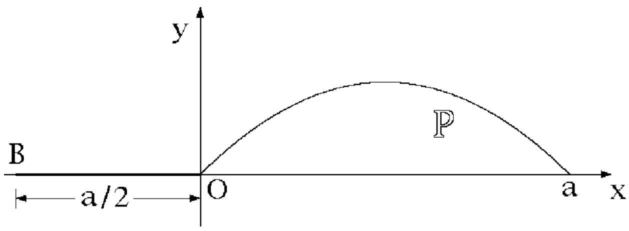
Prova in itinere di meccanica razionale 1 A-L del 30.10.2008

Esercizio 1
Nel piano Oxy di una terna $Oxyz$ la regione compresa fra la curva $y = x(a-x)/a$ e l'asse Ox è occupata da una piastra $\mathbb{P}$ di densità $\sigma(x,y) = \mu x/a^3$, dove le costanti positive μ e a sono una massa e una lunghezza caratteristiche del sistema. Nel semiasse Ox negativo si trova una sbarra BO di lunghezza $a/2$ e densità $\lambda(P) = 3\sqrt{2}\,\mu|P-B|^{1/2}/a^{3/2}$ $\forall\, P \in BO$.



Determinare:

(*a*) la massa del sistema;

(*b*) i baricentri di piastra e sbarra;

(*c*) il baricentro del sistema, verificandone l'appartenenza all'inviluppo convesso di $\mathbb{P}\cup BO$.

Soluzione

(*a*) **Massa del sistema**
La proprietà di additività consente di esprimere la massa del sistema come somma delle masse di piastra e sbarra.

Massa della piastra $\mathbb{P}$
La massa della piastra è data dall'integrale della densità areale sulla regione di piano compresa fra l'asse Ox e la parabola di equazione $y = x(a-x)/a$. Si deve perciò considerare l'integrale doppio:

$$m_{\mathbb{P}} = \int_{\mathbb{P}} \sigma\, dxdy = \int_0^a dx \int_0^{x(a-x)/a} dy\, \frac{\mu x}{a^3} = \frac{\mu}{a^3}\int_0^a dx\, \frac{x(a-x)}{a}\, x =$$

$$= \frac{\mu}{a^4}\int_0^a (ax^2 - x^3)dx = \frac{\mu}{a^4}\left[a\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^a = \frac{\mu}{a^4}\Big(\frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4}\Big) = \frac{\mu}{12}\,.$$

Massa della sbarra OB
La sbarra ammette un'ovvia parametrizzazione della forma

$$P - O = x\,\hat{e}_1 \quad , \qquad x \in [-a/2, 0]\,,$$

mentre per l'estremo B si ha il vettore posizione

$$B - O = -\frac{a}{2}\hat{e}_1 .$$

Ne deriva che

$$|P - B| = \left|\left(x + \frac{a}{2}\right)\hat{e}_1\right| = \left|x + \frac{a}{2}\right| = x + \frac{a}{2} \qquad \forall\, x \in [-a/2, 0]$$

per cui la densità di linea della sbarra si riduce a

$$\lambda(x) = 3\sqrt{2}\,\frac{\mu}{a^{3/2}}\left(x + \frac{a}{2}\right)^{1/2} \qquad \forall\, x \in [-a/2, 0]$$

e la massa della sbarra risulta determinata dall'integrale ordinario

$$m_{BO} = \int_{BO} \lambda\, dx = \int_{-a/2}^{0} 3\sqrt{2}\,\frac{\mu}{a^{3/2}}\left(x + \frac{a}{2}\right)^{1/2} dx$$

che il cambiamento di variabile $x + (a/2) = \xi$ permette di riscrivere nella forma equivalente

$$m_{BO} = \int_{0}^{a/2} 3\sqrt{2}\,\frac{\mu}{a^{3/2}}\xi^{1/2} d\xi = 3\sqrt{2}\,\frac{\mu}{a^{3/2}}\left[\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right]_0^{a/2} = 3\sqrt{2}\,\frac{\mu}{a^{3/2}}\,\frac{2}{3}\,\frac{a^{3/2}}{2^{3/2}} = \mu .$$

Massa del sistema
Sommando le masse parziali precedentemente calcolate si ricava la massa del sistema:

$$m = m_{\mathbb{P}} + m_{BO} = \frac{\mu}{12} + \mu = \frac{13}{12}\mu .$$

(b) **Baricentri di piastra e sbarra**

Baricentro della piastra $\mathbb{P}$
Il baricentro $G_{\mathbb{P}}$ della piastra $\mathbb{P}$ deve collocarsi nel piano di giacitura di questa, Oxy, sicchè si avrà

$$G_{\mathbb{P}} - O = x_{\mathbb{P}}\hat{e}_1 + y_{\mathbb{P}}\hat{e}_2$$

con l'ascissa del baricentro determinata da:

$$x_{\mathbb{P}} = \frac{1}{m_{\mathbb{P}}}\int_{\mathbb{P}} x\,\sigma\, dxdy = \frac{12}{\mu}\int_0^a dx \int_0^{x(a-x)/a} dy\, x\,\frac{\mu x}{a^3} = \frac{12}{a^3}\int_0^a dx\, x^2 \int_0^{x(a-x)/a} dy =$$

$$= \frac{12}{a^3}\int_0^a dx\, x^2\,\frac{x(a-x)}{a} = \frac{12}{a^4}\int_0^a (ax^3 - x^4)dx = \frac{12}{a^4}\left[a\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^a = \frac{12}{a^4}\,\frac{a^5}{20} = \frac{3}{5}a$$

mentre l'ordinata si ottiene per mezzo della relazione:

$$
\begin{aligned}
y_{\mathbb{P}} &= \frac{1}{m_{\mathbb{P}}}\int_{\mathbb{P}} y\,\sigma\,dxdy = \frac{12}{\mu}\int_0^a dx \int_0^{x(a-x)/a} dy\,y\,\frac{\mu x}{a^3} = \frac{12}{a^3}\int_0^a dx\,x \int_0^{x(a-x)/a} dy\,y = \\
&= \frac{12}{a^3}\int_0^a dx\,x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{x(a-x)/a} = \frac{6}{a^3}\int_0^a dx\,x\,\frac{x^2(a-x)^2}{a^2} = \frac{6}{a^5}\int_0^a (a^2+x^2-2ax)x^3\,dx = \\
&= \frac{6}{a^5}\left[a^2\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}-2a\frac{x^5}{5}\right]_0^a = 6a\Big(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{2}{5}\Big) = \frac{1}{10}\,a\,.
\end{aligned}
$$

