

**Esercizio 1**

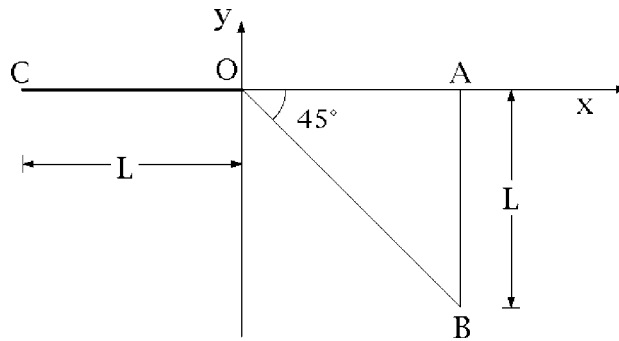
Un corpo rigido si compone di una piastra triangolare  $OAB$ , collocata nel piano  $Oxy$  di una terna  $Oxyz$ , e di un'asta  $OC$ , posta lungo l'asse  $Ox$  della stessa terna (vedi figura). La densità di  $OAB$  risulta

$$\sigma(P) = \frac{\mu}{L^4} |P - O|^2 \quad \forall P \in OAB$$

mentre per l'asta si ha

$$\lambda(P) = \frac{\mu}{L^3} |C - P|^2 \quad \forall P \in OC,$$

essendo  $\mu$  una massa caratteristica del sistema.

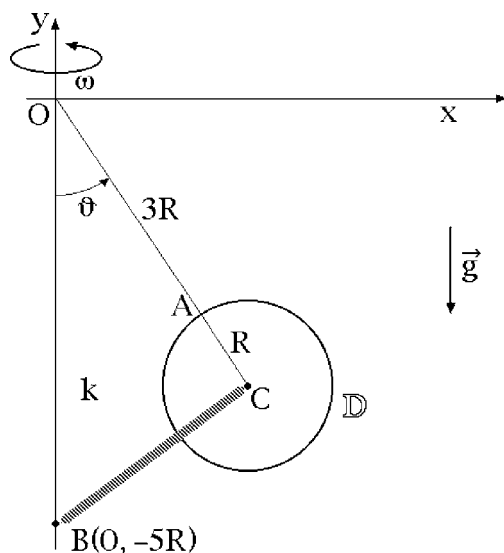


Determinare del sistema:

- (a) la massa e la posizione del baricentro relativamente alla terna  $Oxyz$ ;
- (b) la matrice d'inerzia in  $Oxyz$ ;
- (c) il momento d'inerzia rispetto alla retta  $AB$ ;
- (d) l'energia cinetica e il momento angolare in  $O$  rispetto al riferimento in cui  $O$  è un punto fisso e la velocità angolare istantanea vale  $-\omega \hat{e}_1 + \omega \hat{e}_2 - 2\omega \hat{e}_3$ , con  $\omega > 0$ ;
- (e) se la retta  $OB$  è un asse principale d'inerzia in  $O$ .

## Esercizio 2

Nel piano  $Oxy$  di una terna  $Oxyz$  è vincolato a muoversi il sistema pesante composto da un'asta  $OA$ , di lunghezza  $3R$  e massa trascurabile, e da un disco omogeneo  $\mathbb{D}$  di massa  $m$ , centro  $C$  e raggio  $R$ , saldati ortogonalmente nel punto  $A$  del bordo di  $\mathbb{D}$ . La terna  $Oxyz$  ruota attorno all'asse verticale  $Oy$  con velocità angolare costante  $\omega$ . Una molla ideale di costante elastica  $k$  congiunge il centro  $C$  con il punto fisso  $B(0, -5R)$  dell'asse  $Oy$ .



Assunti i vincoli ideali, si utilizzi l'angolo  $\vartheta \in \mathbb{R}$  in figura per determinare del sistema:

- gli equilibri relativi a  $Oxyz$ ;
- la stabilità degli equilibri;
- l'energia cinetica relativa a  $Oxyz$ ;
- le equazioni pure del moto;
- nell'ipotesi che si abbia  $\vartheta \in [0, \pi/3]$ , la condizione affinché  $\vartheta = \pi/3$  sia un equilibrio.

## Soluzione dell'esercizio 1

### (a) Massa e baricentro

La proprietà additiva consente di calcolare la massa del sistema come somma delle masse delle parti costituenti, la piastra triangolare  $OAB$  e l'asta rettilinea  $OC$ . Analogamente, il baricentro del sistema viene determinato per mezzo del teorema distributivo, calcolando il "baricentro dei baricentri" delle parti che compongono il sistema.

