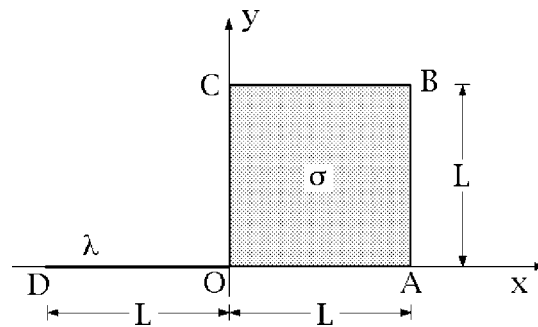


**Esercizio 1**

Nel piano coordinato  $Oxy$  di una terna cartesiana  $Oxyz$  si considera il sistema rigido illustrato in figura, composto da una lamina quadrata  $OABC$  di lato  $L$  e da un'asta  $OD$  di lunghezza  $L$ . Le densità, rispettivamente lineare e superficiale, di asta e lamina sono date dalle espressioni

$$\lambda(x) = -\frac{m}{L^2}x \quad \forall x \in [-L, 0] \quad \sigma(x, y) = \frac{m}{L^4}xy \quad \forall (x, y) \in [0, L]^2.$$

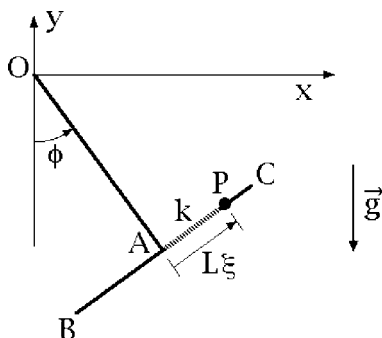


Si chiede di determinare:

- la posizione del baricentro del sistema rispetto ad  $Oxyz$ ;
- la matrice d'inerzia del sistema rispetto alla terna  $Oxyz$ ;
- il momento d'inerzia rispetto all'asse  $OB$ ;
- l'energia cinetica qualora  $O$  sia punto fisso del sistema e la velocità angolare valga  $\omega\hat{e}_1 + 2\omega\hat{e}_3$ , con  $\omega > 0$ ;
- la velocità istantanea del punto  $A$ , nella stessa ipotesi.

## Esercizio 2

Un telaio rigido è costituito da due aste omogenee uguali  $OA$  e  $BC$ , di massa  $m$  e lunghezza  $L$ , saldate ortogonalmente l'una all'altra in modo che l'estremo  $A$  coincida con il punto medio di  $BC$ . Sulla seconda asta è vincolato a scorrere un punto materiale  $P$  di massa  $3m$ , la cui posizione lungo l'asta è individuata dalla coordinata lagrangiana  $\xi \in [-1/2, 1/2]$  illustrata in figura. Il telaio si muove nel piano  $Oxy$  di una terna cartesiana, con asse  $Oy$  verticale, mantenendo fisso nell'origine l'estremo  $O$ . Il sistema è pesante e una molla ideale di costante elastica  $k$  congiunge  $P$  con il punto  $A$ .



Indicato con  $\phi$  l'angolo che l'asta  $OA$  forma con la verticale condotta da  $O$  verso il basso, determinare, nell'ipotesi di vincoli ideali:

- l'energia cinetica;
- gli equilibri ordinari, con le relative condizioni di esistenza;
- le proprietà di stabilità secondo Liapunov degli equilibri ordinari;
- le equazioni di Lagrange del moto;
- se la configurazione  $(\phi, \xi) = (0, 1/2)$  è un equilibrio di confine.

## Soluzione dell'esercizio 1

### (a) Posizione del baricentro

Per individuare la posizione del baricentro è opportuno trattare il sistema come composto dall'asta  $\mathbb{A} = DO$  e dalla lamina quadrata  $\mathbb{L} = OABC$  e calcolare separatamente massa e baricentro delle singole parti componenti, applicando poi il teorema distributivo.

#### Massa e baricentro dell'asta

La massa dell'asta  $\mathbb{A}$  si ricava integrando la densità di linea  $\lambda$  sul segmento  $OD$

$$m_1 = \int_{-L}^0 \lambda(x) dx = \int_{-L}^0 \left(-\frac{m}{L^2}x\right) dx = -\frac{m}{L^2} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-L}^0 = \frac{m}{2}.$$

Il baricentro di  $\mathbb{A}$  deve collocarsi sull'asse di simmetria  $Ox$  e sarà perciò individuato da un vettore posizione della forma

$$G_1 - O = x_1 \hat{e}_1$$

in cui l'ascissa  $x_1$  viene calcolata per mezzo della definizione di baricentro

$$x_1 = \frac{1}{m_1} \int_{-L}^0 \lambda(x) x dx = \frac{2}{m} \int_{-L}^0 \left(-\frac{m}{L^2}\right) x^2 dx = -\frac{2}{L^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L}^0 = -\frac{2}{3}L.$$

