

Esercizio 1

In una terna $Oxyz$ avente l'asse Oy diretto verticalmente verso l'alto, un punto materiale pesante, di massa m , è vincolato a scorrere senza attrito lungo la curva di equazione

$$y = -\frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{a^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

dove $a > 0$ indica una lunghezza caratteristica del sistema. La terna ruota con velocità angolare costante ω attorno ad Oy rispetto ad un riferimento inerziale. Determinare:

- (a) le equazioni differenziali del moto del sistema;
- (b) le configurazioni di equilibrio.

Esercizio 2

Determinare per quale valore della costante reale α la funzione scalare

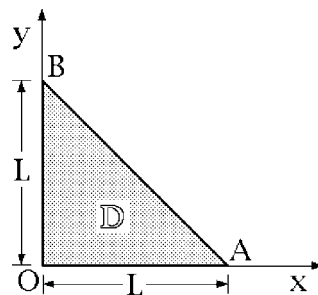
$$H(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy^2 + \alpha x^3, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

è un integrale primo per l'equazione differenziale

$$\begin{cases} \dot{y} + x = -y^2 + 3x^2 \\ \dot{x} = 2xy \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Esercizio 3

Nel piano cartesiano Oxy si considera la lamina triangolare \mathbb{D} illustrata in figura



con i lati OA e OB di uguale lunghezza L e la densità areale espressa da

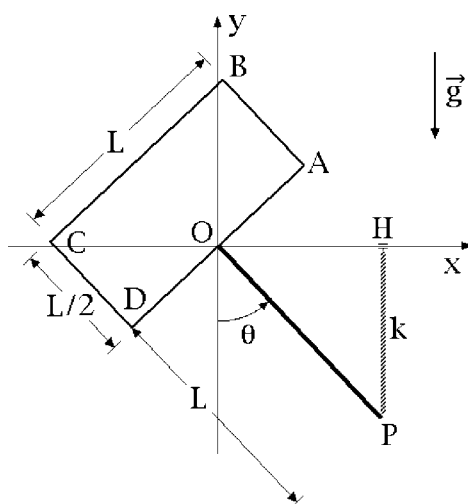
$$\sigma(x, y) = \frac{\mu}{L^3}x \quad \forall (x, y) \in \mathbb{D}.$$

Determinare:

- (a) il baricentro della lamina;
- (b) la matrice d'inerzia rispetto alla terna $Oxyz$;
- (c) il momento d'inerzia relativo alla retta di equazione $y = x$ nel piano Oxy .

Esercizio 4

Nel piano Oxy di una terna inerziale $Oxyz$ un sistema rigido è vincolato a ruotare attorno all'asse Oz . Il sistema si compone di una lamina rettangolare omogenea $ABCD$, di lati $|D - A| = L$, $|B - A| = L/2$ e massa m , e di un'asta rettilinea omogenea OP , di lunghezza L e massa m , saldata ortogonalmente alla precedente nel punto medio O del lato AD . Il sistema è pesante e una molla ideale di costante elastica k collega l'estremo P con la sua proiezione ortogonale H sull'asse orizzontale Ox . I vincoli si assumono ideali.



Si faccia uso dell'angolo θ in figura per determinare, relativamente alla terna $Oxyz$:

- (a) l'energia cinetica del sistema;
- (b) gli equilibri ordinari;
- (c) le proprietà di stabilità degli equilibri ordinari;
- (d) le equazioni pure del moto;
- (e) la quantità di moto del sistema per $\theta = \pi/2$ e $\dot{\theta} = -\sqrt{k/m}$.

Soluzione dell'esercizio 1

(a) Equazioni del moto

La parametrizzazione del punto materiale vincolato è data da

$$P(x) - O = x \hat{e}_1 + \left(-\frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{a^2} \right) \hat{e}_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

con derivata prima

$$P'(x) = \hat{e}_1 + \left(-\frac{x}{a} + \frac{3x^2}{a^2} \right) \hat{e}_2$$

e derivata seconda

$$P''(x) = \left(-\frac{1}{a} + \frac{6x}{a^2} \right) \hat{e}_2,$$

per mezzo delle quali si esprimono la velocità e l'accelerazione istantanea del punto materiale

$$\dot{P} = P'(x) \dot{x} \quad \ddot{P} = P'(x) \ddot{x} + P''(x) \dot{x}^2.$$

Nella terna $Oxyz$, non inerziale, le sollecitazioni attive alle quali è soggetto il punto materiale sono

