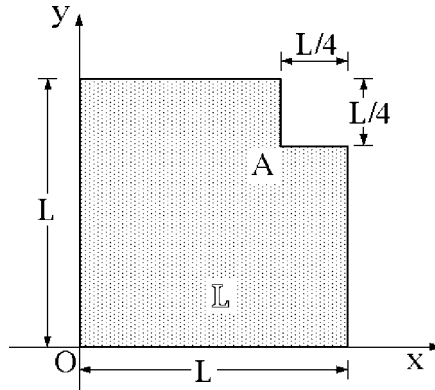


Esercizio 1

Una lamina rigida omogenea \mathbb{L} di massa m è stata ricavata rimuovendo da un quadrato di lato L , in corrispondenza di uno dei vertici, una porzione quadrata di lato $L/4$. Rispetto ad una terna solidale $Oxyz$ la lamina si colloca come illustrato in figura.

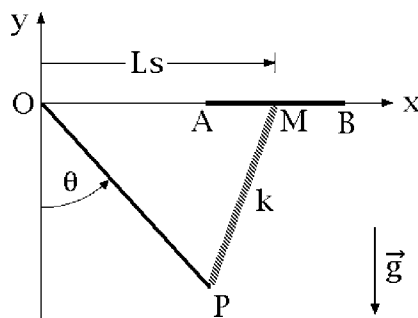


Si chiede di determinare:

- (a) il baricentro della lamina;
- (b) la matrice d'inerzia del sistema rispetto alla terna solidale $Oxyz$;
- (c) il momento d'inerzia di \mathbb{L} rispetto alla retta che congiunge O con il punto A evidenziato in figura;
- (d) il momento angolare in O e l'energia cinetica della lamina qualora si assuma il punto O fisso e la velocità angolare istantanea (relativamente ad una terna assoluta) pari a $\bar{\omega} = \omega(\hat{e}_1 - \hat{e}_2)$, con ω costante;
- (e) la velocità assoluta del vertice A di \mathbb{L} nelle stesse ipotesi del quesito (d).

Esercizio 2

Nel piano Oxy di una terna inerziale un'asta rettilinea omogenea OP , di lunghezza L e massa m , ha l'estremo O fisso nell'origine del riferimento e il secondo estremo P collegato con una molla di costante elastica k al punto medio M di una seconda asta AB , anch'essa di massa m , vincolata a scorrere lungo l'asse Ox . Il sistema è pesante e l'asse Oy si intende orientato verticalmente verso l'alto.



Nell'ipotesi di vincoli ideali, si usino i parametri adimensionali $s, \theta \in \mathbb{R}$ illustrati in figura per determinare:

- gli equilibri ordinari del sistema;
- le proprietà di stabilità dei predetti equilibri;
- l'energia cinetica del sistema;
- le equazioni di Lagrange del moto;
- la quantità di moto dell'asta OP per l'atto di moto specificato da $\theta = \pi/4$ e $\dot{\theta} = 2\sqrt{k/m}$.

Soluzione dell'esercizio 1

(a) Baricentro

La lamina omogenea ha massa m ed area pari alla differenza delle aree dei due quadrati, di lati L ed $L/4$ rispettivamente,

$$a = L^2 - \left(\frac{L}{4}\right)^2 = L^2 - \frac{L^2}{16} = \frac{15}{16}L^2$$

per cui la sua densità areale si scrive

$$\sigma = \frac{m}{a} = \frac{16}{15} \frac{m}{L^2}.$$

Una ipotetica lamina quadrata di lato L e di uguale densità σ avrebbe il baricentro nel proprio centro geometrico G_1 :

$$G_1 - O = \frac{L}{2} \hat{e}_1 + \frac{L}{2} \hat{e}_2$$

mentre la lamina quadrata rimossa in corrispondenza del vertice, avendo lato $L/4$, vedrebbe il proprio baricentro nel punto G_2 individuato da

