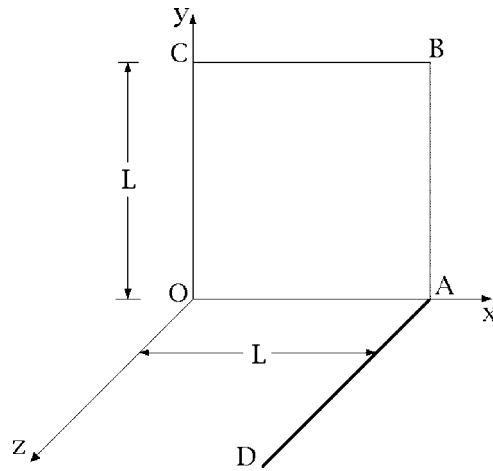


**Esercizio 1**

In una terna di riferimento cartesiana ortogonale  $Oxyz$  una lamina quadrata  $OABC$ , di lato  $L$ , ha i lati  $OA$  e  $OC$  collocati rispettivamente sugli assi  $Ox$  e  $Oy$ . Indicata con  $m$  una costante positiva con le dimensioni di una massa, la densità areale della lamina si scrive

$$\sigma(x, y) = \frac{m}{L^5} x^2 y \quad 0 \leq x, y \leq L.$$

Alla lamina è fissata rigidamente un'asta rettilinea omogenea di massa  $m/3$  ed estremi  $A(L, 0, 0)$ ,  $D(L, 0, L)$ , come illustrato in figura.

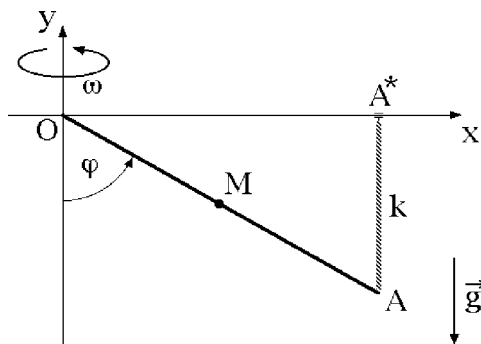


Si vogliono determinare del sistema:

- la posizione del baricentro rispetto ad  $Oxyz$ ;
- la matrice d'inerzia nella terna  $Oxyz$ ;
- momento angolare in  $O$  ed energia cinetica nell'ipotesi che  $O$  sia un punto fisso e che la velocità angolare risulti  $\vec{\omega} = -\omega \hat{e}_1 + 2\omega \hat{e}_3$ , con  $\omega \neq 0$ ;
- il momento d'inerzia rispetto all'asse  $z = -y, x = 0$ ;
- il momento d'inerzia rispetto alla retta  $AB$ .

## Esercizio 2

Una terna cartesiana ortogonale  $Oxyz$  ruota uniformemente con velocità angolare  $\omega$  attorno all'asse verticale  $Oy$  rispetto ad un riferimento inerziale. Un'asta rettilinea omogenea  $OA$ , di massa  $m$  e lunghezza  $L$ , ruota nel piano  $Oxy$  attorno all'estremo fisso  $O$ . Un punto materiale  $M$  di massa  $m$  è fissato rigidamente all'asta nel punto medio di questa. Il sistema è pesante e una molla ideale di costante elastica  $k$  congiunge l'estremo  $A$  con la sua proiezione ortogonale  $A^*$  su  $Ox$ .



Assunti i vincoli ideali e l'angolo  $\varphi$  in figura come coordinata generalizzata, determinare del sistema:

- gli equilibri relativi alla terna  $Oxyz$ ;
- la stabilità degli equilibri;
- le equazioni di Lagrange del moto;
- la quantità di moto per  $\varphi = \pi/6$  e  $\dot{\varphi} = -\omega$  rispetto alla terna  $Oxyz$ ;
- l'energia meccanica, verificando che si tratta di un integrale primo per le equazioni del moto.

## Soluzione dell'esercizio 1

### (a) Baricentro del sistema

Il sistema è costituito dalla lamina quadrata  $OABC$  e dall'asta rettilinea omogenea  $AD$ , per cui risulta conveniente procedere alla individuazione del baricentro mediante il teorema distributivo.

