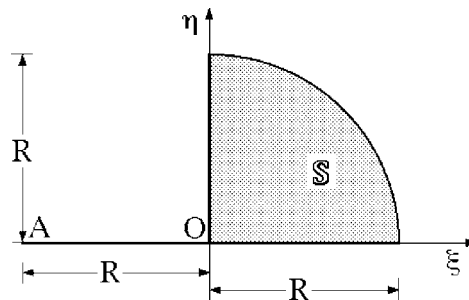


Esercizio 1

Un corpo rigido è costituito da un'asta rettilinea OA di lunghezza R e da un settore circolare omogeneo \mathbb{S} di massa $\mu/2$, raggio R , centro O ed ampiezza $\pi/2$ radianti. Rispetto ad una terna solidale $O\xi\eta\zeta$ l'asta OA si dispone lungo l'asse $O\xi$, mentre \mathbb{S} è collocato nel primo quadrante del piano $O\xi\eta$ con vertice in O . La densità lineare dell'asta si scrive

$$\lambda(\xi) = -\frac{\mu}{R^2}\xi \quad \forall \xi \in [-R, 0].$$

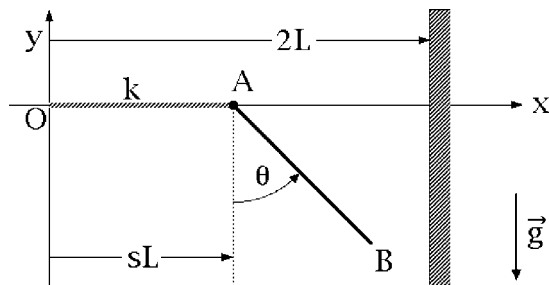


Sapendo che l'intero sistema ha punto fisso in O , si chiede di determinare:

- (a) la posizione del baricentro rispetto alla terna $O\xi\eta\zeta$;
- (b) la matrice d'inerzia del sistema rispetto alla stessa terna;
- (c) il momento d'inerzia relativo alla bisettrice del primo e terzo quadrante $O\xi\eta$;
- (d) l'energia cinetica del sistema qualora la velocità angolare istantanea sia $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_1 - \omega\hat{e}_3$;
- (e) il momento angolare in O del corpo, nella stessa ipotesi di cui al punto (d).

Esercizio 2

Un'asta rettilinea omogenea pesante AB , di lunghezza L e massa m , si muove nel piano verticale Oxy con l'estremo A vincolato a scorrere lungo l'asse orizzontale Ox e senza che l'asta possa oltrepassare il piano $x = 2L$ — vedi figura. Lo stesso estremo è collegato all'origine O da una molla di costante elastica k .



Supposti i vincoli ideali, si faccia uso delle coordinate s e θ illustrate in figura per determinare:

- l'energia cinetica del sistema;
- gli equilibri ordinari;
- le proprietà di stabilità degli equilibri ordinari;
- le equazioni di Lagrange del moto;
- una costante del moto;
- gli equilibri di confine (**facoltativo**).

Soluzione dell'esercizio 1

(a) Posizione del baricentro

Conviene calcolare separatamente i baricentri dell'asta OA e del settore circolare \mathbb{S} , per poi applicare il teorema distributivo.

Baricentro di \mathbb{S}

Se si indicano con $\xi_G^{\mathbb{S}}$, $\eta_G^{\mathbb{S}}$, $\zeta_G^{\mathbb{S}}$ le coordinate del baricentro $G^{\mathbb{S}}$ del settore circolare rispetto alla terna $O\xi\eta\zeta$, il vettore posizione di $G^{\mathbb{S}}$ si scrive:

$$G^{\mathbb{S}} - O = \xi_G^{\mathbb{S}} \hat{e}_\xi + \eta_G^{\mathbb{S}} \hat{e}_\eta + \zeta_G^{\mathbb{S}} \hat{e}_\zeta$$

in termini dei versori di base \hat{e}_ξ , \hat{e}_η , \hat{e}_ζ associati alla stessa terna di riferimento. Il piano $O\xi\eta$ di giacitura del settore circolare costituisce un ovvio piano di simmetria della figura ed implica pertanto che si abbia

