

**Esercizio 1**

Un punto materiale di massa  $m$  è vincolato a scorrere senza attrito lungo la curva di equazione parametrica

$$P(\xi) - O = a(\xi + 1)^2 \hat{e}_1 + a(\xi - 1)^2 \hat{e}_2, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

con  $a$  lunghezza positiva. Il punto è soggetto al peso — con  $\vec{g} = -g \hat{e}_2$  — e collegato all'origine  $O$  mediante una molla ideale di costante  $k$ .

- (a) Scrivere le equazioni pure del moto del sistema.
- (b) Determinare per quale valore di  $mg/ka$  si ha un equilibrio del sistema in  $\xi = 1/2$ .

**Esercizio 2**

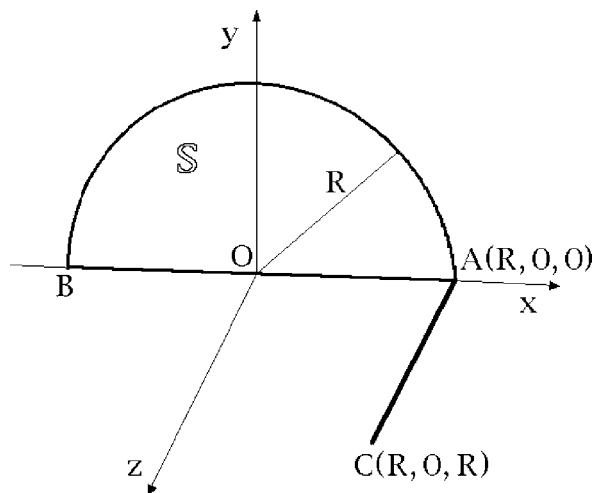
Un sistema si compone di: (i) un semidisco circolare  $\mathbb{S}$  di centro  $O$  e raggio  $R$ , ubicato nel piano  $Oxy$  di una terna ortogonale  $Oxyz$ , con il diametro  $AB$  posto sull'asse  $Ox$  e la densità areale espressa da

$$\sigma(P) = \frac{\mu}{\pi R^4} |P - O|^2 \quad \forall P \in \mathbb{S};$$

(ii) un'asta rettilinea di estremi  $A(R, 0, 0)$  e  $C(R, 0, R)$  con densità

$$\lambda(P) = \frac{\mu}{R^2} |C - P| \quad \forall P \in AC.$$

Il simbolo  $\mu$  indica una costante caratteristica avente le dimensioni di una massa.



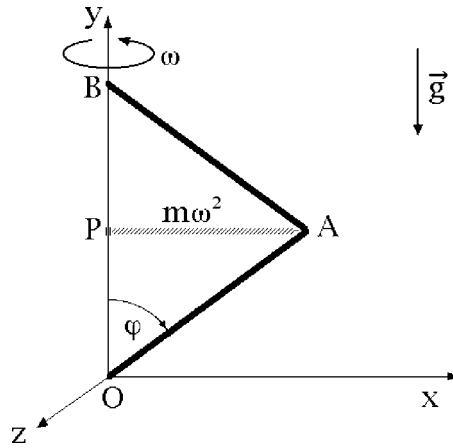
Determinare del sistema:

- (a) la massa ed il baricentro;

- (b) la matrice d'inerzia relativa a  $Oxyz$ ;
- (c) il momento d'inerzia relativo alla retta  $y = x, z = 2x$ , precisando se questa costituisce un asse principale d'inerzia in  $O$  del sistema.

**Esercizio 3**

In una terna di riferimento  $Oxyz$ , un sistema pesante composto da due aste rettilinee uguali  $OA$  e  $AB$ , ognuna di lunghezza  $L$  e massa  $m$ , è vincolato a restare nel piano  $Oxy$ . L'asta  $OA$  ruota attorno all'asse  $Oz$  ed è incernierata in  $A$  all'asta  $AB$ , il cui estremo  $B$  scorre lungo l'asse verticale  $Oy$ . La terna  $Oxyz$  ruota con velocità angolare costante  $\omega$  attorno ad  $Oy$  rispetto ad un riferimento inerziale. Una molla ideale di costante elastica  $m\omega^2$  connette  $A$  con la proiezione ortogonale  $P$  di  $A$  su  $Oy$ .



Si assumano i vincoli ideali e l'angolo  $\varphi$  in figura come parametro lagrangiano per determinare del sistema:

- (a) l'energia cinetica;
- (b) gli equilibri;
- (c) la stabilità degli equilibri;
- (d) le equazioni pure del moto;
- (e) gli equilibri di confine, qualora fosse imposto il vincolo  $|B - O| \leq L$  — ossia  $\pi/3 \leq \varphi \leq 2\pi/3$ .