Ne deriva che

$$G_{\mathbb{P}} - O = \frac{3}{5}a\,\hat{e}_1 + \frac{1}{10}\,a\,\hat{e}_2\,.$$

Baricentro della sbarra BO

Il baricentro G_{BO} della sbarra deve collocarsi lungo l'asse di giacitura Ox e dunque esprimersi in termini della sola ascissa x_{BO}:

$$G_{BO} - O = x_{BO}\,\hat{e}_1\,.$$

Si ha allora

$$x_{BO} = \frac{1}{m_{BO}}\int_{BO} x\,\lambda\,dx = \frac{1}{\mu}\int_{-a/2}^{0} x\,\frac{3\sqrt{2}\,\mu}{a^{3/2}}\Big(x+\frac{a}{2}\Big)^{1/2}dx$$

e con il cambiamento di variabili $x+(a/2)=\xi$:

$$
\begin{aligned}
x_{BO} &= \frac{3\sqrt{2}}{a^{3/2}}\int_0^{a/2}\Big(\xi-\frac{a}{2}\Big)\xi^{1/2}d\xi = \frac{3\sqrt{2}}{a^{3/2}}\int_0^{a/2}\Big(\xi^{3/2}-\frac{a}{2}\xi^{1/2}\Big)d\xi = \\
&= \frac{3\sqrt{2}}{a^{3/2}}\left[\frac{2}{5}\xi^{5/2}-\frac{a}{2}\,\frac{2}{3}\,\xi^{3/2}\right]_0^{a/2} = \frac{3\sqrt{2}}{a^{3/2}}\left[\frac{2}{5}\,\frac{a^{5/2}}{4\sqrt{2}}-\frac{a}{3}\,\frac{a^{3/2}}{2\sqrt{2}}\right] = \\
&= 3\sqrt{2}\Big(\frac{1}{10\sqrt{2}}-\frac{1}{6\sqrt{2}}\Big)a = 3\Big(\frac{1}{10}-\frac{1}{6}\Big)a = -\frac{1}{5}\,a
\end{aligned}
$$

per cui

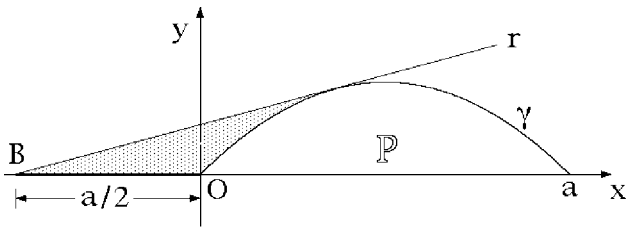
$$G_{BO} - O = -\frac{1}{5}\,a\,\hat{e}_1\,.$$

(c) **Baricentro del sistema, con verifica dell'appartenenza all'inviluppo convesso**

Noti che siano masse e baricentri di piastra e sbarra, il baricentro del sistema può essere individuato ricorrendo al teorema distributivo:

$$
\begin{aligned}
G-O &= \frac{1}{m}\big[m_{\mathbb{P}}(G_{\mathbb{P}}-O)+m_{BO}(G_{BO}-O)\big] = \frac{12}{13\mu}\left[\frac{\mu}{12}\Big(\frac{3}{5}a\,\hat{e}_1+\frac{1}{10}a\,\hat{e}_2\Big)+\mu\Big(-\frac{1}{5}a\,\hat{e}_1\Big)\right] \\
&= \frac{1}{13}\Big(\frac{3}{5}\,\hat{e}_1+\frac{1}{10}\,\hat{e}_2-\frac{12}{5}\,\hat{e}_1\Big)a = \frac{1}{13}\Big(-\frac{9}{5}\,\hat{e}_1+\frac{1}{10}\,\hat{e}_2\Big)a = -\frac{9}{65}a\,\hat{e}_1+\frac{1}{130}a\,\hat{e}_2\,.
\end{aligned}
$$

Appartenenza di G all'inviluppo convesso dell'insieme $\mathbb{P} \cup BO$
Per ottenere l'inviluppo convesso $\text{conv}(\mathbb{P}\cup BO)$ del sistema è sufficiente aggiungere a $\mathbb{P}\cup BO$ la porzione del piano Oxy compresa fra $\mathbb{P} \cup BO$ e la retta r passante per B tangente alla parabola γ che delimita $\mathbb{P}$ nel primo quadrante del piano cartesiano. Nella figura seguente la regione di piano aggiunta al sistema per generare il relativo inviluppo convesso viene evidenziata con l'ombreggiatura:



Il baricentro G del sistema si trova chiaramente nel II quadrante, per cui basta verificare che G appartenga al semipiano Σ di Oxy delimitato dalla retta r e contenente l'origine. A questo scopo si determina l'equazione della retta r e quindi la disequazione che rappresenta il semipiano Σ nel piano Oxy.

Equazione della retta r
La retta tangente all'arco γ in un generico punto di questo, di ascissa $x_0 \in [0, a]$, è individuata dall'equazione:

$$y - \Big(x_0 - \frac{x_0^2}{a}\Big) = \Big(1 - \frac{2x_0}{a}\Big)(x - x_0)$$

in cui il coefficiente angolare $1-(2x_0/a)$ è la derivata prima della funzione $x(a-x)/a$ in x_0. L'equazione della retta r viene ricavata imponendo il passaggio per il punto $B(-a/2, 0)$ del piano Oxy, ossia

$$-\Big(x_0 - \frac{x_0^2}{a}\Big) = \Big(1 - \frac{2x_0}{a}\Big)\Big(-\frac{a}{2} - x_0\Big). \tag{0.1}$$

Eseguiti i prodotti, l'equazione (0.1) diventa

$$-x_0 + \frac{x_0^2}{a} = -\frac{a}{2} - x_0 + x_0 + \frac{2x_0^2}{a}$$

e dopo semplici manipolazioni algebriche si riduce all'equazione di secondo grado

$$x_0^2 + ax_0 - \frac{a^2}{2} = 0$$

che risolta fornisce le radici:

$$x_0 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4(-a^2/2)}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{3}\,a}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}\,a\,.$$

