

## Prova in itinere di meccanica razionale 1 A-L del 30.10.2007

### Esercizio 1

Un punto materiale  $P$  di massa  $m = 1$  è vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse  $Ox = O\hat{e}_1$  di una terna inerziale. Una molla ideale di costante elastica  $k = 5$  collega l'origine  $O$  a  $P$ , sul quale agisce anche una resistenza viscosa con costante di frizione  $\beta$ . Determinare:

- (a) l'equazione pura del moto del sistema e i valori di  $\beta$  per i quali tutti i moti risultano oscillatori smorzati;
- (b) la posizione e la velocità di  $P$  all'istante  $t = \pi$ , sapendo che  $P(0) = 0$ ,  $\dot{P}(0) = 4\hat{e}_1$  e  $\beta = 2$ .

### Soluzione

#### (a) Equazione del moto e condizione per i moti oscillatori smorzati

La posizione del punto materiale, vincolato a scorrere lungo l'asse  $Ox$ , è individuata dal vettore

$$P - O = x \hat{e}_1.$$

Il postulato delle reazioni vincolari porge per il moto del punto l'equazione

$$m\ddot{P} = -k(P - O) - \beta\dot{P} + \vec{\Phi}$$

in cui figurano un termine  $-k(P - O)$  di sollecitazione elastica e uno  $-\beta\dot{P}$  di resistenza viscosa, mentre  $\vec{\Phi}$  indica la reazione vincolare esercitata dall'asse vincolare sul punto  $P$ . Il contributo della reazione è nullo lungo l'asse  $Ox$ , per via dell'ipotesi di vincolo liscio:

$$m\ddot{P} \cdot \hat{e}_1 = -k(P - O) \cdot \hat{e}_1 - \beta\dot{P} \cdot \hat{e}_1$$

Tenuto conto che in questo caso  $m = 1$  e  $k = 5$ , l'equazione pura del moto diventa

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + 5x = 0.$$

L'equazione caratteristica corrispondente si scrive

$$\lambda^2 + \beta\lambda + 5 = 0$$

ed ammette le radici

$$\lambda = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 20}}{2}.$$

I moti oscillatori smorzati ricorrono per  $\beta^2 - 20 < 0$  ossia  $\beta < \sqrt{20}$ . La condizione per il moto subcritico è pertanto la seguente:

$$0 < \beta < \sqrt{20}.$$

**(b) Posizione e velocità del punto per condizioni iniziali assegnate**

Per  $\beta = 2$  l'equazione del moto diventa

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$$

e ad essa si associa l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

che ammette le radici complesse coniugate

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm i4}{2} = -1 \pm i2.$$

La soluzione generale dell'equazione si scrive perciò

$$x(t) = c_1 e^{-t} \cos(2t) + c_2 e^{-t} \sin(2t) \quad (0.1)$$

ed ammette la derivata

$$\dot{x}(t) = c_1 e^{-t} [-\cos(2t) - 2\sin(2t)] + c_2 e^{-t} [-\sin(2t) + 2\cos(2t)]$$

con  $c_1$  e  $c_2$  costanti reali arbitrarie, da determinare in base alle condizioni iniziali. Le condizioni iniziali richieste impongono che si abbia

$$P(0) - O = x(0)\hat{e}_1 = 0 \quad \dot{P}(0) = \dot{x}(0)\hat{e}_1 = 4\hat{e}_1$$

e quindi

$$x(0) = c_1 = 0 \quad \dot{x}(0) = -c_1 + 2c_2 = 4$$

da cui segue che

$$c_1 = 0 \quad c_2 = 2.$$

In definitiva, la soluzione del problema di Cauchy risulta

$$x(t) = 2e^{-t} \sin(2t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

con derivata

$$\dot{x}(t) = 2e^{-t} [-\sin(2t) + 2\cos(2t)] \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

All'istante  $t = \pi$  si ottiene così

$$x(\pi) = 2e^{-\pi} \sin(2\pi) = 0$$

$$\dot{x}(\pi) = 2e^{-\pi} [-\sin(2\pi) + 2\cos(2\pi)] = 4e^{-\pi}$$

per cui

$$P(\pi) - O = 0$$

(il punto materiale si trova a transitare per l'origine) e

$$\dot{P}(\pi) = 4e^{-\pi} \hat{e}_1.$$

### Esercizio 2

In una terna cartesiana ortogonale destra  $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$  di  $\mathbb{E}^3$  si considera il sistema dei vettori  $\vec{a} = -3\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + 2\hat{e}_3$  e  $\vec{b} = -2\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + \hat{e}_3$ , applicati nei punti  $A(0, 1, 3)$  e  $B(-1, 2, 1)$  rispettivamente. Determinare:

- l'equazione parametrica dell'asse centrale del sistema, se definito;
- il momento del sistema rispetto all'asse di equazione  $x = -3\xi - 1$ ,  $y = 4\xi + 1$ ,  $z = 12\xi$ , con  $\xi$  reale arbitrario.

### Soluzione

#### (a) Equazione parametrica dell'asse centrale

L'esistenza dell'asse centrale si accerta immediatamente verificando che il risultante del sistema di vettori applicati è non nullo:

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} = -3\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + 2\hat{e}_3 + (-2\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + \hat{e}_3) = -5\hat{e}_1 + 3\hat{e}_3 \neq 0.$$

In forma vettoriale l'equazione parametrica dell'asse centrale si scrive

$$P - O = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{|\vec{R}|^2} + \alpha \vec{R} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

e richiede la determinazione del momento risultante in  $O$

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= (A - O) \wedge \vec{a} + (B - O) \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= -\hat{e}_1 - 9\hat{e}_2 + 3\hat{e}_3 + 3\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + 5\hat{e}_3 = 2\hat{e}_1 - 10\hat{e}_2 + 8\hat{e}_3 \end{aligned}$$

del modulo quadrato del risultante

$$|\vec{R}|^2 = (-5)^2 + 3^2 = 34$$

e del prodotto vettore fra risultante e momento risultante in  $O$

$$\vec{R} \wedge \vec{M}_O = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -5 & 0 & 3 \\ 2 & -10 & 8 \end{vmatrix} = 30\hat{e}_1 + 46\hat{e}_2 + 50\hat{e}_3.$$

Si ottiene così

$$P - O = \frac{30\hat{e}_1 + 46\hat{e}_2 + 50\hat{e}_3}{34} + \alpha(-5\hat{e}_1 + 3\hat{e}_3) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

e l'equazione parametrica dell'asse centrale risulta pertanto

$$\begin{cases} x = \frac{15}{17} - 5\alpha \\ y = \frac{23}{17} \\ z = \frac{25}{17} + 3\alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

**(b) Momento assiale**

Il momento rispetto all'asse di equazione parametrica  $x = -3\xi - 1$ ,  $y = 4\xi + 1$ ,  $z = 12\xi$ , si determina calcolando il momento risultante rispetto ad un punto arbitrario  $Q$  dello stesso asse e proiettando poi tale momento lungo il versore direttore dell'asse. Un punto  $Q$  dell'asse può essere individuato assegnando un qualsiasi valore del parametro  $\xi$ , ad esempio per  $\xi = 0$ :

$$Q - O = -\hat{e}_1 + \hat{e}_2.$$

I vettori posizione rispetto a  $Q$  dei punti di applicazione  $A$  e  $B$  si scrivono allora

$$A - Q = \hat{e}_2 + 3\hat{e}_3 - (-\hat{e}_1 + \hat{e}_2) = \hat{e}_1 + 3\hat{e}_3$$

$$B - Q = -\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 + \hat{e}_3 - (-\hat{e}_1 + \hat{e}_2) = \hat{e}_2 + \hat{e}_3$$

e il momento risultante in  $Q$  del sistema diventa

$$\begin{aligned} \vec{M}_Q &= (A - Q) \wedge \vec{a} + (B - Q) \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= -3\hat{e}_1 - 11\hat{e}_2 + \hat{e}_3 + 2\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3 = -\hat{e}_1 - 13\hat{e}_2 + 3\hat{e}_3 \end{aligned}$$

Il vettore direttore dell'asse, orientato nel senso delle  $\xi$  crescenti, si ricava derivando la parametrizzazione rispetto al parametro:

$$\vec{v} = \frac{dx}{d\xi}\hat{e}_1 + \frac{dy}{d\xi}\hat{e}_2 + \frac{dz}{d\xi}\hat{e}_3 = -3\hat{e}_1 + 4\hat{e}_2 + 12\hat{e}_3$$

e, normalizzato, fornisce il versore direttore corrispondente

$$\hat{n} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{-3\hat{e}_1 + 4\hat{e}_2 + 12\hat{e}_3}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 12^2}} = \frac{-3\hat{e}_1 + 4\hat{e}_2 + 12\hat{e}_3}{13} = -\frac{3}{13}\hat{e}_1 + \frac{4}{13}\hat{e}_2 + \frac{12}{13}\hat{e}_3.$$