*Massa e baricentro della lamina quadrata*

La massa della lamina deve essere calcolata integrando sul quadrato  $(x, y) \in [0, L]^2$  la densità areale  $\sigma(x, y) = mx^2y/L^5$ :

$$m_\ell = \int_0^L dx \int_0^L dy \frac{m}{L^5} x^2 y = \frac{m}{L^5} \int_0^L x^2 dx \int_0^L y dy = \frac{m}{L^5} \frac{L^3}{3} \frac{L^2}{2} = \frac{m}{6}.$$

Il baricentro  $G_\ell$  della lamina va cercato nel piano di giacitura  $Oxy$  della stessa, in modo che il relativo vettore posizione assume la forma

$$G_\ell - O = x_G^\ell \hat{e}_1 + y_G^\ell \hat{e}_2.$$

L'ascissa  $x_G^\ell$  e l'ordinata  $y_G^\ell$  vengono calcolate secondo la definizione e risultano

$$x_G^\ell = \frac{1}{m_\ell} \int_0^L dx \int_0^L dy x \frac{m}{L^5} x^2 y = \frac{6}{m} \frac{m}{L^5} \int_0^L x^3 dx \int_0^L y dy = \frac{6}{L^5} \frac{L^4}{4} \frac{L^2}{2} = \frac{3}{4} L$$

$$y_G^\ell = \frac{1}{m_\ell} \int_0^L dx \int_0^L dy y \frac{m}{L^5} x^2 y = \frac{6}{m} \frac{m}{L^5} \int_0^L x^2 dx \int_0^L y^2 dy = \frac{6}{L^5} \frac{L^3}{3} \frac{L^3}{3} = \frac{2}{3} L$$

cosicché

$$G_\ell - O = \frac{3}{4} L \hat{e}_1 + \frac{2}{3} L \hat{e}_2.$$

*Massa e baricentro dell'asta rettilinea*

L'asta omogenea  $AD$  ha massa  $m/3$  e baricentro  $G_a$  identificabile con il punto medio del segmento  $AD$

$$G_a - O = \frac{A - O + D - O}{2} = \frac{L \hat{e}_1 + L \hat{e}_1 + L \hat{e}_3}{2} = L \hat{e}_1 + \frac{L}{2} \hat{e}_3.$$

*Baricentro del sistema*

Il baricentro  $G$  del sistema si ricava per mezzo della proprietà distributiva

$$\begin{aligned} G - O &= \frac{m_\ell(G_\ell - O) + (m/3)(G_a - O)}{m_\ell + (m/3)} = \frac{2}{m} \left[ \frac{m}{6} \left( \frac{3}{4} L \hat{e}_1 + \frac{2}{3} L \hat{e}_2 \right) + \frac{m}{3} \left( L \hat{e}_1 + \frac{L}{2} \hat{e}_3 \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} L \hat{e}_1 + \frac{2}{9} L \hat{e}_2 + \frac{2}{3} L \hat{e}_1 + \frac{1}{3} L \hat{e}_3 = \frac{11}{12} L \hat{e}_1 + \frac{2}{9} L \hat{e}_2 + \frac{1}{3} L \hat{e}_3. \end{aligned} \quad (0.1)$$

(b) **Matrice d'inerzia rispetto alla terna  $Oxyz$**

La matrice d'inerzia del sistema rispetto alla terna  $Oxyz$  può calcolarsi ricorrendo alla proprietà di additività, sommando le matrici d'inerzia relative alla stessa terna di lamina quadrata e asta.

*Matrice d'inerzia della lamina quadrata*

Poiché la lamina  $OABC$  giace nel piano coordinato  $Oxy$ , la corrispondente matrice d'inerzia relativa alla terna  $Oxyz$  assume la forma generale

$$[L_O^\ell] = \begin{pmatrix} L_{xx}^\ell & L_{xy}^\ell & 0 \\ L_{xy}^\ell & L_{yy}^\ell & 0 \\ 0 & 0 & L_{xx}^\ell + L_{yy}^\ell \end{pmatrix}$$

dove il momento d'inerzia relativo all'asse  $Ox$  è dato da

$$L_{xx}^\ell = \int_0^L dx \int_0^L dy \frac{m}{L^5} x^2 y y^2 = \frac{m}{L^5} \int_0^L x^2 dx \int_0^L y^3 dy = \frac{m}{L^5} \frac{L^3}{3} \frac{L^4}{4} = \frac{mL^2}{12}$$

mentre quello rispetto all'asse  $Oy$  vale

$$L_{yy}^\ell = \int_0^L dx \int_0^L dy \frac{m}{L^5} x^2 y x^2 = \frac{m}{L^5} \int_0^L x^4 dx \int_0^L y dy = \frac{m}{L^5} \frac{L^5}{5} \frac{L^2}{2} = \frac{mL^2}{10}$$

e l'unico prodotto d'inerzia non banale risulta

$$L_{xy}^\ell = - \int_0^L dx \int_0^L dy \frac{m}{L^5} x^2 y xy = - \frac{m}{L^5} \int_0^L x^3 dx \int_0^L y^2 dy = - \frac{m}{L^5} \frac{L^4}{4} \frac{L^3}{3} = - \frac{mL^2}{12}.$$

