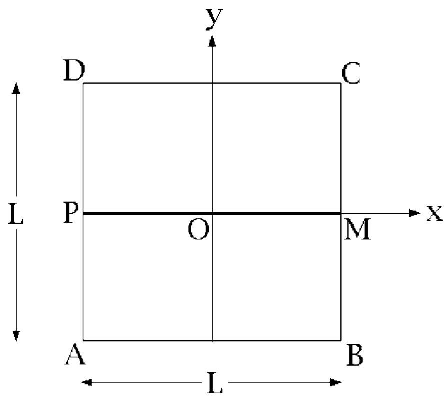
**Scritto di meccanica razionale 1 M-Z del 17.02.2004**

**Esercizio 1**

Nel piano coordinato $Oxy$ di una terna cartesiana $Oxyz$ si considera il sistema rigido illustrato in figura, composto da una lamina quadrata $ABCD$ di lato $L$ e da un'asta $PM$ di lunghezza $L$, che congiunge i punti medi $P$ ed $M$ dei lati $AD$ e $BC$. Le densità, rispettivamente lineare e superficiale, di asta e lamina sono date dalle espressioni

$$\lambda(x) = \frac{m}{L^3}x^2 \quad \forall\, x \in [-L/2, L/2] \qquad \sigma(x,y) = \frac{m}{L^3}(L+x+y) \quad \forall\,(x,y) \in [-L/2, L/2]^2 \,.$$




Si richiede di calcolare:

($a$) la posizione del baricentro del sistema relativamente a $Oxyz$;

($b$) la matrice d'inerzia del sistema rispetto alla terna $Oxyz$;

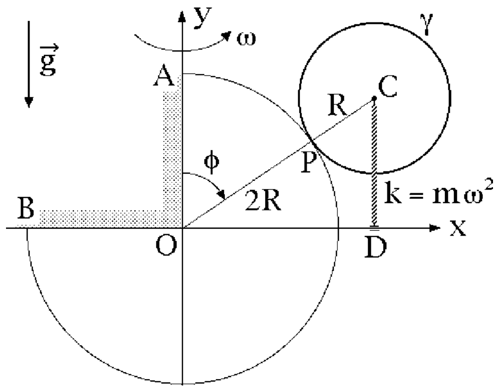
($c$) il momento d'inerzia rispetto all'asse $OB$;

($d$) il momento angolare in $O$ del sistema qualora $O$ sia punto fisso e la velocità angolare valga $\omega\hat{e}_1 - \omega\hat{e}_3$, con $\omega > 0$;

($e$) l'energia cinetica del sistema nelle stesse ipotesi.

**Esercizio 2**

Una circonferenza rigida e omogenea $\gamma$, di centro $C$, raggio $R$ e massa $m$, è vincolata a rotolare senza strisciare esternamente ad una guida circolare di raggio $2R$ e centro $O$, origine di una terna cartesiana $Oxyz$ che ruota attorno all'asse verticale $Oy$ con velocità angolare costante $\omega$ rispetto ad un riferimento inerziale. La presenza di vincoli unilaterali fa sì che il punto di contatto $P$ fra $\gamma$ e la guida non possa oltrepassare le posizioni $A$ e $B$. Oltre che alla forza peso, il sistema è soggetto ad una interazione elastica fra $C$ e la sua proiezione ortogonale $D$ sull'asse $Ox$, di costante $k = m\omega^2$.




Assumendo i vincoli ideali e l'angolo $\phi$ illustrato in figura come parametro lagrangiano, determinare del sistema, relativamente alla terna $Oxyz$:

($a$) gli equilibri ordinari e di confine;

($b$) le proprietà di stabilità degli equilibri ordinari;

($c$) l'energia cinetica;

($d$) le equazioni di Lagrange del moto;

($e$) un integrale primo.

**Soluzione dell'esercizio 1**
($a$) **Posizione del baricentro**
Il baricentro del sistema viene individuato calcolando separatamente massa e baricentro dell'asta $\mathbb{A}$ e della lamina quadrata $\mathbb{L}$ ed applicando poi il teorema distributivo.