#### Massa della lamina $OAB$

La massa della piastra è data dall'integrale doppio della densità  $\sigma$  sulla regione triangolare  $OAB$  del piano coordinato  $Oxy$ :

$$\begin{aligned} m_{OAB} &= \int_0^L dx \int_{-x}^0 dy \frac{\mu}{L^4} (x^2 + y^2) = \frac{\mu}{L^4} \int_0^L dx \int_{-x}^0 dy (x^2 + y^2) = \\ &= \frac{\mu}{L^4} \int_0^L dx \left[ x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=-x}^0 = \frac{\mu}{L^4} \int_0^L \left( x^3 + \frac{x^3}{3} \right) dx = \frac{\mu}{L^4} \int_0^L \frac{4}{3} x^3 dx = \frac{\mu}{3}. \end{aligned}$$

#### Massa dell'asta $OC$

L'asta  $OC$  ammette la semplice parametrizzazione regolare

$$P - O = x \hat{e}_1, \quad x \in [-L, 0],$$

per cui

$$\lambda(P) = \frac{\mu}{L^3} (C - P)^2 = \frac{\mu}{L^3} (-L \hat{e}_1 - x \hat{e}_1)^2 = \frac{\mu}{L^3} (L + x)^2, \quad x \in [-L, 0],$$

e la massa della curva materiale si scrive

$$m_{OC} = \int_{-L}^0 dx \frac{\mu}{L^3} (L + x)^2 dx = \frac{\mu}{L^3} \int_{-L}^0 (L + x)^2 dx = \frac{\mu}{L^3} \left[ \frac{(L + x)^3}{3} \right]_{-L}^0 = \frac{\mu}{L^3} \frac{L^3}{3} = \frac{\mu}{3}.$$

#### Massa del sistema

È data dalla somma delle masse della lamina e dell'asta:

$$m = m_{OAB} + m_{OC} = \frac{\mu}{3} + \frac{\mu}{3} = \frac{2}{3} \mu.$$

#### Baricentro della lamina $OAB$

La lamina piana si colloca nel piano coordinato  $Oxy$ , che deve quindi contenere anche il relativo baricentro  $G_{OAB}$ . Il vettore posizione di questo assume quindi la forma:

$$G_{OAB} - O = x_{OAB} \hat{e}_1 + y_{OAB} \hat{e}_2.$$

L'ascissa viene valutata per mezzo dell'integrale normalizzato

$$\begin{aligned} x_{OAB} &= \frac{1}{m_{OAB}} \int_0^L dx \int_{-x}^0 dy x \frac{\mu}{L^4} (x^2 + y^2) = \frac{3}{\mu} \frac{\mu}{L^4} \int_0^L dx \int_{-x}^0 dy (x^3 + xy^2) = \\ &= \frac{3}{L^4} \int_0^L dx \left[ x^3 y + x \frac{y^3}{3} \right]_{y=-x}^0 = \frac{3}{L^3} \int_0^L \left( x^4 + \frac{x^4}{3} \right) dx = \frac{3}{L^3} \frac{4}{3} \int_0^L x^4 dx = \frac{4}{5} L \end{aligned}$$

mentre una relazione analoga porge l'ordinata

$$\begin{aligned} y_{OAB} &= \frac{1}{m_{OAB}} \int_0^L dx \int_{-x}^0 dy y \frac{\mu}{L^4} (x^2 + y^2) = \frac{3}{\mu} \frac{\mu}{L^4} \int_0^L dx \int_{-x}^0 dy (x^2 y + y^3) = \\ &= \frac{3}{L^4} \int_0^L dx \left[ x^2 \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} \right]_{-x}^0 = \frac{3}{L^4} \int_0^L \left( -\frac{x^4}{2} - \frac{x^4}{4} \right) dx = \\ &= \frac{3}{L^4} \int_0^L \left( -\frac{3}{4} x^4 \right) dx = -\frac{9}{4} \frac{1}{L^4} \int_0^L x^4 dx = -\frac{9}{20} L. \end{aligned}$$

In definitiva

$$G_{OAB} - O = \frac{4}{5} L \hat{e}_1 - \frac{9}{20} L \hat{e}_2.$$

*Baricentro dell'asta OC*

Dal teorema dell'involuppo convesso segue che il baricentro dell'asta  $OC$  deve localizzarsi lungo l'asse coordinato  $Ox$ , per cui

$$G_{OC} - O = x_{OC} \hat{e}_1.$$

L'ascissa del baricentro è data da

$$\begin{aligned} x_{OC} &= \frac{1}{m_{OC}} \int_{-L}^0 dx x \frac{\mu}{L^3} (L+x)^2 = \frac{3}{\mu} \frac{\mu}{L^3} \int_{-L}^0 x (L+x)^2 dx = \\ &= \frac{3}{L^3} \int_{-L}^0 (L^2 x + 2Lx^2 + x^3) dx = \frac{3}{L^3} \left[ L^2 \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} Lx^3 + \frac{x^4}{4} \right]_{-L}^0 = \\ &= \frac{3}{L^3} \left( -\frac{L^4}{2} + \frac{2}{3} L^4 - \frac{L^4}{4} \right) = -\frac{L}{4}, \end{aligned}$$

