

Esercizio 1

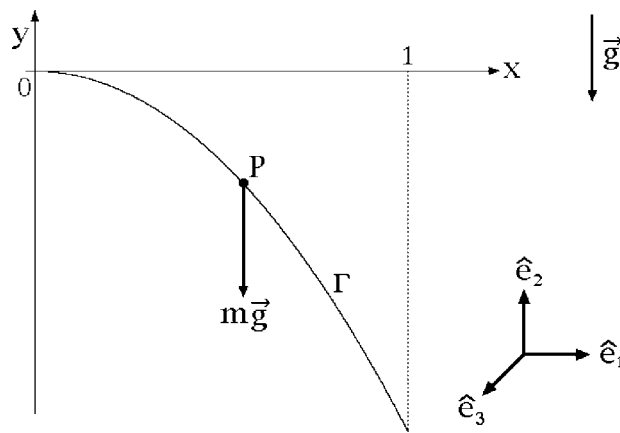
In una terna di riferimento inerziale $Oxyz$ è data la curva materiale liscia Γ di parametrizzazione

$$P(x) = x \hat{e}_1 - \frac{x^2}{2} \hat{e}_2, \quad x \in [0, 1]$$

e densità lineare

$$\lambda(x) = \frac{\mu}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in [0, 1]$$

essendo $\mu > 0$ costante. Sulla curva è vincolato a scorrere un punto materiale P di massa m , soggetto alla forza peso $-mg \hat{e}_2$.

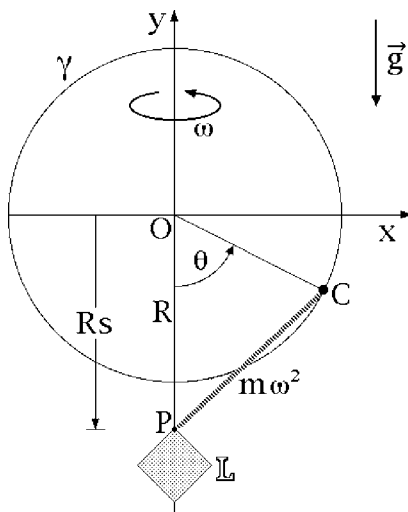


Si chiede di determinare:

- la posizione del baricentro G di Γ rispetto a $Oxyz$;
- la matrice d'inerzia di Γ relativamente alla stessa terna;
- il momento d'inerzia di Γ rispetto all'asse $y = x$;
- la matrice d'inerzia di Γ rispetto alla terna di origine G e con gli assi paralleli a quelli di $Oxyz$;
- le equazioni del moto del punto P .

Esercizio 2

Un punto materiale C , di massa m , può scorrere senza attrito lungo una circonferenza fissa γ di centro O e raggio R , posta nel piano coordinato Oxy di una terna cartesiana $Oxyz$ che ruota attorno all'asse verticale Oy con velocità angolare costante $\omega \hat{e}_2$ rispetto ad un riferimento inerziale. Una molla ideale di costante elastica $m\omega^2$ collega C con il vertice P di un quadrato omogeneo \mathbb{L} , di massa m , vincolato a scorrere lungo l'asse Oy e al di sotto di γ — vedi figura. L'intero sistema è soggetto al campo delle forze peso.



Supposti i vincoli ideali e assumendo $g > 2R\omega^2$, si faccia uso delle coordinate $\theta \in \mathbb{R}$ e $s \in [1, +\infty)$ in figura per determinare:

- l'energia cinetica del sistema;
- un integrale primo del sistema;
- gli equilibri ordinari;
- le proprietà di stabilità degli equilibri ordinari;
- le equazioni di Lagrange del moto;
- se la configurazione $(\theta, s) = (0, 1)$ è un equilibrio di confine del sistema (**facoltativo**).

Soluzione dell'esercizio 1

(a) Posizione del baricentro di Γ

Poiché la curva si colloca nel piano coordinato Oxy , che evidentemente si identifica con un suo piano di simmetria, appare evidente che il baricentro G di Γ deve localizzarsi nello stesso piano, in modo che il vettore posizione del baricentro assumerà la forma:

$$G - O = x_G \hat{e}_1 + y_G \hat{e}_2.$$

La massa della curva materiale si otterrà integrando l'elemento infinitesimo di massa

$$dm(x) = \lambda(x) |P'(x)| dx = \frac{\mu}{\sqrt{1+x^2}} |\hat{e}_1 - x \hat{e}_2| dx = \mu dx$$