$$G_2 - O = \frac{7}{8}L \hat{e}_1 + \frac{7}{8}L \hat{e}_2.$$

Per il baricentro G del sistema il teorema distributivo porge allora l'equazione

$$\sigma L^2 (G_1 - O) = m(G - O) + \sigma \frac{L^2}{16} (G_2 - O)$$

che assume la forma esplicita

$$\sigma L^2 \left(\frac{L}{2} \hat{e}_1 + \frac{L}{2} \hat{e}_2 \right) = \frac{15}{16} \sigma L^2 (G - O) + \sigma \frac{L^2}{16} \left(\frac{7}{8}L \hat{e}_1 + \frac{7}{8}L \hat{e}_2 \right)$$

e si semplifica in

$$\frac{L}{2} \hat{e}_1 + \frac{L}{2} \hat{e}_2 = \frac{15}{16} (G - O) + \frac{1}{16} \left(\frac{7}{8}L \hat{e}_1 + \frac{7}{8}L \hat{e}_2 \right).$$

Da quest'ultima relazione si deduce l'equazione vettoriale

$$\frac{16}{15} \left(\frac{L}{2} \hat{e}_1 + \frac{L}{2} \hat{e}_2 \right) = G - O + \frac{1}{15} \left(\frac{7}{8}L \hat{e}_1 + \frac{7}{8}L \hat{e}_2 \right)$$

ed infine la posizione del baricentro richiesta

$$G - O = L \left(\frac{8}{15} \hat{e}_1 + \frac{8}{15} \hat{e}_2 \right) - L \left(\frac{7}{120} \hat{e}_1 + \frac{7}{120} \hat{e}_2 \right) = L \left(\frac{19}{40} \hat{e}_1 + \frac{19}{40} \hat{e}_2 \right).$$

Si osservi che il baricentro giace lungo la bisettrice del primo quadrante nel piano coordinato Oxy , che infatti costituisce un evidente asse di simmetria del sistema.

(b) **Matrice d'inerzia in $Oxyz$**

La lamina piana si colloca nel piano coordinato Oxy della terna $Oxyz$, per cui la matrice d'inerzia assume la forma generale

$$[L_O] = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & 0 \\ L_{xy} & L_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx} + L_{yy} \end{pmatrix}$$

nella quale devono essere determinati i momenti d'inerzia L_{xx} , L_{yy} e il prodotto d'inerzia L_{xy} . Per il momento d'inerzia relativo all'asse Ox si ha

$$\begin{aligned} L_{xx} &= \int_0^{3L/4} dx \int_0^L dy y^2 \sigma + \int_{3L/4}^L dx \int_0^{3L/4} dy y^2 \sigma = \sigma \int_0^{3L/4} dx \frac{L^3}{3} + \sigma \int_{3L/4}^L dx \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4}L\right)^3 = \\ &= \frac{\sigma L^3}{3} \frac{3}{4}L + \frac{\sigma}{3} \frac{27}{64} L^3 \frac{L}{4} = \frac{\sigma L^4}{4} + \frac{9}{256} \sigma L^4 = \frac{73}{256} \sigma L^4 = \frac{73}{256} \frac{16}{15} \frac{m}{L^2} L^4 = \frac{73}{240} mL^2 \end{aligned}$$

lo stesso valore di quello relativo all'asse coordinato Oy

$$\begin{aligned} L_{yy} &= \int_0^{3L/4} dx \int_0^L dy x^2 \sigma + \int_{3L/4}^L dx \int_0^{3L/4} dy x^2 \sigma = \sigma \int_0^{3L/4} x^2 dx L + \sigma \int_{3L/4}^L x^2 dx \frac{3}{4}L = \\ &= \frac{\sigma L}{3} \left(\frac{3L}{4}\right)^3 + \frac{3}{4} \sigma L \frac{1}{3} \left(L^3 - \frac{27}{64}L^3\right) = \sigma L^4 \left(\frac{9}{64} + \frac{1}{4} - \frac{27}{256}\right) = \frac{73}{256} \sigma L^4 = \frac{73}{240} mL^2 \end{aligned}$$