Pertanto:

$$G_1 - O = -\frac{2}{3}L \hat{e}_1.$$

#### Massa e baricentro della lamina

La massa della lamina è data dall'integrale della densità di superficie  $\sigma$  sull'area del quadrato  $\mathbb{L}$ :

$$m_2 = \int_0^L dx \int_0^L dy \sigma(x, y) = \int_0^L dx \int_0^L dy \frac{m}{L^4} xy = \frac{m}{L^4} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^L = \frac{m}{4}.$$

Per il baricentro  $G_2$  della lamina ci si aspetta una espressione del tipo

$$G_2 - O = x_2 \hat{e}_1 + y_2 \hat{e}_2$$

in quanto  $Oxy$  costituisce un ovvio piano di simmetria del sistema. L'ascissa  $x_2$  vale

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{m_2} \int_0^L dx \int_0^L dy \sigma(x, y) x = \frac{4}{m} \int_0^L dx \int_0^L dy \frac{m}{L^4} x^2 y = \\ &= \frac{4}{L^4} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^L = \frac{4}{L^4} \frac{L^3}{3} \frac{L^2}{2} = \frac{2}{3}L \end{aligned}$$

e coincide con l'ordinata  $y_2$  perché  $y = x$  è un asse di simmetria, come si deduce immediatamente dall'identità

$$\sigma(x, y) = \sigma(y, x) \quad \forall (x, y) \in [0, L]^2.$$

Si ha, conseguentemente,

$$G_2 - O = \frac{2}{3}L \hat{e}_1 + \frac{2}{3}L \hat{e}_2.$$

La posizione del baricentro  $G$  del sistema segue infine dalla proprietà distributiva applicata alle parti componenti  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{L}$

$$\begin{aligned} G - O &= \frac{m_1(G_1 - O) + m_2(G_2 - O)}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{\frac{m}{2} + \frac{m}{4}}{\frac{m}{2} + \frac{m}{4}} \left[ \frac{m}{2} \left( -\frac{2}{3}L \hat{e}_1 \right) + \frac{m}{4} \left( \frac{2}{3}L \hat{e}_1 + \frac{2}{3}L \hat{e}_2 \right) \right] = \\ &= \frac{4}{3} \left( -\frac{1}{3} \hat{e}_1 + \frac{1}{6} \hat{e}_1 + \frac{1}{6} \hat{e}_2 \right) L = -\frac{2}{9}L \hat{e}_1 + \frac{2}{9}L \hat{e}_2. \end{aligned}$$

La posizione richiesta è pertanto

$$G - O = -\frac{2}{9}L \hat{e}_1 + \frac{2}{9}L \hat{e}_2.$$

### (b) Matrice d'inerzia

Anche nel computo della matrice d'inerzia conviene trattare separatamente l'asta  $\mathbb{A}$  e la lamina  $\mathbb{L}$ , calcolando le matrici d'inerzia relative alla terna  $Oxyz$  delle due parti costituenti e sommare infine termine a termine i risultati ottenuti.

#### Matrice d'inerzia dell'asta

Essendo l'asta completamente collocata lungo l'asse  $Ox$  della terna di riferimento assegnata, la matrice d'inerzia relativa a  $Oxyz$  deve assumere la forma generale

$$[L_O]^{\mathbb{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & L_{yy} \end{pmatrix}$$

con il momento d'inerzia determinabile per integrazione dalla definizione generale

$$L_{yy} = \int_{-L}^0 \lambda(x) x^2 dx = \int_{-L}^0 \left( -\frac{m}{L^2} x \right) x^2 dx = -\frac{m}{L^2} \left[ \frac{x^4}{4} \right]_{-L}^0 = \frac{m}{L^2} \frac{L^4}{4} = \frac{mL^2}{4}.$$