sull'intero intervallo $[0, 1]$ del parametro, e sarà data perciò dall'integrale definito:

$$m = \int_0^1 \mu dx = \mu.$$

Per l'ascissa x_G del centro di massa si ha allora l'espressione:

$$x_G = \frac{1}{m} \int_{\Gamma} x dm = \frac{1}{\mu} \int_0^1 x \mu dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

mentre la corrispondente ordinata y_G vale

$$y_G = \frac{1}{m} \int_{\Gamma} \left(-\frac{x^2}{2} \right) dm = -\frac{1}{\mu} \int_0^1 \frac{x^2}{2} \mu dx = \left[-\frac{x^3}{6} \right]_0^1 = -\frac{1}{6}$$

e pertanto risulta:

$$G - O = \frac{1}{2} \hat{e}_1 - \frac{1}{6} \hat{e}_2.$$

(b) Matrice d'inerzia della curva materiale

La matrice d'inerzia di Γ si presenta nella forma generale:

$$[L_O] = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & 0 \\ L_{xy} & L_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx} + L_{yy} \end{pmatrix}$$

dovuta alla particolare collocazione della curva, che è completamente ubicata nel piano coordinato Oxy . Il momento d'inerzia L_{xx} si deduce dalla definizione:

$$L_{xx} = \int_{\Gamma} (y^2 + z^2) dm = \int_{\Gamma} y^2 dm = \int_0^1 \left(-\frac{x^2}{2} \right)^2 \mu dx = \frac{\mu}{4} \int_0^1 x^4 dx = \frac{\mu}{4} \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{\mu}{20}$$

al pari del momento relativo all'asse Oy :

$$L_{yy} = \int_{\Gamma} (x^2 + z^2) dm = \int_{\Gamma} x^2 dm = \int_0^1 x^2 \mu dx = \mu \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\mu}{3}.$$

Il prodotto d'inerzia L_{xy} vale invece:

$$L_{xy} = - \int_{\Gamma} xy dm = - \int_0^1 x \left(-\frac{x^2}{2} \right) \mu dx = \frac{\mu}{2} \int_0^1 x^3 dx = \frac{\mu}{2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\mu}{8}.$$

La matrice d'inerzia risulta così:

$$[L_O] = \mu \begin{pmatrix} 1/20 & 1/8 & 0 \\ 1/8 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 23/60 \end{pmatrix}.$$

(c) **Momento d'inerzia rispetto all'asse $y = x$**

La retta di equazione $y = x$ passa per l'origine O della terna di riferimento e la sua direzione è specificata dal versore

$$\hat{n} = \frac{\hat{e}_1 + \hat{e}_2}{|\hat{e}_1 + \hat{e}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{e}_2.$$

Il momento d'inerzia relativo alla retta $O\hat{n}$ può dunque esprimersi per mezzo della ben nota relazione matriciale

$$\begin{aligned} I_{O\hat{n}} &= (n_1 \ n_2 \ n_3)[L_O] \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 \ 1 \ 0)\mu \begin{pmatrix} 1/20 & 1/8 & 0 \\ 1/8 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 23/60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\mu}{2}(1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 7/40 \\ 11/24 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{7}{40} + \frac{11}{24} \right) = \frac{19}{60}\mu \end{aligned}$$

che fornisce così il risultato richiesto.

(d) **Matrice d'inerzia rispetto ad una terna baricentrale**

La matrice d'inerzia $[L_G]$ relativa alla terna di riferimento baricentrale $Gxyz$, i cui assi sono rispettivamente paralleli a quelli della terna $Oxyz$, è legata alla $[L_O]$ dal teorema di Huygens-Steiner generalizzato:

$$[L_O] = [L_G] + \mu \begin{pmatrix} d_y^2 + d_z^2 & -d_x d_y & -d_x d_z \\ -d_x d_y & d_x^2 + d_z^2 & -d_x d_z \\ -d_x d_z & -d_y d_z & d_x^2 + d_y^2 \end{pmatrix}$$

dove d_x , d_y e d_z indicano le coordinate del baricentro rispetto alla terna $Oxyz$:

$$d_x = \frac{1}{2} \quad d_y = -\frac{1}{6} \quad d_z = 0.$$

Si ha perciò:

$$\begin{aligned}
 [L_G] &= [L_O] - \mu \begin{pmatrix} d_y^2 + d_z^2 & -d_x d_y & -d_x d_z \\ -d_x d_y & d_x^2 + d_z^2 & -d_x d_z \\ -d_x d_z & -d_y d_z & d_x^2 + d_y^2 \end{pmatrix} = \\
 &= \mu \begin{pmatrix} 1/20 & 1/8 & 0 \\ 1/8 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 23/60 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 1/36 & 1/12 & 0 \\ 1/12 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 5/18 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1/45 & 1/24 & 0 \\ 1/24 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 19/180 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