Pertanto

$$[L_O^\ell] = mL^2 \begin{pmatrix} 1/12 & -1/12 & 0 \\ -1/12 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 11/60 \end{pmatrix}.$$

*Matrice d'inerzia dell'asta*

L'asta  $AD$  si colloca nel piano coordinato  $Oxz$  e la sua matrice d'inerzia in  $Oxyz$  presenta dunque l'aspetto seguente

$$[L_O^a] = \begin{pmatrix} L_{xx}^a & 0 & L_{xz}^a \\ 0 & L_{xx}^a + L_{zz}^a & 0 \\ L_{xz}^a & 0 & L_{zz}^a \end{pmatrix}. \quad (0.2)$$

L'asta può essere descritta da una parametrizzazione del tipo

$$(x, y, z) = (L, 0, z), \quad z \in [0, L],$$

con densità di lineare  $m/3L$  costante. Si hanno così i momenti d'inerzia:

$$L_{xx}^a = \int_0^L dz \frac{m}{3L} z^2 = \frac{m}{3L} \frac{L^3}{3} = \frac{mL^2}{9} \quad L_{zz}^a = \int_0^L dz \frac{m}{3L} L^2 = \frac{mL^2}{3}$$

unitamente al prodotto d'inerzia

$$L_{xz}^a = - \int_0^L dz \frac{m}{3L} Lz = - \frac{m}{3} \int_0^L z dz = - \frac{m}{3} \frac{L^2}{2} = - \frac{mL^2}{6}$$

così che la (0.2) prende la forma esplicita:

$$[L_O^a] = mL^2 \begin{pmatrix} 1/9 & 0 & -1/6 \\ 0 & 4/9 & 0 \\ -1/6 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

*Matrice d'inerzia del sistema*

Per ottenere la matrice d'inerzia del sistema non rimane che sommare i contributi di lamina e asta:

$$[L_O] = [L_O^\ell] + [L_O^a] = mL^2 \begin{pmatrix} 7/36 & -1/12 & -1/6 \\ -1/12 & 49/90 & 0 \\ -1/6 & 0 & 31/60 \end{pmatrix}. \quad (0.3)$$

**(c) Momento angolare ed energia cinetica del sistema**

Nell'ipotesi che l'origine  $O$  costituisca un punto fisso per il sistema rigido il momento angolare in  $O$  dello stesso sistema è il vettore

$$\vec{K}_O = K_1 \hat{e}_1 + K_2 \hat{e}_2 + K_3 \hat{e}_3$$

le cui componenti rispetto alla base associata  $\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$  si ricavano moltiplicando il vettore colonna delle componenti di  $\vec{\omega} = -\omega \hat{e}_1 + 2\omega \hat{e}_3$  rispetto alla stessa base per la matrice d'inerzia in  $Oxyz$  del sistema:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} &= mL^2 \begin{pmatrix} 7/36 & -1/12 & -1/6 \\ -1/12 & 49/90 & 0 \\ -1/6 & 0 & 31/60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega \\ 0 \\ 2\omega \end{pmatrix} = \\ &= mL^2 \omega \begin{pmatrix} -\frac{7}{36} - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} + \frac{31}{60} \end{pmatrix} = mL^2 \omega \begin{pmatrix} -19/36 \\ 1/12 \\ 6/5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si ha pertanto:

$$\vec{K}_O = mL^2 \omega \left( -\frac{19}{36} \hat{e}_1 + \frac{1}{12} \hat{e}_2 + \frac{6}{5} \hat{e}_3 \right),$$

mentre l'energia cinetica, nelle stesse condizioni, si scrive

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{K}_O = \frac{1}{2} (-\omega \ 0 \ 2\omega) mL^2 \omega \begin{pmatrix} -19/36 \\ 1/12 \\ 6/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} mL^2 \omega^2 \left( \frac{19}{36} + \frac{12}{5} \right) = \frac{527}{360} mL^2 \omega^2.$$