Pertanto, la matrice d'inerzia dell'asta risulta

$$[L_O]^{\mathbb{A}} = mL^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

#### Matrice d'inerzia della lamina

Poiché la lamina giace per intero nel piano coordinato  $Oxy$ , la matrice d'inerzia di  $\mathbb{L}$  rispetto alla terna  $Oxyz$  ha la struttura generale seguente

$$[L_O]^{\mathbb{L}} = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & 0 \\ L_{xy} & L_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx} + L_{yy} \end{pmatrix}$$

e dipende unicamente dai momenti d'inerzia  $L_{xx}$  e  $L_{yy}$ , nonché dal prodotto d'inerzia  $L_{xy}$ . Per il primo si ha:

$$L_{xx} = \int_0^L dx \int_0^L dy \sigma(x, y) y^2 = \int_0^L dx \int_0^L dy \frac{m}{L^4} xy^3 = \frac{m}{L^4} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^L \left[ \frac{y^4}{4} \right]_0^L = \frac{mL^2}{8}$$

ed una analoga espressione si stabilisce per il secondo

$$L_{yy} = \int_0^L dx \int_0^L dy \sigma(x, y) x^2 = \int_0^L dx \int_0^L dy \frac{m}{L^4} x^3 y = \frac{mL^2}{8}$$

mentre per il prodotto d'inerzia si ricava

$$\begin{aligned} L_{xy} &= - \int_0^L dx \int_0^L dy \sigma(x, y) xy = \\ &= - \int_0^L dx \int_0^L dy \frac{m}{L^4} x^2 y^2 = - \frac{m}{L^4} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^L \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^L = - \frac{mL^2}{9}. \end{aligned}$$

La matrice d'inerzia della lamina diventa pertanto

$$[L_O]^{\mathbb{L}} = mL^2 \begin{pmatrix} 1/8 & -1/9 & 0 \\ -1/9 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Per la matrice d'inerzia del sistema rispetto al riferimento  $Oxyz$  si ha infine:

$$[L_O] = [L_O]^{\mathbb{A}} + [L_O]^{\mathbb{L}} = mL^2 \begin{pmatrix} 1/8 & -1/9 & 0 \\ -1/9 & 3/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

### (c) Momento d'inerzia rispetto a $OB$

Rispetto alla terna  $Oxyz$  l'asse  $OB$  è individuato dal versore

$$\hat{n} = \frac{B - O}{|B - O|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_2$$

ed il momento d'inerzia del sistema relativamente allo stesso asse si ricava per mezzo della ben nota espressione

$$I_{OB} = \hat{n} \cdot L_O(\hat{n}).$$

Si ha così

$$I_{OB} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \right) mL^2 \begin{pmatrix} 1/8 & -1/9 & 0 \\ -1/9 & 3/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}mL^2 (1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 1/8 & -1/9 & 0 \\ -1/9 & 3/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{2}mL^2 (1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 1/72 \\ 19/72 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}mL^2 \frac{20}{72} = \frac{5}{36}mL^2.
\end{aligned}$$

**(d) Energia cinetica**

Nell'ipotesi che il punto  $O$  sia fisso, l'energia cinetica del sistema rigido si calcola per mezzo della relazione

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot L_O(\vec{\omega})$$

nella quale deve porsi  $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_1 + 2\omega\hat{e}_3$ . In forma matriciale, rispetto alla base  $\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ , l'espressione precedente diventa

$$T = \frac{1}{2}(\omega \ 0 \ 2\omega) mL^2 \begin{pmatrix} 1/8 & -1/9 & 0 \\ -1/9 & 3/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 2\omega \end{pmatrix}$$

ed eseguendo i prodotti conduce al risultato richiesto

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}mL^2\omega^2(1 \ 0 \ 2) \begin{pmatrix} 1/8 & -1/9 & 0 \\ -1/9 & 3/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{2}mL^2\omega^2(1 \ 0 \ 2) \begin{pmatrix} 1/8 \\ -1/9 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}mL^2\omega^2\left(\frac{1}{8} + 2\right) = \frac{17}{16}mL^2\omega^2.
\end{aligned}$$

**(e) Velocità istantanea di  $A$**

La velocità istantanea del punto  $A$ , nelle stesse ipotesi del paragrafo precedente che  $O$  sia fisso e che  $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_1 + 2\omega\hat{e}_3$ , si determina per mezzo del teorema di Poisson per l'atto di moto rigido. Avendosi:

$$A - O = L\hat{e}_1 \quad \text{e} \quad \dot{O} = 0,$$

la velocità istantanea risulta

$$\dot{A} = \vec{\omega} \wedge (A - O) = (\omega\hat{e}_1 + 2\omega\hat{e}_3) \wedge L\hat{e}_1 = 2\omega L\hat{e}_3 \wedge \hat{e}_1 = 2\omega L\hat{e}_2.$$

**Soluzione dell'esercizio 2**

**(a) Energia cinetica**

L'energia cinetica del sistema si determina come somma delle energie cinetiche relative al telaio e al punto materiale  $P$ .