## Soluzione dell'esercizio 1

### (a) Equazioni pure del moto

La parametrizzazione della curva vincolare è data dalla funzione  $C^\infty$

$$P(\xi) - O = a(\xi + 1)^2 \hat{e}_1 + a(\xi - 1)^2 \hat{e}_2 \quad , \quad \forall \xi \in \mathbb{R} ,$$

che ammette le derivate prima e seconda

$$P'(\xi) = 2a(\xi + 1) \hat{e}_1 + 2a(\xi - 1) \hat{e}_2 \quad P''(\xi) = 2a \hat{e}_1 + 2a \hat{e}_2 .$$

È evidente che la derivata prima della parametrizzazione non si annulla per alcun valore del parametro  $\xi \in \mathbb{R}$ , sicché la curva deve intendersi regolare:  $P'(\xi) \neq 0$  rappresenta il vettore tangente al supporto della curva nella posizione  $P(\xi)$  per ogni  $\xi \in \mathbb{R}$ .

Il generico moto possibile del sistema, della forma  $P(t) = P[\xi(t)]$ , con  $\xi(t)$  funzione  $C^2$  in un intervallo di tempo assegnato, ha velocità ed accelerazione istantanee:

$$\dot{P} = P'(\xi) \dot{\xi} \quad \ddot{P} = P'(\xi) \ddot{\xi} + P''(\xi) \dot{\xi}^2 .$$

Il postulato delle reazioni vincolari porge l'equazione

$$m\ddot{P} = -k[P(\xi) - O] - mg \hat{e}_2 + \vec{\Phi}$$

in cui le reazioni vincolari consentite dai vincoli, privi di attrito, possono essere tutti e soli i vettori  $\vec{\Phi}$  ortogonali alla curva vincolare nella posizione occupata dal punto materiale all'istante considerato:

$$\vec{\Phi} \cdot P'(\xi) = 0 .$$

Di conseguenza, l'equazione pura del moto si ricava proiettando l'equazione precedente lungo la direzione tangente, ossia moltiplicando scalarmente detta equazione per il vettore  $P'(\xi) \neq 0$ :

$$m\ddot{P} \cdot P'(\xi) = -k[P(\xi) - O] \cdot P'(\xi) - mg \hat{e}_2 \cdot P'(\xi) .$$

Tenuto conto dell'espressione di  $\ddot{P}$  l'equazione pura diventa

$$m|P'(\xi)|^2 \ddot{\xi} + mP''(\xi) \cdot P'(\xi) \dot{\xi}^2 = -k[P(\xi) - O] \cdot P'(\xi) - mg \hat{e}_2 \cdot P'(\xi)$$

e basta sostituire le relazioni che esprimono  $P(\xi)$  e le sue derivate per ottenere

$$m4a^2[(\xi + 1)^2 + (\xi - 1)^2] \ddot{\xi} + m4a^2(\xi + 1)(\xi - 1) \dot{\xi}^2 = -k2a^2[(\xi + 1)^3 + (\xi - 1)^3] - mg2a(\xi - 1)$$

ovvero

$$8ma^2(\xi^2 + 1) \ddot{\xi} + 8ma^2 \xi \dot{\xi}^2 = -4ka^2(\xi^3 + 3\xi) - 2mga(\xi - 1) .$$

Nell'equazione pura del moto così ottenuta può far comodo raccogliere e semplificare il fattore  $8ma^2$  in ambo i membri:

$$(\xi^2 + 1) \ddot{\xi} + \xi \dot{\xi}^2 = -\frac{k}{m} \left[ \xi^3 + 3\xi + \frac{mg}{4ka}(\xi - 1) \right] .$$

(b) **Condizione per l'equilibrio in  $\xi = 1/2$**

Affermare che in  $\xi = 1/2$  si abbia equilibrio significa richiedere che lo stato di quiete descritto da  $\xi(t) = 1/2 \forall t \in \mathbb{R}$  sia una soluzione dell'equazione pura del moto, cioè che soddisfi l'equazione algebrica:

$$0 = -\frac{k}{m} \left[ \frac{1}{8} + \frac{3}{2} + \frac{mg}{4ka} \left( -\frac{1}{2} \right) \right]$$

dalla quale si deduce che

$$\frac{mg}{ka} = 13.$$

**Soluzione dell'esercizio 2**

(a) **Massa e baricentro del sistema**

Il sistema è costituito da due corpi materiali disgiunti: il semidisco circolare  $\mathbb{S}$  e l'asta  $AC$ . La massa del sistema viene quindi determinata per additività, sommando le masse di  $\mathbb{S}$  e di  $AC$ . Analogamente, il baricentro del sistema si calcola per mezzo del teorema distributivo, come "baricentro dei baricentri" delle due parti componenti.