(d) **Momento d'inerzia rispetto all'asse  $y = x, z = 0$**

La retta in esame passa per l'origine ed è rappresentabile per mezzo dell'equazione parametrica

$$P(y) - O = y \hat{e}_2 - y \hat{e}_3, \quad y \in \mathbb{R}$$

cui corrisponde il versore tangente

$$\hat{n} = \frac{P'(y)}{|P'(y)|} = \frac{\hat{e}_2 - \hat{e}_3}{|\hat{e}_2 - \hat{e}_3|} = \frac{\hat{e}_2 - \hat{e}_3}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_3$$

di componenti

$$(n_1 \ n_2 \ n_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} (0 \ 1 \ -1).$$

Il momento d'inerzia rispetto alla retta  $O\hat{n}$  si può quindi esprimere in termini della matrice d'inerzia in  $Oxyz$  per mezzo della relazione:

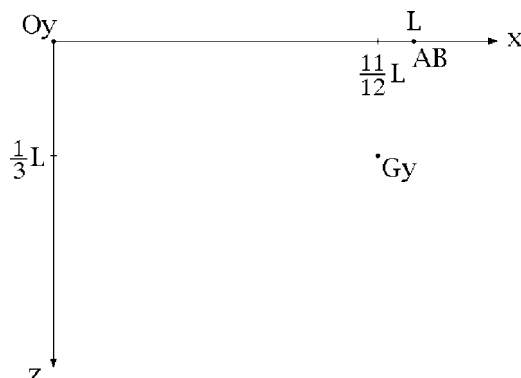
$$\begin{aligned} I_{O\hat{n}} &= \frac{1}{2} (0 \ 1 \ -1) mL^2 \omega \begin{pmatrix} 7/36 & -1/12 & -1/6 \\ -1/12 & 49/90 & 0 \\ -1/6 & 0 & 31/60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} mL^2 (1 \ -1) \begin{pmatrix} 49/90 & 0 \\ 0 & 31/60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} mL^2 \left( \frac{49}{90} + \frac{31}{60} \right) = \frac{191}{360} mL^2. \end{aligned}$$

(e) **Momento d'inerzia rispetto alla retta  $AB$**

La retta  $AB$  ha equazione  $x = L, z = 0$  ed è chiaramente parallela all'asse  $Oy$ . Per contro, tenuto conto della relazione (0.1) l'equazione dell'asse baricentrale parallelo ad  $Oy$  si scrive

$$x = \frac{11}{12}L \quad z = \frac{1}{3}L.$$

La figura seguente mostra i punti di intersezione delle rette  $AB$  e  $Gy$  con il piano coordinato  $Oxz$ :



Ricordando che il sistema ha massa  $m/2$ , il teorema di Huygens-Steiner porge allora le relazioni evidenti

$$I_{AB} = I_{Gy} + \frac{m}{2} \left[ \left( \frac{11}{12}L - L \right)^2 + \left( \frac{L}{3} \right)^2 \right]$$

$$I_{Oy} = I_{Gy} + \frac{m}{2} \left[ \left( \frac{11}{12}L \right)^2 + \left( \frac{L}{3} \right)^2 \right]$$

dalle quali, per differenza, si deduce

$$I_{AB} - I_{Oy} = \frac{m}{2} \left[ \left( \frac{1}{12}L \right)^2 - \left( \frac{11}{12}L \right)^2 \right] = -\frac{5}{12}mL^2$$

ed infine

$$I_{AB} = I_{Oy} - \frac{5}{12}mL^2 = \frac{49}{90}mL^2 - \frac{5}{12}mL^2 = \frac{23}{180}mL^2.$$

## Soluzione dell'esercizio 2

### (a) Equilibri

Si tratta di un sistema scleronomo a vincoli bilaterali ideali, soggetto unicamente a sollecitazioni posizionali conservative: il peso, la forza elastica agente fra i punti  $A$  e  $A^*$ , le forze centrifughe. Si osserva infatti che la forza di Coriolis, pur attiva nella terna di riferimento rotante non inerziale  $Oxyz$ , presenta componente lagrangiana nulla — le forze di Coriolis sono ortogonali al piano  $Oxy$  di giacitura dell'asta, mentre le derivate  $\partial P/\partial \varphi$  degli stessi punti risultano parallele a tale piano. Gli equilibri del sistema — tutti ordinari — si identificano pertanto con tutti e soli i punti critici del potenziale; quest'ultimo risulterà dalla somma di un contributo gravitazionale, uno elastico ed uno centrifugo.