per cui

$$G_{OC} - O = -\frac{L}{4} \hat{e}_1.$$

*Baricentro del sistema*

Per il baricentro  $G$  del sistema il teorema distributivo porge il vettore posizione

$$\begin{aligned} G - O &= \frac{m_{OAB}(G_{OAB} - O) + m_{OC}(G_{OC} - O)}{m_{OAB} + m_{OC}} = \frac{1}{2}(G_{OAB} - O) + \frac{1}{2}(G_{OC} - O) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}L\hat{e}_1 - \frac{9}{20}L\hat{e}_2\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{L}{4}\hat{e}_1\right) = \\ &= \frac{2}{5}L\hat{e}_1 - \frac{9}{40}L\hat{e}_2 - \frac{1}{8}L\hat{e}_1 = \frac{11}{40}L\hat{e}_1 - \frac{9}{40}L\hat{e}_2. \end{aligned}$$

**(b) Matrice d'inerzia in Oxyz**

La matrice d'inerzia del sistema rispetto alla terna  $Oxyz$  è la somma delle matrici d'inerzia relative all'asta  $OC$  e alla piastra  $OAB$ , matrici che devono essere calcolate separatamente.

*Matrice d'inerzia dell'asta*

L'asta si sviluppa lungo l'asse  $Ox$  della terna di riferimento e deve quindi presentare una matrice d'inerzia dalla struttura molto semplice

$$[L_O^{OC}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{yy}^{OC} & 0 \\ 0 & 0 & L_{zz}^{OC} \end{pmatrix} = \mu L^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/30 & 0 \\ 0 & 0 & 1/30 \end{pmatrix}.$$

Si ha infatti che

$$\begin{aligned} L_{yy}^{OC} &= \int_{-L}^0 dx x^2 \frac{\mu}{L^3} (L+x)^2 = \frac{\mu}{L^3} \int_{-L}^0 x^2 (L+x)^2 dx = \\ &= \frac{\mu}{L^3} \int_{-L}^0 (L^2 x^2 + 2Lx^3 + x^4) dx = \frac{\mu}{L^3} \left[ L^2 \frac{x^3}{3} + 2L \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]_{-L}^0 = \\ &= \frac{\mu}{L^3} \left( L^2 \frac{L^3}{3} - 2L \frac{L^4}{4} + \frac{L^5}{5} \right) = \mu L^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{30} \mu L^2 \end{aligned}$$

mentre

$$L_{zz}^{OC} = L_{yy}^{OC} = \frac{1}{30} \mu L^2$$

per l'evidente simmetria.

*Matrice d'inerzia della piastra*

La piastra triangolare  $OAB$  presenta la seguente matrice d'inerzia rispetto alla terna  $Oxyz$ :

$$[L_O^{OAB}] = \begin{pmatrix} L_{xx}^{OAB} & L_{xy}^{OAB} & 0 \\ L_{xy}^{OAB} & L_{yy}^{OAB} & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx}^{OAB} + L_{yy}^{OAB} \end{pmatrix} = \mu L^2 \begin{pmatrix} 4/45 & 1/8 & 0 \\ 1/8 & 2/9 & 0 \\ 0 & 0 & 14/45 \end{pmatrix}.$$

In effetti, il momento d'inerzia relativo all'asse  $Ox$  si scrive

$$\begin{aligned}
 L_{xx}^{OAB} &= \int_0^L dx \int_{-x}^0 dy y^2 \frac{\mu}{L^4} (x^2 + y^2) = \frac{\mu}{L^4} \int_0^L dx \int_{-x}^0 dy (x^2 y^2 + y^4) = \\
 &= \frac{\mu}{L^4} \int_0^L dx \left[ x^2 \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right]_{y=-x}^0 = \frac{\mu}{L^4} \int_0^L \left( \frac{x^5}{3} + \frac{x^5}{5} \right) dx = \\
 &= \frac{\mu}{L^4} \int_0^L \frac{8}{15} x^5 dx = \frac{8}{15} \frac{\mu}{L^4} \frac{L^6}{6} = \frac{4}{45} \mu L^2
 \end{aligned}$$