*Asta* $\mathbb{A}$
La massa dell'asta si determina integrando la densità di linea $\lambda$ sul segmento $PM$:

$$m_a = \int_{\mathbb{A}} \lambda\, ds = \int_{-L/2}^{L/2} \lambda(x)\, dx = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{m}{L^3} x^2\, dx = \frac{m}{L^3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{m}{12}\,.$$

Poiché l'asta è completamente collocata sull'asse coordinato $Ox$, il vettore posizione del baricentro $G_a$ deve potersi esprimere nella forma

$$G_a - O = x_a \hat{e}_1$$

con ascissa individuata dalla definizione

$$x_a = \frac{1}{m_a}\int_{\mathbb{A}} x\lambda\, ds = \frac{1}{m_a}\int_{-L/2}^{L/2} x\,\lambda(x)\, dx = \frac{12}{m}\int_{-L/2}^{L/2} \frac{m}{L^3}\, x^3 dx = \frac{12}{L^3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-L/2}^{L/2} = 0$$

per cui $G_a = O$. In effetti alla stessa conclusione si poteva pervenire direttamente osservando che $O$ è centro di simmetria dell'asta, avendosi

$$\lambda(-x) = \frac{m}{L^3}(-x)^2 = \frac{m}{L^3}x^2 = \lambda(x) \qquad \forall\, x \in [-L/2, L/2]\,.$$

*Lamina quadrata* $\mathbb{L}$
Il calcolo della massa $m_\ell$ della lamina si svolge mediante un integrale di superficie della densità superficiale $\sigma$:

$$\begin{aligned} m_\ell &= \int_{\mathbb{L}} \sigma\, dS = \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-L/2}^{L/2} dy\, \sigma(x,y) = \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-L/2}^{L/2} dy\, \frac{m}{L^3}(L + x + y) = \\ &= \frac{m}{L^3}\int_{-L/2}^{L/2} dx \left[Ly + xy + \frac{y^2}{2}\right]_{y=-L/2}^{L/2} = \frac{m}{L^3}\int_{-L/2}^{L/2} dx\, (L^2 + xL) = \\ &= \frac{m}{L^3}\left[L^2 x + L\frac{x^2}{2}\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{m}{L^3}\, L^3 = m\,. \end{aligned}$$

Il baricentro $G_\ell$ della lamina deve collocarsi lungo la bisettrice $AC$, che costituisce un evidente asse di simmetria della lamina a causa della relazione

$$\sigma(x,y) = \frac{m}{L^3}(L + x + y) = \frac{m}{L^3}(L + y + x) = \sigma(y,x) \qquad \forall\, (x,y) \in [-L/2, L/2]^2\,.$$

Il vettore posizione del baricentro si scrive perciò come

$$G_\ell - O \,=\, x_\ell \hat{e}_1 + y_\ell \hat{e}_2$$

in cui l'ascissa è valutata per mezzo della definizione

$$\begin{aligned}
x_\ell \,&=\, \frac{1}{m_\ell} \int\limits_{\mathbb{L}} x\,\sigma\, dS \,=\, \frac{1}{m_\ell} \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-L/2}^{L/2} dy\; x\,\sigma(x,y) \,= \\
&=\, \frac{1}{m} \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-L/2}^{L/2} dy\; \frac{m}{L^3} x\,(L+x+y) \,= \\
&=\, \frac{1}{L^3} \int_{-L/2}^{L/2} dx \left[ Lxy + x^2 y + x\frac{y^2}{2} \right]_{y=-L/2}^{L/2} \,= \\
&=\, \frac{1}{L^3} \int_{-L/2}^{L/2} dx\,(L^2 x + Lx^2) \,= \\
&=\, \frac{1}{L^3} \left[ L^2 \frac{x^2}{2} + L\frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} \,=\, \frac{1}{L^3}\frac{L^4}{12} \,=\, \frac{L}{12}
\end{aligned}$$

mentre l'ordinata assume ovviamente lo stesso valore

$$\begin{aligned}
y_\ell \,&=\, \frac{1}{m_\ell} \int\limits_{\mathbb{L}} y\,\sigma\, dS \,=\, \frac{1}{m_\ell} \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-L/2}^{L/2} dy\; y\,\sigma(x,y) \,= \\
&=\, \frac{1}{m_\ell} \int_{-L/2}^{L/2} dy \int_{-L/2}^{L/2} dx\; x\,\sigma(y,x) \,=\, \frac{1}{m_\ell} \int_{-L/2}^{L/2} dy \int_{-L/2}^{L/2} dx\; x\,\sigma(x,y) \,=\, x_\ell\,,
\end{aligned}$$

in modo che risulta

$$G_\ell - O \,=\, \frac{L}{12}\,\hat{e}_1 + \frac{L}{12}\,\hat{e}_2\,.$$

*Sistema rigido*

Il baricentro $G$ del sistema composto viene ora determinato per mezzo della proprietà distributiva. Questa porge la relazione