*Massa del semidisco*

La massa del semidisco viene calcolata per integrazione sul dominio  $\mathbb{S}$  della densità  $\sigma$ . È conveniente passare al sistema di coordinate polari piane  $(\rho, \phi)$  definito da

$$x = \rho \cos \phi \quad y = \rho \sin \phi, \quad (\rho, \phi) \in [0, R] \times [0, \pi]$$

ed esprimere la massa per mezzo dell'integrale doppio:

$$m_{\mathbb{S}} = \int_{\mathbb{S}} \sigma \, dx dy = \int_0^R d\rho \int_0^{\pi} d\phi \rho \frac{\mu}{\pi R^4} \rho^2 = \frac{\mu}{\pi R^4} \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{\pi} d\phi = \frac{\mu}{\pi R^4} \frac{R^4}{4} \pi = \frac{\mu}{4}.$$

*Baricentro del semidisco*

Il baricentro del semidisco deve collocarsi lungo l'asse  $Oy$ , che costituisce infatti un ovvio asse di simmetria della superficie materiale  $\mathbb{S}$ . Dunque

$$G_{\mathbb{S}} - O = y_{\mathbb{S}} \hat{e}_2$$

con

$$\begin{aligned} y_{\mathbb{S}} &= \frac{1}{m_{\mathbb{S}}} \int_{\mathbb{S}} y \sigma \, dx dy = \frac{4}{\mu} \int_0^R d\rho \int_0^{\pi} d\phi \rho \frac{\mu}{\pi R^4} \rho^2 \rho \sin \phi = \\ &= \frac{4}{\pi R^4} \int_0^R \rho^4 d\rho \int_0^{\pi} \sin \phi \, d\phi = \frac{4}{\pi R^4} \frac{R^5}{5} [-\cos \phi]_0^{\pi} = \frac{8}{5\pi} R \end{aligned}$$

per cui

$$G_{\mathbb{S}} - O = \frac{8}{5\pi} R \hat{e}_2.$$

*Massa dell'asta*

L'asta  $AC$  è parametrizzabile come

$$P(z) - O = R \hat{e}_1 + z \hat{e}_3, \quad z \in [0, R]$$

per cui la massa della curva si esprime mediante l'integrale curvilineo

$$m_a = \int_{AC} \lambda ds = \int_0^R \frac{\mu}{R^2} (R - z) dz = \frac{\mu}{R^2} \left[ -\frac{(R - z)^2}{2} \right]_0^R = \frac{\mu}{2}.$$

*Baricentro dell'asta*

Per la proprietà dell'involuppo convesso, il baricentro  $G_a$  dell'asta deve collocarsi lungo il segmento  $AC$ , sicché risulta:

$$G_a - O = R \hat{e}_1 + z_a \hat{e}_3$$

dove

$$\begin{aligned} z_a &= \frac{1}{m_a} \int_{AC} z \lambda ds = \frac{2}{\mu} \int_0^R z \frac{\mu}{R^2} (R - z) dz = \frac{2}{R^2} \int_0^R (Rz - z^2) dz = \\ &= \frac{2}{R^2} \left[ \frac{Rz^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_0^R = \frac{2}{R^2} \left( \frac{R^3}{2} - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{R}{3}. \end{aligned}$$

Pertanto:

$$G_a - O = R \hat{e}_1 + \frac{R}{3} \hat{e}_3.$$

*Massa del sistema*

La massa del sistema si ricava come somma delle masse di semidisco ed asta:

$$m = m_{\mathbb{S}} + m_a = \frac{\mu}{4} + \frac{\mu}{2} = \frac{3}{4}\mu.$$

*Baricentro del sistema*

Il teorema distributivo applicato al sistema semidisco-asta porge per il baricentro del sistema il vettore posizione:

$$\begin{aligned} G - O &= \frac{m_{\mathbb{S}}(G_{\mathbb{S}} - O) + m_a(G_a - O)}{m_{\mathbb{S}} + m_a} = \frac{4}{3\mu} \left[ \frac{\mu}{4} \frac{8}{5\pi} \hat{e}_2 + \frac{\mu}{2} \left( R \hat{e}_1 + \frac{R}{3} \hat{e}_3 \right) \right] = \\ &= \frac{4}{3} \left( \frac{2}{5\pi} \hat{e}_2 + \frac{1}{2} \hat{e}_1 + \frac{1}{6} \hat{e}_3 \right) R = \left( \frac{2}{3} \hat{e}_1 + \frac{8}{15\pi} \hat{e}_2 + \frac{2}{9} \hat{e}_3 \right) R. \end{aligned}$$

(b) **Matrice d'inerzia relativa a  $Oxyz$**

Per calcolare la matrice d'inerzia del sistema rispetto alla terna  $Oxyz$  assegnata conviene ricorrere alla proprietà additiva e scrivere la matrice incognita come somma delle matrici d'inerzia, relativamente alla stessa terna  $Oxyz$ , del semidisco e dell'asta  $AC$ .