come si poteva peraltro concludere direttamente dalla presenza dell'asse di simmetria $y = x$. Il prodotto d'inerzia L_{xy} è infine dato dall'integrale doppio

$$- \int_0^{3L/4} dx \int_0^L dy xy \sigma - \int_{3L/4}^L dx \int_0^{3L/4} dy xy \sigma = -\sigma \int_0^{3L/4} x dx \int_0^L y dy - \sigma \int_{3L/4}^L x dx \int_0^{3L/4} y dy$$

che porge l'espressione

$$\begin{aligned} L_{xy} &= -\sigma \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}L\right)^2 \frac{L^2}{2} - \sigma \left[\frac{x^2}{2}\right]_{3L/4}^L \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{3L/4} = -\sigma L^4 \frac{1}{2} \frac{9}{16} \frac{1}{2} - \frac{\sigma L^4}{4} \left(1 - \frac{9}{16}\right) \frac{9}{16} = \\ &= -\frac{207}{1024} \sigma L^4 = -\frac{207}{1024} \frac{16}{15} \frac{m}{L^2} L^4 = -\frac{69}{320} mL^2 \end{aligned}$$

dalla quale si deduce che $Oxyz$ non costituisce una terna principale d'inerzia in O . La matrice d'inerzia relativa a $Oxyz$ risulta pertanto

$$[L_O] = mL^2 \begin{pmatrix} \frac{73}{240} & -\frac{69}{320} & 0 \\ -\frac{69}{320} & \frac{73}{240} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{73}{120} \end{pmatrix}.$$

(c) Momento d'inerzia rispetto alla retta OA

La retta OA passa per l'origine del sistema di riferimento ed è individuata dal versore

$$\hat{n} = \frac{A - O}{|A - O|} = \frac{\frac{3}{4}L\hat{e}_1 + \frac{3}{4}L\hat{e}_2}{\left| \frac{3}{4}L\hat{e}_1 + \frac{3}{4}L\hat{e}_2 \right|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{e}_2.$$

Il corrispondente momento d'inerzia del sistema si ricava allora applicando la formula generale $I_{O\hat{n}} = \hat{n} \cdot L_O(\hat{n})$, che nella fattispecie diventa

$$\begin{aligned} I_{O\hat{n}} &= \frac{1}{2}(1 \ 1 \ 0)mL^2 \begin{pmatrix} \frac{73}{240} & -\frac{69}{320} & 0 \\ -\frac{69}{320} & \frac{73}{240} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{73}{120} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}mL^2 \left(\frac{73}{240} - \frac{69}{320} \quad -\frac{69}{320} + \frac{73}{240} \quad 0 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= mL^2 \left(\frac{73}{240} - \frac{69}{320} \right) = \frac{17}{192}mL^2. \end{aligned}$$

(d) Momento angolare in O ed energia cinetica

La lamina rigida si assume avere punto fisso nel vertice O e velocità angolare istantanea

$$\bar{\omega} = \omega(\hat{e}_1 - \hat{e}_2).$$

Il momento angolare in O è quindi ottenuto applicando l'operatore d'inerzia in O al vettore velocità angolare istantanea. Le componenti di \bar{K}_O rispetto alla base $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ sono date

dalla relazione matriciale

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} &= mL^2 \begin{pmatrix} \frac{73}{240} & -\frac{69}{320} & 0 \\ -\frac{69}{320} & \frac{73}{240} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{73}{120} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \omega = \\ &= mL^2 \omega \begin{pmatrix} \frac{73}{240} + \frac{69}{320} \\ -\frac{69}{320} - \frac{73}{240} \\ 0 \end{pmatrix} = mL^2 \omega \begin{pmatrix} \frac{499}{960} \\ -\frac{499}{960} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

che implicano perciò

$$\bar{K}_O = \frac{499}{960} mL^2 \omega (\hat{e}_1 - \hat{e}_2).$$

Per l'energia cinetica $T = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{K}_O$ si ha infine

$$T = \frac{1}{2} \omega (1 \quad -1 \quad 0) \frac{499}{960} mL^2 \omega \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{499}{960} mL^2 \omega^2.$$