- il peso $-mg \hat{e}_2$,
- la forza centrifuga $-m\bar{\omega} \wedge [\bar{\omega} \wedge (P - O)] = -m\omega \hat{e}_2 \wedge [\omega \hat{e}_2 \wedge (P - O)] = m\omega^2 x \hat{e}_1$
- e la forza di Coriolis $-2m\bar{\omega} \wedge \dot{P} = -2m\omega \hat{e}_2 \wedge P'(x) \dot{x}$.

L'equazione del moto viene così scritta in termini della reazione vincolare $\bar{\Phi}$ mediante il postulato delle reazioni vincolari

$$mP'(x) \ddot{x} + mP''(x) \dot{x}^2 = -mg \hat{e}_2 + m\omega^2 x \hat{e}_1 - 2m\omega \hat{e}_2 \wedge P'(x) \dot{x} + \bar{\Phi}$$

da cui la condizione di curva liscia permette di dedurre l'equazione pura del moto

$$mP'(x)^2 \ddot{x} + mP''(x) \cdot P'(x) \dot{x}^2 = (-mg \hat{e}_2 + m\omega^2 x \hat{e}_1) \cdot P'(x)$$

proiettando lungo il vettore tangente $P'(x)$ e notando che la componente tangenziale della forza di Coriolis risulta sistematicamente nulla

$$-2m\omega \hat{e}_2 \wedge P'(x) \dot{x} \cdot P'(x) = -2m\omega \dot{x} \hat{e}_2 \cdot P'(x) \wedge P'(x) = 0.$$

Basta sostituire le espressioni esplicite delle derivate $P'(x)$ e $P''(x)$ per ottenere infine

$$m \left[1 + \left(-\frac{x}{a} + \frac{3x^2}{a^2} \right)^2 \right] \ddot{x} + \frac{m}{2} \dot{x}^2 \frac{d}{dx} \left[1 + \left(-\frac{x}{a} + \frac{3x^2}{a^2} \right)^2 \right] = -mg \left(-\frac{x}{a} + \frac{3x^2}{a^2} \right) + m\omega^2 x$$

ovvero

$$m \left[1 + \left(-\frac{x}{a} + \frac{3x^2}{a^2} \right)^2 \right] \ddot{x} + m \left(-\frac{x}{a} + \frac{3x^2}{a^2} \right) \left(-\frac{1}{a} + \frac{6x}{a^2} \right) \dot{x}^2 = -mg \left(-\frac{x}{a} + \frac{3x^2}{a^2} \right) + m\omega^2 x.$$

(b) **Equilibri**

Le configurazioni di equilibrio del sistema corrispondono alle soluzioni statiche $x(t) = x_0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, dove la costante x_0 risolve l'equazione algebrica

$$0 = -mg\left(-\frac{x}{a} + \frac{3x^2}{a^2}\right) + m\omega^2 x$$

ossia

$$\left(\frac{g}{a} + \omega^2\right)x^2 - \frac{3g}{a^2}x^2 = 0.$$

Si hanno pertanto le soluzioni

$$x = 0 \quad \text{e} \quad x = \frac{a}{3}\left(1 + \frac{a\omega^2}{g}\right)$$

che individuano le corrispondenti posizioni di equilibrio del sistema.

Soluzione dell'esercizio 2

In primo luogo occorre esprimere il sistema di equazioni differenziali nella corrispondente forma normale del primo ordine, che vale

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy. \\ \dot{y} = -x - y^2 + 3x^2 \end{cases}$$

La condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione

$$H(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy^2 + \alpha x^3$$

sia un integrale primo del sistema è che la derivata di H lungo le soluzioni dell'equazione differenziale

$$\dot{H}(x, y) = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} = (x + y^2 + 3\alpha x^2)2xy + 2xy(-x + 3x^2 - y^2) = 6(\alpha + 1)x^3y$$

sia identicamente nulla in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La condizione

$$\dot{H}(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

è perciò soddisfatta se e soltanto se $\alpha = -1$.