*Semidisco circolare*

Il semidisco è collocato nel piano coordinato  $Oxy$  e la corrispondente matrice d'inerzia deve perciò assumere la forma

$$[L_O^S] = \begin{pmatrix} L_{xx}^S & L_{xy}^S & 0 \\ L_{xy}^S & L_{yy}^S & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx}^S + L_{yy}^S \end{pmatrix}$$

in cui compaiono i soli momenti  $L_{xx}^S$ ,  $L_{yy}^S$  e l'unico prodotto d'inerzia non banale  $L_{xy}^S$ . Il momento d'inerzia relativo all'asse coordinato  $Ox$  si calcola immediatamente da definizione:

$$\begin{aligned} L_{xx}^S &= \int_0^R d\rho \int_0^\pi d\phi \rho \frac{\mu}{\pi R^4} \rho^2 (\rho \sin \phi)^2 = \frac{\mu}{\pi R^4} \int_0^\pi \sin^2 \phi d\phi \int_0^R \rho^5 d\rho = \\ &= \frac{\mu}{\pi R^4} \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\phi}{2} d\phi \frac{R^6}{6} = \frac{\mu R^2}{12\pi} \left[ \phi - \frac{\sin 2\phi}{2} \right]_0^\pi = \frac{\mu R^2}{12\pi} \pi = \frac{1}{12} \mu R^2 \end{aligned}$$

mentre una analoga integrazione diretta fornisce il momento d'inerzia rispetto al secondo asse coordinato  $Oy$ :

$$\begin{aligned} L_{yy}^S &= \int_0^R d\rho \int_0^\pi d\phi \rho \frac{\mu}{\pi R^4} \rho^2 (\rho \cos \phi)^2 = \frac{\mu}{\pi R^4} \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2\phi}{2} d\phi \int_0^R \rho^5 d\rho = \\ &= \frac{\mu}{\pi R^4} \frac{1}{2} \left[ \phi + \frac{\sin 2\phi}{2} \right]_0^\pi \frac{R^6}{6} = \frac{1}{12} \mu R^2. \end{aligned}$$

Quanto all'unico prodotto d'inerzia di interesse, si ha la relazione:

$$\begin{aligned} L_{xy}^S &= - \int_0^R d\rho \int_0^\pi d\phi \rho \frac{\mu}{\pi R^4} \rho^2 \rho \cos \phi \rho \sin \phi = \\ &= - \frac{\mu}{\pi R^4} \int_0^R \rho^5 d\rho \int_0^\pi \sin \phi \cos \phi d\phi = - \frac{\mu}{\pi R^4} \frac{R^6}{6} \left[ \frac{\sin^2 \phi}{2} \right]_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

che si sarebbe potuta peraltro stabilire direttamente con argomenti di simmetria. *È infatti evidente che l'asse  $Oy$  è di simmetria per il semidisco circolare*, in quanto tutti i punti di  $S$  disposti simmetricamente rispetto a detto asse si collocano altresì alla stessa distanza dal

centro  $O$  e presentano dunque lo stesso valore della densità  $\sigma$  — che è funzione soltanto della distanza dal centro. D'altra parte, è ben noto dalle proprietà dell'operatore d'inerzia, che il piano di simmetria — e giacitura —  $Oxy$  costituisce un piano principale d'inerzia in  $O$  e che l'asse  $Oz$ , a tale piano perpendicolare, individua per definizione un asse principale d'inerzia in  $O$  del semidisco. Non rimane che applicare il teorema di esistenza delle terne principali d'inerzia — conseguente alla simmetria dell'operatore d'inerzia — per concludere che l'asse  $Ox$ , ortogonale ai precedenti, deve rappresentare un terzo asse principale d'inerzia in  $O$  per  $\mathbb{S}$ . La terna  $Oxyz$  è pertanto principale d'inerzia in  $O$  per il semidisco, come il precedente calcolo di  $L_{xy}$  ha messo in evidenza. La matrice d'inerzia del semidisco in  $Oxyz$  assume dunque la forma diagonale seguente:

$$[L_O^{\mathbb{S}}] = \mu R^2 \begin{pmatrix} 1/12 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