(e) Velocità del punto A

Poiché il punto O della lamina deve riguardarsi come fisso, la velocità assoluta del punto A è determinata dalla formula generale dell'atto di moto rotatorio

$$\dot{A} = \bar{\omega} \wedge (A - O) = \omega (\hat{e}_1 - \hat{e}_2) \wedge \frac{3}{4} L (\hat{e}_1 + \hat{e}_2) = \frac{3}{4} L \omega \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} L \omega \hat{e}_3.$$

Soluzione dell'esercizio 2

(a) Equilibri ordinari

Le sollecitazioni attive agenti sul sistema sono le forze peso e l'interazione elastica fra i punti P ed M , entrambe posizionali conservative. Osservato che

$$P - O = L \sin \theta \hat{e}_1 - L \cos \theta \hat{e}_2,$$

il potenziale gravitazionale dell'asta è dato dalla relazione

$$U_g^{OP} = -mg \hat{e}_2 \cdot \frac{P - O}{2} = -mg \hat{e}_2 \cdot \left(\frac{L}{2} \sin \theta \hat{e}_1 - \frac{L}{2} \cos \theta \hat{e}_2 \right) = \frac{1}{2} mgL \cos \theta$$

mentre costante risulta il potenziale gravitazionale dell'asta AB :

$$U_g^{AB} = 0.$$

Per calcolare il potenziale elastico occorre osservare preliminarmente che

$$M - O = Ls \hat{e}_1$$

e ricavare il vettore posizione di P rispetto ad M

$$P - M = L(\sin \theta - s) \hat{e}_1 - L \cos \theta \hat{e}_2$$

applicando poi la formula generale

$$\begin{aligned} U_{el} &= -\frac{k}{2}|P - M|^2 = -\frac{kL^2}{2}[(\sin \theta - s)^2 + \cos^2 \theta] = \\ &= -\frac{kL^2}{2}(\sin^2 \theta - 2s \sin \theta + s^2 + \cos^2 \theta) = -\frac{kL^2}{2}(s^2 - 2s \sin \theta + 1). \end{aligned}$$

Ignorando le costanti additive inessenziali, il potenziale del sistema si scrive

$$U(\theta, s) = \frac{1}{2}mgL \cos \theta + \frac{kL^2}{2}(-s^2 + 2s \sin \theta) \quad \forall (\theta, s) \in \mathbb{R}^2$$

ed ammette le derivate parziali prime

$$U_\theta = -\frac{1}{2}mgL \sin \theta + kL^2 s \cos \theta \quad \text{e} \quad U_s = kL^2(-s + \sin \theta).$$

Le configurazioni di equilibrio si identificano con i punti stazionari del potenziale e si hanno dunque per $U_\theta = 0$, $U_s = 0$, ossia

$$\begin{cases} -s + \sin \theta = 0 \\ -\frac{mg}{2kL} \sin \theta + s \cos \theta = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si deduce la relazione $s = \sin \theta$, che sostituita nella seconda porge

$$-\frac{mg}{2kL} \sin \theta + \sin \theta \cos \theta = 0$$

e quindi

$$\sin \theta \left(\cos \theta - \frac{mg}{2kL} \right) = 0.$$

Le radici di questa equazione trigonometrica si ricavano ponendo uguale a zero l'uno o l'altro dei due fattori a primo membro

$$\sin \theta \quad \text{e} \quad \cos \theta - \frac{mg}{2kL}.$$

Nel primo caso si perviene alle soluzioni, sempre definite,

$$\theta = 0 \quad \theta = \pi,$$

mentre nel secondo caso, posto

$$\theta^* := \arccos\left(\frac{mg}{2kL}\right) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

si deducono le ulteriori soluzioni

$$\theta = \theta^* \quad \text{e} \quad \theta = -\theta^*,$$

definite e distinte dalle precedenti a condizione che si abbia

$$\frac{mg}{2kL} < 1$$

— il parametro adimensionale $mg/2kL$ risulta ovviamente sempre positivo, poiché tali sono i parametri caratteristici m , g , k ed L del sistema. Le configurazioni di equilibrio del sistema risultano pertanto:

- $(\theta, s) = (0, 0)$, $(\theta, s) = (\pi, 0)$, che sono definite in ogni caso, e
- $(\theta, s) = (\theta^*, \sin \theta^*)$, $(\theta, s) = (-\theta^*, -\sin \theta^*)$, che esistono distinte dalle precedenti a condizione che sia $mg/2kL < 1$.