### Energia cinetica del telaio

Il momento d'inerzia dell'asta  $OA$  rispetto all'asse  $Oz$  è dato da

$$I_{Oz}^{OA} = \frac{mL^2}{3}$$

mentre quello dell'asta  $BC$  relativamente allo stesso asse si ricava dal teorema di Huygens-Steiner

$$I_{Oz}^{BC} = m|A - O|^2 + I_{Az}^{BC} = mL^2 + \frac{mL^2}{12} = \frac{13}{12}mL^2.$$

La somma dei due momenti individua il momento d'inerzia del telaio rispetto ad  $Oz$

$$I_{Oz}^{\text{telaio}} = I_{Oz}^{OA} + I_{Oz}^{BC} = \left(\frac{1}{3} + \frac{13}{12}\right)mL^2 = \frac{4+13}{12}mL^2 = \frac{17}{12}mL^2.$$

Il moto del telaio è una semplice rotazione attorno all'asse fisso  $Oz$ , descritta dall'angolo  $\phi$ . Assunto al solito che l'angolo  $\phi$  e l'asse  $Oz$  siano mutuamente orientati secondo la convenzione sinistrorsa, la velocità angolare istantanea del telaio si scrive  $\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{e}_3$  e l'energia cinetica del telaio si esprime come

$$T_{\text{telaio}} = \frac{1}{2}I_{Oz}^{\text{telaio}}|\vec{\omega}|^2 = \frac{17}{24}mL^2\dot{\phi}^2.$$

### Energia cinetica del punto $P$

Il vettore posizione di  $P$  rispetto alla terna  $Oxyz$  è dato da

$$\begin{aligned} P - O &= A - O + P - A = L \sin \phi \hat{e}_1 - L \cos \phi \hat{e}_2 + L\xi \cos \phi \hat{e}_1 + L\xi \sin \phi \hat{e}_2 = \\ &= L(\sin \phi + \xi \cos \phi) \hat{e}_1 + L(-\cos \phi + \xi \sin \phi) \hat{e}_2 \end{aligned}$$

e la sua derivata prima rispetto al tempo fornisce la corrispondente velocità assoluta

$$\dot{P} = L(\cos \phi \dot{\phi} - \xi \sin \phi \dot{\phi} + \dot{\xi} \cos \phi) \hat{e}_1 + L(\sin \phi \dot{\phi} + \xi \cos \phi \dot{\phi} + \dot{\xi} \sin \phi) \hat{e}_2$$

il cui modulo quadrato si calcola con qualche noioso ma semplice passaggio di trigonometria

$$\begin{aligned} \dot{P}^2 &= L^2[\cos^2 \phi \dot{\phi}^2 + \xi^2 \sin^2 \phi \dot{\phi}^2 + \cos^2 \phi \dot{\xi}^2 - \\ &\quad - 2\xi \sin \phi \cos \phi \dot{\phi}^2 + 2\cos^2 \phi \dot{\xi} \dot{\phi} - 2\xi \sin \phi \cos \phi \dot{\phi} \dot{\xi} + \\ &\quad + \sin^2 \phi \dot{\phi}^2 + \xi^2 \cos^2 \phi \dot{\phi}^2 + \sin^2 \phi \dot{\xi}^2 + \\ &\quad + 2\xi \sin \phi \cos \phi \dot{\phi}^2 + 2\sin^2 \phi \dot{\xi} \dot{\phi} + 2\xi \sin \phi \cos \phi \dot{\phi} \dot{\xi}] = \\ &= L^2[\dot{\phi}^2 + \xi^2 \dot{\phi}^2 + \dot{\xi}^2 + 2\dot{\xi} \dot{\phi}]. \end{aligned}$$

L'energia cinetica del punto  $P$  vale pertanto

$$T_P = \frac{3m}{2}\dot{P}^2 = \frac{3mL^2}{2}(\dot{\phi}^2 + \xi^2 \dot{\phi}^2 + \dot{\xi}^2 + 2\dot{\xi} \dot{\phi}).$$