### Asta $AC$

La collocazione dell'asta  $AC$  nel piano coordinato  $Oxz$  autorizza ad assumere per la relativa matrice d'inerzia in  $Oxyz$  la forma:

$$[L_O^a] = \begin{pmatrix} L_{xx}^a & 0 & L_{xz}^a \\ 0 & L_{xx}^a + L_{zz}^a & 0 \\ L_{xz}^a & 0 & L_{zz}^a \end{pmatrix}.$$

Più precisamente, la matrice risulta:

$$[L_O^a] = \mu R^2 \begin{pmatrix} 1/12 & 0 & -1/6 \\ 0 & 7/12 & 0 \\ -1/6 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

come è immediato verificare applicando la definizione dei vari elementi di matrice. Questi sono calcolati come integrali curvilinei, assumendo per l'asta  $AC$  una parametrizzazione della forma:

$$P(z) - O = R\hat{e}_1 + z\hat{e}_3 \quad , \quad \forall z \in [0, R]$$

ed una densità lineare

$$\lambda(z) = \frac{\mu}{R^2}(R - z) \quad , \quad \forall z \in [0, R].$$

Si ottiene così per il momento d'inerzia relativo a  $Ox$  l'espressione:

$$\begin{aligned} L_{xx}^a &= \int_0^R dz \frac{\mu}{R^2}(R - z)z^2 = \frac{\mu}{R^2} \int_0^R (Rz^2 - z^3) dz = \\ &= \frac{\mu}{R^2} \left[ \frac{Rz^3}{3} - \frac{z^4}{4} \right]_0^R = \frac{\mu}{R^2} \left( \frac{R^4}{3} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{1}{12} \mu R^2 \end{aligned}$$

mentre una relazione analoga porge il momento d'inerzia rispetto all'asse  $Oz$ :

$$L_{zz}^a = \int_0^R dz \frac{\mu}{R^2} (R-z) R^2 = \mu \int_0^R (R-z) dz = \mu \left[ -\frac{(R-z)^2}{2} \right]_0^R = \frac{1}{2} \mu R^2.$$

Il prodotto d'inerzia residuo  $L_{xz}^a$  vale infine:

$$\begin{aligned} L_{xz}^a &= - \int_0^R dz \frac{\mu}{R^2} (R-z) Rz = -\frac{\mu}{R} \int_0^R (Rz - z^2) dz = \\ &= -\frac{\mu}{R} \left[ \frac{Rz^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_0^R = -\frac{\mu}{R} \left( \frac{R^3}{2} - \frac{R^3}{3} \right) = -\frac{1}{6} \mu R^2. \end{aligned}$$

*Sistema*

La somma delle matrici d'inerzia calcolate conduce alla matrice d'inerzia del sistema:

$$\begin{aligned} [L_O] &= [L_O^a] + [L_O^S] = \mu R^2 \begin{pmatrix} 1/12 & 0 & -1/6 \\ 0 & 7/12 & 0 \\ -1/6 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} + \mu R^2 \begin{pmatrix} 1/12 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} = \\ &= \mu R^2 \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & -1/6 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ -1/6 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**(c) Momento d'inerzia relativo alla retta  $y=x, z=2x$**

La retta di equazione  $y = x, z = 2x$ , passa chiaramente per l'origine  $O$  e la sua direzione è individuata dal vettore tangente:

$$\vec{t} = \hat{e}_1 + \hat{e}_2 + 2\hat{e}_3,$$

derivata della parametrizzazione

$$P(x) - O = x\hat{e}_1 + x\hat{e}_2 + 2x\hat{e}_3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Alla retta è così associato il versore tangente:

$$\hat{n} = \frac{\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + 2\hat{e}_3}{|\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + 2\hat{e}_3|} = \frac{\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + 2\hat{e}_3}{\sqrt{6}}$$

ed il momento d'inerzia del sistema rispetto alla retta  $O\hat{n}$  è dato dalla nota relazione matriciale

$$\begin{aligned} I_{O\hat{n}} &= \hat{n} \cdot L_O(\hat{n}) = \frac{1}{6} (1 \ 1 \ 2) \mu R^2 \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & -1/6 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ -1/6 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{6} \mu R^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{6} - \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} + \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \mu R^2 \left( -\frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{7}{3} \right) = \frac{17}{36} \mu R^2. \end{aligned}$$

Si ricorda che la retta è un asse principale d'inerzia in  $O$  se e soltanto se il vettore  $\vec{t}$  è autovettore dell'operatore d'inerzia in  $O$ . Nella fattispecie si ha:

$$[L_O] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mu R^2 \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & -1/6 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ -1/6 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mu R^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} + \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \mu R^2 \begin{pmatrix} -1/6 \\ 2/3 \\ 7/6 \end{pmatrix}$$

e il risultato *non è un vettore parallelo a  $\vec{t}$* , in quanto:

$$\begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1/6 & 2/3 & 7/6 \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}\hat{e}_1 - \frac{3}{2}\hat{e}_2 + \frac{5}{6}\hat{e}_3 \neq 0.$$

Si conclude che la retta assegnata *non costituisce* un asse principale d'inerzia in  $O$  per il sistema.