Per il momento assiale si ha così l'espressione

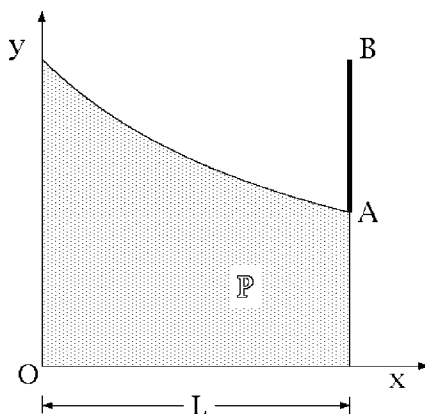
$$M_{Q\hat{n}} = \vec{M}_Q \cdot \hat{n} = (-\hat{e}_1 - 13\hat{e}_2 + 3\hat{e}_3) \cdot \left(-\frac{3}{13}\hat{e}_1 + \frac{4}{13}\hat{e}_2 + \frac{12}{13}\hat{e}_3\right) = \frac{1}{13}(3 - 52 + 36) = -1.$$

### Esercizio 3

Nel piano  $Oxy$  di una terna  $Oxyz$  una piastra  $\mathbb{P}$  ha densità  $\sigma = \mu/L^2$  e occupa la regione

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L^2/(L+x)\},$$

essendo  $\mu$  e  $L$  una massa e una lunghezza caratteristiche del sistema. Un'asta di estremi  $A(L, L/2, 0)$  e  $B(L, L, 0)$  e densità  $\lambda(P) = \mu|B-P|/L^2 \forall P \in AB$  è saldata a  $\mathbb{P}$  in  $A$  (vedi figura).



Determinare:

- (a) la massa del sistema;
- (b) il baricentro del sistema.

### Soluzione

#### (a) Massa del sistema

La massa del sistema si calcola ricorrendo alla proprietà additiva, ossia determinando separatamente e sommando poi le masse della piastra  $\mathbb{P}$  e dell'asta  $AB$ .

#### Massa della piastra

La massa della piastra viene ricavata integrando sul dominio  $D$  del piano la densità areale costante  $\sigma = \mu/L^2$ , tramite l'integrale doppio

$$m_{\mathbb{P}} = \int_0^L dx \int_0^{L^2/(L+x)} dy \frac{\mu}{L^2} = \int_0^L dx \frac{\mu}{L^2} \frac{L^2}{L+x} = \mu \int_0^L \frac{1}{L+x} dx$$

che con la sostituzione  $x = L\xi$  si riduce a

$$m_{\mathbb{P}} = \mu \int_0^1 \frac{1}{L(1+\xi)} L d\xi = \mu \int_0^1 \frac{1}{1+\xi} d\xi = \mu [\ln(1+\xi)]_0^1 = \mu \ln 2.$$

*Massa dell'asta*

L'asta  $AB$  può essere rappresentata per mezzo dell'ovvia parametrizzazione

$$P(y) - O = L\hat{e}_1 + y\hat{e}_2, \quad y \in [L/2, L]$$

mentre in termini dello stesso parametro  $y$  la densità lineare  $\lambda$  assume la forma

$$\lambda(y) = \frac{\mu}{L^2}|B - P| = \frac{\mu}{L^2}|L\hat{e}_1 + L\hat{e}_2 - (L\hat{e}_1 + y\hat{e}_2)| = \frac{\mu}{L^2}(L - y).$$

Essendo  $ds = |P'(y)|dy = |\hat{e}_2|dy = dy$ , la massa della curva materiale è perciò data dall'integrale curvilineo

$$\begin{aligned} m_{AB} &= \int_{L/2}^L \lambda(y) dy = \int_{L/2}^L \frac{\mu}{L^2}(L - y) dy = \int_{1/2}^1 \frac{\mu}{L^2}(L - L\xi) L d\xi = \\ &= \mu \int_{1/2}^1 (1 - \xi) d\xi = \mu \left[ -\frac{(1 - \xi)^2}{2} \right]_{1/2}^1 = \frac{\mu}{8} \end{aligned}$$

in cui ci si è giovati del cambio di variabile  $x = L\xi$ ,  $\xi \in [1/2, 1]$ .