Soluzione dell'esercizio 3

(a) Baricentro

La massa della lamina triangolare si determina per integrazione della densità areale σ sull'intero triangolo OAB :

$$\begin{aligned} m &= \int_0^L dx \int_0^{L-x} dy \frac{\mu x}{L^3} = \int_0^L dx \frac{\mu x}{L^3} (L-x) = \\ &= \frac{\mu}{L^3} \int_0^L (Lx - x^2) dx = \frac{\mu}{L^3} \left[\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^L = \frac{\mu}{L^3} \left(\frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{3} \right) = \frac{\mu}{6}. \end{aligned}$$

Il baricentro G del sistema si colloca nel piano di giacitura Oxy della lamina ed è quindi individuato da un vettore posizione della forma

$$G - O = x_G \hat{e}_1 + y_G \hat{e}_2.$$

L'ascissa del baricentro vale

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{6}{\mu} \int_0^L dx \int_0^{L-x} dy x \frac{\mu x}{L^3} = \frac{6}{L^3} \int_0^L dx \int_0^{L-x} dy x^2 = \frac{6}{L^3} \int_0^L x^2 (L-x) dx = \\ &= \frac{6}{L^3} \int_0^L (Lx^2 - x^3) dx = \frac{6}{L^3} \left[\frac{Lx^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^L = \frac{6}{L^3} \left(\frac{L^4}{3} - \frac{L^4}{4} \right) = \frac{L}{2} \end{aligned}$$

mentre per la corrispondente ordinata si ha

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{6}{\mu} \int_0^L dx \int_0^{L-x} dy y \frac{\mu x}{L^3} = \frac{6}{L^3} \int_0^L dx x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{L-x} = \\ &= \frac{3}{L^3} \int_0^L dx x (L-x)^2 = \frac{3}{L^3} \int_0^L (L^2 x + x^3 - 2Lx^2) dx = \\ &= \frac{3}{L^3} \left[\frac{L^2 x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - 2L \frac{x^3}{3} \right]_0^L = \frac{3}{L^3} \left(\frac{L^4}{2} + \frac{L^4}{4} - \frac{2}{3} L^4 \right) = \frac{L}{4}. \end{aligned}$$

Il vettore posizione del baricentro risulta perciò

$$G - O = \frac{L}{2} \hat{e}_1 + \frac{L}{4} \hat{e}_2.$$

(b) **Matrice d'inerzia**

Poiché la lamina è ubicata nel piano coordinato Oxy , la matrice d'inerzia relativa alla terna $Oxyz$ deve assumere la forma generale

$$[L_O] = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & 0 \\ L_{xy} & L_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx} + L_{yy} \end{pmatrix}$$

nella quale il momento d'inerzia relativo all'asse Ox è pari a

$$\begin{aligned} L_{xx} &= \int_0^L dx \int_0^{L-x} dy y^2 \frac{\mu x}{L^3} = \int_0^L dx \frac{\mu x}{L^3} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{L-x} = \frac{\mu}{3L^3} \int_0^L x(L-x)^3 dx = \\ &= \frac{\mu}{3L^3} \int_0^L x(L^3 - 3L^2x + 3Lx^2 - x^3) dx = \frac{\mu}{3L^3} \int_0^L (L^3x - 3L^2x^2 + 3Lx^3 - x^4) dx = \\ &= \frac{\mu}{3L^3} \left[\frac{L^3x^2}{2} - 3L^2\frac{x^3}{3} + 3L\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^L = \frac{\mu}{3L^3} L^5 \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{60} \mu L^2 \end{aligned}$$

mentre il momento d'inerzia relativo all'asse Oy vale

$$\begin{aligned} L_{yy} &= \int_0^L dx \int_0^{L-x} dy x^2 \frac{\mu x}{L^3} = \int_0^L dx \frac{\mu}{L^3} x^3(L-x) = \\ &= \frac{\mu}{L^3} \int_0^L (Lx^3 - x^4) dx = \frac{\mu}{L^3} \left[\frac{Lx^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^L = \frac{1}{20} \mu L^2 \end{aligned}$$

in modo che

$$L_{xx} + L_{yy} = \frac{1}{60} \mu L^2 + \frac{1}{20} \mu L^2 = \frac{1}{15} \mu L^2.$$