(e) Equazioni del moto del punto P

Un vettore tangente alla curva Γ nella posizione individuata dal valore $x \in [0, 1]$ dell'ascissa è dato dalla derivata prima della parametrizzazione $P(x)$:

$$P'(x) = \hat{e}_1 - x \hat{e}_2$$

per cui la componente tangente alla curva della forza peso vale:

$$-mg \hat{e}_2 \cdot \frac{P'(x)}{|P'(x)|} = -mg \hat{e}_2 \cdot \frac{\hat{e}_1 - x \hat{e}_2}{|\hat{e}_1 - x \hat{e}_2|} = \frac{mgx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

D'altra parte, per un generico moto possibile del punto P la velocità istantanea si deduce derivando rispetto al tempo la parametrizzazione $P(x)$, avendo cura di sostituire a x una qualsiasi funzione regolare di t :

$$\dot{P} = (\hat{e}_1 - x \hat{e}_2) \dot{x}$$

e una ulteriore derivazione in t porge l'espressione dell'accelerazione istantanea:

$$\ddot{P} = (\hat{e}_1 - x \hat{e}_2) \ddot{x} - \dot{x}^2 \hat{e}_2 = \ddot{x} \hat{e}_1 - (x \ddot{x} + \dot{x}^2) \hat{e}_2$$

con componente tangenziale:

$$\ddot{P} \cdot \frac{P'(x)}{|P'(x)|} = [\ddot{x} \hat{e}_1 - (x \ddot{x} + \dot{x}^2) \hat{e}_2] \cdot \frac{\hat{e}_1 - x \hat{e}_2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\ddot{x} + x^2 \ddot{x} + x \dot{x}^2}{\sqrt{1+x^2}}.$$

L'equazione pura del moto si scrive pertanto, nell'ipotesi di curva liscia,

$$m \ddot{P} \cdot \frac{P'(x)}{|P'(x)|} = -mg \hat{e}_2 \cdot \frac{P'(x)}{|P'(x)|}$$

ossia:

$$m \frac{\ddot{x} + x^2 \ddot{x} + x \dot{x}^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{mgx}{\sqrt{1+x^2}},$$

espressione che è peraltro possibile semplificare in:

$$\ddot{x} + x^2 \ddot{x} + x \dot{x}^2 = gx.$$

Soluzione dell'esercizio 2

(a) Energia cinetica del sistema

L'energia cinetica T del sistema è costituita dalla somma delle energie cinetiche del punto C e della lamina \mathbb{L} . Il vettore posizione del centro C si scrive:

$$C - O = R \sin \theta \hat{e}_1 - R \cos \theta \hat{e}_2$$

e la corrispondente velocità vale:

$$\dot{C} = R(\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2) \dot{\theta}$$

per cui l'energia cinetica di C risulta:

$$T_C = \frac{1}{2} m \dot{C}^2 = \frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2.$$

Per contro, la lamina \mathbb{L} si muove di moto traslatorio rettilineo e la velocità di ogni suo punto — ad esempio di P — è data dall'espressione:

$$\dot{P} = -R \dot{s} \hat{e}_2$$

cosicché la relativa energia cinetica diventa:

$$T_{\mathbb{L}} = \frac{1}{2} m \dot{P}^2 = \frac{m}{2} R^2 \dot{s}^2.$$

Ne deriva che:

$$T = T_C + T_{\mathbb{L}} = \frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} R^2 \dot{s}^2 = \frac{m}{2} R^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{s}^2).$$

(b) Integrale primo

Il sistema scleronomo è soggetto unicamente a sollecitazioni posizionali e conservative, costituite dal peso, dall'interazione elastica fra i punti C e P , dal campo delle forze centrifughe. A rigore sul sistema agiscono anche le forze di Coriolis, che tuttavia hanno componenti lagrangiane identicamente nulle: per provarlo è sufficiente considerare che le forze di Coriolis sono tutte dirette perpendicolarmente al piano Oxy , mentre i vettori:

$$\frac{\partial C}{\partial \theta} = R(\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2) \quad \frac{\partial C}{\partial s} = 0$$

e:

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial s} = -R \hat{e}_2$$

risultando tutti paralleli allo stesso piano. Il potenziale del sistema è calcolato come somma dei potenziali gravitazionale, elastico e centrifugo.