$$(m_a + m_\ell)(G - O) \,=\, m_a(G_a - O) + m_\ell(G_\ell - O)$$

che, sostituendo la grandezze precedentemente calcolate, assume la forma esplicita

$$\Big(\frac{m}{12} + m\Big)(G - O) \,=\, \frac{m}{12}\,0 + m\Big(\frac{L}{12}\,\hat{e}_1 + \frac{L}{12}\,\hat{e}_2\Big)$$

e conduce al risultato richiesto:

$$G - O \,=\, \frac{L}{13}\,\hat{e}_1 + \frac{L}{13}\,\hat{e}_2\,.$$

$(b)$ **Matrice d'inerzia**
La matrice d'inerzia del sistema rigido può essere determinata convenientemente calcolando e sommando termine a termine le matrici d'inerzia, rispetto alla stessa terna $Oxyz$, dell'asta $\mathbb{A}$ e della lamina $\mathbb{L}$.

*Asta* $\mathbb{A}$
La collocazione dell'asta lungo l'asse coordinato $Ox$ implica che la matrice d'inerzia dell'asta rispetto alla terna $Oxyz$ abbia la forma generale:

$$[L_O]^a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{yy}^a & 0 \\ 0 & 0 & L_{yy}^a \end{pmatrix}$$

in cui il momento d'inerzia relativo all'asse $Oy$ vale:

$$L_{yy}^a = \int_{\mathbb{A}} x^2 \lambda \, ds = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \lambda(x) \, dx = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{m}{L^3} x^4 dx = \frac{m}{L^3} \left[ \frac{x^5}{5} \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{80} mL^2 \, .$$

Si ottiene pertanto:

$$[L_O]^a = mL^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/80 & 0 \\ 0 & 0 & 1/80 \end{pmatrix} .$$

*Lamina quadrata* $\mathbb{L}$
La lamina $\mathbb{L}$ è interamente ubicata nel piano coordinato $Oxy$ della terna cartesiana ortogonale $Oxyz$ e la sua matrice d'inerzia assume perciò la forma:

$$[L_O]^\ell = \begin{pmatrix} L_{xx}^\ell & L_{xy}^\ell & 0 \\ L_{xy}^\ell & L_{yy}^\ell & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx}^\ell + L_{yy}^\ell \end{pmatrix}$$

nella quale devono essere determinati i momenti $L_{xx}^\ell$, $L_{yy}^\ell$ e il prodotto d'inerzia $L_{xy}^\ell$. Il momento d'inerzia $L_{xx}^\ell$ si ricava facendo uso della definizione:

$$\begin{aligned} L_{xx}^\ell &= \int_{\mathbb{L}} y^2 \sigma \, dS = \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-L/2}^{L/2} dy \; y^2 \sigma(x,y) = \\ &= \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-L/2}^{L/2} dy \; \frac{m}{L^3} (Ly^2 + xy^2 + y^3) = \\ &= \frac{m}{L^3} \int_{-L/2}^{L/2} dx \left[ L\frac{y^3}{3} + x\frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right]_{y=-L/2}^{L/2} = \\ &= \frac{m}{L^3} \int_{-L/2}^{L/2} dx \left( \frac{L^4}{12} + x\frac{L^3}{12} \right) = \frac{m}{L^3} \left[ \frac{L^4}{12} x + \frac{L^3}{24} x^2 \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{mL^2}{12} \end{aligned}$$

e coincide per simmetria con il momento relativo all'asse $Oy$:

$$
\begin{aligned}
L^{\ell}_{yy} &= \int_{\mathbb{L}} x^2 \sigma \, dS \;=\; \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-L/2}^{L/2} dy \; x^2 \sigma(x,y) \;= \\
&= \int_{-L/2}^{L/2} dy \int_{-L/2}^{L/2} dx \; y^2 \sigma(y,x) \;=\; \int_{-L/2}^{L/2} dy \int_{-L/2}^{L/2} dx \; y^2 \sigma(x,y) \;= \\
&= \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-L/2}^{L/2} dy \; y^2 \sigma(x,y) \;=\; L^{\ell}_{xx} \,.
\end{aligned}
$$