Di queste, la sola accettabile è

$$x_0 \;=\; \frac{\sqrt{3}-1}{2}a \;\in\; [0,a]\,,$$

mentre l'altra deve essere rigettata in quanto negativa, e dunque estranea all'intervallo $[0,a]$ su cui è parametrizzato l'arco di parabola γ. La retta r ha perciò l'equazione:

$$y - \frac{\sqrt{3}-1}{2}a + \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4}a \;=\; \Big(1-2\,\frac{\sqrt{3}-1}{2}\Big)\Big(x - \frac{\sqrt{3}-1}{2}a\Big)$$

che dopo semplici passaggi algebrici assume la forma compatta

$$y \;=\; (2-\sqrt{3})\Big(x+\frac{a}{2}\Big)\,. \tag{0.2}$$

Disequazione rappresentativa del semipiano Σ in Oxy
La disequazione che rappresenta il semipiano Σ si ottiene trasformando l'equazione (0.2) in una disequazione soddisfatta dalle coordinate dell'origine:

$$y \;\leq\; (2-\sqrt{3})\Big(x+\frac{a}{2}\Big)\,. \tag{0.3}$$

Verifica che $G \in \Sigma$
Le coordinate del baricentro in Oxy:

$$G-O \;=\; -\frac{9}{65}a\,\hat{e}_1 + \frac{1}{130}a\,\hat{e}_2$$

soddisfano la disequazione (0.3) che definisce Σ. Vale infatti:

$$\frac{1}{130}a \;\leq\; (2-\sqrt{3})\Big(-\frac{9}{65}a+\frac{a}{2}\Big)$$

ossia

$$\frac{1}{130} \;\leq\; (2-\sqrt{3})\frac{47}{130}$$

e quindi

$$\frac{1}{47}-2 \;\leq\; -\sqrt{3}$$

per cui

$$\sqrt{3} \;\leq\; \frac{93}{47}\,.$$

Quadrando membro a membro la disequazione si riduce alla forma intera

$$3\cdot 47^2 \;\leq\; 93^2$$

che è chiaramente verificata in quanto $3\cdot 47^2 = 6627$, mentre $93^2 = 8649$. La verifica è così completa.

Esercizio 2
Un punto materiale Q di massa 3 è vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse orizzontale $Ox = O\hat{e}_1$ di una terna inerziale, collegato all'origine O da una molla ideale di costante elastica k e soggetto a una resistenza viscosa con costante di frizione 2. Determinare:

(a) le equazioni pure del moto di Q e i valori di k corrispondenti al regime di moto oscillatorio smorzato;

(b) posizione e velocità di Q all'istante $t = \pi$ qualora si abbia $k = 10/3$, $Q(0) - O = 3\hat{e}_1$ e $\dot{Q}(0) = \hat{e}_1$ per $t = 0$.

Soluzione
(a) **Equazioni pure del moto e valori di k per il regime oscillatorio smorzato**
L'equazione del moto è quella di un oscillatore armonico smorzato unidimensionale. Posto $Q - O = x\,\hat{e}_1$, dal secondo principio della dinamica si ha infatti:

$$3\ddot{x}\,\hat{e}_1 = -kx\,\hat{e}_1 - 2\dot{x}\,\hat{e}_1$$

e quindi

$$3\ddot{x} + 2\dot{x} + kx = 0\,, \tag{0.4}$$

essendo $m = 3$ la massa del punto materiale e $\beta = 2$ la costante di frizione della resistenza viscosa. Come noto, il regime oscillatorio smorzato si realizza quando l'equazione caratteristica del sistema

$$3\lambda^2 + 2\lambda + k = 0$$

ammette due radici complesse coniugate, condizione che ricorre se e soltanto se il discriminante dell'equazione ha segno negativo:

$$\Delta = 2^2 - 4\cdot 3k = 4 - 12k < 0$$

ossia per $k > 1/3$.

(b) **Posizione e velocità del punto all'istante $t = \pi$**
Per rispondere al quesito è necessario risolvere il problema di Cauchy relativo all'equazione differenziale del moto e alle condizioni iniziali assegnate, valutando poi la soluzione all'istante richiesto $t = \pi$. Nel caso sia $k = 10/3$, l'equazione differenziale del moto (0.4) diventa:

$$3\ddot{x} + 2\dot{x} + \frac{10}{3}x = 0$$

e la corrispondente equazione caratteristica si scrive

$$3\lambda^2 + 2\lambda + \frac{10}{3} = 0$$

con le radici complesse coniugate:

$$\lambda_\pm = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 3\cdot \dfrac{10}{3}}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{6} = -\frac{1}{3} \pm i\,.$$

La soluzione generale dell'equazione — omogenea — è quindi data da

$$x(t) \;=\; c_1 e^{-t/3}\cos t + c_2\, e^{-t/3}\sin t \qquad \forall\, t\in\mathbb{R} \tag{0.5}$$

con la derivata:

$$\dot{x}(t) \;=\; c_1 e^{-t/3}\Big(-\frac{1}{3}\cos t - \sin t\Big) + c_2\, e^{-t/3}\Big(-\frac{1}{3}\sin t + \cos t\Big) \qquad \forall\, t\in\mathbb{R} \tag{0.6}$$

in termini delle costanti reali arbitrarie c_1 e c_2, che vanno determinate sulla base delle condizioni iniziali. All'istante $t = 0$ viene richiesto che sia

$$Q(0) - O \;=\; x(0)\,\hat{e}_1 \;=\; 3\,\hat{e}_1 \qquad\qquad \dot{Q}(0) \;=\; \dot{x}(0)\,\hat{e}_1 \;=\; \hat{e}_1$$

per cui le condizioni iniziali da considerare sono:

$$x(0) \;=\; 3 \qquad\qquad \dot{x}(0) \;=\; 1\,.$$

Imponendo questi dati iniziali alla soluzione generale (0.5)-(0.6) se ne traggono le relazioni algebriche:

$$3 \;=\; x(0) \;=\; c_1 \qquad\qquad 1 \;=\; \dot{x}(0) \;=\; -\frac{1}{3}c_1 + c_2$$

dalle quali segue

$$c_1 \;=\; 3 \qquad\qquad c_2 \;=\; 2\,.$$

La soluzione del problema di Cauchy diventa perciò:

$$x(t) \;=\; e^{-t/3}(3\cos t + 2\sin t) \qquad \forall\, t\in\mathbb{R}$$

con la derivata:

$$\dot{x}(t) \;=\; 3e^{-t/3}\Big(-\frac{1}{3}\cos t - \sin t\Big) + 2\, e^{-t/3}\Big(-\frac{1}{3}\sin t + \cos t\Big) \qquad \forall\, t\in\mathbb{R}\,.$$