(b) Stabilità degli equilibri

Trattandosi di sistema scleronomo posizionale e conservativo, l'analisi di stabilità degli equilibri può essere condotta facendo riferimento ai teoremi classici di Lagrange-Dirichlet e di inversione parziale. A questo scopo occorre calcolare preliminarmente le derivate parziali seconde di U

$$U_{\theta\theta}(\theta, s) = -\frac{1}{2}mgL \cos \theta - kL^2 s \sin \theta$$

$$U_{\theta s}(\theta, s) = U_{s\theta}(\theta, s) = kL^2 \cos \theta$$

$$U_{ss} = -kL^2$$

dalle quali si deduce la forma generale della matrice hessiana del potenziale in un generico punto $(\theta, s) \in \mathbb{R}^2$

$$H_U(\theta, s) = kL^2 \begin{pmatrix} -\frac{mg}{2kL} \cos \theta - s \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & -1 \end{pmatrix}$$

che consente di discutere le proprietà di stabilità dei singoli equilibri.

Configurazione $(\theta, s) = (0, 0)$

In questa configurazione la matrice hessiana del potenziale si riduce a

$$H_U(0, 0) = kL^2 \begin{pmatrix} -\frac{mg}{2kL} & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e ha traccia sempre negativa

$$\text{tr}H_U(0, 0) = -kL^2 \left(1 + \frac{mg}{2kL} \right) < 0$$

mentre il determinante non si presenta di segno definito

$$\det H_U(0, 0) = (kL^2)^2 \left(\frac{mg}{2kL} - 1 \right)$$

per cui è necessario distinguere vari casi:

- se $mg/2kL > 1$, allora $\det H_U(0, 0) > 0$ e gli autovalori dell'hessiana hanno lo stesso segno, che deve risultare negativo per via del segno della traccia. La configurazione viene quindi riconosciuta come massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità è assicurata dal teorema di Lagrange-Dirichlet;
- se viceversa $mg/2kL < 1$, vale $\det H_U(0, 0) < 0$ e gli autovalori dell'hessiana sono di segno opposto. Il ricorrere di un (unico) autovalore positivo autorizza a concludere, per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet, che la configurazione di equilibrio è instabile secondo Liapunov;
- qualora infine si abbia $mg/2kL = 1$, il determinante di $H_U(0, 0)$ si annulla e gli autovalori relativi devono essere uno nullo ed un negativo, sempre a causa della traccia negativa. In queste condizioni è certamente preclusa la possibilità di fare uso del teorema di inversione parziale, in quanto nessuno degli autovalori di $H_U(0, 0)$ ha segno positivo. D'altra parte, dall'esame dell'hessiana non è possibile stabilire se la configurazione sia un massimo relativo proprio del potenziale, per cui non appare evidente l'applicabilità del teorema di Lagrange-Dirichlet e quello esaminato deve indicarsi come un caso critico di stabilità.