Quanto al prodotto d'inerzia $L^{\ell}_{xy}$, la sua definizione porge:

$$
\begin{aligned}
L^{\ell}_{xy} &= -\int_{\mathbb{L}} xy \, \sigma \, dS \;=\; -\int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-L/2}^{L/2} dy \; xy \, \sigma(x,y) \;= \\
&= -\int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-L/2}^{L/2} dy \; \frac{m}{L^3}(Lxy + x^2 y + xy^2) \;= \\
&= -\frac{m}{L^3} \int_{-L/2}^{L/2} dx \left[ Lx\frac{y^2}{2} + x^2\frac{y^2}{2} + x\frac{y^3}{3} \right]_{y=-L/2}^{L/2} \;= \\
&= -\frac{m}{L^3} \int_{-L/2}^{L/2} dx \; x\frac{L^3}{12} \;=\; -\frac{m}{12}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-L/2}^{L/2} \;=\; 0
\end{aligned}
$$

cosicché la matrice d'inerzia della lamina diventa:

$$
[L_O]^{\ell} \;=\; mL^2 \begin{pmatrix} 1/12 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.
$$

*Sistema rigido*
Come già sottolineato, la somma termine a termine delle matrici d'inerzia $[L_O]^a$ e $[L_O]^{\ell}$ fornisce la matrice d'inerzia del sistema rigido:

$$
[L_O] \;=\; [L_O]^a + [L_O]^{\ell} \;=\; \begin{pmatrix} 1/12 & 0 & 0 \\ 0 & 23/240 & 0 \\ 0 & 0 & 43/240 \end{pmatrix}.
$$

Si conclude, in particolare, che $Oxyz$ è una terna principale d'inerzia in $O$ del sistema.

($c$) **Momento d'inerzia rispetto a $OB$**
La retta $OB$ passa ovviamente per l'origine e la sua direzione è individuata dal versore

$$
\hat{n} \;=\; \frac{B-O}{|B-O|} \;=\; \frac{\hat{e}_1 - \hat{e}_2}{\sqrt{2}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{e}_2 \,.
$$

Il momento d'inerzia relativo all'asse $OB$ si esprime perciò mediante la relazione:

$$\begin{aligned}
I_{OB} \;&=\; I_{O\hat{n}} \;=\; \hat{n}\cdot L_O(\hat{n}) \;=\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(1\;\; -1\;\; 0)\,mL^2 \begin{pmatrix} 1/12 & 0 & 0\\ 0 & 23/240 & 0\\ 0 & 0 & 43/240 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 0 \end{pmatrix} =\\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{12}+\frac{23}{240}\Big)\,mL^2 \;=\; \frac{43}{480}mL^2\,.
\end{aligned}$$

($d$) **Momento angolare in $O$**
Siccome, per ipotesi, il punto $O$ risulta fisso e la velocità angolare istantanea $\vec{\omega}$ è nota:

$$\dot{O} \,=\, 0 \qquad\qquad \vec{\omega} \,=\, \omega_1\hat{e}_1+\omega_2\hat{e}_2+\omega_3\hat{e}_3 \,=\, \omega\,\hat{e}_1-\omega\,\hat{e}_3\,,$$

il momento angolare in $O$ del sistema si scrive

$$\vec{K}_O \,=\, L_O(\vec{\omega}) \,=\, K_1\hat{e}_1+K_2\hat{e}_2+K_3\hat{e}_3$$

con le componenti $K_1, K_2, K_3$ determinabili per mezzo della relazione matriciale:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} K_1\\ K_2\\ K_3 \end{pmatrix} &= [L_O] \begin{pmatrix} \omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3 \end{pmatrix} =\\
&= mL^2 \begin{pmatrix} 1/12 & 0 & 0\\ 0 & 23/240 & 0\\ 0 & 0 & 43/240 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega\\ 0\\ -\omega \end{pmatrix} = mL^2\omega \begin{pmatrix} 1/12\\ 0\\ -43/240 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Si ha pertanto:

$$\vec{K}_O \,=\, mL^2\omega\Big(\frac{1}{12}\,\hat{e}_1-\frac{43}{240}\,\hat{e}_3\Big)\,.$$

($e$) **Energia cinetica**
L'espressione ottenuta per il momento angolare in $O$ è utile anche per il calcolo dell'energia cinetica, per mezzo della ben nota relazione:

$$T \,=\, \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{K}_O \,=\, \frac{1}{2}(\omega\;\; 0\;\; -\omega)\,mL^2\omega \begin{pmatrix} 1/12\\ 0\\ -43/240 \end{pmatrix} \,=\, \frac{1}{2}mL^2\omega^2\Big(\frac{1}{12}+\frac{43}{240}\Big) \,=\, \frac{21}{160}mL^2\omega^2\,.$$