$$\zeta_G^{\mathbb{S}} = 0;$$

per contro, è altresì evidente che la retta $\eta = \xi$ rappresenta un asse di simmetria di \mathbb{S} , per cui deve risultare altresì

$$\xi_G^{\mathbb{S}} = \eta_G^{\mathbb{S}}.$$

L'ascissa $\xi_G^{\mathbb{S}}$ si può determinare direttamente mediante la definizione, eseguendo il calcolo in coordinate polari (ρ, ϕ) definite da $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$. Poiché il settore è omogeneo non si rende necessario considerare nel calcolo la densità della lamina. Si ha allora:

$$\begin{aligned} \xi_G^{\mathbb{S}} &= \frac{1}{\pi R^2/4} \int_{\mathbb{S}} \xi \, d\xi d\eta = \frac{4}{\pi R^2} \int_0^R d\rho \int_0^{\pi/2} d\phi \, \rho \cos \phi = \\ &= \frac{4}{\pi R^2} \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{\pi/2} \cos \phi \, d\phi = \frac{4}{\pi R^2} \frac{R^3}{3} [\sin \phi]_0^{\pi/2} = \frac{4}{3\pi} R \end{aligned}$$

per cui

$$G^{\mathbb{S}} - O = \frac{4}{3\pi} R \hat{e}_\xi + \frac{4}{3\pi} R \hat{e}_\eta.$$

Massa e baricentro dell'asta

Per ricavare la massa dell'asta OA si deve integrarne la densità $\lambda(\xi)$ sull'intervallo $\xi \in [-R, 0]$:

$$m_{OA} = \int_{-R}^0 \left(-\frac{\mu}{R^2} \xi \right) d\xi = -\frac{\mu}{R^2} \left[\frac{\xi^2}{2} \right]_{-R}^0 = \frac{\mu}{R^2} \frac{R^2}{2} = \frac{\mu}{2}.$$

L'asta è ubicata lungo l'asse $O\xi$, in modo che le coordinate η_G^{OA} e ζ_G^{OA} sono certamente nulle:

$$\eta_G^{OA} = 0 \quad \zeta_G^{OA} = 0$$

e la sola coordinata da determinare è l'ascissa

$$\begin{aligned}\xi_G^{OA} &= \frac{1}{m_{OA}} \int_{-R}^0 \xi \left(-\frac{\mu}{R^2} \xi \right) d\xi = -\frac{1}{m_{OA}} \frac{\mu}{R^2} \left[\frac{\xi^3}{3} \right]_{-R}^0 = \\ &= -\frac{1}{m_{OA}} \frac{\mu}{R^2} \frac{R^3}{3} = -\frac{1}{m_{OA}} \frac{\mu R}{3} = -\frac{2}{\mu} \frac{\mu R}{3} = -\frac{2}{3} R\end{aligned}$$

sicché

$$G^{OA} - O = -\frac{2}{3} R \hat{e}_\xi.$$

Baricentro del sistema

La proprietà distributiva del baricentro applicata alle parti disgiunte OA ed \mathbb{S} porge per il baricentro G del sistema l'espressione:

$$\begin{aligned}G - O &= \frac{1}{\mu} \left[\frac{\mu}{2} \left(\frac{4}{3\pi} R \hat{e}_\xi + \frac{4}{3\pi} R \hat{e}_\eta \right) + \frac{\mu}{2} \left(-\frac{2}{3} R \right) \hat{e}_\xi \right] = \\ &= \frac{2}{3\pi} R \hat{e}_\xi + \frac{2}{3\pi} R \hat{e}_\eta - \frac{1}{3} R \hat{e}_\xi = \left(\frac{2}{3\pi} - \frac{1}{3} \right) R \hat{e}_\xi + \frac{2}{3\pi} R \hat{e}_\eta.\end{aligned}$$

(b) Matrice d'inerzia

Per il calcolo della matrice d'inerzia è opportuno considerare il sistema come costituito dalle due parti rigide OA e \mathbb{S} , che possono peraltro essere riguardate come disgiunte visto che il solo elemento di contatto fra le due si identifica con il punto O , del tutto irrilevante nel calcolo degli integrali curvilinei lungo OA e di quelli di superficie sul settore \mathbb{S} . Si procedere pertanto alla determinazione delle matrici d'inerzia in $O\xi\eta\zeta$ dell'asta OA e del settore circolare \mathbb{S} , per poi sommare elemento per elemento le due matrici d'inerzia così ottenute.