mentre quello rispetto all'asse  $Oy$  vale

$$\begin{aligned}
 L_{yy}^{OAB} &= \int_0^L dx \int_{-x}^0 dy x^2 \frac{\mu}{L^4} (x^2 + y^2) = \frac{\mu}{L^4} \int_0^L dx \int_{-x}^0 dy (x^4 + x^2 y^2) = \\
 &= \frac{\mu}{L^4} \int_0^L dx \left[ x^4 y + x^2 \frac{y^3}{3} \right]_{y=-x}^0 = \frac{\mu}{L^4} \int_0^L \left( x^5 + \frac{x^5}{3} \right) dx = \\
 &= \frac{\mu}{L^4} \int_0^L \frac{4}{3} x^5 dx = \frac{\mu}{L^4} \frac{4}{3} \frac{L^6}{6} = \frac{2}{9} \mu L^2
 \end{aligned}$$

e la somma dei due rappresenta il momento relativo al terzo asse coordinato  $Oz$ :

$$L_{xx}^{OAB} + L_{yy}^{OAB} = \frac{4}{45} \mu L^2 + \frac{2}{9} \mu L^2 = \frac{14}{45} \mu L^2.$$

L'unico prodotto d'inerzia non banale è invece dato dall'integrale doppio:

$$\begin{aligned}
 L_{xy}^{OAB} &= - \int_0^L dx \int_{-x}^0 dy xy \frac{\mu}{L^4} (x^2 + y^2) = - \frac{\mu}{L^4} \int_0^L dx \int_{-x}^0 dy (x^3 y + xy^3) = \\
 &= - \frac{\mu}{L^4} \int_0^L dx \left[ x^3 \frac{y^2}{2} + x \frac{y^4}{4} \right]_{y=-x}^0 = - \frac{\mu}{L^4} \int_0^L \left( -\frac{x^5}{2} - \frac{x^5}{4} \right) dx = \\
 &= \frac{\mu}{L^4} \int_0^L \frac{3}{4} x^5 dx = \frac{3}{4} \frac{\mu}{L^4} \frac{L^6}{6} = \frac{1}{8} \mu L^2.
 \end{aligned}$$

*Matrice d'inerzia del sistema*

Per ottenere la matrice d'inerzia del sistema non rimane che sommare le matrici d'inerzia parziali precedentemente ricavate:

$$\begin{aligned}
 [L_O] &= [L_O^{OC}] + [L_O^{OAB}] = \mu L^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/30 & 0 \\ 0 & 0 & 1/30 \end{pmatrix} + \mu L^2 \begin{pmatrix} 4/45 & 1/8 & 0 \\ 1/8 & 2/9 & 0 \\ 0 & 0 & 14/45 \end{pmatrix} = \\
 &= \mu L^2 \begin{pmatrix} 4/45 & 1/8 & 0 \\ 1/8 & 23/90 & 0 \\ 0 & 0 & 31/90 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

**(c) Momento d'inerzia rispetto alla retta AB**

Fra i momenti d'inerzia del sistema relativi agli assi paralleli  $Oy$  e  $Gy$  il teorema di Huygens-Steiner stabilisce la relazione

$$I_{Oy} = I_{Gy} + \frac{2}{3}\mu x_G^2$$

mentre i momenti d'inerzia relativi ad  $Ay = AB$  e  $Gy$  sono legati da

$$I_{Ay} = I_{Gy} + \frac{2}{3}\mu(x_A - x_G)^2.$$

Sottraendo membro a membro le due equazioni si ottiene allora

$$I_{Ay} - I_{Oy} = \frac{2}{3}\mu(x_A - x_G)^2 - \frac{2}{3}\mu x_G^2$$

ossia

$$I_{Ay} - I_{yy} = \frac{2}{3}\mu\left(L - \frac{11}{40}L\right)^2 - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{11}{40}L\right)^2$$

e quindi

$$I_{Ay} - \frac{23}{90}\mu L^2 = \frac{2}{3}\mu\left(\frac{29^2}{1600} - \frac{121}{1600}\right)L^2 = \frac{2}{3}\mu L^2 \frac{720}{1600} = \frac{3}{10}\mu L^2.$$

Ne deriva che il momento d'inerzia rispetto alla retta  $AB$  vale

$$I_{Ay} = \frac{23}{90}\mu L^2 + \frac{3}{10}\mu L^2 = \frac{50}{90}\mu L^2 = \frac{5}{9}\mu L^2.$$

**(d) Energia cinetica e momento angolare in O**

Nel sistema di riferimento in cui  $O$  è un punto fisso e la velocità angolare istantanea vale

$$\vec{\omega} = -\omega \hat{e}_1 + \omega \hat{e}_2 - 2\omega \hat{e}_3$$

il momento angolare del sistema rigido si scrive

$$\vec{K}_O = K_1 \hat{e}_1 + K_2 \hat{e}_2 + K_3 \hat{e}_3$$

con le componenti  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  definite dalla relazione matriciale