**Soluzione dell'esercizio 2**
($a$) **Equilibri ordinari e di confine**
La terna di riferimento rotante è sede di forze fittizie, o d'inerzia, che si applicano alla circonferenza rigida $\gamma$ unitamente alle forze attive reali. La componente lagrangiana delle forze di Coriolis risulta tuttavia nulla:

$$Q_\phi^{\mathrm{Cor}} \,=\, \sum_{P_i\in\gamma} -2m_i\,\omega\,\hat{e}_2\wedge\dot{P}_i\cdot\frac{\partial P_i}{\partial\phi} \,=\, -2\omega\sum_{P_i\in\gamma} m_i\hat{e}_2\wedge\frac{\partial P_i}{\partial\phi}\dot{\phi}\cdot\frac{\partial P_i}{\partial\phi} \,=\, -2\omega\sum_{P_i\in\gamma} 0 \,=\, 0$$

per cui le sollecitazioni attive delle quali occorre e basta tenere conto nella stesura delle equazioni del moto si riducono al peso, all'interazione elastica fra i punti $C$ e $D$ e alle forze centrifughe: tutte hanno carattere posizionale conservativo e sono perciò descritte dai rispettivi potenziali, che si passa ora a determinare singolarmente.

*Potenziale delle forze peso*
Il potenziale gravitazionale della circonferenza rigida e omogenea si esprime per mezzo della formula generale:

$$U_{\mathrm{g}} \,=\, -mg\,\hat{e}_2 \cdot (C-O) \,=\, -3Rmg\,\cos\phi\,,$$

essendo il centro geometrico $C$ della curva un evidente centro di simmetria, da identificare perciò con il baricentro del sistema.

*Potenziale elastico*
Il potenziale dell'interazione elastica fra i punti $C$ e $D$ è dato dall'espressione:

$$U_{\mathrm{el}} \,=\, -\frac{k}{2}|C-D|^2 \,=\, -\frac{1}{2}m\omega^2(3R\cos\phi)^2 \,=\, -\frac{9}{2}mR^2\omega^2\cos^2\phi\,.$$

*Potenziale centrifugo*
Il potenziale delle forze centrifughe vale:

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{cf}} \,&=\, \frac{\omega^2}{2}I_{Oy} \,=\, \frac{\omega^2}{2}\big[m[(C-O)\cdot\hat{e}_1]^2 + I_{Cy}\big] \,= \\ &=\, \frac{\omega^2}{2}\left[m(3R\sin\phi)^2 + \frac{1}{2}I_{Cz}\right] \,=\, \frac{\omega^2}{2}\left(9mR^2\sin^2\phi + \frac{1}{2}mR^2\right) \end{aligned}$$

espressione nella quale si è fatto uso delle evidenti relazioni di simmetria $I_{Cx} = I_{Cy}$ e $I_{Cz} = I_{Cx} + I_{Cy}$, oltre che dell'ovvia equazione $I_{Cz} = mR^2$.

*Potenziale del sistema*
Il potenziale del sistema si ricava pertanto come somma dei potenziali gravitazionale, elastico e centrifugo:

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{g}} + U_{\mathrm{el}} + U_{\mathrm{cf}} \,&=\, -3mgR\cos\phi - \frac{9}{2}mR^2\omega^2\cos^2\phi + \frac{9}{2}mR^2\omega^2\sin^2\phi + \frac{1}{4}mR^2\omega^2 \,= \\ &=\, -3mgR\cos\phi + 9mR^2\omega^2\sin^2\phi + \text{costante} \end{aligned}$$

ed omessa la costante additiva si riduce a:

$$U(\phi) \,=\, -3mgR\cos\phi + 9mR^2\omega^2\sin^2\phi \quad , \qquad \phi \in [0, 3\pi/2]\,.$$

L'espressione del potenziale costituisce il punto di partenza per l'individuazione delle configurazioni di equilibrio ordinarie e di confine del sistema, che vengono ora determinate separatamente.