#### *Potenziale gravitazionale*

È evidente che il punto medio dell'asta costituisce un centro di simmetria per il sistema asta +  $M$  e si identifica perciò con il baricentro di questo. Ricordando che le masse di asta

e punto  $M$  sono identiche —  $m$  — si perviene alla seguente espressione per il potenziale gravitazionale del sistema

$$U_g = -2mg \hat{e}_2 \cdot (M - O) = -2mg \left( -\frac{L}{2} \cos \varphi \right) = mgL \cos \varphi.$$

*Potenziale elastico*

All'interazione elastica fra il punto  $A$  e la sua proiezione ortogonale  $A^*$  sull'asse orizzontale  $Ox$  si deve associare il potenziale

$$U_{el} = -\frac{k}{2}(A - A^*)^2 = -\frac{k}{2}(-L \cos \varphi)^2 = -\frac{kL^2}{2} \cos^2 \varphi = \frac{kL^2}{2} \sin^2 \varphi + \text{costante}$$

in cui la costante additiva è ovviamente irrilevante e può essere ignorata nel calcolo del potenziale di sistema.

*Potenziale centrifugo*

Poiché il sistema è costituito da un'asta e da un punto materiale, è opportuno calcolare il potenziale centrifugo applicando la proprietà additiva di questo. Si calcoleranno così un potenziale centrifugo dell'asta  $OA$  e un potenziale centrifugo del punto materiale  $M$ , per poi sommare i due contributi:

$$U_{cf} = U_{cf}^{OA} + U_{cf}^M.$$

È semplice calcolare il potenziale centrifugo dell'asta rettilinea integrando sul segmento  $OA$ , rispetto all'ascissa curvilinea  $\xi \in [0, L]$ :

$$U_{cf}^{OA} = \frac{\omega^2}{2} \int_0^L (\xi \sin \varphi)^2 \frac{m}{L} d\xi = \frac{\omega^2}{2} \frac{m}{L} \sin^2 \varphi \int_0^L \xi^2 d\xi = \frac{1}{6} mL^2 \omega^2 \sin^2 \varphi$$

mentre per il potenziale di  $M$  si può applicare direttamente la formula

$$U_{cf}^M = \frac{\omega^2}{2} m |(M - O) \cdot \hat{e}_1|^2 = \frac{\omega^2}{2} m \left( \frac{L}{2} \sin \varphi \right)^2 = \frac{1}{8} mL^2 \omega^2 \sin^2 \varphi.$$

Ne segue, per il potenziale centrifugo del sistema, l'espressione

$$U_{cf} = U_{cf}^{OA} + U_{cf}^M = \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \right) mL^2 \omega^2 \sin^2 \varphi = \frac{7}{24} mL^2 \omega^2 \sin^2 \varphi.$$

*Potenziale del sistema*

La somma dei potenziali gravitazionale, elastico e centrifugo sopra calcolati definisce il potenziale del sistema, che si riduce pertanto a

$$U(\varphi) = U_g + U_{el} + U_{cf} = mgL \cos \varphi + \left( \frac{k}{2} + \frac{7}{24} m \omega^2 \right) L^2 \sin^2 \varphi + \text{costante}.$$

Nel prosieguo dell'analisi la costante additiva può essere posta uguale a zero.

### Equilibri

La derivata prima del potenziale è data da

$$U'(\varphi) = -mgL \sin \varphi + \left(k + \frac{7}{12}m\omega^2\right)L^2 \sin \varphi \cos \varphi = \left(k + \frac{7}{12}m\omega^2\right)L^2 \sin \varphi (\cos \varphi - \lambda)$$

dove si è introdotto per brevità il parametro adimensionale, sempre positivo,

$$\lambda := \frac{mg}{\left(k + \frac{7}{12}m\omega^2\right)L}.$$

La condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio è dunque l'equazione trigonometrica

$$\left(k + \frac{7}{12}m\omega^2\right)L^2 \sin \varphi (\cos \varphi - \lambda) = 0$$

dalla quale seguono le soluzioni:

- $\varphi = 0$  e  $\varphi = \pi$ , definite per qualsiasi valore positivo di  $\lambda$  in quanto soluzioni dell'equazione  $\sin \varphi = 0$ , e
- $\varphi = +\varphi^*$  e  $\varphi = -\varphi^*$ , con  $\varphi^* = \arccos \lambda$ , soluzioni dell'equazione

$$\cos \varphi = \lambda$$

e definite come configurazioni distinte dalle precedenti a condizione che si abbia  $\lambda < 1$ .