Per l'energia cinetica dell'intero sistema si ha così

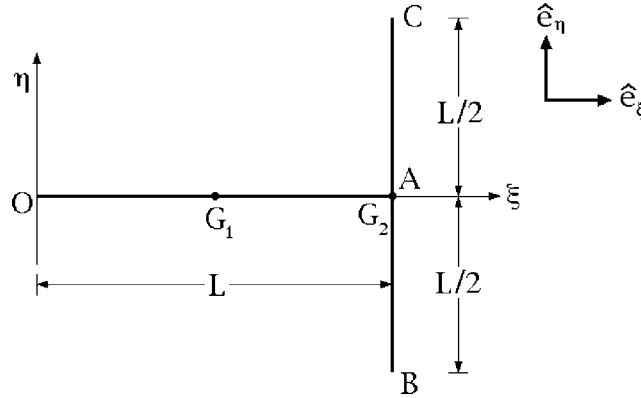
$$\begin{aligned} T = T_{\text{telaio}} + T_P &= \frac{17}{24}mL^2\dot{\phi}^2 + \frac{3}{2}mL^2(\dot{\phi}^2 + \xi^2\dot{\phi}^2 + \dot{\xi}^2 + 2\dot{\xi}\dot{\phi}) = \\ &= \frac{mL^2}{2} \left( \frac{53}{12}\dot{\phi}^2 + 3\xi^2\dot{\phi}^2 + 3\dot{\xi}^2 + 6\dot{\xi}\dot{\phi} \right). \end{aligned}$$

**(b) Equilibri ordinari**

Il sistema è scleronomo e posizionale conservativo, essendo soggetto soltanto a sollecitazioni posizionali conservative — il peso e l'interazione elastica fra  $P$  ed  $A$ . Si tratta quindi di determinare il potenziale  $U$  del sistema quale somma dei potenziali gravitazionale ed elastico, per poi procedere alla individuazione dei punti critici di  $U$ .

*Potenziale gravitazionale del telaio*

Rispetto ad una terna solidale ortogonale  $O\xi\eta z$  che abbia gli assi rispettivamente paralleli alle aste  $OA$  e  $BC$ , è facile determinare la posizione del baricentro  $G$  del telaio per mezzo del teorema distributivo.



Le coordinate dei baricentri  $G_1$  e  $G_2$  delle due aste sono individuate dai vettori posizione

$$G_1 - O = \frac{L}{2} \hat{e}_\xi \quad G_2 - O = L \hat{e}_\xi$$

e poiché le due aste presentano uguale massa  $m$  il teorema distributivo porge per  $G$  l'espressione

$$G - O = \frac{1}{m + m} \left( m \frac{L}{2} \hat{e}_\xi + mL \hat{e}_\xi \right) = \frac{3}{4}L \hat{e}_\xi$$

in modo che il potenziale gravitazionale del telaio vale

$$U_g^{\text{telaio}} = -2mg \hat{e}_2 \cdot (G - O) = 2mg \frac{3}{4}L \cos \phi = \frac{3}{2}mgL \cos \phi.$$

*Potenziale gravitazionale del punto P*

La determinazione del potenziale gravitazionale del punto materiale è immediata, a partire dal vettore posizione di  $P$ ,

$$U_g^P = -3mg \hat{e}_2 \cdot (P - O) = -3mgL(-\cos \phi + \xi \sin \phi) = 3mgL(\cos \phi - \xi \sin \phi).$$

*Potenziale elastico*

Il potenziale associato all'interazione elastica fra il punto materiale  $P$  e il punto  $A$  del telaio si calcola facilmente per mezzo della definizione

$$U_{el} = -\frac{k}{2}|P - A|^2 = -\frac{k}{2}(L\xi)^2 = -\frac{kL^2}{2}\xi^2.$$

Il potenziale del sistema è determinato dalla somma dei potenziali gravitazionale ed elastico appena calcolati:

$$\begin{aligned} U(\phi, \xi) &= U_g^{\text{telaio}} + U_g^P + U_{el} = \\ &= \frac{3}{2}mgL \cos \phi + 3mgL(\cos \phi - \xi \sin \phi) - \frac{kL^2}{2}\xi^2 = \\ &= \frac{9}{2}mgL \cos \phi - 3mgL\xi \sin \phi - \frac{kL^2}{2}\xi^2 \quad (\phi, \xi) \in \mathbb{R} \times [-1/2, 1/2] \end{aligned}$$

e le sue derivate parziali prime sono date da:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \phi} &= -\frac{9}{2}mgL \sin \phi - 3mgL\xi \cos \phi \\ \frac{\partial U}{\partial \xi} &= -3mgL \sin \phi - kL^2\xi. \end{aligned}$$