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} &= \mu L^2 \begin{pmatrix} 4/45 & 1/8 & 0 \\ 1/8 & 23/90 & 0 \\ 0 & 0 & 31/90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega \\ \omega \\ -2\omega \end{pmatrix} = \\ &= \mu L^2 \omega \begin{pmatrix} -\frac{4}{45} + \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} + \frac{23}{90} \\ -\frac{31}{45} \end{pmatrix} = \mu L^2 \omega \begin{pmatrix} 13/360 \\ 47/360 \\ -31/45 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si ha pertanto

$$\vec{K}_O = \mu L^2 \omega \left( \frac{13}{360} \hat{e}_1 + \frac{47}{360} \hat{e}_2 - \frac{31}{45} \hat{e}_3 \right).$$

Per quanto riguarda l'energia cinetica del sistema, sempre nello stesso riferimento, si può applicare la relazione

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{K}_O = \frac{1}{2} \omega (-\hat{e}_1 + \hat{e}_2 - 2\hat{e}_3) \cdot \mu L^2 \omega \left( \frac{13}{360} \hat{e}_1 + \frac{47}{360} \hat{e}_2 - \frac{31}{45} \hat{e}_3 \right) \\ &= \frac{1}{2} \mu L^2 \omega^2 \left( -\frac{13}{360} + \frac{47}{360} + \frac{62}{45} \right) = \frac{53}{72} \mu L^2 \omega^2. \end{aligned}$$

**(e) La retta  $OB$  è un asse principale d'inerzia in  $O$  del sistema?**

Per verificare se la retta  $OB$  costituisce un asse principale d'inerzia in  $O$  del sistema occorre stabilire se il vettore

$$B - O = a \hat{e}_1 - a \hat{e}_2 \quad \iff \quad \frac{B - O}{a} = \hat{e}_1 - \hat{e}_2$$

è un autovettore dell'operatore d'inerzia in  $O$ . Per far questo si calcola il prodotto matriciale

$$\begin{aligned} [L_O] \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \mu L^2 \begin{pmatrix} 4/45 & 1/8 & 0 \\ 1/8 & 23/90 & 0 \\ 0 & 0 & 31/90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \mu L^2 \omega \begin{pmatrix} \frac{4}{45} - \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} - \frac{23}{90} \\ 0 \end{pmatrix} = \mu L^2 \omega \begin{pmatrix} -\frac{13}{360} \\ -\frac{47}{360} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

il cui risultato finale non è un vettore proporzionale a  $(B - O)/a = \hat{e}_1 - \hat{e}_2$ . Pertanto:

$$L_O\left(\frac{B - O}{a}\right) \neq \lambda \frac{B - O}{a}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

e si deve così concludere che l'asse  $OB$  non costituisce un asse principale d'inerzia in  $O$  del sistema.

## Soluzione dell'esercizio 2

### (a) Equilibri relativi a $Oxyz$

Il sistema è scleronomo, posizionale e conservativo, a vincoli bilaterali ideali. Le sollecitazioni attive agenti su di esso hanno infatti tutte natura posizionale e conservativa: il peso, l'interazione elastica fra i punti  $C$  e  $B$ , il sistema delle forze centrifughe, mentre è molto facile convincersi che le forze di Coriolis non comportano alcun effetto sui moti del sistema, dal momento che la loro componente generalizzata risulta identicamente nulla. Gli equilibri del sistema sono dunque caratterizzabili come tutti e soli i punti critici del potenziale del sistema, a sua volta esprimibile come somma dei potenziali parziali delle forze peso, elastiche e centrifughe.

#### Forze peso

Ricordando che l'asta  $OA$  è per ipotesi di massa trascurabile, al sistema delle forze peso si associa il potenziale

$$U_g = -mg\hat{e}_2 \cdot (C - O) = 4mgR \cos \vartheta$$

il centro geometrico  $C$  del disco coincidendo con il centro di simmetria e dunque con il baricentro del disco stesso:

$$C - O = 4R \sin \vartheta \hat{e}_1 - 4R \cos \vartheta \hat{e}_2.$$

#### Interazione elastica

Gli estremi della molla ideale sono i punti  $B$  e  $C$  individuati dai vettori posizione

$$B - O = -5R\hat{e}_2 \quad C - O = 4R \sin \vartheta \hat{e}_1 - 4R \cos \vartheta \hat{e}_2$$

cui corrisponde il vettore posizione relativa

$$C - B = 4R \sin \vartheta \hat{e}_1 + R(5 - 4 \cos \vartheta) \hat{e}_2.$$

Ne segue che il potenziale elastico assume la forma

$$\begin{aligned} U_{el} &= -\frac{k}{2}|C - B|^2 = -\frac{k}{2}R^2 [16 \sin^2 \vartheta + (5 - 4 \cos \vartheta)^2] = \\ &= -\frac{kR^2}{2}(16 \sin^2 \vartheta + 25 + 16 \cos^2 \vartheta - 40 \cos \vartheta) = 20kR^2 \cos \vartheta + \text{costante}. \end{aligned}$$