Le prime due configurazioni di equilibrio, oltre ad essere definite incondizionatamente, sono caratterizzate da una disposizione dell'asta che risulta simmetrica rispetto all'asse di rotazione  $Oy$ . Le configurazioni  $\varphi = \varphi^*$  e  $\varphi = -\varphi^*$  si presentano invece con una collocazione dell'asta "asimmetrica" relativamente al medesimo asse.

### (b) Stabilità degli equilibri

Per valutare la stabilità o instabilità degli equilibri si deve procedere al calcolo della derivata seconda

$$\begin{aligned} U''(\varphi) &= -mgL \cos \varphi + \left(k + \frac{7}{12}m\omega^2\right)L^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = \\ &= \left(k + \frac{7}{12}m\omega^2\right)L^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi - \lambda \cos \varphi) \end{aligned}$$

che va valutata in ciascuna configurazione di equilibrio.

#### Configurazione $\varphi = 0$

In questa configurazione la derivata seconda del potenziale non ha segno definito

$$U''(0) = \left(k + \frac{7}{12}m\omega^2\right)L^2 (1 - \lambda),$$

circostanza che obbliga a distinguere tre diverse possibilità:

- (i) per  $\lambda > 1$  si ottiene  $U''(0) < 0$  e la configurazione  $\varphi = 0$  risulta perciò un massimo relativo proprio del potenziale, stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet;
- (ii) se all'opposto  $\lambda < 1$ , allora la derivata seconda assume segno positivo ed implica l'instabilità dell'equilibrio in virtù del teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet;
- (iii) se infine  $\lambda = 1$ , risulta  $U''(0) = 0$  e lo studio della stabilità richiede un'analisi più accurata. Si possono calcolare le derivate terza e quarta

$$U^{(3)}(\varphi) = \left(k + \frac{7}{12}m\omega^2\right)L^2(-4\sin\varphi\cos\varphi + \lambda\sin\varphi)$$

$$U^{(4)}(\varphi) = \left(k + \frac{7}{12}m\omega^2\right)L^2(-4\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi + \lambda\cos\varphi)$$

che per  $\lambda = 1$  nel punto  $\varphi = 0$  diventano

$$U^{(3)}(0) = 0 \quad U^{(4)}(0) = -3\left(k + \frac{7}{12}m\omega^2\right)L^2 < 0$$

e per il teorema di Taylor permettono di riconoscere nella configurazione un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità segue al solito da Lagrange-Dirichlet.

*Configurazione  $\varphi = \pi$*

In questa configurazione la derivata seconda del potenziale assume sempre segno positivo

$$U''(\pi) = \left(k + \frac{7}{12}m\omega^2\right)L^2(1 + \lambda) > 0$$

ed implica perciò l'instabilità dell'equilibrio.

*Configurazioni  $\varphi = \varphi^*$  e  $\varphi = -\varphi^*$*

In queste configurazioni, quando definite, la derivata seconda del potenziale assume sempre un comune valore negativo:

$$U''(\pm\varphi) = \left(k + \frac{7}{12}m\omega^2\right)L^2(\cos^2\varphi^* - \sin^2\varphi^* - \lambda\cos\varphi^*) = -\left(k + \frac{7}{12}m\omega^2\right)L^2\sin^2\varphi^* < 0$$

in quanto  $\cos\varphi^* = \lambda < 1$ . Si tratta perciò di massimi relativi propri del potenziale, la cui stabilità è assicurata dal teorema di Lagrange-Dirichlet.