Gli equilibri ordinari del sistema coincidono con i punti critici del potenziale e si ottengono perciò uguagliando a zero le derivate prime precedenti

$$\begin{cases} -\frac{9}{2}mgL \sin \phi - 3mgL\xi \cos \phi = 0 \\ -3mgL \sin \phi - kL^2\xi = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione porge una semplice espressione di  $\xi$  in funzione di  $\phi$

$$\xi = -3\frac{mg}{kL} \sin \phi$$

che sostituita nella prima conduce alla relazione trigonometrica

$$-\frac{9}{2}mgL \sin \phi + 9mgL \frac{mg}{kL} \sin \phi \cos \phi = 0$$

equivalente a

$$\sin \phi \left( -\frac{1}{2} + \frac{mg}{kL} \cos \phi \right) = 0$$

ovvero a

$$\sin \phi \left( \frac{kL}{2mg} - \cos \phi \right) = 0.$$

Le soluzioni fisicamente distinte sono

$$\phi = 0, \quad \pi,$$

sempre definite, e

$$\phi = \phi^*, \quad -\phi^*$$

con

$$\phi^* = \arccos \left( \frac{kL}{2mg} \right) \in (0, \pi/2),$$

definite e distinte dalle precedenti a condizione che si abbia

$$\frac{kL}{2mg} < 1.$$

Gli equilibri ordinari del sistema risultano perciò

$$(\phi, \xi) = (0, 0), \quad (\pi, 0),$$

comunque definiti, e

$$(\phi, \xi) = \left( \phi^*, -3 \frac{mg}{kL} \sin \phi^* \right), \quad \left( -\phi^*, 3 \frac{mg}{kL} \sin \phi^* \right)$$

definiti e distinti dai precedenti per

$$\frac{kL}{mg} < 2.$$

Dovendo il punto  $P$  appartenere all'asta  $BC$ , si richiede inoltre che

$$\left| -3 \frac{mg}{kL} \sin \phi^* \right| \leq \frac{1}{2}$$

ossia

$$\sin \phi^* \leq \frac{1}{6} \frac{kL}{mg}$$

$$\sin^2 \phi^* \leq \frac{1}{36} \left( \frac{kL}{mg} \right)^2$$

$$1 - \cos^2 \phi^* \leq \frac{1}{36} \left( \frac{kL}{mg} \right)^2$$

condizione che sostituendo l'espressione esplicita di  $\phi^*$  diventa

$$1 - \frac{1}{4} \left( \frac{kL}{mg} \right)^2 \leq \frac{1}{36} \left( \frac{kL}{mg} \right)^2$$

e con una serie di semplici manipolazioni algebriche si riduce ad una forma di immediata lettura

$$1 \leq \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{36} \right) \left( \frac{kL}{mg} \right)^2$$

$$1 \leq \frac{5}{18} \left( \frac{kL}{mg} \right)^2$$

$$\frac{18}{5} \leq \left( \frac{kL}{mg} \right)^2$$

$$\sqrt{\frac{18}{5}} \leq \frac{kL}{mg}.$$

La condizione complessiva di esistenza delle configurazioni di equilibrio che vedono l'asta  $OA$  non disposta verticalmente è quindi espressa dalla doppia disequazione

$$\sqrt{\frac{18}{5}} \leq \frac{kL}{mg} < 2$$

nella quale si intende che  $\sqrt{18/5} < 2$ , come è immediato verificare.

### (c) Stabilità degli equilibri ordinari

Il sistema in esame è scleronomo, posizionale e conservativo, per cui l'analisi di stabilità degli equilibri ordinari può essere condotta facendo riferimento ai teoremi standard di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet. Punto di partenza è, al solito, il calcolo delle derivate parziali seconde del potenziale

$$U_{\phi\phi} = -\frac{9}{2}mgL \cos \phi + 3mgL\xi \sin \phi$$

$$U_{\phi\xi} = U_{\xi\phi} = -3mgL \cos \phi$$

$$U_{\xi\xi} = -kL^2$$

alle quali si associa la matrice hessiana

$$H_U(\phi, \xi) = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2}mgL \cos \phi + 3mgL\xi \sin \phi & -3mgL \cos \phi \\ -3mgL \cos \phi & -kL^2 \end{pmatrix}.$$

L'espressione ottenuta è ora applicabile all'analisi di stabilità delle singole configurazioni di equilibrio.

**Configurazione**  $(\phi, \xi) = (0, 0)$

In questo caso l'hessiana del potenziale assume la forma

$$H_U(0, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2}mgL & -3mgL \\ -3mgL & -kL^2 \end{pmatrix}$$

con determinante e traccia rispettivamente dati dalle espressioni:

$$\det H_U(0, 0) = \frac{9}{2}mgLkL^2 - 9(mgL)^2 = \frac{9}{2}(mgL)^2 \left( \frac{kL}{mg} - 2 \right)$$

$$\text{tr} H_U(0, 0) = -\frac{9}{2}mgL - kL^2 < 0.$$

Secondo il diverso segno del determinante si deduce che:

- se  $kL/mg > 2$  la matrice hessiana ha determinante positivo e presenta perciò due autovalori reali negativi; ciò caratterizza la configurazione come massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità è assicurata dal teorema di Lagrange-Dirichlet;
- se  $kL/mg < 2$  il determinante della matrice hessiana è negativo e si hanno due autovalori di segno opposto. La presenza di un autovalore positivo implica l'instabilità della configurazione in virtù del teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet;
- se  $kL/mg = 2$ , il determinante della matrice hessiana si annulla, mentre rimane negativa la relativa traccia. Gli autovalori della matrice hessiana sono perciò uno negativo ed uno nullo. Questa condizione, benché compatibile con il sussistere in  $(\phi, \xi) = (0, 0)$  di un massimo relativo proprio di  $U$ , non consente di affermare direttamente la stabilità della configurazione per Lagrange-Dirichlet. È altresì esclusa l'applicabilità del teorema di inversione parziale, dal momento che l'hessiana non presenta autovalori positivi. Ricorre pertanto un caso critico, la cui discussione richiederebbe una analisi più approfondita e diretta ad accertare l'effettiva natura della configurazione.

Nella fattispecie, il potenziale del sistema si scrive

$$U(\phi, \xi) = \frac{9}{2}mgL \cos \phi - 3mgL\xi \sin \phi - mgL\xi^2 = mgL \left( \frac{9}{2} \cos \phi - 3\xi \sin \phi - \xi^2 \right)$$

e, ridotto il fattore costante positivo  $mgL$ , assume la forma equivalente

$$\begin{aligned} \frac{1}{mgL}U(\phi, \xi) &= \frac{9}{2} \left( 1 - 2\sin^2 \frac{\phi}{2} \right) - 3\xi \sin \phi - \xi^2 = \\ &= \frac{9}{2} - 9\sin^2 \frac{\phi}{2} - 6\xi \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} - \xi^2 = \\ &= \frac{9}{2} - 9\sin^4 \frac{\phi}{2} - 9\sin^2 \frac{\phi}{2} \cos^2 \frac{\phi}{2} - 6\xi \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} - \xi^2 = \\ &= \frac{9}{2} - 9\sin^4 \frac{\phi}{2} - \left[ 3\sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} + \xi \right]^2 = \\ &= \frac{9}{2} - 9\sin^4 \frac{\phi}{2} - \left( \frac{3}{2} \sin \phi + \xi \right)^2. \end{aligned}$$

Dall'espressione ottenuta appare evidente che la configurazione  $(\phi, \xi) = (0, 0)$  costituisce un massimo assoluto del potenziale nel suo intero dominio di definizione:

$$U(\phi, \xi) \leq \frac{9}{2}mgL = U(0, 0) \quad \forall (\phi, \xi) \in \mathbb{R} \times (-1/2, 1/2).$$

D'altra parte, si ha evidentemente che  $U(\phi, \xi) = U(0, 0)$  se e soltanto se

$$9 \sin^4 \frac{\phi}{2} + \left( \frac{3}{2} \sin \phi + \xi \right)^2 = 0$$

ossia per

$$\begin{cases} \sin \frac{\phi}{2} = 0 \\ \frac{3}{2} \sin \phi + \xi = 0 \end{cases}$$

e quindi, qualora si assuma  $|\phi| < 2\pi$ ,  $(\phi, \xi) = (0, 0)$  è l'unica configurazione per cui risulta  $U(\phi, \xi) = U(0, 0)$ . Essa costituisce pertanto un massimo **relativo proprio** del potenziale e risulta stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

**Configurazione**  $(\phi, \xi) = (\pi, 0)$

L'hessiana del potenziale è

$$H_U(\pi, 0) = \begin{pmatrix} \frac{9}{2}mgL & 3mgL \\ 3mgL & -kL^2 \end{pmatrix}$$

e assume determinante di segno negativo

$$\det H_U(\pi, 0) = -\frac{9}{2}mgL kL^2 - 9(mgL)^2 < 0$$

per cui gli autovalori della matrice sono di segno opposto e la configurazione risulta instabile in forza del teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

**Configurazioni**  $(\phi, \xi) = \left( \phi^*, -3\frac{mg}{kL} \sin \phi^* \right), \left( -\phi^*, 3\frac{mg}{kL} \sin \phi^* \right)$

La matrice hessiana del potenziale è la stessa per entrambe le configurazioni

$$H_U\left(\phi^*, -3\frac{mg}{kL} \sin \phi^*\right) = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2}mgL \cos \phi^* - 9mgL \frac{mg}{kL} \sin^2 \phi^* & -3mgL \cos \phi^* \\ -3mgL \cos \phi^* & -kL^2 \end{pmatrix}$$

e la sua traccia assume sempre segno negativo per qualsiasi scelta dei parametri

$$\text{tr} H_U\left(\phi^*, -3\frac{mg}{kL} \sin \phi^*\right) = -\frac{9}{2}mgL \cos \phi^* - 9mgL \frac{mg}{kL} \sin^2 \phi^* - kL^2 < 0.$$