*Massa del sistema*

Per determinare la massa del sistema non rimane che sommare le masse di piastra e asta:

$$m = m_{\mathbb{P}} + m_{AB} = \mu \ln 2 + \frac{\mu}{8} = \left( \ln 2 + \frac{1}{8} \right) \mu.$$

**(b) Baricentro del sistema**

Si perviene all'individuazione del baricentro facendo uso della proprietà distributiva: si calcolano cioè i baricentri della piastra  $\mathbb{P}$  e dell'asta  $AB$ , si immagina di collocare in tali baricentri le masse rispettive  $m_{\mathbb{P}}$  e  $m_{AB}$  calcolate al punto precedente, e si determina infine il baricentro di questo sistema fittizio di due punti materiali.

*Baricentro della piastra*

La piastra giace nel piano coordinato  $Oxy$ , che ne costituisce un ovvio piano di simmetria. Il baricentro  $G_{\mathbb{P}}$  della piastra va dunque ricercato nello stesso piano:

$$G_{\mathbb{P}} - O = x_{\mathbb{P}}\hat{e}_1 + y_{\mathbb{P}}\hat{e}_2.$$

L'ascissa è data dalla relazione

$$x_{\mathbb{P}} = \frac{1}{m_{\mathbb{P}}} \int_D x \sigma dx dy = \frac{1}{\mu \ln 2} \int_0^L dx \int_0^{L^2/(L+x)} dy x \frac{\mu}{L^2} = \frac{1}{L^2 \ln 2} \int_0^L dx x \frac{L^2}{L+x}$$

che con il comodo cambiamento di variabile  $x = L\xi$ , già utilizzato più volte, diventa

$$\begin{aligned} x_{\mathbb{P}} &= \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 \frac{L\xi}{L+L\xi} L d\xi = \frac{L}{\ln 2} \int_0^1 \frac{\xi}{1+\xi} d\xi = \frac{L}{\ln 2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+\xi}\right) d\xi = \\ &= \frac{L}{\ln 2} \left[ \xi - \ln(1+\xi) \right]_0^1 = \frac{L}{\ln 2} (1 - \ln 2) = \left( \frac{1}{\ln 2} - 1 \right) L. \end{aligned}$$

L'ascissa si verifica immediatamente essere un numero positivo, come deve avvenire in quanto il dominio  $D$  è completamente contenuto nella striscia — convessa —  $0 \leq x \leq L$ . Quanto all'ordinata  $y_{\mathbb{P}}$  si ha invece l'espressione

$$\begin{aligned} y_{\mathbb{P}} &= \frac{1}{m_{\mathbb{P}}} \int_D y \sigma dx dy = \frac{1}{\mu \ln 2} \int_0^L dx \int_0^{L^2/(L+x)} dy y \frac{\mu}{L^2} = \frac{1}{L^2 \ln 2} \int_0^L dx \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{L^2/(L+x)} = \\ &= \frac{1}{L^2 2 \ln 2} \int_0^L \frac{L^4}{(L+x)^2} dx = \frac{1}{L^2 2 \ln 2} \int_0^1 \frac{L^4}{(L+L\xi)^2} L d\xi = \frac{L}{2 \ln 2} \int_0^1 \frac{1}{(1+\xi)^2} d\xi = \\ &= \frac{L}{2 \ln 2} \left[ -\frac{1}{1+\xi} \right]_0^1 = \frac{L}{2 \ln 2} \left( -\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{4 \ln 2} L, \end{aligned}$$

essendosi ancora introdotta la sostituzione  $x = L\xi$ . Il vettore posizione del baricentro  $G_{\mathbb{P}}$  si scrive pertanto

$$G_{\mathbb{P}} - O = \left( \frac{1}{\ln 2} - 1 \right) L \hat{e}_1 + \frac{1}{4 \ln 2} L \hat{e}_2.$$