In effetti, si può accertare la presenza in $(\theta, s) = (0, 0)$ di un massimo relativo proprio riscrivendo la funzione potenziale in modo opportuno. Per $mg/2kL = 1$ il potenziale del sistema assume infatti la forma particolare

$$U(\theta, s) = -\frac{kL^2}{2} \left(-2 \cos \theta + s^2 - 2s \sin \theta \right) \quad \forall (\theta, s) \in \mathbb{R}^2$$

che in virtù dell'identità trigonometrica $\cos \theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$ equivale a

$$U(\theta, s) = -\frac{kL^2}{2} \left[-2 + 4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + s^2 - 2s \sin \theta \right]$$

e riscrivendo gli ultimi due termini come differenza di due quadrati diventa

$$U(\theta, s) = -\frac{kL^2}{2} \left[-2 + 4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + (s - \sin\theta)^2 - \sin^2\theta \right].$$

La sostituzione $\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$ nell'ultimo termine conduce infine, dopo una semplice manipolazione algebrica, all'espressione finale

$$\begin{aligned} U(\theta, s) &= -\frac{kL^2}{2} \left[-2 + 4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + (s - \sin\theta)^2 - 4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] = \\ &= -\frac{kL^2}{2} \left[-2 + 4\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) + (s - \sin\theta)^2 \right] \\ &= U(0, 0) - \frac{kL^2}{2} \left[4\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) + (s - \sin\theta)^2 \right] \quad \forall (\theta, s) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

È dunque sufficiente considerarne la restrizione alla striscia aperta

$$\Sigma = \{(\theta, s) \in (-2\pi, 2\pi) \times \mathbb{R}\}$$

per concludere che l'equazione $U(\theta, s) = U(0, 0)$ è soddisfatta se e soltanto se

$$4\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) + (s - \sin\theta)^2 = 0$$

ovvero sono simultaneamente soddisfatte le equazioni

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0 \quad \text{e} \quad s - \sin\theta = 0$$

che in Σ ammettono la sola soluzione $(\theta, s) = (0, 0)$. In ogni altro punto di Σ vale invece

$$4\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) + (s - \sin\theta)^2 > 0$$

per cui

$$U(\theta, s) < U(0, 0) \quad \forall (\theta, s) \in \Sigma \setminus \{(0, 0)\}$$

e la presenza del massimo relativo proprio in $(\theta, s) = (0, 0)$ è così provata.

Configurazione $(\theta, s) = (\pi, 0)$

Nella fattispecie la matrice hessiana del potenziale assume la forma

$$H_U(\pi, 0) = kL^2 \begin{pmatrix} \frac{mg}{2kL} & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

con determinante sempre negativo

$$\det H_U(\pi, 0) = -(kL^2)^2 \left(\frac{mg}{2kL} + 1 \right) < 0$$

e quindi autovalori di segno opposto. Grazie all'unico autovalore di segno positivo la configurazione è sempre instabile per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

Configurazione $(\theta, s) = (\theta^*, \sin \theta^*)$

Ricordando che $\cos \theta^* = mg/2kL < 1$, la matrice hessiana del potenziale vale in questo caso,

$$H_U(\theta^*, \sin \theta^*) = kL^2 \begin{pmatrix} -\frac{mg}{2kL} \cos \theta^* - \sin^2 \theta^* & \cos \theta^* \\ \cos \theta^* & -1 \end{pmatrix} = kL^2 \begin{pmatrix} -1 & \cos \theta^* \\ \cos \theta^* & -1 \end{pmatrix}$$

con determinante sempre positivo

$$\det H_U(\theta^*, \sin \theta^*) = (kL^2)^2 (1 - \cos^2 \theta^*) = (kL^2)^2 \sin^2 \theta^* > 0$$

e traccia comunque di segno negativo

$$\text{tr} H_U(\theta^*, \sin \theta^*) = kL^2 (-1 - 1) = -2kL^2 < 0.$$

Se ne deduce che gli autovalori sono entrambi di segno negativo, qualificando così la configurazione come un massimo relativo proprio del potenziale, stabile per Lagrange-Dirichlet. *Quando definito, l'equilibrio è stabile.*

Configurazione $(\theta, s) = (-\theta^*, -\sin \theta^*)$

Per questa configurazione valgono le stesse conclusioni stabilite nel caso precedente, in quanto il potenziale è una funzione pari

$$U(\theta, s) = U(-\theta, -s) \quad \forall (\theta, s) \in \mathbb{R}^2$$

e di conseguenza le matrici hessiane sono identiche nelle configurazioni simmetriche

$$H_U(\theta^*, \sin \theta^*) = H_U(-\theta^*, -\sin \theta^*).$$

La configurazione di equilibrio è quindi stabile, quando definita.

