $2a$ la distanza fra gli assi paralleli s ed r .

Esercizio 5

Un punto materiale non pesante P di massa m scorre senza attrito lungo la curva di equazione $P(x) = x^2\hat{e}_1 + (x-2)^2\hat{e}_2$, $x \in \mathbb{R}$, rispetto alla terna inerziale $Oxyz$. Una molla di costante elastica k congiunge P con l'origine O .

- Scrivere le equazioni pure del moto del sistema.
- Determinare le posizioni di equilibrio del sistema.

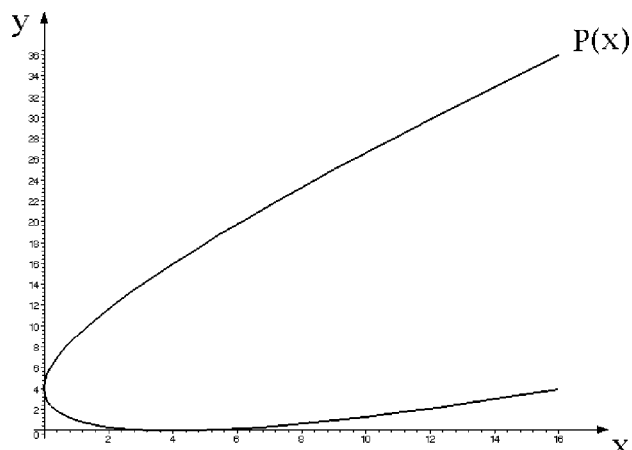
Soluzione

(a) Equazioni pure del moto

La parametrizzazione della curva è di classe C^2 in \mathbb{R} ed ammette le derivate prima e seconda indicate di seguito

$$P'(x) = 2x\hat{e}_1 + 2(x-2)\hat{e}_2 \quad P''(x) = 2\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2. \quad (0.2)$$

La curva parametrica ha l'andamento illustrato in figura



Velocità e accelerazione istantanea lungo un generico moto possibile, individuato da una qualsiasi funzione $x(t)$ di classe C^2 in un intervallo reale, si scrivono nella forma

$$\dot{P} = P'(x) \dot{x} \quad \ddot{P} = P'(x) \ddot{x} + P''(x) \dot{x}^2$$

che inserita nel postulato delle reazioni vincolari porge l'equazione del moto

$$m[P'(x) \ddot{x} + P''(x) \dot{x}^2] = -k[P(x) - O] + \vec{\Phi}$$

in cui la reazione vincolare $\vec{\Phi}$ può essere un qualsiasi vettore ortogonale alla curva nella posizione occupata dal punto materiale. L'equazione pura del moto si ricava proiettando la precedente equazione lungo la direzione tangente $P'(x)$:

$$mP'(x)^2 \ddot{x} + mP''(x) \cdot P'(x) \dot{x}^2 = -k[P(x) - O] \cdot P'(x)$$

e facendo uso delle (0.2) diventa

$$4m[x^2 + (x - 2)^2] \ddot{x} + 4m(x + x - 2) \dot{x}^2 = -2k[x^3 + (x - 2)^3]$$

ovvero

$$4m[x^2 + (x - 2)^2] \ddot{x} + 8m(x - 1) \dot{x}^2 + 2k[x^3 + (x - 2)^3] = 0. \quad (0.3)$$

(b) Equilibri

Gli equilibri del sistema sono individuati dalle soluzioni statiche dell'equazione pura del moto, equazione (0.3). Le ascisse di equilibrio sono quindi tutte e sole le soluzioni dell'equazione algebrica non lineare

$$2k[x^3 + (x - 2)^3] = 0$$

che sviluppando il cubo e semplificando si riduce all'equazione di terzo grado

$$x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = 0. \quad (0.4)$$

Una radice ovvia si ha per $x = 1$, come si verifica immediatamente facendo uso del teorema di Ruffini:

$$1^3 - 3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 4 = 0.$$

Il polinomio $x^3 - 3x^2 + 6x - 4$ è quindi divisibile per il binomio $x - 1$ e il quoziente può essere determinato sempre con la regola di Ruffini

	1	-3	6	-4
1	1	-2	4	0
	1	-2	4	0

risultando così

$$x^2 - 2x + 4.$$

È peraltro immediato verificare che questo trinomio di secondo grado si mantiene sempre positivo, non avendo radici reali e assumendo valore positivo in $x = 0$; si ha in effetti l'identità

$$x^2 - 2x + 4 = x^2 - 2x + 1 + 3 = (x - 1)^2 + 3 \geq 3 > 0.$$

L'equazione di equilibrio (0.4) equivale perciò alla

$$(x - 1)(x^2 - 2x + 4) = 0$$

ed ammette $x = 1$ come *unica* radice reale. Si conclude che la sola configurazione di equilibrio del sistema ricorre per $x = 1$:

$$P(1) - O = \hat{e}_1 + \hat{e}_2.$$