Le espressioni precedenti devono essere calcolate all'istante $t = \pi$ e porgono:

$$x(\pi) \;=\; -3e^{-\pi/3} \qquad\qquad \dot{x}(\pi) \;=\; 3e^{-\pi/3}\frac{1}{3} + 2e^{-\pi/3}(-1) \;=\; -e^{-\pi/3}$$

in modo che la posizione e la velocità istantanea di Q al tempo $t = \pi$ risultano:

$$Q(\pi) - O \;=\; -3e^{-\pi/3}\,\hat{e}_1 \qquad\qquad \dot{Q}(\pi) \;=\; -e^{-\pi/3}\,\hat{e}_1\,.$$

Esercizio 3

In una terna cartesiana ortogonale destra $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ di E^3 è dato il sistema $\mathbb{S}$ dei vettori $\vec{v}_1 = 2\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - \hat{e}_3$, $\vec{v}_2 = \hat{e}_1 - 3\hat{e}_2 + 4\hat{e}_3$, $\vec{v}_3 = \hat{e}_1 - 2\hat{e}_2$, applicati rispettivamente nei punti $A_1(0,2,-3)$, $A_2(-2,1,5)$ e $A_3(-3,-1,2)$. Determinare di $\mathbb{S}$:

(a) l'equazione parametrica dell'asse centrale;

(b) il momento rispetto all'asse a di equazione $x = 2\xi - 1$, $y = -\xi$, $z = 3\xi + 1$, orientato secondo le $\xi \in \mathbb{R}$ crescenti.

Soluzione
Il sistema $\mathbb{S}$ si compone dei seguenti vettori applicati:

$$\begin{array}{lll} \vec{v}_1 = 2\,\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - \hat{e}_3 & \qquad & \text{applicato in } A_1(0,2,-3) \\ \vec{v}_2 = \hat{e}_1 - 3\,\hat{e}_2 + 4\hat{e}_3 & & \text{applicato in } A_2(-2,1,5) \\ \vec{v}_3 = \hat{e}_1 - 2\,\hat{e}_2 & & \text{applicato in } A_3(-3,-1,2)\,. \end{array}$$

(a) **Equazione parametrica dell'asse centrale**
La determinazione dell'asse centrale richiede il calcolo del risultante e del momento risultante in O di $\mathbb{S}$. Il risultante del sistema è dato da

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{3} \vec{v}_i = (2\,\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - \hat{e}_3) + (\hat{e}_1 - 3\,\hat{e}_2 + 4\hat{e}_3) + (\hat{e}_1 - 2\,\hat{e}_2) = 4\,\hat{e}_1 - 4\,\hat{e}_2 + 3\,\hat{e}_3$$

e risultando diverso da zero assicura l'esistenza dell'asse centrale. Per il momento risultante in O si ha invece l'espressione:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \sum_{i=1}^{3}(A_i - O) \wedge \vec{v}_i = \\ &= (2\,\hat{e}_2 - 3\,\hat{e}_3) \wedge (2\,\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - \hat{e}_3) + \\ &+ (-2\,\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + 5\,\hat{e}_3) \wedge (\hat{e}_1 - 3\,\hat{e}_2 + 4\hat{e}_3) + \\ &+ (-3\,\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + 2\,\hat{e}_3) \wedge (\hat{e}_1 - 2\,\hat{e}_2) = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (\hat{e}_1 - 6\,\hat{e}_2 - 4\,\hat{e}_3) + (19\,\hat{e}_1 + 13\,\hat{e}_2 + 5\,\hat{e}_3) + (4\,\hat{e}_1 + 2\,\hat{e}_2 + 7\,\hat{e}_3) = \\ &= 24\,\hat{e}_1 + 9\,\hat{e}_2 + 8\,\hat{e}_3\,. \end{aligned}$$

Ne deriva allora che

$$\vec{R} \wedge \vec{M}_O = (4\,\hat{e}_1 - 4\,\hat{e}_2 + 3\,\hat{e}_3) \wedge (24\,\hat{e}_1 + 9\,\hat{e}_2 + 8\,\hat{e}_3) = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 4 & -4 & 3 \\ 24 & 9 & 8 \end{vmatrix} = -59\,\hat{e}_1 + 40\,\hat{e}_2 + 132\,\hat{e}_3$$

per cui

$$\frac{1}{|\vec{R}|^2}\vec{R} \wedge \vec{M}_O = \frac{1}{41}(-59\,\hat{e}_1 + 40\,\hat{e}_2 + 132\,\hat{e}_3) = -\frac{59}{41}\,\hat{e}_1 + \frac{40}{41}\,\hat{e}_2 + \frac{132}{41}\,\hat{e}_3$$

e l'equazione parametrica dell'asse centrale risulta:

$$P-O = \frac{1}{|\vec{R}|^2}\vec{R}\wedge\vec{M}_O+\alpha\vec{R} = -\frac{59}{41}\,\hat{e}_1+\frac{40}{41}\,\hat{e}_2+\frac{132}{41}\,\hat{e}_3+\alpha(4\,\hat{e}_1-4\,\hat{e}_2+3\,\hat{e}_3) \qquad \forall\,\alpha\in\mathbb{R}$$

ossia

$$\begin{cases} x = -\dfrac{59}{41}+4\alpha \\ y = \dfrac{40}{41}-4\alpha \\ z = \dfrac{132}{41}+3\alpha \end{cases} \qquad \forall\,\alpha\in\mathbb{R}\,. \tag{0.7}$$

Verifica dell'equazione dell'asse centrale
Un punto dell'asse centrale si può ricavare dall'equazione (0.7) fissando il parametro α, ad esempio ponendo $\alpha=0$ — che costituisce senza dubbio la scelta più semplice. Si considera perciò il punto B individuato dal vettore posizione:

$$B-O = -\frac{59}{41}\,\hat{e}_1+\frac{40}{41}\,\hat{e}_2+\frac{132}{41}\,\hat{e}_3\,.$$