*Baricentro dell'asta*

Per il teorema dell'involuppo convesso, il baricentro dell'asta deve essere ricercato nel segmento  $AB$ , che è disposto nel piano  $Oxy$  e parallelamente all'asse  $Oy$ . Il relativo vettore posizione assume perciò la forma

$$G_{AB} - O = L \hat{e}_1 + y_{AB} \hat{e}_2$$

dove l'ordinata  $y_{AB}$  è data dall'espressione

$$y_{AB} = \frac{1}{m_{AB}} \int_{L/2}^L \lambda(y) y dy = \frac{8}{\mu} \int_{L/2}^L \frac{\mu}{L^2} (L-y) y dy$$

che con il solito cambio di variabile si riduce a

$$y_{AB} = 8 \int_{1/2}^1 \frac{1}{L^2} (L - L\xi) L \xi L d\xi = 8L \int_{1/2}^1 (\xi - \xi^2) d\xi = 8L \left[ \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3} \right]_{1/2}^1 = \frac{2}{3} L.$$

Ne deriva che

$$G_{AB} - O = L\hat{e}_1 + \frac{2}{3}L\hat{e}_2.$$

*Baricentro del sistema*

Il baricentro del sistema si ottiene infine applicando il teorema distributivo

$$G - O = \frac{m_{\mathbb{P}}(G_{\mathbb{P}} - O) + m_{AB}(G_{AB} - O)}{m_{\mathbb{P}} + m_{AB}}$$

ossia, sostituendo le espressioni delle masse e dei baricentri parziali,

$$\begin{aligned} G - O &= \frac{1}{\mu\left(\ln 2 + \frac{1}{8}\right)} \left\{ \mu \ln 2 \left[ \left(\frac{1}{\ln 2} - 1\right)L\hat{e}_1 + \frac{1}{4\ln 2}L\hat{e}_2 \right] + \frac{\mu}{8} \left[ L\hat{e}_1 + \frac{2}{3}L\hat{e}_2 \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{\ln 2 + \frac{1}{8}} \left[ (1 - \ln 2)\hat{e}_1 + \frac{1}{4}\hat{e}_2 + \frac{1}{8}\hat{e}_1 + \frac{1}{12}\hat{e}_2 \right] L = \\ &= \frac{1}{\ln 2 + \frac{1}{8}} \left[ \left(\frac{9}{8} - \ln 2\right)\hat{e}_1 + \frac{1}{3}\hat{e}_2 \right] L. \end{aligned}$$

Si osservi che il baricentro è determinato dall'espressione approssimata

$$G - O \simeq 0.5278 L\hat{e}_1 + 0.4074 L\hat{e}_2$$

che permette di riconoscere immediatamente come  $G$  appartenga all'involuppo convesso dell'insieme  $D \cup AB$  — che si identifica con il quadrato di lato  $L$  e vertici opposti  $O$  e  $B$ .

#### **Esercizio 4**

In una terna inerziale  $Oxyz$ , con asse  $Oy$  diretto verticalmente verso l'alto, un punto materiale pesante  $P$  di massa  $m$  scorre senza attrito lungo la curva di equazione  $\varphi(\xi) = (\xi^2 - 1)\hat{e}_1 + (\xi - 1)^2\hat{e}_2$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ .

- (a) Scrivere le equazioni pure del moto del sistema.
- (b) Determinare le posizioni di equilibrio del sistema.

#### **Soluzione**

##### **(a) Equazioni del moto**

Il punto materiale è soggetto alla sola forza peso (l'unica forza attiva) e vincolato a muoversi senza attrito lungo la curva di equazione parametrica

$$\varphi(\xi) = (\xi^2 - 1)\hat{e}_1 + (\xi - 1)^2\hat{e}_2, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

che risulta palesemente di classe  $C^\infty$  in  $\mathbb{R}$  ed ammette le derivate prima e seconda:

$$\varphi'(\xi) = 2\xi\hat{e}_1 + 2(\xi - 1)\hat{e}_2 \quad \varphi''(\xi) = 2\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2.$$

È importante sottolineare che  $\varphi'(\xi) \neq 0 \forall \xi \in \mathbb{R}$ , per cui la curva è regolare e in ogni suo punto appare definita una direzione tangente, in modo che ha senso parlare di vincolo liscio. Formalmente, l'equazione del moto si ricava dal postulato delle reazioni vincolari:

$$m\ddot{P} = -mg\hat{e}_2 + \vec{\Phi}$$

che tuttavia richiede l'eliminazione della reazione vincolare incognita  $\vec{\Phi}$ . A questo si provvede grazie all'ipotesi di vincolo liscio, proiettando quindi lungo la direzione tangente alla curva vincolare nella posizione occupata dal punto:

$$m\ddot{P} \cdot \varphi'(\xi) = -mg\hat{e}_2 \cdot \varphi'(\xi). \quad (0.2)$$