*Equilibri ordinari*

Gli equilibri ordinari del sistema sono gli zeri in $\phi \in (0, 3\pi/2)$ della derivata prima del potenziale:

$$U'(\phi) \;=\; 3mgR\sin\phi + 18mR^2\omega^2 \sin\phi\cos\phi$$

e quindi le soluzioni dell'equazione trigonometrica:

$$18mR^2\omega^2 \sin\phi\left(\frac{g}{6R\omega^2} + \cos\phi\right) \;=\; 0\,.$$

Si hanno due possibilità:

(*i*) che valga $\sin\phi = 0$, per cui $\phi = 0, \pi$ e la sola radice accettabile in $(0, 3\pi/2)$ risulta

$$\phi \;=\; \pi\,;$$

(*ii*) che sia soddisfatta l'equazione

$$\frac{g}{6R\omega^2} + \cos\phi \;=\; 0$$

le cui soluzioni si scrivono

$$\phi \;=\; \pm\arccos\Big(-\frac{g}{6R\omega^2}\Big) \;=\; \pm\phi^\star$$

con $\phi^\star \in (\pi/2, \pi)$ definita se e soltanto se $g/6R\omega^2 < 1$. In tale ipotesi ricorrono due ulteriori equilibri ordinari per

$$\phi \;=\; \phi^\star \qquad \text{e} \qquad \phi \;=\; 2\pi - \phi^\star$$

entrambi appartenenti all'intervallo di parametrizzazione $(0, 3\pi/2)$ — si osservi infatti che $\phi^\star \in (\pi/2, \pi)$ implica $-\phi^\star \in (-\pi, -\pi/2)$ e dunque $2\pi - \phi^\star \in (\pi, 3\pi/2)$. Si tratta di configurazioni di equilibrio che vedono la circonferenza $\gamma$ disposta simmetricamente rispetto all'asse verticale $Oy$.

In definitiva, gli equilibri ordinari del sistema sono:

$$\begin{aligned}
&\phi \;=\; \pi && \text{(sempre definito)}\\
&\phi \;=\; \arccos\Big(-\frac{g}{6R\omega^2}\Big) \;=\; \phi^\star && \text{(definito per } g/6R\omega^2 < 1)\\
&\phi \;=\; 2\pi - \arccos\Big(-\frac{g}{6R\omega^2}\Big) \;=\; 2\pi - \phi^\star && \text{(definito per } g/6R\omega^2 < 1)\,.
\end{aligned}$$

*Equilibri di confine*

Le configurazioni di confine del sistema si hanno per $\phi = 0$ e per $\phi = 3\pi/2$. In tali configurazioni le componenti lagrangiane delle sollecitazioni attive applicate risultano:

$$\begin{aligned}
&Q_\phi(0) \;=\; U'(0) \;=\; 0\\
&Q_\phi(3\pi/2) \;=\; U'(3\pi/2) \;=\; -3mgR\,.
\end{aligned}$$

D'altra parte, per il teorema dei lavori virtuali $\phi = 0$ è equilibrio se e soltanto se

$$Q_\phi(0)\,\delta\phi \,\leq\, 0 \qquad \forall\,\delta\phi \,\geq\, 0$$

ossia per

$$Q_\phi(0) \,\leq\, 0$$

e nella fattispecie la condizione è certamente soddisfatta, visto che $Q_\phi(0) = 0$.
Analogamente, l'equilibrio in $\phi = 3\pi/2$ sussiste se e solo se

$$Q_\phi(3\pi/2)\,\delta\phi \,\leq\, 0 \qquad \forall\,\delta\phi \,\leq\, 0$$

ovvero per

$$Q_\phi(3\pi/2) \,\geq\, 0\,.$$

Poiché $Q_\phi(3\pi/2) = -3mgR < 0$, la condizione è violata e la configurazione $\phi = 3\pi/2$ non costituisce un equilibrio di confine per il sistema.
L'unica configurazione di equilibrio di confine si ha pertanto in $\phi = 0$.

($b$) **Stabilità degli equilibri ordinari**
Tutte le sollecitazioni attive agenti sul sistema sono di tipo posizionale conservativo e l'analisi di stabilità degli equilibri ordinari può dunque essere condotta facendo uso dei teoremi standard di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale, per i quali si rende necessario il calcolo della derivata seconda del potenziale:

$$U''(\phi) \,=\, 3mgR\cos\phi + 18mR^2\omega^2(\cos^2\phi - \sin^2\phi)\,.$$

Si può così procedere allo studio delle proprietà di stabilità dei singoli equilibri ordinari.