La formula del cambiamento del polo fornisce il momento risultante in B del sistema $\mathbb{S}$:

$$\begin{aligned}\vec{M}_B &= \vec{M}_O+(O-B)\wedge\vec{R} = \vec{M}_O+\vec{R}\wedge(B-O) = \\ &= 24\,\hat{e}_1+9\,\hat{e}_2+8\,\hat{e}_3+(4\,\hat{e}_1-4\,\hat{e}_2+3\,\hat{e}_3)\wedge\Big(-\frac{59}{41}\,\hat{e}_1+\frac{40}{41}\,\hat{e}_2+\frac{132}{41}\,\hat{e}_3\Big) = \\ &= 24\,\hat{e}_1+9\,\hat{e}_2+8\,\hat{e}_3-\frac{648}{41}\,\hat{e}_1-\frac{705}{41}\,\hat{e}_2-\frac{76}{41}\,\hat{e}_3 = \frac{336}{41}\,\hat{e}_1-\frac{336}{41}\,\hat{e}_2+\frac{252}{41}\,\hat{e}_3\end{aligned}$$

che è chiaramente proporzionale al risultante:

$$\vec{M}_B = \frac{84}{41}\Big(4\,\hat{e}_1-4,\hat{e}_2+3\,\hat{e}_3\Big) = \frac{84}{41}\,\vec{R}$$

come richiesto dalla definizione dell'asse centrale.

(b) **Momento assiale**
Si vuole determinare il momento assiale del sistema di vettori applicati rispetto alla retta a di equazione

$$x = 2\xi-1 \qquad y = -\xi \qquad z = 3\xi+1\,, \quad \xi\in\mathbb{R}\,,$$

orientata nel senso delle ξ crescenti. Un punto A dell'asse si ottiene per $\xi=0$ ed è quindi dato dal vettore posizione

$$A-O = -\hat{e}_1+\hat{e}_3\,.$$

Rispetto a questo punto il momento risultante di $\mathbb{S}$ si ottiene immediatamente dalla formula del cambiamento del polo:

$$
\begin{aligned}
\vec{M}_A &= \vec{M}_O + (O-A) \wedge \vec{R} = \vec{M}_O + \vec{R} \wedge (A-O) = \\
&= 24\,\hat{e}_1 + 9\,\hat{e}_2 + 8\,\hat{e}_3 + (4\,\hat{e}_1 - 4\,\hat{e}_2 + 3\,\hat{e}_3) \wedge (-\,\hat{e}_1 + \hat{e}_3) = \\
&= 24\,\hat{e}_1 + 9\,\hat{e}_2 + 8\,\hat{e}_3 + \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 4 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\
&= 24\,\hat{e}_1 + 9\,\hat{e}_2 + 8\,\hat{e}_3 - 4\,\hat{e}_1 - 7\,\hat{e}_2 - 4\,\hat{e}_3 = 20\,\hat{e}_1 + 2\,\hat{e}_2 + 4\,\hat{e}_3\,.
\end{aligned}
$$

D'altra parte, il versore associato all'asse a si ottiene normalizzando la derivata prima della parametrizzazione rispetto al parametro ξ:

$$
\hat{n} = \frac{2\,\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + 3\,\hat{e}_3}{|2\,\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + 3\,\hat{e}_3|} = \frac{2\,\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + 3\,\hat{e}_3}{\sqrt{14}}
$$

e il momento assiale relativo ad a si scrive pertanto:

$$
\vec{M}_a = \vec{M}_A \cdot \hat{n} = (20\,\hat{e}_1 + 2\,\hat{e}_2 + 4\,\hat{e}_3) \cdot \frac{2\,\hat{e}_1 - \hat{e}_2 + 3\,\hat{e}_3}{\sqrt{14}} = \frac{50}{\sqrt{14}}\,.
$$

Esercizio 4

Un punto materiale pesante P di massa m scorre nel piano Oxy di una terna inerziale $Oxyz$, con l'asse verticale Oy diretto verso l'alto, lungo la curva di equazione $y = x^3 - 3x$, $x \in \mathbb{R}$. Determinare del sistema:

(a) le equazioni pure del moto, qualora si assuma la curva liscia;

(b) gli equilibri, sempre nell'ipotesi di curva liscia;

(c) gli equilibri se la curva ha coefficiente di attrito radente statico $\mu_s = 0.1$.

Soluzione

(a) **Equazioni pure del moto lungo la curva liscia**

La curva lungo la quale avviene il moto del punto P ha una parametrizzazione della forma

$$
P - O = x\,\hat{e}_1 + f(x)\,\hat{e}_2 \quad , \qquad x \in \mathbb{R}\,,
$$

con $f(x) = x^3 - 3x$. La curva risulta regolare, dal momento che è sempre non nullo il vettore tangente

$$
P'(x) = \hat{e}_1 + f'(x)\,\hat{e}_2\,.
$$

Per un generico moto possibile del sistema, individuato da una qualsiasi funzione $x(t)$ di classe C^2 in un intervallo di tempo, la velocità e l'accelerazione istantanee si scrivono:

$$
\dot{P} = [\hat{e}_1 + f'(x)\,\hat{e}_2]\dot{x} \qquad \ddot{P} = [\hat{e}_1 + f'(x)\,\hat{e}_2]\ddot{x} + f''(x)\dot{x}^2\,\hat{e}_2
$$

in cui le derivate prima e seconda di $f(x)$ sono date da:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \qquad\qquad f''(x) = 6x\,.$$

Indicata con $\vec{\Phi}$ la reazione vincolare applicata al punto materiale, l'equazione del moto del sistema diventa

$$m\ddot{P} = -mg\,\hat{e}_2 + \vec{\Phi}$$

e proiettata lungo il vettore tangente si riduce alla forma pura

$$m\ddot{P}\cdot P'(x) = -mg\,\hat{e}_2\cdot P'(x)$$

ovvero a

$$m[1+f'(x)^2]\ddot{x} + mf'(x)f''(x)\dot{x}^2 = -mgf'(x)\,.$$

La forma esplicita di questa equazione è

$$m\big[1+9(x^2-1)^2\big]\ddot{x} + m\,3(x^2-1)\,6x\,\dot{x}^2 = -mg\,3(x^2-1)$$

ossia

$$m\big[1+9(x^2-1)^2\big]\ddot{x} + 18m\,x(x^2-1)\,\dot{x}^2 = -3mg(x^2-1)\,. \qquad (0.8)$$