### Soluzione dell'esercizio 3

#### (a) Energia cinetica del sistema

Conviene calcolare l'energia cinetica del sistema valendosi della proprietà additiva: si calcolano separatamente le energie cinetiche dell'asta  $OA$  e dell'asta  $AB$  per poi sommare i risultati parziali così ottenuti.

##### *Energia cinetica dell'asta $OA$*

L'asta  $OA$  ruota attorno all'asse fisso  $Oz$ , mantenendosi nel piano coordinato  $Oxy$ , sicché l'espressione della sua energia cinetica si scrive

$$T_{OA} = \frac{1}{2} I_{Oz}^{OA} |\vec{\omega}_{OA}|^2$$

con

$$I_{Oz}^{OA} = \frac{1}{3} mL^2 \quad \text{e} \quad \vec{\omega}_{OA} = -\dot{\varphi} \hat{e}_3$$

per cui, sostituendo, si ottiene

$$T_{OA} = \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{6} mL^2 \dot{\varphi}^2.$$

##### *Energia cinetica dell'asta $AB$*

L'asta in oggetto è priva di punti fissi ed il calcolo della sua energia cinetica richiede il ricorso al teorema di König:

$$T_{AB} = \frac{m}{2} \dot{G}^2 + \frac{1}{2} I_{Gz}^{AB} |\vec{\omega}_{AB}|^2$$

dove il baricentro  $G$  dell'asta viene individuato dal vettore posizione

$$G - O = \frac{L}{2} \sin \varphi \hat{e}_1 + \frac{3}{2}L \cos \varphi \hat{e}_2$$

per cui la velocità istantanea dello stesso punto si scrive

$$\dot{G} = L \left( \frac{1}{2} \cos \varphi \hat{e}_1 - \frac{3}{2} \sin \varphi \hat{e}_2 \right) \dot{\varphi}$$

ed ha modulo quadrato

$$|\dot{G}|^2 = L^2 \left( \frac{1}{4} \cos^2 \varphi + \frac{9}{4} \sin^2 \varphi \right) \dot{\varphi}^2 = L^2 \frac{1 + 8 \sin^2 \varphi}{4} \dot{\varphi}^2$$

mentre il momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrale  $Gz$ , parallelo a  $Oz$ , e la velocità angolare istantanea del pezzo rigido sono dati dalle relazioni:

$$I_{Gz}^{AB} = \frac{mL^2}{12} \quad \text{e} \quad \vec{\omega}_{AB} = \dot{\varphi} \hat{e}_3,$$

essendo  $\hat{A}\hat{B}O = \hat{B}\hat{O}A = \varphi$  nel triangolo isoscele  $OAB$ . Pertanto:

$$\begin{aligned} T_{AB} &= \frac{1}{2} mL^2 \frac{1 + 8 \sin^2 \varphi}{4} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \frac{mL^2}{12} \dot{\varphi}^2 = \\ &= \frac{1}{2} mL^2 \left( \frac{1}{4} + 2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{12} \right) \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} mL^2 \left( \frac{1}{3} + 2 \sin^2 \varphi \right) \dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

*Energia cinetica del sistema*

La proprietà di additività porge l'energia cinetica richiesta

$$T = T_{OA} + T_{AB} = \frac{1}{2} mL^2 \left( \frac{2}{3} + 2 \sin^2 \varphi \right) \dot{\varphi}^2.$$

### (b) Equilibri

Il sistema in esame è scleronomo, a vincoli bilaterali ideali e soggetto unicamente a sollecitazioni attive di natura posizionale conservativa. I suoi equilibri — tutti ordinari — si identificano pertanto con tutti e soli i punti critici del potenziale del sistema, che consisterà nella somma dei potenziali parziali relativi alle forze peso, all'interazione elastica fra i punti  $A$  e  $P$ , alle forze centrifughe. Si osservi che, al solito, le forze di Coriolis risultano sistematicamente ortogonali al piano fisso  $Oxy$  ed hanno quindi componente lagrangiana identicamente nulla: esse non giocano alcun ruolo nel determinare il comportamento del sistema, non comparando nelle equazioni di Lagrange.