Per il prodotto d'inerzia si ha infine

$$\begin{aligned} L_{xy} &= - \int_0^L dx \int_0^{L-x} dy xy \frac{\mu x}{L^3} = - \frac{\mu}{L^3} \int_0^L dx x^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{L-x} = \\ &= - \frac{\mu}{2L^3} \int_0^L dx x^2 (L-x)^2 = - \frac{\mu}{2L^3} \int_0^L (L^2x^2 + x^4 - 2Lx^3) dx = \\ &= - \frac{\mu}{2L^3} \left[\frac{L^2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - 2L\frac{x^4}{4} \right]_0^L = - \frac{\mu}{2L^3} L^5 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \right) = - \frac{1}{60} \mu L^2 \end{aligned}$$

e la matrice d'inerzia risulta così

$$[L_0] = \mu L^2 \begin{pmatrix} 1/60 & -1/60 & 0 \\ -1/60 & 1/20 & 0 \\ 0 & 0 & 1/15 \end{pmatrix}.$$

(c) **Momento d'inerzia**

La retta di equazione $y = x$, nel piano coordinato Oxy , passa ovviamente per l'origine ed è univocamente determinata dal versore tangente

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_2.$$

Il momento d'inerzia del sistema relativo alla retta $O\hat{n}$ può allora calcolarsi per mezzo della matrice d'inerzia in $Oxyz$, tramite la nota relazione

$$I_{O\hat{n}} = \hat{n} \cdot L_O(\hat{n})$$

che nella fattispecie porge

$$\begin{aligned} I_{O\hat{n}} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \right) \mu L^2 \begin{pmatrix} 1/60 & -1/60 & 0 \\ -1/60 & 1/20 & 0 \\ 0 & 0 & 1/15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \mu L^2 (1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 1/60 & -1/60 & 0 \\ -1/60 & 1/20 & 0 \\ 0 & 0 & 1/15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \mu L^2 (1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1/30 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{60} \mu L^2. \end{aligned}$$

Soluzione dell'esercizio 4

(a) **Energia cinetica**

Il sistema rigido si compone dell'asta rettilinea OP e della lamina rettangolare $ABCD$, entrambe omogenee e di massa m ; il sistema ruota attorno all'asse fisso Oz . Il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione è dato dalla somma dei momenti d'inerzia di asta e lamina relativamente allo stesso asse. Per l'asta OP si ha

$$I_{Oz}^{OP} = \frac{mL^2}{3}$$

mentre per la lamina conviene ricorrere al teorema di Huygens-Steiner, osservando che il relativo baricentro G_1 coincide con il centro geometrico del rettangolo $ABCD$,

$$\begin{aligned} I_{Oz}^{ABCD} &= I_{G_1z}^{ABCD} + m|G_1 - O|^2 = \frac{1}{12} m[|A - B|^2 + |C - B|^2] + m\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{12} m\left(\frac{L^2}{4} + L^2\right) + \frac{mL^2}{16} = \frac{5}{48} mL^2 + \frac{mL^2}{16} = \frac{mL^2}{6}. \end{aligned}$$

Il momento d'inerzia del sistema vale pertanto

$$I_{Oz} = I_{Oz}^{OP} + I_{Oz}^{ABCD} = \frac{mL^2}{3} + \frac{mL^2}{6} = \frac{mL^2}{2}$$

e l'energia cinetica del sistema risulta

$$T = \frac{1}{2} I_{Oz} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \frac{mL^2}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{mL^2}{4} \dot{\theta}^2.$$

(b) Equilibri ordinari

Le sole sollecitazioni attive agenti sul sistema sono la forza peso e l'interazione elastica fra i punti P ed H , entrambe posizionali conservative. Di queste si devono calcolare i relativi potenziali.