(b) **Equilibri per il caso della curva vincolare liscia**
Nel caso che la curva sia priva di attrito gli equilibri del sistema si ricavano cercando le soluzioni costanti dell'equazione pura del moto (0.8), ossia risolvendo l'equazione algebrica:

$$0 = -3mg(x^2-1)\,,$$

le cui soluzioni risultano

$$x = -1 \qquad\qquad x = +1\,.$$

Gli equilibri del sistema sono perciò le configurazioni individuate dai vettori posizione:

$$\begin{aligned} P(-1)-O &= -\hat{e}_1 + f(-1)\,\hat{e}_2 = -\hat{e}_1 + 2\,\hat{e}_2 \\ P(+1)-O &= \hat{e}_1 + f(1)\,\hat{e}_2 = \hat{e}_1 - 2\,\hat{e}_2\,. \end{aligned}$$

(c) **Equilibri nel caso di curva vincolare con attrito radente**
Poichè l'asse Oy è verticale e il punto P è soggetto soltanto al proprio peso, le configurazioni di equilibrio del sistema corrispondono a tutti e soli i valori dell'ascissa x per i quali risulta

$$|f'(x)| \le \mu_s$$

ossia

$$|3x^2-3| \le 0.1$$

o ancora

$$-0.1 \;\leq\; 3x^2 - 3 \;\leq\; 0.1\,. \tag{0.9}$$

La doppia diseguaglianza (0.9) equivale al sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 2.9 \;\leq\; 3x^2 \\ 3x^2 \;\leq\; 3.1 \end{cases} \qquad\Longleftrightarrow\qquad \begin{cases} 2.9/3 \;\leq\; x^2 \\ x^2 \;\leq\; 3.1/3 \end{cases}$$

le cui soluzioni si identificano con quelle del sistema

$$\begin{cases} x \;\leq\; -\sqrt{2.9/3} \\ -\sqrt{3.1/3} \;\leq\; x \;\leq\; \sqrt{3.1/3} \end{cases}$$

e dell'ulteriore sistema:

$$\begin{cases} x \;\geq\; \sqrt{2.9/3} \\ -\sqrt{3.1/3} \;\leq\; x \;\leq\; \sqrt{3.1/3}\,. \end{cases}$$

Gli equilibri del sistema si hanno dunque per

$$-\sqrt{3.1/3} \;\leq\; x \;\leq -\sqrt{2.9/3}$$

e per

$$\sqrt{2.9/3} \;\leq\; x \;\leq\; \sqrt{3.1/3}\,.$$

I valori numerici delle ascisse di equilibrio sono molto prossimi a quelli degli equilibri in assenza di attrito — rispettivamente $x = -1$ e $x = 1$ —

$$-1.01653005 \leq x \leq -0.98319208 \qquad\qquad 0.98319208 \leq x \leq 1.01653005\,.$$

Ciò a causa del valore relativamente modesto del coefficiente di attrito radente statico μ_s.

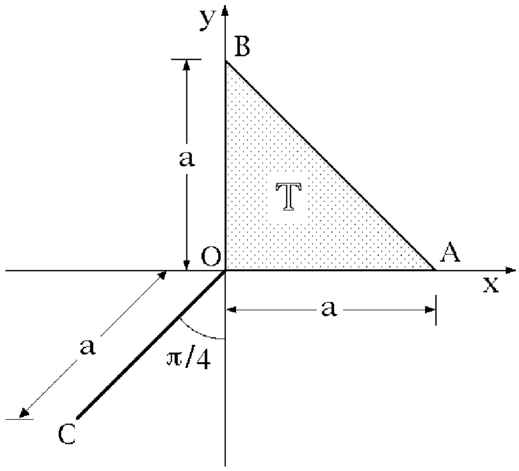
Esercizio 5

Una lamina triangolare $\mathbb{T} = OAB$, metà di un quadrato di lato a, si colloca nel piano Oxy, con i due lati uguali lungo gli assi. La sua densità è data da

$$\sigma(x,y) \;=\; 280\mu x^2 y^2/a^6 \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{T}\,,$$

essendo $\mu > 0$ una massa caratteristica. Una sbarra rettilinea OC, di lunghezza a, è posta lungo la bisettrice del III quadrante e ha densità

$$\lambda(P) \;=\; \frac{\mu}{a^2}|P - O| \qquad \forall\,P \in OC\,.$$



Determinare del sistema:

(a) la matrice d'inerzia in $Oxyz$;

(b) i momenti principali d'inerzia in O e una terna principale d'inerzia in O.

Soluzione

(a) **Matrice d'inerzia in** $Oxyz$

La proprietà additiva consente di esprimere la matrice d'inerzia del sistema rispetto alla terna $Oxyz$ come somma delle matrici d'inerzia, relative alla stessa terna, della lamina triangolare e della sbarra. Si osservi che il punto O di intersezione fra lamina e sbarra dà contributo nullo tanto agli integrali di superficie su $\mathbb{T}$ quanto a quelli curvilinei su OC.

Matrice d'inerzia della lamina triangolare $\mathbb{T}$

La lamina triangolare giace nel piano coordinato Oxy della terna cartesiana ortogonale prescelta per il calcolo della matrice d'inerzia. La matrice d'inerzia della lamina assumerà perciò la forma generale:

$$[L_O^{\mathbb{T}}] = \begin{pmatrix} L_{xx}^{\mathbb{T}} & L_{xy}^{\mathbb{T}} & 0 \\ L_{xy}^{\mathbb{T}} & L_{yy}^{\mathbb{T}} & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx}^{\mathbb{T}} + L_{yy}^{\mathbb{T}} \end{pmatrix}.$$