**Configurazione $\phi = \pi$**
La derivata seconda del potenziale in questa configurazione vale:

$$U''(\pi) \,=\, -3mgR + 18mR^2\omega^2 \,=\, 18mR^2\omega^2\Big(1 - \frac{g}{6R\omega^2}\Big)$$

e, siccome non assume segno definito, richiede che si distinguano tre casi:

($i$) per $g/6R\omega^2 > 1$ risulta $U''(\pi) < 0$, in modo che la configurazione $\phi = \pi$ si riconosce essere un massimo relativo proprio del potenziale, stabile in virtù del teorema di Lagrange-Dirichlet;

($ii$) se $g/6R\omega^2 < 1$ l'instabilità della configurazione è assicurata dal teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet, causa il segno positivo della derivata seconda del potenziale:
$$U''(\pi) \,>\, 0\,;$$

(*iii*) qualora infine si abbia $g/6R\omega^2 = 1$, la derivata seconda del potenziale si annulla e ricorre un caso critico, per il quale si rende necessaria una ulteriore e più dettagliata analisi. In effetti, il potenziale del sistema diventa in questa circostanza:

$$U(\phi) \,=\, 18mR^2\omega^2\Big(-\frac{g}{6R\omega^2}\cos\phi + \frac{1}{2}\sin^2\phi\Big) \,=\, 18mR^2\omega^2\Big(-\cos\phi + \frac{1}{2}\sin^2\phi\Big)$$

con $U(\pi) = 18mR^2\omega^2$ e derivate:

$$\begin{aligned}
U'(\phi) &= 18mR^2\omega^2(\sin\phi + \sin\phi\cos\phi)\\
U''(\phi) &= 18mR^2\omega^2(\cos\phi + \cos^2\phi - \sin^2\phi) \,=\, 18mR^2\omega^2(\cos\phi + \cos 2\phi)\\
U^{(3)}(\phi) &= 18mR^2\omega^2(-\sin\phi - 2\sin 2\phi)\\
U^{(4)}(\phi) &= 18mR^2\omega^2(-\cos\phi - 4\cos 2\phi)
\end{aligned}$$

che in $\phi = \pi$ assumono i valori rispettivi:

$$U'(\pi) \,=\, 0 \qquad U''(\pi) \,=\, 0 \qquad U^{(3)}(\pi) \,=\, 0$$

$$U^{(4)}(\pi) \,=\, 18mR^2\omega^2(1-4) \,=\, -54mR^2\omega^2\,.$$

Nell'intorno della configurazione $\phi = \pi$ il potenziale ammette perciò l'approssimazione di Taylor:

$$\begin{aligned}
U(\phi) &= U(\pi) + \frac{U^{(4)}(\pi)}{4!} + o(\phi-\pi)^4 \,=\\
&= 18mR^2\omega^2\left[1 - \frac{1}{8}(\phi-\pi)^4\right] + o(\phi-\pi)^4 \qquad (\phi \,\to\, \pi)
\end{aligned}$$

dalla quale si deduce che la configurazione costituisce un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità è comunque assicurata dal teorema di Lagrange-Dirichlet.

**Configurazioni $\phi = \phi^\star, 2\pi - \phi^\star$**
Le due configurazioni di equilibrio presentano le stesse proprietà di stabilità a causa del comune valore della derivata seconda del potenziale:

$$U''(2\pi - \phi^\star) \,=\, U''(-\phi^\star) \,=\, U''(\phi^\star)\,.$$

Tale valore si scrive esplicitamente come:

$$\begin{aligned}
U''(\phi^\star) &= 3mgR\cos\phi^\star + 18mR^2\omega^2(\cos^2\phi^\star - \sin^2\phi^\star) \,=\\
&= 18mR^2\omega^2\Big(\frac{g}{6R\omega^2}\cos\phi^\star + \cos^2\phi^\star - \sin^2\phi^\star\Big) \,=\\
&= 18mR^2\omega^2(-\cos\phi^\star\,\cos\phi^\star + \cos^2\phi^\star - \sin^2\phi^\star) \,=\\
&= -18mR^2\omega^2\sin^2\phi^\star \,<\, 0
\end{aligned}$$

e permette di riconoscere entrambe le configurazioni come massimi relativi propri del potenziale $U$, stabili per Lagrange-Dirichlet.