Potenziale gravitazionale

Il potenziale gravitazionale del sistema può essere calcolato determinando preventivamente il baricentro G dell'intero sistema ed applicando quindi la formula generale $U_g = -2mg \hat{e}_2 \cdot (G - O)$; oppure, più semplicemente ma del tutto equivalentemente, si possono sommare i potenziali gravitazionali della lamina rettangolare omogenea $ABCD$ e dell'asta omogenea AB :

$$\begin{aligned} U_g &= -mg \hat{e}_2 \cdot (G_1 - O) - mg \hat{e}_2 \cdot (G_2 - O) = \\ &= -mg \hat{e}_2 \cdot \left(-\frac{L}{4} \sin \theta \hat{e}_1 + \frac{L}{4} \cos \theta \hat{e}_2 \right) - mg \hat{e}_2 \cdot \left(\frac{L}{2} \sin \theta \hat{e}_1 - \frac{L}{2} \cos \theta \hat{e}_2 \right) = \\ &= -\frac{1}{4} mgL \cos \theta + \frac{1}{2} mgL \cos \theta = \frac{1}{4} mgL \cos \theta. \end{aligned}$$

Potenziale elastico

Per ricavare il potenziale elastico della molla ideale PH è sufficiente inserire il vettore posizione

$$H - P = L \cos \theta \hat{e}_2$$

nella formula generale del potenziale elastico

$$U_{el} = -\frac{k}{2} |H - P|^2 = -\frac{k}{2} |L \cos \theta \hat{e}_2|^2 = -\frac{kL^2}{2} \cos^2 \theta.$$

Potenziale di sistema

Il potenziale totale è la somma dei potenziali parziali, gravitazionale ed elastico,

$$U(\theta) = U_g + U_{el} = \frac{1}{4} mgL \cos \theta - \frac{kL^2}{2} \cos^2 \theta \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

di classe C^∞ in tutta la retta reale e con derivata prima data da

$$U'(\theta) = -\frac{1}{4} mgL \sin \theta + kL^2 \sin \theta \cos \theta \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Equilibri

Il sistema è scleronomo e posizionale conservativo, a vincoli bilaterali, per cui i suoi equilibri sono tutti ordinari ed identificabili con i punti critici del potenziale U . Questi coincidono con tutte e soltanto le soluzioni in $\theta \in \mathbb{R}$ dell'equazione trigonometrica

$$-\frac{1}{4}mgL \sin \theta + kL^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

che si fattorizza nella forma equivalente

$$\sin \theta \left(\cos \theta - \frac{mg}{4kL} \right) = 0.$$

Le radici di questa equazione si ottengono annullando separatamente i due fattori che compaiono a primo membro

$$\sin \theta = 0 \quad \text{e} \quad \cos \theta - \frac{mg}{4kL} = 0;$$

dalla prima equazione seguono gli equilibri

$$\theta = 0 \quad \text{e} \quad \theta = \pi,$$

sempre definiti, mentre dalla seconda equazione vengono dedotte le ulteriori configurazioni di equilibrio ordinarie

$$\theta = \arccos\left(\frac{mg}{4kL}\right) := \theta^* \quad \text{e} \quad \theta = -\arccos\left(\frac{mg}{4kL}\right) := -\theta^*,$$

definite e distinte dalle precedenti a condizione che si abbia $mg/4kL < 1$, essendo $\theta^* \in (0, \pi/2)$.

(c) **Stabilità degli equilibri**

Per questo sistema scleronomo posizionale conservativo l'analisi di stabilità degli equilibri può essere condotta facendo ricorso ai teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale. Il primo passo, al solito, consiste nel calcolo della derivata seconda del potenziale

$$U''(\theta) = -\frac{1}{4}mgL \cos \theta + kL^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = kL^2 \left(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \frac{mg}{4kL} \cos \theta \right)$$

che va valutata nelle singole configurazioni di equilibrio.

Configurazione $\theta = 0$

In questa configurazione la derivata seconda del potenziale non presenta segno definito

$$U''(0) = kL^2 \left(1 - \frac{mg}{4kL} \right)$$

e obbliga perciò a considerare tre diversi regimi:

- per $mg/4kL < 1$ si ha $U''(0) > 0$ e l'instabilità della configurazione di equilibrio si deduce dal teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet;
- se $mg/4kL > 1$ vale invece $U''(0) < 0$, per cui l'equilibrio costituisce un massimo relativo proprio del potenziale, stabile per Lagrange-Dirichlet;
- se infine $mg/4kL = 1$ risulta $U''(0) = 0$ ed il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet certamente non è applicabile. L'analisi di stabilità, in linea di principio, potrebbe essere condotta sulla base del teorema di Lagrange-Dirichlet a patto di stabilire che la configurazione rappresenta un massimo relativo proprio del potenziale U , una proprietà non evidente dalle sole derivate prima e seconda. Lo studio del potenziale nell'intorno di $\theta = 0$ richiederebbe una approssimazione di Taylor di ordine superiore al secondo che, per brevità viene di regola omessa. Formalmente si parla così di un caso critico di stabilità.