In questa equazione pura del moto l'accelerazione istantanea del punto vincolato si deve intendere riespressa in termini della parametrizzazione della curva vincolare:

$$\ddot{P} = \varphi'(\xi)\ddot{\xi} + \varphi''(\xi)\dot{\xi}^2$$

per cui (0.2) diventa

$$m|\varphi'(\xi)|^2\ddot{\xi} + m\varphi''(\xi) \cdot \varphi'(\xi)\dot{\xi}^2 = -mg\hat{e}_2 \cdot \varphi'(\xi)$$

ed il comune fattore  $m$  può essere ignorato

$$|\varphi'(\xi)|^2\ddot{\xi} + \varphi''(\xi) \cdot \varphi'(\xi)\dot{\xi}^2 = -g\hat{e}_2 \cdot \varphi'(\xi). \quad (0.3)$$

I coefficienti che moltiplicano  $\ddot{\xi}$  e  $\dot{\xi}^2$  nell'equazione si ricavano immediatamente:

$$|\varphi'(\xi)|^2 = |2\xi\hat{e}_1 + 2(\xi - 1)\hat{e}_2|^2 = 4\xi^2 + 4(\xi - 1)^2 = 4(2\xi^2 - 2\xi + 1)$$

$$\varphi''(\xi) \cdot \varphi'(\xi) = (2\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2) \cdot [2\xi\hat{e}_1 + 2(\xi - 1)\hat{e}_2] = 4\xi + 4(\xi - 1) = 4(2\xi - 1)$$

e sostituiti nella (0.3) conducono alla forma finale dell'equazione del moto

$$4(2\xi^2 - 2\xi + 1)\ddot{\xi} + 4(2\xi - 1)\dot{\xi}^2 = -2g(\xi - 1), \quad (\xi, \dot{\xi}) \in \mathbb{R}^2. \quad (0.4)$$

### (b) Equilibri

Siccome il punto materiale è vincolato a rimanere su una curva *fissa* e liscia, gli equilibri del sistema sono individuati dalle soluzioni statiche dell'equazione pura del moto, (0.4). Si impone perciò una soluzione della forma:

$$\xi(t) = \xi_0, \quad \text{costante}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

e si ottiene l'equazione di equilibrio

$$0 = -2g(\xi_0 - 1)$$

dalla quale si deduce

$$\xi_0 = +1.$$

L'unica posizione di equilibrio si ha dunque per

$$P(\xi_0) - O = P(+1) - O = (1^2 - 1)\hat{e}_1 + (1 - 1)^2\hat{e}_2 = 0$$

e si identifica quindi con l'origine della terna di riferimento  $Oxyz$ .

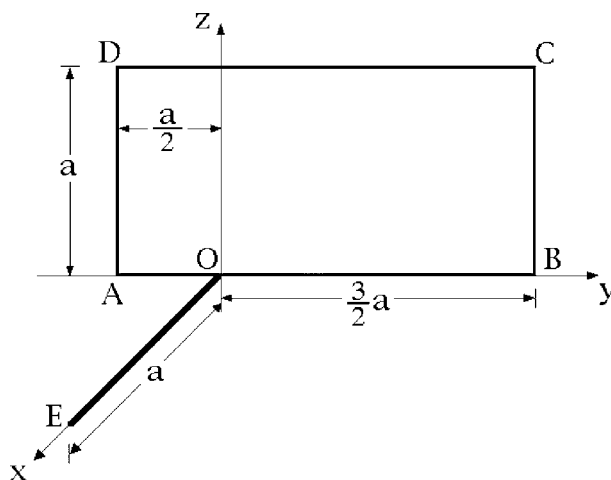
### Esercizio 5

Una piastra rettangolare  $ABCD$  è posta nel piano  $Oyz$  di una terna  $Oxyz$ , come illustrato in figura. Un'asta  $OE$  si dispone lungo l'asse  $Ox$  ed è fissata alla piastra in  $O$ . La densità della piastra si scrive (con  $\mu$  e  $a$  costanti positive)

$$\sigma(P) = \frac{\mu}{a^4}|P - O|^2 \quad \forall P \in ABCD$$

mentre quella dell'asta vale

$$\lambda(Q) = \frac{\mu}{a^2}|Q - O| \quad \forall Q \in OE.$$



Determinare:

- la matrice d'inerzia in  $Oxyz$  della piastra rettangolare;
- la matrice d'inerzia in  $Oxyz$  dell'intero sistema;
- il momento d'inerzia del sistema rispetto alla retta  $OD$ .