Matrice d'inerzia dell'asta OA

L'asta si dispone secondo l'asse coordinato $O\xi$ della terna prescelta per il calcolo, cosicché la relativa matrice d'inerzia si presenta nella forma generale

$$[L_O]^{OA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{\eta\eta}^{OA} & 0 \\ 0 & 0 & L_{\eta\eta}^{OA} \end{pmatrix}$$

dove compare il solo momento d'inerzia $L_{\eta\eta}^{OA}$ rispetto all'asse coordinato $O\eta$. L'unico elemento incognito viene determinato secondo la definizione e quindi per mezzo di un integrale curvilineo:

$$L_{\eta\eta}^{OA} = \int_{-R}^0 (-\xi)^2 \left(-\frac{\mu}{R^2} \xi \right) d\xi = -\frac{\mu}{R^2} \int_{-R}^0 \xi^3 d\xi = -\frac{\mu}{R^2} \left[\frac{\xi^4}{4} \right]_{-R}^0 = \frac{\mu}{R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{\mu R^2}{4}$$

dal quale si deduce la matrice cercata:

$$[L_O]^{OA} = \mu R^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Matrice d'inerzia del settore circolare S

Il settore circolare S si colloca nel piano coordinato $O\xi\eta$ della terna di riferimento $O\xi\eta\zeta$; inoltre, per simmetria, i momenti d'inerzia relativi agli assi coordinati $O\xi$ ed $O\eta$ debbono necessariamente coincidere, visto che il settore circolare è omogeneo. Di conseguenza, la matrice d'inerzia di S deve assumere la forma tipica:

$$[L_O]^S = \begin{pmatrix} L_{\xi\xi}^S & L_{\xi\eta}^S & 0 \\ L_{\xi\eta}^S & L_{\xi\xi}^S & 0 \\ 0 & 0 & 2L_{\xi\xi}^S \end{pmatrix}$$

nella quale sono incogniti il solo momento d'inerzia $L_{\xi\xi}^S$ ed il solo prodotto d'inerzia $L_{\xi\eta}^S$, che possono essere ricavati direttamente mediante le relative definizioni integrali. Per il momento d'inerzia si ha:

$$\begin{aligned} L_{\xi\xi}^S &= \int_S \eta^2 \sigma \, d\xi d\eta = \int_0^R d\rho \rho \int_0^{\pi/2} d\phi (\rho \sin \phi)^2 \frac{\mu/2}{\pi R^2/4} = \frac{2\mu}{\pi R^2} \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi \, d\phi = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\mu}{R^2} \frac{R^4}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2\phi}{2} \, d\phi = \frac{1}{2\pi} \mu R^2 \frac{1}{2} \left[\phi - \frac{\sin 2\phi}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4\pi} \mu R^2 \frac{\pi}{2} = \frac{1}{8} \mu R^2 \end{aligned}$$

mentre il prodotto d'inerzia viene ottenuto come segue:

$$\begin{aligned} L_{\xi\eta}^S &= - \int_0^R d\rho \rho \int_0^{\pi/2} d\phi \rho \sin \phi \rho \cos \phi \frac{2\mu}{\pi R^2} = \\ &= - \frac{2\mu}{\pi R^2} \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{\pi/2} \sin \phi \cos \phi \, d\phi = - \frac{2\mu}{\pi R^2} \frac{R^4}{4} \left[\frac{\sin^2 \phi}{2} \right]_0^{\pi/2} = - \frac{1}{4\pi} \mu R^2. \end{aligned}$$