(c) **Energia cinetica**

Il moto dell'asta AB è puramente traslatorio; ad ogni istante tutti i suoi punti sono caratterizzati dalla stessa velocità istantanea, che può identificarsi, ad esempio, con quella del punto medio M . Poiché $M - O = Ls \hat{e}_1$, si avrà perciò

$$T_{AB} = \frac{1}{2} m \dot{M}^2 = \frac{1}{2} m |L \dot{s} \hat{e}_1|^2 = \frac{1}{2} m L^2 \dot{s}^2.$$

L'energia cinetica dell'asta OP , che ruota attorno all'asse fisso Oz con velocità angolare $\overline{\omega}_{OP} = \dot{\theta} \hat{e}_3$, si calcola invece applicando la formula generale per l'energia cinetica di un sistema rigido con asse fisso

$$T_{OP} = \frac{1}{2} I_{Oz}^{OP} |\overline{\omega}_{OP}|^2 = \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} |\dot{\theta} \hat{e}_3|^2 = \frac{mL^2}{6} \dot{\theta}^2.$$

Non rimane che applicare la proprietà di additività per concludere che l'energia cinetica totale del sistema è data dalla somma delle energie cinetiche parziali delle singole parti rigide AB ed OP :

$$T = T_{AB} + T_{OP} = \frac{1}{2} mL^2 \dot{s}^2 + \frac{mL^2}{6} \dot{\theta}^2.$$

(d) Equazioni di Lagrange

Le equazioni pure del moto del sistema sono date dalle due equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = 0$$

con lagrangiana

$$\mathcal{L}(\theta, s, \dot{\theta}, \dot{s}) = T + U = \frac{1}{2} mL^2 \left(\dot{s}^2 + \frac{1}{3} \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2} mgL \cos \theta + \frac{kL^2}{2} (-s^2 + 2s \sin \theta).$$

È immediato verificare le identità seguenti

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{1}{3} mL^2 \ddot{\theta} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= -\frac{1}{2} mgL \sin \theta + kL^2 s \cos \theta \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \right) &= mL^2 \ddot{s} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} &= kL^2 (-s + \sin \theta) \end{aligned}$$

in modo che le equazioni lagrangiane si riducono a

$$\begin{cases} \frac{1}{3} mL^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{2} mgL \sin \theta - kL^2 s \cos \theta = 0 \\ mL^2 \ddot{s} + kL^2 (s - \sin \theta) = 0. \end{cases}$$

(e) Impulso dell'asta per un atto di moto assegnato

La quantità di moto dell'asta si può calcolare come prodotto della massa del sistema per la velocità istantanea del relativo baricentro G , corrispondente al punto medio del segmento $P - O$. Per un atto di moto generico, individuato da una qualsiasi coppia $(\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^2$, si ha dunque

$$\begin{aligned} \overline{Q} &= m\dot{G} = m\dot{\theta} \hat{e}_3 \wedge \frac{P-O}{2} = m\dot{\theta} \hat{e}_3 \wedge \left(\frac{L}{2} \sin \theta \hat{e}_1 - \frac{L}{2} \cos \theta \hat{e}_2 \right) = \\ &= \frac{mL}{2} \dot{\theta} \hat{e}_3 \wedge (\sin \theta \hat{e}_1 - \cos \theta \hat{e}_2) = \frac{mL}{2} \dot{\theta} (\cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2) \end{aligned}$$

e nella fattispecie, per $(\theta, \dot{\theta}) = (\pi/4, 2\sqrt{k/m})$,

$$\overline{Q} = \frac{mL}{2} 2\sqrt{\frac{k}{m}} \left(\cos \frac{\pi}{4} \hat{e}_1 + \cos \frac{\pi}{4} \hat{e}_2 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{mk} L (\hat{e}_1 + \hat{e}_2).$$