($c$) **Energia cinetica**
Considerato che la circonferenza rigida $\gamma$ non presenta punti fissi e che il suo centro geometrico $C$ coincide con il relativo baricentro, conviene calcolare l'energia cinetica del sistema per mezzo del teorema di König:

$$T \,=\, \frac{1}{2}m\dot{C}^2 + \frac{1}{2}I_{Cz}|\vec{\omega}|^2$$

in cui il baricentro della curva ha coordinate:

$$C - O \,=\, 3R\,\sin\phi\,\hat{e}_1 + 3R\,\cos\phi\,\hat{e}_2$$

e velocità assoluta istantanea:

$$\dot{C} \,=\, (3R\,\cos\phi\,\hat{e}_1 - 3R\,\sin\phi\,\hat{e}_2)\,\dot{\phi}\,,$$

mentre il momento d'inerzia rispetto all'asse $Cz$ vale ovviamente:

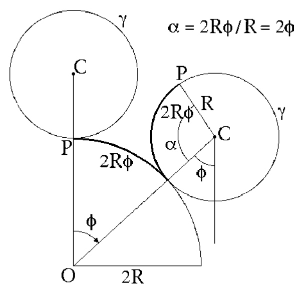
$$I_{Cz} \,=\, mR^2$$

e la velocità angolare istantanea risulta:

$$\vec{\omega} \,=\, -3\dot{\phi}\,\hat{e}_3\,.$$

Della correttezza di quest'ultima relazione ci si convince facilmente notando che per la condizione di puro rotolamento sulla guida circolare fissa, di centro $O$ e raggio $2R$, nel punto di contatto $P$ fra curva a guida deve aversi:

$$\begin{aligned}
0 \,=\, \dot{P} \,&=\, \dot{C} + \vec{\omega}\wedge(P-C) \,= \\
&=\, -\dot{\phi}\,\hat{e}_3\wedge(C-O) + \vec{\omega}\wedge\frac{C-O}{|C-O|}(-R) \,= \\
&=\, -\dot{\phi}\,\hat{e}_3\wedge(C-O) - \frac{R}{3R}\vec{\omega}\wedge(C-O) \,= \\
&=\, -\Big(\dot{\phi}\,\hat{e}_3 + \frac{1}{3}\vec{\omega}\Big)\wedge(C-O)
\end{aligned}$$




in modo che, essendo $\vec{\omega} = \omega\,\hat{e}_3$ per via del carattere piano del moto rigido:

$$0 \,=\, -\Big(\dot{\phi} + \frac{\omega}{3}\Big)\,\hat{e}_3\wedge(C-O)$$

e dunque $\vec{\omega} = -3\dot{\phi}\,\hat{e}_3$, come affermato. Nel calcolo precedente si è fatto uso della relazione

$$\dot{C} \,=\, -\dot{\phi}\,\hat{e}_3\wedge(C-O)$$

ottenuta grazie al fatto che il punto $C$ si muove mantenendo costante la propria distanza dall'asse $Oz$. Si è inoltre sfruttata la circostanza che il vettore $\hat{e}_3 \wedge (C-O)$ risulta diverso da zero per qualsiasi scelta della coordinata generalizzata $\phi$. Sostituendo nella formula di König si ottiene così:

$$\begin{aligned} T \;&=\; \frac{1}{2}m\big|(3R\,\cos\phi\,\hat{e}_1 - 3R\,\sin\phi\,\hat{e}_2)\,\dot{\phi}\big|^2 + \frac{1}{2}mR^2\,|-3\dot{\phi}\,\hat{e}_3|^2 \;= \\ &=\; \frac{9}{2}mR^2\dot{\phi}^2 + \frac{9}{2}mR^2\dot{\phi}^2 \;=\; 9mR^2\dot{\phi}^2\,. \end{aligned}$$

($d$) **Equazioni di Lagrange**
Si ha un'unica equazione di Lagrange del moto:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{\phi}}\Big) - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi} \;=\; 0$$

con lagrangiana:

$$\mathfrak{L}(\phi,\dot{\phi}) \;=\; T+U \;=\; 9mR^2\dot{\phi}^2 - 3mgR\cos\phi + 9mR^2\omega^2\sin^2\phi\,.$$

Da questa si deducono le relazioni:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{\phi}}\Big) \;=\; 18mR^2\ddot{\phi}$$

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi} \;=\; 3mgR\sin\phi + 18mR^2\omega^2\sin\phi\cos\phi$$

per cui l'equazione del moto diventa:

$$18mR^2\ddot{\phi} - 3mgR\sin\phi - 18mR^2\omega^2\sin\phi\cos\phi \;=\; 0\,.$$

($e$) **Integrale primo**
Il sistema è a vincoli ideali, scleronomo e soggetto esclusivamente a sollecitazioni posizionali conservative. Un integrale primo ovvio è quello dell'energia meccanica $H = T - U$, che si scrive esplicitamente come:

$$H(\phi,\dot{\phi}) \;=\; 9mR^2\dot{\phi}^2 + 3mgR\cos\phi - 9mR^2\omega^2\sin^2\phi\,.$$