La matrice d'inerzia del settore S vale pertanto:

$$[L_O]^S = \mu R^2 \begin{pmatrix} 1/8 & -1/4\pi & 0 \\ -1/4\pi & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Matrice d'inerzia del sistema

Non rimane che sommare la matrice d'inerzia relative ai singoli sottosistemi OA ed S per ricavare la matrice d'inerzia dell'intero sistema — proprietà di additività —

$$[L_O] = [L_O]^{OA} + [L_O]^S = \mu R^2 \begin{pmatrix} 1/8 & -1/4\pi & 0 \\ -1/4\pi & 3/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(c) Momento d'inerzia rispetto alla bisettrice

La bisettrice del primo e terzo quadrante nel piano coordinato $O\xi\eta$ — di equazione $\eta = \xi$ — si identifica con la retta passante per l'origine la cui direzione è specificata dal versore

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{e}_\xi + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{e}_\eta.$$

Il momento d'inerzia relativo allo stesso asse si scrive perciò:

$$\begin{aligned} I_{O\hat{n}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \ 1 \ 0)[L_O]\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{n} \cdot L_O(\hat{n}) = \\ &= \frac{1}{2}(1 \ 1 \ 0)\mu R^2 \begin{pmatrix} 1/8 & -1/4\pi & 0 \\ -1/4\pi & 3/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\mu R^2(1 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{8} - \frac{1}{4\pi} \\ -\frac{1}{4\pi} + \frac{3}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}\mu R^2\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4\pi} - \frac{1}{4\pi} + \frac{3}{8}\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\pi}\right)\mu R^2. \end{aligned}$$

(d) Energia cinetica

L'ipotesi che il sistema rigido abbia punto O fisso autorizza ad affermare che la sua energia cinetica possa essere espressa nella forma

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot L_O(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}(\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3)[L_O] \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

in termini del vettore velocità angolare istantanea $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_1 - \omega\hat{e}_3$, di componenti:

$$(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\omega, 0, -\omega).$$

Per sostituzione, e tenuto conto della matrice d'inerzia $[L_O]$ ricavata al punto (b), si ricava allora l'espressione cercata:

$$T = \frac{1}{2}(\omega \ 0 \ -\omega)\mu R^2 \begin{pmatrix} 1/8 & -1/4\pi & 0 \\ -1/4\pi & 3/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\mu R^2\omega^2(1 \ 0 \ -1) \begin{pmatrix} 1/8 & -1/4\pi & 0 \\ -1/4\pi & 3/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{2}\mu R^2\omega^2(1 \ 0 \ -1) \begin{pmatrix} 1/8 \\ -1/4\pi \\ -1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\mu R^2\omega^2\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{16}\mu R^2\omega^2.
\end{aligned}$$

(e) **Momento angolare in O**

Il momento angolare nel polo O , punto fisso del sistema rigido, si calcola in modo analogo a quanto già visto per l'energia cinetica nello stesso sistema di riferimento. Il momento angolare è esprimibile come

$$\bar{K}_O = K_1\hat{e}_\xi + K_2\hat{e}_\eta + K_3\hat{e}_\zeta$$

e le sue componenti cartesiane K_1 , K_2 , K_3 si determinano per mezzo della fondamentale relazione matriciale

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = [L_O] \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

che sostituite le espressioni esplicite della matrice d'inerzia e delle componenti di $\vec{\omega}$ diventa:

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = \mu R^2 \begin{pmatrix} 1/8 & -1/4\pi & 0 \\ -1/4\pi & 3/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix} = \mu R^2\omega \begin{pmatrix} 1/8 \\ -1/4\pi \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

per cui:

$$K_1 = \frac{1}{8}\mu R^2\omega \quad K_2 = -\frac{1}{4\pi}\mu R^2\omega \quad K_3 = -\frac{1}{2}\mu R^2\omega$$

ed infine:

$$\bar{K}_O = \mu R^2\omega \left(\frac{1}{8}\hat{e}_\xi - \frac{1}{4\pi}\hat{e}_\eta - \frac{1}{2}\hat{e}_\zeta \right).$$