Il momento d'inerzia relativo all'asse coordinato Ox si calcola per mezzo dell'integrale doppio

$$L_{xx}^{\mathbb{T}} = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy\, y^2 \frac{280\mu}{a^6} x^2 y^2 = \frac{280\mu}{a^6} \int_0^a dx\, x^2 \left[\frac{y^5}{5}\right]_{y=0}^{a-x} = \frac{56\mu}{a^6} \int_0^a x^2 (a-x)^5 dx$$

che con il cambiamento di variabile $\xi = a - x$ viene ricondotto a:

$$
\begin{aligned}
L^{\mathbb{T}}_{xx} &= \frac{56\mu}{a^6}\int_0^a (a-\xi)^2\xi^5 d\xi = \frac{56\mu}{a^6}\int_0^a (a^2 - 2a\xi + \xi^2)\xi^5 d\xi = \\
&= \frac{56\mu}{a^6}\int_0^a (a^2\xi^5 - 2a\xi^6 + \xi^7) d\xi = \frac{56\mu}{a^6}\left[a^2\frac{\xi^6}{6} - 2a\frac{\xi^7}{7} + \frac{\xi^8}{8}\right]_0^a = \\
&= \frac{56\mu}{a^6}\Big(a^2\frac{a^6}{6} - 2a\frac{a^7}{7} + \frac{a^8}{8}\Big) = 56\mu a^2\Big(\frac{1}{6} - \frac{2}{7} + \frac{1}{8}\Big) = \frac{1}{3}\mu a^2 .
\end{aligned}
$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse Oy assume lo stesso valore precedente:

$$
\begin{aligned}
L^{\mathbb{T}}_{yy} &= \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy\, x^2 \frac{280\mu}{a^6} x^2 y^2 = \frac{280\mu}{a^6}\int_0^a dx\, x^4 \int_0^{a-x} dy\, y^2 = \frac{280\mu}{a^6}\int_0^a dx\, x^4 \frac{(a-x)^3}{3} = \\
&= \frac{280\mu}{3a^6}\int_0^a x^4(a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3)\, dx = \frac{280\mu}{3a^6}\int_0^a (a^3x^4 - 3a^2x^5 + 3ax^6 - x^7)\, dx = \\
&= \frac{280\mu}{3a^6}\left[a^3\frac{x^5}{5} - 3a^2\frac{x^6}{6} + 3a\frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8}\right]_0^a = \frac{280}{3}\mu a^2\Big(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{3}{7} - \frac{1}{8}\Big) = \frac{1}{3}\mu a^2 ,
\end{aligned}
$$

risultato al quale si può peraltro pervenire notando che la retta $y = x$ nel piano Oxy costituisce un asse di simmetria della lamina:

$$
\sigma(x,y) = \frac{280\mu}{a^6}x^2y^2 = \frac{280\mu}{a^6}y^2x^2 = \sigma(y,x) \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{T}
$$

in modo che:

$$
L^{\mathbb{T}}_{xx} = \int_{\mathbb{T}} y^2 dxdy = \int_{\mathbb{T}} x^2 dydx = L^{\mathbb{T}}_{yy}
$$

grazie al cambiamento di variabili, con jacobiano unitario, $(x,y) \to (y,x)$. Per l'unico prodotto d'inerzia non banale si ha invece:

$$
L^{\mathbb{T}}_{xy} = -\int_0^a dx \int_0^{a-x} dy\, xy\, \frac{280\mu}{a^6}x^2y^2 = -\frac{280\mu}{a^6}\int_0^a dx\, x^3 \int_0^{a-x} dy\, y^3 = -\frac{280\mu}{a^6}\int_0^a dx\, x^3 \frac{(a-x)^4}{4}
$$

ed il cambiamento di variabile $\xi = a - x$ conduce all'espressione:

$$
\begin{aligned}
L^{\mathbb{T}}_{xy} &= -\frac{70\mu}{a^6}\int_0^a (a-\xi)^3\xi^4\, d\xi = -\frac{70\mu}{a^6}\int_0^a (a^3 - 3a^2\xi + 3a\xi^2 - \xi^3)\xi^4\, d\xi = \\
&= -\frac{70\mu}{a^6}\left[a^3\frac{\xi^5}{5} - 3a^2\frac{\xi^6}{6} + 3a\frac{\xi^7}{7} - \frac{\xi^8}{8}\right]_0^a = -70\mu a^2\Big(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{3}{7} - \frac{1}{8}\Big) = -\frac{1}{4}\mu a^2 .
\end{aligned}
$$

La matrice d'inerzia della lamina piana vale quindi:

$$[L_O^{\mathbb{T}}] \,=\, \mu a^2 \begin{pmatrix} 1/3 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Matrice d'inerzia della sbarra OC
La matrice d'inerzia dell'asta OC ha una struttura analoga a quella della lamina:

$$[L_O^{OC}] \,=\, \begin{pmatrix} L_{xx}^{OC} & L_{xy}^{OC} & 0 \\ L_{xy}^{OC} & L_{yy}^{OC} & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx}^{OC}+L_{yy}^{OC} \end{pmatrix}$$

e di cui conviene calcolare gli elementi ricorrendo alla parametrizzazione:

$$P-O \,=\, x\,\hat{e}_1 + x\,\hat{e}_2 \qquad \forall\, x \in [-a/\sqrt{2}, 0]$$

in termini dell'ascissa x. La derivata prima della parametrizzazione vale

$$P'(x) \,=\, \hat{e}_1 + \hat{e}_2$$

con modulo

$$|P'(x)| \,=\, \sqrt{2}$$

in modo che l'elemento infinitesimo di lunghezza della sbarra diventa

$$ds \,=\, |P'(x)|\,dx \,=\, \sqrt{2}\,dx$$

mentre la densità della sbarra assume la forma

$$\lambda(x) \,=\, \frac{\mu}{a^2}|x\,\hat{e}_1 + x\,\hat{e}_2| \,=\, \frac{\mu}{a^2}\sqrt{2}\,|x| \,=\, -\frac{\sqrt{2}\mu}{a^2}x \qquad \forall\, x \in [-a/\sqrt{2}, 0]\,.$$