Potenziale gravitazionale

Il potenziale gravitazionale del punto C assume la forma:

$$U_g^C = -mg \hat{e}_2 \cdot (C - O) = mgR \cos \theta$$

mentre quello della lamina è dato da:

$$U_g^L = -mg \hat{e}_2 \cdot (P - O) = mgRs$$

e la somma dei due vale perciò:

$$U_g = mgR \cos \theta + mgRs = mgR(\cos \theta + s).$$

Potenziale elastico

Il potenziale associato all'interazione elastica fra C e P si ricava per mezzo della definizione:

$$\begin{aligned} U_{el} &= -\frac{k}{2}(C - P)^2 = -\frac{m\omega^2}{2}[R \sin \theta \hat{e}_1 - R \cos \theta \hat{e}_2 + Rs \hat{e}_2]^2 = \\ &= -\frac{m\omega^2}{2}R^2[\sin^2 \theta + (s - \cos \theta)^2] = \frac{1}{2}m\omega^2 R^2(-s^2 + 2s \cos \theta - 1). \end{aligned}$$

Potenziale centrifugo

Poiché il momento d'inerzia della lamina L rispetto all'asse Oz non viene modificato al variare della coordinata s , il relativo potenziale centrifugo si mantiene costante e può quindi essere ignorato. Quanto al punto C si ha:

$$U_{cf} = \frac{m}{2}\omega^2[(C - O) \cdot \hat{e}_1]^2 = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 \sin^2 \theta.$$

Potenziale del sistema

La somma dei potenziali precedentemente calcolati fornisce il potenziale del sistema:

$$\begin{aligned} U(\theta, s) &= mgR(\cos \theta + s) + \frac{1}{2}m\omega^2 R^2(-s^2 + 2s \cos \theta) + \frac{1}{2}mR^2\omega^2 \sin^2 \theta = \\ &= mR^2\omega^2 \left(\frac{g}{R\omega^2} \cos \theta + \frac{g}{R\omega^2} s - \frac{s^2}{2} + s \cos \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) \end{aligned}$$

Integrale primo

Il sistema scleronomo soggetto a sollecitazioni attive posizionali conservative ammette un ovvio integrale primo, quello dell'energia meccanica $H = T - U$. Si ha perciò:

$$H(\theta, s, \dot{\theta}, \dot{s}) = \frac{m}{2}R^2(\dot{\theta}^2 + \dot{s}^2) - mR^2\omega^2 \left(\frac{g}{R\omega^2} \cos \theta + \frac{g}{R\omega^2} s - \frac{s^2}{2} + s \cos \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right)$$

$$\forall (\theta, s, \dot{\theta}, \dot{s}) \in \mathbb{R} \times [1, +\infty) \times \mathbb{R}^2.$$

(c) **Equilibri ordinari**

Gli equilibri ordinari del sistema si identificano con i punti critici del potenziale U nel dominio aperto $\{(\theta, s) \in \mathbb{R} \times (1, +\infty)\}$. Le derivate parziali prime di U si scrivono:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = mR^2\omega^2 \left(-\frac{g}{R\omega^2} \sin \theta - s \sin \theta + \sin \theta \cos \theta \right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial s} = mR^2\omega^2 \left(\frac{g}{R\omega^2} - s + \cos \theta \right)$$

e quindi gli equilibri ordinari sono tutte e sole le soluzioni del sistema trigonometrico:

$$\begin{cases} -\frac{g}{R\omega^2} \sin \theta - s \sin \theta + \sin \theta \cos \theta = 0 \\ \frac{g}{R\omega^2} - s + \cos \theta = 0 \end{cases}$$

la cui seconda equazione porge la relazione:

$$s = \frac{g}{R\omega^2} + \cos \theta$$

che sostituita nella prima conduce all'equazione in θ :

$$-\frac{g}{R\omega^2} \sin \theta - \frac{g}{R\omega^2} \sin \theta - \sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta = 0$$

ossia:

$$-\frac{2g}{R\omega^2} \sin \theta = 0.$$

Se ne conclude che i valori di equilibrio di θ sono:

$$\theta = 0 \quad \text{e} \quad \theta = \pi.$$

I punti critici del potenziale sono pertanto:

$$(\theta, s) = \left(0, \frac{g}{R\omega^2} + 1 \right) \quad (\theta, s) = \left(\pi, \frac{g}{R\omega^2} - 1 \right)$$

entrambi accettabili per via della condizione $g > 2R\omega^2$, che assicura i valori di equilibrio della variabile s essere entrambi maggiori di 1.