Soluzione dell'esercizio 2

(a) **Energia cinetica**

L'asta AB è priva di punti fissi per cui la sua energia cinetica deve essere determinata facendo ricorso al teorema di König. Il baricentro G dell'asta omogenea si identifica con il suo punto medio, il cui vettore posizione rispetto alla terna $Oxyz$ si scrive pertanto:

$$\begin{aligned}
G - O &= A - O + G - A = A - O + \frac{1}{2}(B - A) = \\
&= sL\hat{e}_1 + \frac{1}{2}(L\sin\theta\hat{e}_1 - L\cos\theta\hat{e}_2) = L\left(s + \frac{1}{2}\sin\theta\right)\hat{e}_1 - \frac{L}{2}\cos\theta\hat{e}_2.
\end{aligned}$$

Una derivazione rispetto al tempo porge allora la velocità istantanea del baricentro:

$$\dot{G} = L\left(\dot{s} + \frac{1}{2}\cos\theta\dot{\theta}\right)\hat{e}_1 + \frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}\hat{e}_2$$

con modulo quadrato

$$\dot{G}^2 = L^2 \left[\dot{s}^2 + \cos \theta \dot{s} \dot{\theta} + \frac{1}{4} \dot{\theta}^2 \right].$$

Il teorema di König permette perciò di esprimere l'energia cinetica dell'asta come somma di due contributi:

$$T = \frac{m}{2} \dot{G}^2 + \frac{1}{2} I_{Gz}^{AB} |\vec{\omega}_{AB}|^2$$

dove il momento d'inerzia I_{Gz}^{AB} dell'asta rispetto all'asse Gz e il vettore velocità angolare istantanea della stessa sono dati da:

$$I_{Gz}^{AB} = \frac{mL^2}{12} \quad \vec{\omega}_{AB} = \dot{\theta} \hat{e}_3.$$

Basta allora sostituire queste ultime relazioni nella formula di König per ottenere l'energia cinetica richiesta:

$$T = \frac{mL^2}{2} \left(\dot{s}^2 + \cos \theta \dot{s} \dot{\theta} + \frac{1}{4} \dot{\theta}^2 \right) + \frac{mL^2}{24} \dot{\theta}^2 = \frac{mL^2}{2} \left(\dot{s}^2 + \cos \theta \dot{s} \dot{\theta} + \frac{1}{3} \dot{\theta}^2 \right).$$

(b) Equilibri ordinari

Le sollecitazioni applicate al sistema consistono nella forza peso agente sull'asta e nell'interazione elastica fra l'estremo A e l'origine O . Entrambe hanno natura posizionale conservativa e vengono descritte per mezzo dei relativi potenziali. Il potenziale associato all'interazione elastica è dato dall'espressione

$$U_{el} = -\frac{k}{2}(A - O)^2 = -\frac{k}{2}(Ls)^2 = -\frac{kL^2}{2}s^2$$

mentre il potenziale delle forze peso vale

$$U_g = -mg \hat{e}_2 \cdot (G - O) = -mg \left(-\frac{L}{2} \cos \theta \right) = \frac{1}{2} mgL \cos \theta.$$

La somma dei potenziali elastico e gravitazionale definisce il potenziale U del sistema:

$$U(s, \theta) = -\frac{kL^2}{2}s^2 + \frac{1}{2} mgL \cos \theta.$$

Il dominio Ω di definizione di tale potenziale — nonché della stessa parametrizzazione del sistema scleronomo — è individuato dalla condizione che l'asta non possa oltrepassare il piano $x = 2L$, per cui le ascisse degli estremi A e B devono mantenersi non superiori a $2L$:

$$sL \leq 2L \quad sL + L \sin \theta \leq 2L$$

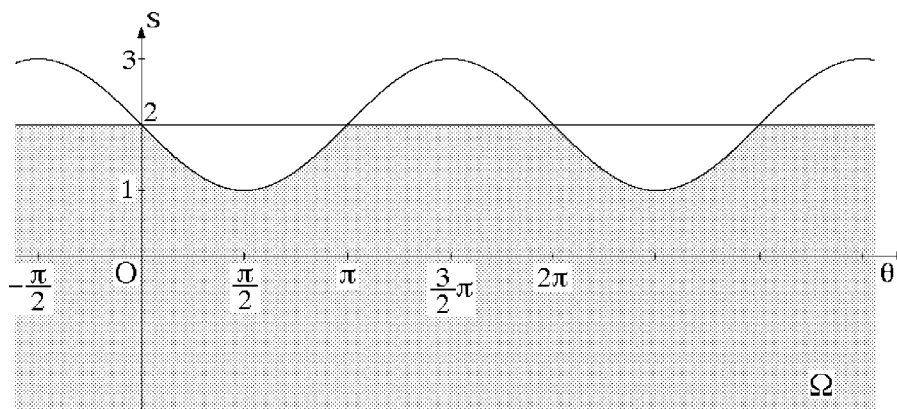
ossia

$$s \leq 2 \quad s \leq 2 - \sin \theta.$$

Il dominio Ω è quindi rappresentabile nella forma:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(s, \theta) \in \mathbb{R}^2 : s \leq 2\} \cap \{(s, \theta) \in \mathbb{R}^2 : s \leq 2 - \sin \theta\} = \\ &= \{(s, \theta) \in \mathbb{R}^2 : s \leq \min(2, 2 - \sin \theta)\}\end{aligned}$$

ed ha l'aspetto evidenziato con il tratteggio nella figura seguente:



Dalla definizione è immediato verificare che si tratta di un dominio chiuso ed appare quindi evidente che il sistema scleronomo è a vincoli unilaterali. Gli equilibri ordinari del sistema sono tutti e soli i punti critici del potenziale, purché ricompresi nell'interno del dominio Ω . Calcolando le derivate parziali prime di U ed uguagliandole a zero si hanno le equazioni di equilibrio:

$$\frac{\partial U}{\partial s} = -kL^2 s = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = -\frac{1}{2}mgL \sin \theta = 0$$

dalle quali si ricavano i punti critici:

$$(s, \theta) = (0, 0) \quad (s, \theta) = (0, \pi)$$

che appartengono entrambi all'interno del dominio Ω :

$$0 < \min(2, 2 - \sin 0) = 2 \quad 0 < \min(2, 2 - \sin \pi) = 2$$

ed individuano perciò altrettanti equilibri ordinari del sistema.

(c) Stabilità degli equilibri ordinari

Trattandosi di sistema scleronomo posizionale conservativo, l'analisi di stabilità degli equilibri ordinari — i soli per i quali abbia significato — può essere condotta facendo riferimento ai teoremi di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale. A questo scopo si rende necessario il calcolo delle derivate parziali seconde del potenziale:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} = -kL^2 \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{2}mgL \cos \theta \quad \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial \theta} = \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial s} = 0$$

che vengono inserite nella relativa matrice hessiana:

$$H_U(s, \theta) = \begin{pmatrix} -kL^2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}mgL \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Non rimane che procedere all'analisi delle singole configurazioni di equilibrio ordinarie.

Configurazione $(s, \theta) = (0, 0)$

L'hessiana del potenziale si riduce alla forma diagonale:

$$H_U(0, 0) = \begin{pmatrix} -kL^2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}mgL \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono entrambi negativi. Se ne conclude che la configurazione costituisce un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità è assicurata dal teorema di Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $(s, \theta) = (0, \pi)$

Nella fattispecie la matrice hessiana del potenziale ha autovalori di segno opposto, sempre identificabili con i suoi elementi diagonali:

$$H_U(0, \pi) = \begin{pmatrix} -kL^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mgL \end{pmatrix};$$

la presenza dell'autovalore positivo $mgL/2$ autorizza a concludere che la configurazione di equilibrio è instabile in virtù del teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

(d) Equazioni di Lagrange

La lagrangiana del sistema è definita dalla somma dell'energia cinetica T e del potenziale U e risulta perciò:

$$\mathcal{L} = \frac{mL^2}{2} \left(\dot{s}^2 + \cos \theta \dot{\theta} + \frac{1}{3} \dot{\theta}^2 \right) - \frac{kL^2}{2} s^2 + \frac{1}{2} mgL \cos \theta.$$