## Soluzione

### (a) Matrice d'inerzia della piastra

Indicata con  $\mathbb{P}$  la piastra  $ABCD$ , la relativa matrice d'inerzia in  $Oxyz$  va cercata nella forma

$$[L_O^{\mathbb{P}}] = \begin{pmatrix} L_{yy}^{\mathbb{P}} + L_{zz}^{\mathbb{P}} & 0 & 0 \\ 0 & L_{yy}^{\mathbb{P}} & L_{yz}^{\mathbb{P}} \\ 0 & L_{yz}^{\mathbb{P}} & L_{zz}^{\mathbb{P}} \end{pmatrix}$$

dal momento che la piastra è un sistema piano completamente collocato nel piano coordinato  $Oyz$  della terna di riferimento rispetto alla quale si vuole calcolare la matrice d'inerzia. Per il momento d'inerzia relativo all'asse  $Oy$  si ha la relazione

$$\begin{aligned} L_{yy}^{\mathbb{P}} &= \int_{\mathbb{P}} z^2 \sigma \, dydz = \int_0^a dz \int_{-a/2}^{3a/2} dy z^2 \frac{\mu}{a^4} (y^2 + z^2) = \frac{\mu}{a^4} \int_0^a dz \int_{-a/2}^{3a/2} dy (y^2 z^2 + z^4) = \\ &= \frac{\mu}{a^4} \int_0^a dz \left[ \frac{y^3}{3} z^2 + yz^4 \right]_{y=-a/2}^{3a/2} = \frac{\mu}{a^4} \int_0^a dz \left[ \frac{1}{3} \frac{27}{8} a^3 z^2 + \frac{1}{3} \frac{a^3}{8} z^2 + 2az^4 \right] = \\ &= \frac{\mu}{a^4} \int_0^a \left( \frac{7}{6} a^3 z^2 + 2az^4 \right) dz = \frac{\mu}{a^4} \left( \frac{7}{6} a^3 \frac{a^3}{3} + 2a \frac{a^5}{5} \right) = \frac{71}{90} \mu a^2 \end{aligned}$$

mentre il momento rispetto all'asse  $Oz$  risulta

$$\begin{aligned} L_{zz}^{\mathbb{P}} &= \int_{\mathbb{P}} y^2 \sigma \, dydz = \int_0^a dz \int_{-a/2}^{3a/2} dy y^2 \frac{\mu}{a^4} (y^2 + z^2) = \frac{\mu}{a^4} \int_0^a dz \int_{-a/2}^{3a/2} dy (y^4 + y^2 z^2) = \\ &= \frac{\mu}{a^4} \int_0^a dz \left[ \frac{y^5}{5} + \frac{y^3}{3} z^2 \right]_{y=-a/2}^{3a/2} = \frac{\mu}{a^4} \int_0^a dz \left[ \frac{1}{5} \frac{243}{32} a^5 + \frac{1}{3} \frac{27}{8} a^3 z^2 + \frac{1}{5} \frac{1}{32} a^5 + \frac{1}{3} \frac{a^3}{8} z^2 \right] = \\ &= \frac{\mu}{a^4} \int_0^a \left( \frac{61}{40} a^5 + \frac{7}{6} a^3 z^2 \right) dz = \frac{\mu}{a^4} \left( \frac{61}{40} a^5 a + \frac{7}{6} a^3 \frac{a^3}{3} \right) = \frac{689}{360} \mu a^2. \end{aligned}$$

La somma dei momenti  $L_{yy}^{\mathbb{P}}$  e  $L_{zz}^{\mathbb{P}}$  fornisce il momento d'inerzia relativo all'asse  $Ox$ :

$$L_{yy}^{\mathbb{P}} + L_{zz}^{\mathbb{P}} = \frac{71}{90} \mu a^2 + \frac{689}{360} \mu a^2 = \frac{284 + 689}{360} \mu a^2 = \frac{973}{360} \mu a^2.$$