Si hanno allora i momenti d'inerzia

$$\begin{aligned} L_{xx}^{OC} \,&=\, \int_{-a/\sqrt{2}}^{0} dx\,\sqrt{2}\,x^2\Big(-\frac{\sqrt{2}\mu}{a^2}x\Big) \,=\, -\frac{2\mu}{a^2}\int_{-a/\sqrt{2}}^{0} x^3 dx \,= \\ &=\, -\frac{2\mu}{a^2}\Big[\frac{x^4}{4}\Big]_{-a/\sqrt{2}}^{0} \,=\, -\frac{2\mu}{a^2}\Big(-\frac{1}{4}\,\frac{a^4}{4}\Big) \,=\, \frac{1}{8}\mu a^2 \\ L_{yy}^{OC} \,&=\, \int_{-a/\sqrt{2}}^{0} dx\,\sqrt{2}\,x^2\Big(-\frac{\sqrt{2}\mu}{a^2}x\Big) \,=\, L_{xx}^{OC} \,=\, \frac{1}{8}\mu a^2 \end{aligned}$$

mentre il prodotto d'inerzia L_{xy}^{OC} risulta

$$L_{xy}^{OC} = -\int_{-a/\sqrt{2}}^{0} dx\,\sqrt{2}\,x^2\Big(-\frac{\sqrt{2}\mu}{a^2}x\Big) = -L_{xx}^{OC} = -\frac{1}{8}\mu a^2\,.$$

La matrice d'inerzia della sbarra risulta così:

$$[L_O^{OC}] = \mu a^2 \begin{pmatrix} 1/8 & -1/8 & 0 \\ -1/8 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Matrice d'inerzia del sistema
La somma delle matrici d'inerzia parziali appena calcolate fornisce la matrice d'inerzia del sistema:

$$\begin{aligned}[L_O] = [L_O^{\mathbb{T}}] + [L_O^{OC}] &= \mu a^2 \begin{pmatrix} 1/3 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} + \mu a^2 \begin{pmatrix} 1/8 & -1/8 & 0 \\ -1/8 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \\ &= \mu a^2 \begin{pmatrix} 11/24 & -3/8 & 0 \\ -3/8 & 11/24 & 0 \\ 0 & 0 & 11/12 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(b) **Momenti e terna principale d'inerzia in O**
Momenti principali d'inerzia in O
Per definizione, i momenti principali d'inerzia in O del sistema sono gli autovalori A_1, A_2, A_3 dell'operatore d'inerzia in O. L'equazione caratteristica dell'operatore è data da

$$\det([L_O] - A\mathbb{I}) = 0$$

e con la sostituzione $A = \lambda\mu a^2$ diventa

$$\det\begin{pmatrix} 11/24-\lambda & -3/8 & 0 \\ -3/8 & 11/24-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 11/12-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

ossia

$$\Big[\Big(\frac{11}{24}-\lambda\Big)^2 - \frac{9}{64}\Big]\Big(\frac{11}{12}-\lambda\Big) = 0\,.$$

Ne deriva la scomposizione in fattori:

$$\Big(\lambda - \frac{11}{24} - \frac{3}{8}\Big)\Big(\lambda - \frac{11}{24} + \frac{3}{8}\Big)\Big(\frac{11}{12}-\lambda\Big) = 0$$

e quindi

$$\Big(\lambda - \frac{5}{6}\Big)\Big(\lambda - \frac{1}{12}\Big)\Big(\frac{11}{12}-\lambda\Big) = 0\,,$$

per cui i momenti principali d'inerzia in O del sistema sono:

$$A_1 = \frac{5}{6}\mu a^2 \qquad A_2 = \frac{1}{12}\mu a^2 \qquad A_3 = \frac{11}{12}\mu a^2 \,.$$

Terna principale d'inerzia in O
Una terna principale d'inerzia in O del sistema si individua immediatamente notando che:

- il sistema è piano e giace per intero nel piano coordinato Oxy, che dunque costituisce un piano principale d'inerzia in O del sistema. L'asse Oz è perciò un asse principale d'inerzia in O del sistema;
- la bisettrice del I e III quadrante è un asse di simmetria del sistema. Che la bisettrice costituisca un asse di simmetria è evidente per la sbarra, che giace lungo tale retta, mentre la lamina triangolare questa circostanza è già stata sottolineata in precedenza.

Una terna principale d'inerzia in O del sistema è quindi quella con origine in O e base ortonormale associata composta dai versori:

$$\hat{g}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{e}_2 \qquad \hat{g}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{e}_2 \qquad \hat{g}_3 = \hat{e}_3\,. \tag{0.10}$$

Si intende che allo stesso risultato è possibile pervenire determinando gli autovettori della matrice $[L_O]$, come di seguito illustrato.

Autovalore $\lambda_1 = 5/6$
In questo caso il sistema di equazioni lineari omogenee che individua gli autovettori associati all'autovalore assegnato è dato da:

$$([L_O] - \lambda_1 \mathbb{I}) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} -3/8 & -3/8 & 0 \\ -3/8 & -3/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

vale a dire:

$$\begin{cases} -\dfrac{3}{8}v_1 - \dfrac{3}{8}v_2 = 0 \\ -\dfrac{3}{8}v_1 - \dfrac{3}{8}v_2 = 0 \\ \dfrac{1}{12}v_3 = 0 \end{cases}$$

per cui risulta $v_2 = -v_1$ e $v_3 = 0$. A questo autospazio è associato l'autovalore $\hat{g}_2$ in (0.10).

Autovalore $\lambda_2 = 1/12$
Nella fattispecie gli autovettori sono determinati dal sistema di equazioni lineari omogenee:

$$([L_O] - \lambda_2 \mathbb{I}) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 3/8 & -3/8 & 0 \\ -3/8 & 3/8 & 0 \\ 0 & 0 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

ossia:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{8}v_1 - \dfrac{3}{8}v_2 \;= 0 \\ -\dfrac{3}{8}v_1 + \dfrac{3}{8}v_2 \;= 0 \\ \dfrac{5}{6}v_3 \;= 0 \end{cases}$$

in modo che $v_2 = v_1$ e $v_3 = 0$. A questo autospazio appartiene l'autovalore $\hat{g}_1$ della base ortonormale (0.10).

Autovalore $\lambda_3 = 11/12$
In quest'ultimo caso il risultato è ovvio, in quanto:

$$([L_O] - \lambda_3 \mathbb{I}) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} -11/24 & -3/8 & 0 \\ -3/8 & -11/24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

e quindi:

$$\begin{cases} -\dfrac{11}{24}v_1 - \dfrac{3}{8}v_2 \;= 0 \\ -\dfrac{3}{8}v_1 - \dfrac{11}{24}v_2 \;= 0 \\ 0 \;= 0 \end{cases}$$

cosicchè $v_1 = v_2 = 0$ e $v_3 \neq 0$. A questo autospazio è associato l'autovalore $\hat{g}_3 = \hat{e}_3$ della base (0.10).