Il segno del determinante risulta invece positivo:

$$\begin{aligned}
\det H_U \left( \phi^*, -3 \frac{mg}{kL} \sin \phi^* \right) &= \\
&= \frac{9}{2} mgL kL^2 \cos \phi^* + 9mgL mgL \sin^2 \phi^* - 9(mgL)^2 \cos^2 \phi^* = \\
&= \frac{9}{2} mgL kL^2 \frac{kL}{2mg} + 9(mgL)^2 \left( 1 - \frac{k^2 L^2}{4m^2 g^2} \right) - 9(mgL)^2 \frac{k^2 L^2}{4m^2 g^2} = \\
&= 9(mgL)^2 \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{kL}{mg} \right)^2 + 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{kL}{mg} \right)^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{kL}{mg} \right)^2 \right] = \\
&= 9(mgL)^2 \left[ 1 - \left( \frac{kL}{2mg} \right)^2 \right] > 0
\end{aligned}$$

per via della condizione di esistenza  $kL/2mg < 1$  della configurazione di equilibrio. Ne segue che gli autovalori dell'hessiana sono entrambi negativi e che la configurazione costituisce pertanto un massimo relativo proprio del potenziale, stabile per Lagrange-Dirichlet.

#### (d) Equazioni di Lagrange

La lagrangiana  $\mathcal{L} = T + U$  del sistema si scrive

$$\mathcal{L} = \frac{mL^2}{2} \left( \frac{53}{12} \dot{\phi}^2 + 3\xi^2 \dot{\phi}^2 + 3\dot{\xi}^2 + 6\dot{\xi}\dot{\phi} \right) + \frac{9}{2} mgL \cos \phi - 3mgL\xi \sin \phi - \frac{kL^2}{2} \xi^2$$

e da essa seguono le relazioni:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} &= \frac{mL^2}{2} \left( \frac{53}{6} \dot{\phi} + 6\xi^2 \dot{\phi} + 6\dot{\xi} \right) \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) &= \frac{mL^2}{2} \left( \frac{53}{6} \ddot{\phi} + 6\xi^2 \ddot{\phi} + 12\xi \dot{\xi} \dot{\phi} + 6\ddot{\xi} \right) \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= -\frac{9}{2} mgL \sin \phi - 3mgL\xi \cos \phi \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} &= \frac{mL^2}{2} (6\dot{\xi} + 6\dot{\phi}) \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} \right) &= 3mL^2 (\ddot{\xi} + \ddot{\phi}) \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} &= 3mL^2 \xi \dot{\phi}^2 - 3mgL \sin \phi - kL^2 \xi.
\end{aligned}$$

Le equazioni di Lagrange del moto diventano perciò:

$$\begin{cases} mL^2 \left( \frac{53}{12} \ddot{\phi} + 3\xi^2 \ddot{\phi} + 6\xi \dot{\xi} \dot{\phi} + 3\ddot{\xi} \right) + \frac{9}{2} mgL \sin \phi + 3mgL\xi \cos \phi = 0 \\ 3mL^2 (\ddot{\xi} + \ddot{\phi}) - 3mL^2 \xi \dot{\phi}^2 + 3mgL \sin \phi + kL^2 \xi = 0. \end{cases}$$

(e) **Configurazione di confine?**

Le componenti lagrangiane, o generalizzate, delle sollecitazioni attive agenti sul sistema sono le derivate parziali prime del potenziale:

$$Q_\phi(\phi, \xi) = \frac{\partial U}{\partial \phi}(\phi, \xi) = -\frac{9}{2}mgL \sin \phi - 3mgL\xi \cos \phi$$
$$Q_\xi(\phi, \xi) = \frac{\partial U}{\partial \xi}(\phi, \xi) = -3mgL \sin \phi - kL^2\xi$$

in quanto il sistema ha natura posizionale conservativa. Per il teorema dei lavori virtuali, la configurazione  $(\phi, \xi) = (0, 1/2)$  è allora un equilibrio di confine se e soltanto se

$$\begin{cases} Q_\phi(0, 1/2) = 0 \\ Q_\xi(0, 1/2) \geq 0. \end{cases}$$

La condizione non è tuttavia soddisfatta, dal momento che

$$Q_\phi(0, 1/2) = -\frac{3}{2}mgL \quad Q_\xi(0, 1/2) = -kL^2/2.$$

La configurazione in esame non costituisce pertanto un equilibrio di confine del sistema.