*Potenziale gravitazionale*

Il potenziale gravitazionale è a sua volta la somma dei potenziali gravitazionali parziali delle due aste, prontamente determinabili considerando le ordinate dei rispettivi baricentri — i punti medi dei segmenti  $OA$  ed  $AB$ , rispettivamente:

$$U_g = U_g^{OA} + U_g^{AB} = -mg \frac{L}{2} \cos \varphi - mg \frac{3}{2}L \cos \varphi = -2mgL \cos \varphi.$$

### Potenziale elastico

All'interazione elastica fra il punto  $A$  e l'applicazione ortogonale  $P$  di questo sull'asse verticale  $Oy$  è associato il potenziale elastico

$$U_{\text{el}} = -\frac{k}{2}|A - P|^2 = -\frac{m\omega^2}{2}|L \sin \varphi \hat{e}_1|^2 = -\frac{1}{2}mL^2\omega^2 \sin^2 \varphi$$

essendo  $k = m\omega^2$  la costante elastica della molla e  $A - P = L \sin \varphi \hat{e}_1$ .

### Potenziale centrifugo

Le due aste, avendo un estremo sull'asse di rotazione  $Oy$  e formando con questo uno stesso angolo  $\varphi$ , forniscono un uguale contributo al potenziale centrifugo:

$$U_{\text{cf}} = 2U_{\text{cf}}^{OA} = 2 \frac{\omega^2}{2} \int_0^L (\xi \sin \varphi)^2 \frac{m}{L} d\xi = \frac{1}{3}mL^2\omega^2 \sin^2 \varphi.$$

### Potenziale del sistema

La somma dei potenziali gravitazionale, elastico e centrifugo testé calcolati fornisce il potenziale del sistema:

$$U(\varphi) = U_{\text{g}} + U_{\text{el}} + U_{\text{cf}} = -2mgL \cos \varphi - \frac{1}{6}mL^2\omega^2 \sin^2 \varphi.$$

### Equilibri (ordinari)

Gli equilibri — ordinari — del sistema scleronomo a vincoli bilaterali ideali sono i punti critici del potenziale  $U$ , vale a dire le soluzioni dell'equazione trigonometrica ottenuta uguagliando a zero la derivata parziale prima

$$U'(\varphi) = \frac{\partial U}{\partial \varphi}(\varphi) = 2mgL \sin \varphi - \frac{1}{3}mL^2\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{3}mL^2\omega^2 \sin \varphi \left( \frac{6g}{L\omega^2} - \cos \varphi \right)$$

ossia

$$\sin \varphi (\lambda - \cos \varphi) = 0,$$

essendosi posto, per brevità,  $\lambda = 6g/L\omega^2 > 0$ . Soluzioni dell'equazione di equilibrio si hanno per  $\sin \varphi = 0$ :

$$\varphi = 0 \quad , \quad \varphi = \pi$$

e sono definite per qualsiasi valore dei coefficienti numerici caratteristici del sistema. Ulteriori equilibri ricorrono per  $\cos \varphi = \lambda$ :

$$\varphi = \arccos \lambda = \varphi^* \quad , \quad \varphi = -\arccos \lambda = -\varphi^*$$

e risultano definiti e distinti dai precedenti a condizione che si abbia  $\lambda < 1$ .

(c) **Stabilità degli equilibri**

In termini del parametro d'ordine  $\lambda = 6g/L\omega^2$  il potenziale del sistema si esprime nella forma

$$U(\varphi) = \frac{1}{3}mL^2\omega^2\left(-\lambda \cos \varphi - \frac{1}{2}\sin^2\varphi\right)$$

con derivata prima

$$U'(\varphi) = \frac{1}{3}mL^2\omega^2(\lambda \sin \varphi - \sin \varphi \cos \varphi)$$

e derivata seconda

$$U''(\varphi) = \frac{1}{3}mL^2\omega^2(\lambda \cos \varphi - \cos^2\varphi + \sin^2\varphi).$$

L'analisi di stabilità può condursi mediante i teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale, esaminando il segno della derivata seconda del potenziale in tutti gli equilibri ordinari calcolati.

*Configurazione  $\varphi = 0$*

In questa posizione di equilibrio la derivata seconda del potenziale si riduce all'espressione

$$U''(0) = \frac{1}{3}mL^2\omega^2(\lambda - 1)$$

che non ha segno definito, per cui si rende necessario distinguere tre diversi casi:

- se  $\lambda > 1$ , risulta  $U''(0) > 0$  e l'instabilità della configurazione è assicurata dal teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet;
- per  $\lambda < 1$  si ha invece  $U''(0) < 0$ , condizione che comporta il ricorrere in  $\varphi = 0$  di un massimo relativo proprio del potenziale, stabile per Lagrange-Dirichlet;
- se infine  $\lambda = 1$ , si verifica la condizione critica  $U''(0) = 0$ . In tal caso si ha:

$$U''(\varphi) = \frac{1}{3}mL^2\omega^2(\cos \varphi - \cos 2\varphi)$$

$$U^{(3)}(\varphi) = \frac{1}{3}mL^2\omega^2(-\sin \varphi + 2\sin 2\varphi)$$

$$U^{(4)}(\varphi) = \frac{1}{3}mL^2\omega^2(-\cos \varphi + 4\cos 2\varphi)$$

per cui:

$$U^{(3)}(0) = 0 \quad U^{(4)}(0) = \frac{1}{3}mL^2\omega^2 \cdot 3 = mL^2\omega^2.$$

Si conclude che la configurazione  $\varphi = 0$  costituisce un minimo relativo proprio del potenziale. Non è dunque possibile applicare né Lagrange-Dirichlet né l'inversione parziale di Lagrange-Dirichlet — in effetti l'instabilità dell'equilibrio si può provare con altri metodi, quali ad esempio l'analisi qualitativa di Weierstrass.

Configurazione  $\varphi = \pi$

Nella fattispecie la derivata seconda del potenziale ha sempre segno negativo

$$U''(\pi) = -\frac{1}{3}mL^2\omega^2(\lambda + 1) < 0$$

per cui la configurazione è un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità segue al solito dal teorema di Lagrange-Dirichlet.

Configurazioni  $\varphi = +\varphi^*$  e  $\varphi = -\varphi^*$

In queste due configurazioni simmetriche la derivata seconda del potenziale assume lo stesso valore positivo

$$U''(\pm\varphi^*) = \frac{1}{3}mL^2\omega^2(\lambda \cos \varphi^* - \cos^2 \varphi^* + \sin^2 \varphi^*) = \frac{1}{3}mL^2\omega^2 \sin^2 \varphi^* > 0$$

in quanto  $\cos \varphi^* = \lambda < 1$ . I due equilibri sono instabili per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

#### (d) Equazioni pure del moto

Le equazioni pure del moto sono quelle di Lagrange, e precisamente

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$$

con lagrangiana

$$\mathcal{L} = T + U = \frac{1}{2}mL^2 \left( \frac{2}{3} + 2\sin^2 \varphi \right) \dot{\varphi}^2 - 2mgL \cos \varphi - \frac{1}{6}mL^2\omega^2 \sin^2 \varphi.$$

Si hanno dunque le relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} &= mL^2 \left( \frac{2}{3} + 2\sin^2 \varphi \right) \dot{\varphi} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= mL^2 \left( \frac{2}{3} + 2\sin^2 \varphi \right) \ddot{\varphi} + 4mL^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}^2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= 2mL^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}^2 + 2mgL \sin \varphi - \frac{1}{3}mL^2\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned}$$

e pertanto

$$mL^2 \left( \frac{2}{3} + 2\sin^2 \varphi \right) \ddot{\varphi} + 2mL^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}^2 - 2mgL \sin \varphi + \frac{1}{3}mL^2\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

è l'equazione del moto cercata.

(e) **Equilibri di confine**

Le configurazioni di confine del sistema si hanno per  $\varphi = \pi/3$  e per  $\varphi = 2\pi/3$ . L'unica componente lagrangiana delle forze attive, tutte posizionali conservative, è data dalla derivata parziale prima del potenziale

$$Q_\varphi(\varphi) = U'(\varphi) = \frac{1}{3}mL^2\omega^2 \sin \varphi(\lambda - \cos \varphi).$$

*Configurazione di confine  $\varphi = \pi/3$*

La condizione di equilibrio è data dal teorema dei lavori virtuali, che in questa configurazione di confine assume la forma

$$Q_\varphi(\pi/3) \delta\varphi \leq 0 \quad \forall \delta\varphi \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Q_\varphi(\pi/3) \leq 0$$

ossia

$$Q_\varphi(\pi/3) = \frac{1}{3}mL^2\omega^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) \leq 0.$$

Ne deriva che la configurazione in esame è di equilibrio se e soltanto se  $\lambda \leq 1/2$ .

*Configurazione di confine  $\varphi = 2\pi/3$*

La condizione di equilibrio diventa in questo caso

$$Q_\varphi(2\pi/3) \delta\varphi \leq 0 \quad \forall \delta\varphi \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Q_\varphi(2\pi/3) \geq 0$$

ovvero

$$Q_\varphi(2\pi/3) = \frac{1}{3}mL^2\omega^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \lambda + \frac{1}{2} \right) \geq 0$$

ed è quindi sempre verificata —  $\forall \lambda > 0$ . In  $\varphi = 2\pi/3$  si ha comunque una configurazione di equilibrio di confine per il sistema.