Quanto all'unico prodotto d'inerzia non banale, un calcolo immediato porge

$$\begin{aligned}
L_{yz}^{\mathbb{P}} &= -\int_0^a dz \int_{-a/2}^{3a/2} dy yz \frac{\mu}{a^4} (y^2 + z^2) = -\frac{\mu}{a^4} \int_0^a dz \int_{-a/2}^{3a/2} dy (y^3 z + yz^3) = \\
&= -\frac{\mu}{a^4} \int_0^a dz \left[ \frac{y^4}{4} z + \frac{y^2}{2} z^3 \right]_{y=-a/2}^{3a/2} = -\frac{\mu}{a^4} \int_0^a dz \left[ \frac{1}{4} \frac{81}{16} a^4 z + \frac{1}{2} \frac{9}{4} a^2 z^3 - \frac{1}{4} \frac{a^4}{16} z - \frac{1}{2} \frac{a^2}{4} z^3 \right] \\
&= -\frac{\mu}{a^4} \int_0^a dz \left( \frac{5}{4} a^4 z + a^2 z^3 \right) dz = -\frac{\mu}{a^4} \left( \frac{5}{4} a^4 \frac{a^2}{2} + a^2 \frac{a^4}{4} \right) = -\frac{7}{8} \mu a^2.
\end{aligned}$$

La matrice d'inerzia in  $Oxyz$  della piastra diventa pertanto:

$$[L_O^{\mathbb{P}}] = \mu a^2 \begin{pmatrix} 973/360 & 0 & 0 \\ 0 & 71/90 & -7/8 \\ 0 & -7/8 & 689/360 \end{pmatrix}.$$

### (b) Matrice d'inerzia del sistema

Per determinare la matrice d'inerzia dell'intero sistema occorre applicare la proprietà additiva e sommare alla matrice in  $Oxyz$  della piastra, quella dell'asta  $OE$  relativamente allo stesso sistema di riferimento. Poichè l'asta si colloca lungo l'asse  $Ox$ , la relativa matrice d'inerzia in  $Oxyz$  deve assumere la forma generale

$$[L_O^{OE}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{yy}^{OE} & 0 \\ 0 & 0 & L_{yy}^{OE} \end{pmatrix}$$

con il momento rispetto all'asse  $Oy$  dato dall'integrale

$$L_{yy}^{OE} = \int_0^a dx x^2 \frac{\mu}{a^2} x = \frac{\mu}{a^2} \frac{a^4}{4} = \frac{1}{4} \mu a^2$$

per cui

$$[L_O^{OE}] = \mu a^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

La matrice d'inerzia del sistema si scrive pertanto

$$\begin{aligned}
[L_O] &= [L_O^{\mathbb{P}}] + [L_O^{OE}] = \mu a^2 \begin{pmatrix} 973/360 & 0 & 0 \\ 0 & 71/90 & -7/8 \\ 0 & -7/8 & 689/360 \end{pmatrix} + \mu a^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \\
&= \mu a^2 \begin{pmatrix} 973/360 & 0 & 0 \\ 0 & 187/180 & -7/8 \\ 0 & -7/8 & 779/360 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(c) **Momento d'inerzia rispetto a OD**

Il versore direttore associato alla retta  $OD$  vale

$$\hat{n} = \frac{D - O}{|D - O|} = \frac{-\frac{a}{2}\hat{e}_2 + a\hat{e}_3}{\left|-\frac{a}{2}\hat{e}_2 + a\hat{e}_3\right|} = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{2}\hat{e}_2 + \hat{e}_3\right)$$

e il corrispondente momento d'inerzia risulta così

$$\begin{aligned} I_{OD} = I_{O\hat{n}} &= \frac{4}{5}\left(0 \quad -\frac{1}{2} \quad 1\right)\mu a^2 \begin{pmatrix} 973/360 & 0 & 0 \\ 0 & 187/180 & -7/8 \\ 0 & -7/8 & 779/360 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \mu a^2 \frac{4}{5}\left(0 \quad -\frac{1}{2} \quad 1\right) \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{187}{360} - \frac{7}{8} \\ \frac{7}{16} + \frac{779}{360} \end{pmatrix} = \frac{95}{36}\mu a^2. \end{aligned}$$