### (c) **Equazioni pure del moto**

L'energia cinetica è quella di un corpo rigido con asse fisso  $Oz$  in moto con velocità angolare istantanea  $\dot{\varphi}\hat{e}_3$  e munito di un momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione dato da

$$I_{Oz} = I_{Oz}^{OA} + I_{Oz}^M = \frac{mL^2}{3} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{7}{12}mL^2,$$

la somma dei corrispondenti momenti d'inerzia rispetto a  $Oz$  dell'asta omogenea  $OA$  e del punto materiale  $M$ , rispettivamente. Si ha pertanto

$$T = \frac{1}{2}I_{Oz}|\dot{\varphi}\hat{e}_3|^2 = \frac{1}{2}\frac{7}{12}mL^2\dot{\varphi}^2 = \frac{7}{24}mL^2\dot{\varphi}^2.$$

Trattandosi di sistema a vincoli ideali posizionale e conservativo, le equazioni pure del moto si riducono all'unica equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \quad (0.4)$$

con lagrangiana

$$\mathcal{L} = T + U = \frac{7}{24} mL^2 \dot{\varphi}^2 + mgL \cos \varphi + \left( \frac{k}{2} + \frac{7}{24} m\omega^2 \right) L^2 \sin^2 \varphi.$$

Ne derivano le espressioni

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= \frac{7}{12} mL^2 \ddot{\varphi} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= -mgL \sin \varphi + \left( k + \frac{7}{12} m\omega^2 \right) L^2 \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned}$$

che sostituite in (0.4) porgono il risultato richiesto:

$$\frac{7}{12} mL^2 \ddot{\varphi} + mgL \sin \varphi - \left( k + \frac{7}{12} m\omega^2 \right) L^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0. \quad (0.5)$$

#### (d) Quantità di moto del sistema

Per definizione, la quantità di moto del sistema si ottiene moltiplicando la massa di questo per la velocità istantanea del baricentro. Si è già riconosciuto che il baricentro del corpo si identifica con il punto medio  $M$  dell'asta, che costituisce un ovvio centro di simmetria per il sistema. Pertanto, ricordando che la massa del sistema è  $2m$ ,

$$\vec{Q} = 2m\dot{M}.$$

D'altra parte, l'ovvia relazione geometrica

$$M - O = \frac{L}{2} (\sin \varphi \hat{e}_1 - \cos \varphi \hat{e}_2)$$

derivata in  $t$  per  $\varphi = \varphi(t)$  porge la velocità istantanea

$$\dot{M} = \frac{L}{2} (\cos \varphi \hat{e}_1 + \sin \varphi \hat{e}_2) \dot{\varphi}$$

in modo che l'espressione della quantità di moto diventa

$$\vec{Q} = mL (\cos \varphi \hat{e}_1 + \sin \varphi \hat{e}_2) \dot{\varphi}.$$

Per  $\varphi = \pi/6$  e  $\dot{\varphi} = -\omega$  si ha allora

$$\vec{Q} = -mL\omega \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{e}_1 + \frac{1}{2} \hat{e}_2 \right).$$

(e) **Energia meccanica**

L'energia meccanica del sistema è data dalla somma dell'energia cinetica  $T$  e dell'energia potenziale  $-U$ :

$$H(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{7}{24}mL^2 \dot{\varphi}^2 - mgL \cos \varphi - \left(\frac{k}{2} + \frac{7}{24}m\omega^2\right)L^2 \sin^2 \varphi.$$

Che si tratti di un integrale primo delle equazioni di Lagrange segue dal teorema di Jacobi, valido per tutti i sistemi scleronomi posizionali conservativi a vincoli ideali, ovvero si può verificare direttamente applicando il teorema di caratterizzazione degli integrali primi in termini della derivata di Lie. Nella fattispecie la derivata di  $H$  lungo le soluzioni delle equazioni di Lagrange vale infatti

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \frac{\partial H}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}} \ddot{\varphi} = \frac{\partial T}{\partial \varphi} \dot{\varphi} - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \ddot{\varphi} - \frac{\partial U}{\partial \dot{\varphi}} \ddot{\varphi} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \ddot{\varphi} = \\ &= mgL \sin \varphi \dot{\varphi} - \left(k + \frac{7}{24}m\omega^2\right)L^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi} + \frac{7}{12}mL^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} \end{aligned}$$

e, tenuto conto dell'equazione del moto (0.5), si annulla identicamente:

$$\dot{H}(\varphi, \dot{\varphi}) = \dot{\varphi} \left[ mgL \sin \varphi - \left(k + \frac{7}{24}m\omega^2\right)L^2 \sin \varphi \cos \varphi + \frac{7}{12}mL^2 \ddot{\varphi} \right] = 0 \quad \forall (\varphi, \dot{\varphi}) \in \mathbb{R}^2.$$