Da essa si deducono le espressioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} &= mL^2 \left(\dot{s} + \frac{1}{2} \cos \theta \dot{\theta} \right) & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} &= -kL^2 s \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \right) &= mL^2 \left(\ddot{s} + \frac{1}{2} \cos \theta \ddot{\theta} \right) - \frac{mL^2}{2} \sin \theta \dot{\theta}^2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{mL^2}{2} \left(\cos \theta \dot{s} + \frac{2}{3} \dot{\theta} \right) & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= -\frac{mL^2}{2} \sin \theta \dot{\theta} - \frac{1}{2} mgL \sin \theta \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) &= mL^2 \left(\frac{1}{2} \cos \theta \ddot{s} + \frac{1}{3} \ddot{\theta} - \frac{1}{2} \sin \theta \dot{\theta} \dot{s} \right) \end{aligned}$$

che inserite nelle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = 0 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

porgono le equazioni pure del moto richieste:

$$\begin{cases} mL^2 \left(\ddot{s} + \frac{1}{2} \cos \theta \ddot{\theta} - \frac{1}{2} \sin \theta \dot{\theta}^2 \right) + kL^2 s = 0 \\ mL^2 \left(\frac{1}{2} \cos \theta \ddot{s} + \frac{1}{3} \ddot{\theta} \right) + \frac{1}{2} mgL \sin \theta = 0 \end{cases}$$

definite $\forall (s, \theta) \in \text{int}(\Omega)$ e $\forall (\dot{s}, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^2$.

(e) Costante del moto

Per questo sistema scleronomo, soggetto unicamente a sollecitazioni posizionali conservative, un ovvio integrale primo è quello dell'energia meccanica $H = T - U$, che esplicitamente si scrive:

$$H(s, \theta, \dot{s}, \dot{\theta}) = \frac{mL^2}{2} \left(\dot{s}^2 + \cos \theta \dot{s} \dot{\theta} + \frac{1}{3} \dot{\theta}^2 \right) + \frac{kL^2}{2} s^2 - \frac{1}{2} mgL \cos \theta.$$

(f) Equilibri di confine

Nell'ipotesi di vincoli ideali, gli equilibri di confine del sistema sono individuati mediante il teorema dei lavori virtuali. Il lavoro virtuale delle sollecitazioni attive in una generica configurazione (s, θ) e per un qualsiasi spostamento virtuale $(\delta s, \delta \theta)$ è dato da

$$\delta L = \frac{\partial U}{\partial s}(s, \theta) \delta s + \frac{\partial U}{\partial \theta}(s, \theta) \delta \theta = -kL^2 s \delta s - \frac{1}{2} mgL \sin \theta \delta \theta.$$

La configurazione di confine $(s, \theta) \in \partial\Omega$ è un equilibrio se e soltanto se

$$-kL^2 s \delta s - \frac{1}{2} mgL \sin \theta \delta \theta \leq 0$$

per ogni $(\delta s, \delta \theta) \in \mathbb{R}^2$ che individua uno spostamento virtuale del sistema relativo alla configurazione considerata. Dalla struttura del dominio Ω è evidente che, qualunque sia la configurazione di confine prescelta, è sempre possibile considerare spostamenti virtuali della forma

$$(\delta s, \delta \theta) = (\delta s, 0) \quad \forall \delta s \leq 0$$

per i quali il lavoro virtuale diventa

$$\delta L = -kL^2 s \delta s.$$

Siccome i punti della frontiera di Ω sono del tipo $s = 2 - \sin \theta$, si conclude allora che per l'equilibrio dovrebbe aversi:

$$\delta L = -kL^2 (2 - \sin \theta) \delta s \leq 0 \quad \forall \delta s \leq 0,$$

una condizione palesemente assurda, in quanto è sempre $2 - \sin \theta > 0$. Ciò basta ad escludere il ricorrere di equilibri di confine per il sistema.