### Forze centrifughe

Anche in questo caso il contributo dell'asta  $OA$  può essere ignorato, dato che la sua massa è per ipotesi trascurabile. Il potenziale centrifugo del disco viene quindi calcolato vantaggiosamente ricorrendo al teorema di Huygens-Steiner

$$\begin{aligned} U_{\text{cf}} &= \frac{\omega^2}{2} I_{Oy} = \frac{\omega^2}{2} [I_{Cy} + m[(C - O) \cdot \hat{e}_1]^2] = \\ &= \frac{\omega^2}{2} \left[ \frac{mR^2}{4} + m(4R \sin \vartheta)^2 \right] = 8mR^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta + \text{costante}. \end{aligned}$$

Si osservi che il momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrale  $Cy$  è indipendente dall'angolo di rotazione  $\vartheta$  e fornisce dunque un contributo additivo e costante, che nel potenziale centrifugo può essere completamente ignorato.

### Forze di Coriolis

Benchè la cosa sia banale, è opportuno verificare formalmente che le forze di Coriolis agenti sul disco — il contributo relativo all'asta è comunque trascurabile al pari della massa corrispondente — hanno componente lagrangiana nulla e non determinano perciò alcun effetto dinamico o statico sul sistema. A questo scopo, basta osservare che la componente generalizzata delle forze di Coriolis applicate a  $\mathbb{D}$  è espressa formalmente da

$$Q_{\vartheta}^{\text{Cor}} = \sum_{P_i \in \mathbb{D}} -2m_i \omega \hat{e}_2 \wedge \dot{P}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial \vartheta}$$

per cui basta applicare la proprietà di circolarità del prodotto misto e ricordare che  $\dot{P}_i = \partial P / \partial \vartheta \dot{\vartheta}$ , per ottenere

$$Q_{\vartheta}^{\text{Cor}} = \sum_{P_i \in \mathbb{D}} -2m_i \omega \hat{e}_2 \cdot \dot{P}_i \wedge \frac{\partial P_i}{\partial \vartheta} = -2 \sum_{P_i \in \mathbb{D}} m_i \omega \hat{e}_2 \cdot \frac{\partial P_i}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} \wedge \frac{\partial P_i}{\partial \vartheta} = \sum_{P_i \in \mathbb{D}} 0 = 0$$

come affermato.

### Potenziale totale

L'influenza delle forze di Coriolis porta ad affermare la natura posizionale conservativa del sistema scleronomo, il cui potenziale è dato dalla somma dei potenziali gravitazionale, elastico e centrifugo appena calcolati:

$$\begin{aligned} U(\vartheta) &= U_g + U_{\text{el}} + U_{\text{cf}} = 4mgR \cos \vartheta + 20kR^2 \cos \vartheta + 8mR^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta = \\ &= 4R(mg + 5kR) \cos \vartheta + 8mR^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta. \end{aligned}$$

### Equilibri

Le configurazioni di equilibrio del sistema, scleronomo, posizionale conservativo e a vincoli bilaterali ideali, sono identificabili con i punti critici del potenziale  $U$  e si ricavano perciò ponendo uguale a zero la derivata prima

$$\begin{aligned} U'(\vartheta) &= -4R(mg + 5kR) \sin \vartheta + 16mR^2 \omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = \\ &= 16mR^2 \omega^2 \sin \vartheta \left[ -\frac{4R(mg + 5kR)}{16mR^2 \omega^2} + \cos \vartheta \right] \end{aligned}$$

ovvero risolvendo il sistema di equazioni trigonometriche

$$16mR^2\omega^2 \sin \vartheta \left[ \cos \vartheta - \frac{mg + 5kR}{4mR\omega^2} \right] = 0.$$

Le soluzioni

$$\vartheta = 0 \quad \text{e} \quad \vartheta = \pi$$

si ottengono ponendo  $\sin \vartheta = 0$  e sono quindi definite quali che siano i valori delle costanti caratteristiche  $k$ ,  $R$ ,  $m$ ,  $g$  e  $\omega$ ; per contro, la condizione

$$\cos \vartheta - \frac{mg + 5kR}{4mR\omega^2} = 0$$

implica le ulteriori configurazioni di equilibrio

$$\vartheta = \arccos\left(\frac{mg + 5kR}{4mR\omega^2}\right) := \vartheta^* \quad \text{e} \quad \vartheta = -\arccos\left(\frac{mg + 5kR}{4mR\omega^2}\right) = -\vartheta^*,$$

definite e distinte dalle precedenti a patto che si abbia

$$\frac{mg + 5kR}{4mR\omega^2} < 1.$$

Giova notare che queste nuove configurazioni di equilibrio “asimmetriche” insorgono quando  $|\omega|$  risulta abbastanza grande.