(d) **Stabilità degli equilibri ordinari**

Le proprietà di stabilità degli equilibri ordinari possono essere studiate facendo ricorso ai teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale, considerato che il sistema è scleronomo e sottoposto unicamente a sollecitazioni posizionali conservative. Le derivate parziali seconde del potenziale si scrivono:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\theta, s) = mR^2\omega^2 \left(-\frac{g}{R\omega^2} \cos \theta - s \cos \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \right)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}(\theta, s) = -mR^2\omega^2 \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial s}(\theta, s) = \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial \theta}(\theta, s) = -mR^2\omega^2 \sin \theta$$

in modo che la corrispondente matrice hessiana assume la forma:

$$H_U(\theta, s) = mR^2\omega^2 \begin{pmatrix} -\frac{g}{R\omega^2} \cos \theta - s \cos \theta + 2\cos^2 \theta - 1 & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -1 \end{pmatrix}.$$

Configurazione $(\theta, s) = \left(0, \frac{g}{R\omega^2} + 1\right)$

In questa configurazione la matrice hessiana del potenziale si riduce alla forma diagonale:

$$H_U\left(0, \frac{g}{R\omega^2} + 1\right) = mR^2\omega^2 \begin{pmatrix} -2g/R\omega^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

con autovalori entrambi negativi. La configurazione rappresenta perciò un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità è assicurata dal teorema di Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $(\theta, s) = \left(\pi, \frac{g}{R\omega^2} - 1\right)$

Nella fattispecie la matrice hessiana del potenziale vale:

$$H_U\left(\pi, \frac{g}{R\omega^2} - 1\right) = mR^2\omega^2 \begin{pmatrix} 2g/R\omega^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e presenta autovalori di segno opposto — i suoi elementi diagonali. Il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet consente di concludere che la configurazione di equilibrio è instabile.

(e) Equazioni di Lagrange

Nell'ipotesi dei vincoli ideali, le equazioni pure del moto si identificano con quelle di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = 0$$

nelle quali la lagrangiana $\mathcal{L} = T + U$ si scrive:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} R^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{s}^2) + mR^2\omega^2 \left(\frac{g}{R\omega^2} \cos \theta + \frac{g}{R\omega^2} s - \frac{s^2}{2} + s \cos \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right).$$

Da questa si deducono le espressioni:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = mR^2 \ddot{\theta} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = mR^2\omega^2 \left(-\frac{g}{R\omega^2} \sin \theta - s \sin \theta + \sin \theta \cos \theta \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \right) = mR^2 \ddot{s} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = mR^2\omega^2 \left(\frac{g}{R\omega^2} - s + \cos \theta \right)$$

che sostituite nelle equazioni di Lagrange porgono le equazioni del moto richieste:

$$mR^2 \ddot{\theta} + mR^2\omega^2 \left(\frac{g}{R\omega^2} + s - \cos \theta \right) \sin \theta = 0$$

$$mR^2\ddot{s} - mR^2\omega^2\left(\frac{g}{R\omega^2} - s + \cos\theta\right) = 0.$$

(f) **Equilibrio in** $(\theta, s) = (0, 1)$

Quella individuata da $(\theta, s) = (0, 1)$ è una configurazione di confine del sistema. Il teorema dei lavori virtuali stabilisce che la configurazione è di equilibrio se e soltanto se il lavoro virtuale delle sollecitazioni attive risulta non positivo per ogni spostamento virtuale $(\delta\theta, \delta s)$ del sistema relativo alla configurazione considerata:

$$\delta L = \frac{\partial U}{\partial \theta}(0, 1) \delta\theta + \frac{\partial U}{\partial s}(0, 1) \delta s \leq 0 \quad \forall \delta\theta \in \mathbb{R}, \quad \forall \delta s \geq 0$$

ossia per:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta}(0, 1) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial s}(0, 1) \leq 0.$$

Nella fattispecie si ha:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta}(0, 1) = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial s}(0, 1) = mgR > 0$$

per cui la condizione del teorema dei lavori virtuali non è soddisfatta. La configurazione non rappresenta un equilibrio del sistema.