In realtà, per le derivate terza e quarta del potenziale si hanno le espressioni

$$U^{(3)}(\theta) = kL^2 \left(-4 \sin \theta \cos \theta + \frac{mg}{4kL} \sin \theta \right)$$

$$U^{(4)}(\theta) = kL^2 \left(-4 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta + \frac{mg}{4kL} \cos \theta \right)$$

che nel caso critico e per $\theta = 0$ si riducono a

$$U^{(3)}(0) = 0 \quad U^{(4)}(0) = -3kL^2$$

e porgono per il potenziale l'approssimazione di Taylor

$$U(\theta) = U(0) + \frac{1}{4!} U^{(4)}(0) \theta^4 + o(\theta^4) = U(0) - \frac{kL^2}{8} \theta^4 + o(\theta^4) \quad (\theta \rightarrow 0)$$

dalla quale si riconosce il punto critico come un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità è assicurata dal teorema di Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $\theta = \pi$

Questa configurazione di equilibrio è instabile per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet, a causa del segno positivo della derivata seconda del potenziale

$$U''(\pi) = kL^2 \left(1 + \frac{mg}{4kL} \right) > 0.$$

Configurazione $\theta = \theta^*$

In questa configurazione la derivata seconda del potenziale è sempre strettamente negativa

$$U''(\theta^*) = kL^2 \left(\cos^2 \theta^* - \sin^2 \theta^* - \frac{mg}{4kL} \cos \theta^* \right) = -kL^2 \sin^2 \theta^* < 0$$

in quanto $\cos \theta^* = mg/4kL$ e $\theta^* \in (0, \pi/2)$, per cui risulta sempre $\sin \theta^* > 0$. L'equilibrio è dunque stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $\theta = -\theta^*$

La configurazione ha le stesse proprietà di stabilità della configurazione simmetrica $\theta = \theta^*$, dal momento che la derivata seconda del potenziale è data dalla stessa espressione

$$U''(-\theta^*) = U''(\theta^*) = -kL^2 \sin^2 \theta^* .$$

(d) Equazioni del moto

Le equazioni pure del moto si riducono alla sola equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

con la lagrangiana

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{mL^2}{4} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} mgL \cos \theta - \frac{kL^2}{2} \cos^2 \theta .$$

Da questa si deducono le relazioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{mL^2}{2} \dot{\theta} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{mL^2}{2} \ddot{\theta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= -\frac{1}{4} mgL \sin \theta + kL^2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

che sostituite nell'equazione di Lagrange porgono le equazioni del moto richieste

$$\frac{mL^2}{2} \ddot{\theta} + \frac{1}{4} mgL \sin \theta - kL^2 \sin \theta \cos \theta = 0 .$$

(e) Quantità di moto del sistema per un atto di moto assegnato

La quantità di moto è data dal prodotto fra la massa totale $2m$ del sistema e la velocità del baricentro G . La posizione del baricentro è individuata per mezzo della proprietà distributiva

$$G - O = \frac{1}{2m} \left[m \left(-\frac{P-O}{4} \right) + m \frac{P-O}{2} \right] = \frac{1}{8} (P-O) = \frac{L}{8} \sin \theta \hat{e}_1 - \frac{L}{8} \cos \theta \hat{e}_2 .$$

Si ha pertanto

$$\begin{aligned} \overline{Q} &= 2m\dot{G} = 2m\dot{\theta} \hat{e}_3 \wedge (G - O) = \\ &= 2m\dot{\theta} \hat{e}_3 \wedge \left(\frac{L}{8} \sin \theta \hat{e}_1 - \frac{L}{8} \cos \theta \hat{e}_2 \right) = \frac{mL}{4} \dot{\theta} (\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2) \end{aligned}$$

e siccome nella fattispecie è $\theta = \pi/2$ e $\dot{\theta} = -\sqrt{k/m}$, si conclude che

$$\overline{Q} = \frac{mL}{4} \left(-\sqrt{\frac{k}{m}} \right) \hat{e}_2 = -\frac{1}{4} \sqrt{mk} L \hat{e}_2 .$$