### (b) Analisi di stabilità degli equilibri

L’analisi di stabilità degli equilibri può essere sviluppata in modo soddisfacente facendo uso del teorema di Lagrange-Dirichlet e della relativa inversione parziale. A questo scopo occorre calcolare la derivata seconda del potenziale:

$$U''(\vartheta) = -4R(mg + 5kR) \cos \vartheta + 16mR^2\omega^2(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)$$

che deve essere valutata in ciascuna configurazione di equilibrio.

*Configurazione  $\vartheta = 0$*

In questa configurazione la derivata seconda del potenziale non assume un segno definito

$$U''(0) = -4R(mg + 5kR) + 16mR^2\omega^2 = 16mR^2\omega^2 \left(1 - \frac{mg + 5kR}{4mR\omega^2}\right)$$

ed è perciò necessario distinguere tre casi:

- se  $(mg + 5kR)/4mR\omega^2 > 1$  si ha  $U''(0) < 0$  e la configurazione si riconosce essere un massimo relativo proprio del potenziale, stabile per Lagrange-Dirichlet;
- per  $(mg + 5kR)/4mR\omega^2 < 1$  risulta invece  $U''(0) > 0$  e l’equilibrio è instabile per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet;

- se infine  $(mg + 5kR)/4mR\omega^2 = 1$ , vale  $U''(0) = 0$  e ricorre un caso critico di stabilità, che per brevità non verrà esaminato.

*Configurazione  $\vartheta = \pi$*

La configurazione risulta instabile per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet, dal momento che la derivata seconda assume costantemente segno positivo

$$U''(\pi) = 4R(mg + 5kR) + 16mR^2\omega^2 > 0.$$

*Configurazioni  $\vartheta = \vartheta^*$  e  $\vartheta = -\vartheta^*$*

Le caratteristiche di stabilità di queste due configurazioni di equilibrio sono identiche a causa dell'evidente simmetria del potenziale, che implica lo stesso valore della derivata seconda in  $\vartheta = \vartheta^*$  e  $\vartheta = -\vartheta^*$ . Si ha così l'espressione

$$\begin{aligned} U''(\vartheta^*) = U''(-\vartheta^*) &= -4R(mg + 5kR) \cos \vartheta^* + 16mR^2\omega^2 (\cos^2 \vartheta^* - \sin^2 \vartheta^*) = \\ &= 16mR^2\omega^2 \left( -\frac{mg + 5kR}{4mR\omega^2} \cos \vartheta^* + \cos^2 \vartheta^* - \sin^2 \vartheta^* \right) \end{aligned}$$

che si semplifica drasticamente ricordando la relazione  $\cos \vartheta^* = (mg + 5kR)/4mR\omega^2$ :

$$U''(\vartheta^*) = -16mR^2\omega^2 \sin^2 \vartheta^* < 0.$$

La conclusione è che, quando definiti, gli equilibri asimmetrici  $\vartheta = \vartheta^*$  e  $\vartheta = -\vartheta^*$  costituiscono due massimi relativi propri del potenziale, la cui stabilità è assicurata dal teorema di Lagrange-Dirichlet.

Da sottolineare il fatto che in questo sistema scleronomo posizionale conservativo la conservazione dell'energia meccanica *esclude* che gli equilibri stabili possano risultare attrattivi, e dunque asintoticamente stabili: la stabilità dell'equilibrio è comunque semplice, non asintotica.

**(c) Energia cinetica relativa a  $Oxyz$**

L'energia cinetica del sistema si riduce al contributo del solo disco  $\mathbb{D}$ , visto che l'asta  $OA$  deve assumersi di massa trascurabile. Relativamente alla terna  $Oxyz$  il moto del disco avviene nel piano coordinato  $Oxy$  e si può assumere senza punti fissi. Notando che in una terna baricentrale il moto del disco avviene con asse fisso  $Cz$  e angolo di rotazione  $\vartheta$ , il teorema di König si scrive

$$T = \frac{m}{2} \dot{C}^2 + \frac{1}{2} I_{Cz}^{\mathbb{D}} |\dot{\vartheta} \hat{e}_3|^2$$

con  $I_{Cz}^{\mathbb{D}} = mR^2/2$  e

$$C - O = 4R \sin \vartheta \hat{e}_1 - 4R \cos \vartheta \hat{e}_2$$

$$\dot{C} = (4R \cos \vartheta \hat{e}_1 + 4R \sin \vartheta \hat{e}_2) \dot{\vartheta}$$

$$\dot{C}^2 = (4R \cos \vartheta \hat{e}_1 + 4R \sin \vartheta \hat{e}_2)^2 \dot{\vartheta}^2 = 16R^2 \dot{\vartheta}^2$$

per cui l'energia cinetica risulta

$$T = \frac{m}{2} 16R^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \dot{\vartheta}^2 = 8mR^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{4} mR^2 \dot{\vartheta}^2 = \frac{33}{4} mR^2 \dot{\vartheta}^2.$$

Allo stesso risultato si perviene assumendo il disco in moto rotatorio attorno all'asse fisso  $Oz$  — l'origine  $O$  è infatti un punto dello spazio solidale al disco *fisso in  $Oxyz$* . Il momento d'inerzia di  $\mathbb{D}$  rispetto ad  $Oz$  vale infatti, per Huygens-Steiner,

$$I_{Oz}^{\mathbb{D}} = I_{Cz}^{\mathbb{D}} + m|C - O|^2 = \frac{mR^2}{2} + m(4R)^2 = \frac{mR^2}{2} + 16mR^2 = \frac{33}{2} mR^2$$

e la corrispondente energia cinetica si riduce a

$$T = \frac{1}{2} I_{Oz}^{\mathbb{D}} |\dot{\vartheta} \hat{e}_3|^2 = \frac{1}{2} \frac{33}{2} mR^2 \dot{\vartheta}^2 = \frac{33}{4} mR^2 \dot{\vartheta}^2$$

in accordo con l'espressione già calcolata.

**(d) Equazioni pure del moto**

Il sistema è olonomo, a vincoli ideali, posizionale e conservativo. L'equazione del moto si identifica quindi con la sola equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} = 0$$

di lagrangiana

$$\mathcal{L} = T + U = \frac{33}{4} mR^2 \dot{\vartheta}^2 + 4R(mg + 5kR) \cos \vartheta + 8mR^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta$$

dalla quale si deducono le ovvie relazioni

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} \right) = \frac{33}{2} mR^2 \ddot{\vartheta}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} = -4R(mg + 5kR) \sin \vartheta + 16mR^2 \omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta.$$

L'equazione pura del moto vale pertanto

$$\frac{33}{2} mR^2 \ddot{\vartheta} + 4R(mg + 5kR) \sin \vartheta - 16mR^2 \omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = 0.$$

**(e) Configurazioni di equilibrio in presenza di vincoli unilaterali**

Nell'ipotesi che al sistema siano imposti vincoli di tipo unilaterale in modo che il parametro lagrangiano possa assumere tutti e soli i valori compresi nell'intervallo limitato e chiuso

$$\vartheta \in [0, \pi/3],$$

il sistema ammette precisamente due configurazioni di confine, per  $\vartheta = 0$  e per  $\vartheta = \pi/3$ . Il teorema dei lavori virtuali prevede che in  $\vartheta = \pi/3$  si abbia equilibrio se e soltanto se

$$Q_{\vartheta}(\pi/3) \delta\vartheta \leq 0 \quad \forall \delta\vartheta \leq 0$$

ossia

$$Q_{\vartheta}(\pi/3) \geq 0.$$

Nella fattispecie si ha

$$\begin{aligned} Q_{\vartheta}(\pi/3) &= U'(\pi/3) = -4R(mg + 5kR) \sin \vartheta + 16mR^2\omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \Big|_{\vartheta=\pi/3} = \\ &= -4R(mg + 5kR) \frac{\sqrt{3}}{2} + 16mR^2\omega^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} = \\ &= -2R(mg + 5kR)\sqrt{3} + 4mR^2\omega^2\sqrt{3} = 4mR^2\omega^2\sqrt{3} \left(1 - \frac{mg + 5kR}{2mR\omega^2}\right) \end{aligned}$$

e la condizione di equilibrio diventa pertanto

$$4mR^2\omega^2\sqrt{3} \left(1 - \frac{mg + 5kR}{2mR\omega^2}\right) \geq 0$$

ossia

$$\frac{mg + 5kR}{2mR\omega^2} \leq 1. \quad (.1)$$

Come l'intuizione suggerisce, la configurazione di confine  $\vartheta = \pi/3$  risulta di equilibrio quando le forze centrifughe sono abbastanza intense da prevalere sul peso e sull'azione elastica agente in  $C$  verso  $B$ , in modo da spingere il disco contro il confine  $\vartheta = \pi/3$  — vedi figura. Ciò significa che  $|\omega|$  deve risultare sufficientemente grande, in accordo con la relazione (.1)